哈佛商学经典译丛·名著系列

期权、期货和衍生证券

OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVE SECURITIES

JOHN C. HULL

约翰·赫尔 著

张陶伟译

华夏出版社

Prentice Hall

435172

期权、期货和衍生证券

[美]约翰·赫尔 著

张陶伟 译

中文藏书

华 夏 出 版 社
1997

图书在版编目(CIP)数据

期权、期货和衍生证券/(美)约翰·赫尔(John C. Hull);张陶伟译.
-北京:华夏出版社,1997.1
(哈佛商学经典译丛)
ISBN 7-5080-1192-9

Ⅰ.期… Ⅱ.①赫… ②张… Ⅲ.金融市场-基本知识
Ⅳ.F830.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 00169 号



华夏出版社出版发行
(北京东直门外香河园北里 4 号　邮编:100028)
新华书店经销
北京房山区先锋印刷厂印刷
850×1168　1/32 开本　17.125 印张　411 千字
1997 年 1 月北京第 1 版　1997 年 6 月北京第 2 次印刷
印数 21001-52000 册
定价:33.00 元
本版图书凡印刷、装订错误,可及时向我社发行部调换

John C. Hull: Options, Futures, and other Derivative Securities

Authorized translation from English language edition publisher, Prentice-Hall, A Division of Simon & Schuster.



THE FREE PRESS
A Division of Simon & Schuster

Copyright © 1993, 1989 by Prentice-Hall, Inc
All rights reserved. For sale in mainland china only

本书中文简体字版由华夏出版社和美国西蒙与舒斯特国际出版公司共同出版，未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

北京市版权局著作权合同登记号：01－97－0213

本书封面贴有 Simon & Schuster 防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，翻印必究

出版说明

美国哈佛大学商学院成立于1908年，以它为代表的以培养工商管理硕士（Master of Business Administration，简称MBA）为目标的一批著名商学院已成为当今世界培养高层次经营管理人才的摇篮。我国的MBA起步较晚（1990年），与国外相比，无论在教学、教材以及研究等方面都有不小的差距。国内一些从事MBA教学的学者在与国外的学术交流中发现，哈佛、斯坦福等著名商学院几十年来已积累了一大批优秀的MBA教材和经营管理方面的名著，它们被世界上几百所商学院选定为教材、补充教材或参考书，如果能从中精选部分并把它们系统地分期分批翻译过来介绍给我国的读者，无疑将对我国MBA教学水平的提高、教材的建设以及我国经营管理领域的研究起到积极的推动作用。为此，华夏出版社联合清华大学经济管理学院、四川联合大学商学院的部分学者、教授，投入大量的精力和财力，通过一年多的努力，终于使这套《哈佛商学经典译丛》与读者见面了。

这套丛书分《哈佛商学经典译丛·名著系列》和《哈佛商学经典译丛·教材系列》两部分。就本丛书所收录的这些书在国外的情况来看，它们不仅畅销于MBA等经营管理专业的学生中间，而且还受到了工商企业中经理人员的亲睐，许多大公司的总裁和高级管理人员对这些书都赞誉备至。我们相信这套丛书无论对我国工商管理专业的广大师生还是对企业中的经营管理人员都将具有极高的参考价值。

前　言

这本书适用于商学和经济学研究生和高年级本科生选修课。对那些想获得如何分析衍生证券实际知识的实际工作者来说，本书也适合。

写作衍生证券书籍的作者必须做出的一个关键性决定是关于数学的运用。如果数学表达过于艰深，对许多学生和实际工作者而言，内容有可能不合适。如果程度太低，某些重要的专题又只能以相当简略的方式处理。在这本书中，我在数学应用方面非常谨慎。非关键性的数学内容或者被去掉了或者包含在每章结束的附录中。对许多读者而言有可能是新的概念，我进行了仔细的解释，并将这些概念包含在许多例子当中。

这本书与本领域其它书的区别和特点是它对所有衍生证券（不仅仅是期货和期权）的定价提供了统一的方法。这本书假设读者已经学过金融、概率和统计方面的基础课程，但不了解期权、期货、互换等。因此，在学习基于本书的课程之前，学生不一定需要选修投资学的课程。

这个版本的变化

这个版本包含许多先前版本没有的内容。即，在先前版本中的内容已经更新了，许多地方的内容也进行了重新组织。主要的变化如下：

1. 有关期货市场及期货对冲的方法（第二、第三和第四章）的

内容更多了。也讨论了久期及基于久期的对冲策略。

2. 有关市场如何运行以及运用交易策略(第二、第四、第六和第八章)的细节材料更丰富了。

3. 完全重新改写了有关利率衍生证券(第十五章)的内容,以反映该领域的最新进展。更全面地讨论了精确满足当前期限结构的无套利机会的模型。

4. 增加了新的一章,都是有关新型(exotic)期权的(第十六章)。

5. 第十八章整章讨论了越来越重要的信用风险问题。

6. 重新组织了有关衍生证券定价的 Cox、Ingersoll 和 Ross 一般定价方法(第十二章)。另外,也讨论了有担保的外汇汇率指数期权。

7. 在各章结尾增加了新的问题和习题。与先前版本一样,比平均水平难度更大的习题加了星号。

致谢

在本书写作过程中,许多人提供了帮助。以下同事提供了很好的有价值的建议:George Athanassakos, Giovanni Barone－Adesi, George Blazenko, Laurence Booth, Phelim Boyle, Peter Carayannopoulos, Peter Carr, Dieter Dorp, Jerome Duncan, Steinar Ekern, David Fowler, Mark Garman, Kevin Hebner, Elizabeth Maynes, Paul Potvin, Gordon Roberts, Chris Robinson, John Rumsey, Klaus Schurger, Piet Sercu, Stuart Turnbull, Yisong Tian, P. V. Viswanath, Bob Whaley 和 Alan White。我特别感谢 Eduardo Schwartz,他阅读了第一版的原稿提出许多有益的改进建议。

在约克大学和多伦多大学选修我所讲授的衍生证券课程的学生提出了许多有益的如何改进这本书的建议。我特别感谢 Scott Drabin, Cheryl Rosen 和 Jason Wei。这三个学生很仔细地阅读了

我的原稿并提出了许多(从学生角度)改进本书的好的建议。

该书的第一版很适合于实际操作者。为改进本书许多人提出了好的看法和好的建议。我特别感谢 Kannan Ayyar, Alex Bergier, Emanuel Derman, Don Goldman, Ian Hawkins, Nico Meier, Isaac Muskat, Bruce Rogers, Ayesha Shah, Armand Tatevossian, Edward Thorp 和 Cathy Willis。

我在多伦多大学的同事 Alan White(也是我在约克大学的同事)值得特别感谢。Alan 和我多年来一直在衍生证券领域进行合作研究。在那时,我们用许多时间讨论衍生证券的各方面问题。本书中的许多新观点,解释旧观点的许多新方法是我们俩共同的。Alan 很仔细阅读了这一版的原稿并提出许多很好的改进建议。

在本书进行过程中,得到 Prentice Hall 出版社的工作人员的不断鼓励。我特别感谢 Scott Bar(本书的原编辑), Leah Jewell(本书的现编辑),和 Edie Riker(这一版的生产编辑)。

最后我感谢我的妻子 Kathy。她始终支持我,并且非常理解写作该书引起家庭生活的诸多不便。

约翰·赫尔

目　　录

前　言

第一章　介　绍…… (1)
1.1　远期合约 …… (2)
1.2　期货合约 …… (4)
1.3　期权 …… (5)
1.4　其它衍生证券…… (11)
1.5　交易者的类型…… (14)
1.6　小结…… (17)

第二章　期货市场和期货合约套期保值应用 …… (19)
2.1　期货合约的交易…… (19)
2.2　期货合约的特性…… (20)
2.3　保证金的操作…… (24)
2.4　报纸行情…… (30)
2.5　期货价格收敛于现货价格…… (36)
2.6　现金结算…… (37)
2.7　利用期货套期保值…… (38)
2.8　最佳套期比率…… (43)
2.9　向前延展的套期保值…… (45)
2.10　小结 …… (47)

第三章 远期和期货价格 …… (49)
3.1 某些预备知识 …… (50)
3.2 无收益证券的远期合约 …… (56)
3.3 支付已知现金收益证券的远期合约 …… (58)
3.4 支付已知红利率证券的远期合约 …… (60)
3.5 一般结论 …… (61)
3.6 远期价格和期货价格 …… (62)
3.7 股票指数期货 …… (64)
3.8 货币的远期和期货合约 …… (71)
3.9 商品期货 …… (73)
3.10 持有成本 …… (77)
3.11 交割选择 …… (78)
3.12 期货价格和预期将来的即期价格 …… (78)
3.13 小结 …… (81)
附录 3A：当利率为常数时，远期价格与期货价格相等的一个证明 …… (83)

第四章 利率期货 …… (85)
4.1 某些预备知识 …… (85)
4.2 长期和中期国债期货 …… (94)
4.3 短期国债期货 …… (102)
4.4 欧洲美元期货 …… (107)
4.5 久期 …… (108)
4.6 基于久期的套期保值策略 …… (111)
4.7 久期的局限性 …… (113)
4.8 小结 …… (115)

第五章 互换 …… (117)

5.1 利率互换的机制 …… (117)
5.2 利率互换的定价 …… (125)
5.3 货币互换 …… (131)
5.4 货币互换的定价 …… (134)
5.5 其它互换 …… (137)
5.6 信用风险 …… (138)
5.7 小结 …… (140)

第六章 期权市场 …… (142)
6.1 期权交易所 …… (142)
6.2 场外交易的期权 …… (144)
6.3 期权合约的性质 …… (144)
6.4 报纸上的期权行情 …… (149)
6.5 交易 …… (151)
6.6 保证金 …… (154)
6.7 期权清算公司 …… (156)
6.8 认股权证和可转换债券 …… (157)
6.9 小结 …… (158)

第七章 股票期权价格的特征 …… (160)
7.1 影响期权价格的因素 …… (160)
7.2 假设和符号 …… (163)
7.3 期权价格的上下限 …… (164)
7.4 提前执行:不付红利股票的看涨期权 …… (169)
7.5 提前执行:不付红利的看跌期权 …… (172)
7.6 看跌与看涨期权之间平价关系 …… (175)
7.7 红利的影响 …… (179)
7.8 实证研究 …… (181)

7.9 小结 …… (183)

第八章 期权的交易策略 …… (185)
8.1 包括一个简单期权和一个股票的策略 …… (185)
8.2 差价期权 …… (188)
8.3 组合期权 …… (199)
8.4 其他复合期权的损益状态 …… (203)
8.5 小结 …… (203)

第九章 股票价格行为的一种模式 …… (205)
9.1 马尔科夫性质 …… (206)
9.2 维纳过程 …… (207)
9.3 股票价格的行为过程 …… (212)
9.4 模型回顾 …… (214)
9.5 参数 …… (217)
9.6 二叉树模型 …… (218)
9.7 小结 …… (221)

第十章 Black－Scholes 模型的分析 …… (223)
10.1 ITO 定理 …… (223)
10.2 股票价格的对数正态分布特性 …… (226)
10.3 收益率的分布 …… (228)
10.4 从历史数据估计的波动率 …… (231)
10.5 利用简单二叉树模型对期权定价 …… (234)
10.6 Black－Scholes 微分方程的基本概念 …… (236)
10.7 Black－Scholes 微分方程的推导 …… (237)
10.8 风险中性定价 …… (240)
10.9 Black－scholes 定价公式 …… (243)

10.10 累积正态分布函数 …… (246)
10.11 公司发行的本公司股票认股权证 …… (248)
10.12 隐含波动率 …… (250)
10.13 波动率产生的原因 …… (251)
10.14 红利 …… (253)
10.15 小结 …… (258)
附录 10A:ITO 定理的推导 …… (260)
附录 10B:计算基于支付红利股票的美式看涨期权价值的精确步骤 …… (262)

第十一章 股票指数期权、货币期权和期货期权 …… (265)
11.1 支付已知红利股票的期权 …… (265)
11.2 股票指数期权 …… (267)
11.3 货币期权 …… (274)
11.4 期货期权 …… (278)
11.5 小结 …… (286)
附录 11A:基于支付连续红利率股票衍生证券所满足的微分方程的推导 …… (288)
附录 11B:基于期货价格衍生证券所满足的微分方程的推导 …… (289)

第十二章 衍生证券定价的一般性方法 …… (292)
12.1 单一基本变量 …… (292)
12.2 利率风险 …… (297)
12.3 基于几个状态变量的证券 …… (298)
12.4 基于商品价格的衍生证券 …… (302)
12.5 交叉货币期货和期权 …… (304)
12.6 小结 …… (307)

附录 12A:ITO 定律的一般表示式 …… (308)
附录 12B:推导衍生证券所满足的一般微分方程 …… (310)

第十三章 期权与其它衍生证券的保值 …… (313)
13.1 一个例子 …… (314)
13.2 裸期权头寸与抵补期权头寸 …… (314)
13.3 止损策略 …… (315)
13.4 更复杂的保值策略 …… (318)
13.5 Delta 套期保值 …… (318)
13.6 Theta …… (331)
13.7 Gamma …… (335)
13.8 Delta, Theta 和 Gamma 之间的关系 …… (340)
13.9 Vega …… (341)
13.10 RHO …… (344)
13.11 实际中的期权组合套期保值 …… (345)
13.12 有价证券组合的保险 …… (345)
13.13 小结 …… (351)
附录 13.A 台劳展开和对冲参数 …… (353)

第十四章 数值方法 …… (355)
14.1 蒙特卡罗模拟 …… (355)
14.2 二叉树 …… (361)
14.3 指数期权、货币期权和期货期权的二叉树法 … (371)
14.4 支付已知红利的股票期权的二叉树法 …… (374)
14.5 基本二叉树方法的扩展 …… (379)
14.6 避免负的概率 …… (381)
14.7 有限差分方法 …… (384)
14.8 期权定价的解析近似方法 …… (395)

14.9 小结…… (395)
附录 14A: MACMILLAN, BARONE – ADESI 和 WHALEY 的美式期权价格的解析近似方法

第十五章 利率衍生证券…… (399)
15.1 交易所内的债券期权…… (399)
15.2 嵌入债券的期权…… (400)
15.3 有抵押的证券…… (401)
15.4 互换期权…… (402)
15.5 利率上限…… (403)
15.6 债券期权估值的简单方法…… (409)
15.7 简单模型的局限性…… (414)
15.8 研究人员构造期限结构所采用的传统方法…… (415)
15.9 Rendleman 和 Bartter 模型 …… (417)
15.10 均值回复 …… (421)
15.11 Vasicek 模型…… (423)
15.12 Cox, Ingersoll 和 Ross 模型 …… (432)
15.13 两因素模型 …… (433)
15.14 无套利模型 …… (433)
15.15 Heath, Jarrow 和 Morton 方法…… (437)
15.16 Ho 和 Lee 模型…… (439)
15.17 Hull 和 White 模型 …… (441)
15.18 套期保值 …… (447)
15.19 小结 …… (447)

第十六章 新型期权…… (450)
16.1 新型期权的类别…… (450)
16.2 基本定价工具…… (463)

16.3 美式路径依赖型期权 …… (464)
16.4 基于两个相关资产的期权 …… (467)
16.5 套期保值讨论 …… (468)
16.6 小结 …… (469)

第十七章 Black－Scholes 期权定价的几种方法 …… (471)
17.1 利率和波动率变化已知的修正 …… (471)
17.2 Merton 随机利率模型 …… (472)
17.3 偏差的定价 …… (473)
17.4 几个模型 …… (476)
17.5 定价偏差的回顾 …… (482)
17.6 实证研究 …… (483)
17.7 在实际中如何利用这些模型 …… (487)
17.8 小结 …… (488)
附录 17A： 几个模型的定价公式 …… (489)

第十八章 信用风险 …… (493)
18.1 资产暴露的性质 …… (494)
18.2 确定资产的合约 …… (497)
18.3 可能是资产或负债的合约 …… (500)
18.4 国际清算银行的资本充足要求 …… (503)
18.5 减少违约风险 …… (505)
18.6 小结 …… (506)

第十九章 关键概念的回顾 …… (507)
19.1 无风险的套期保值 …… (507)
19.2 可交易证券和其它标的变量 …… (508)
19.3 风险中性化定价 …… (508)

19.4 结束语…… (509)

附表： 当 X≤0 时 N(X)表…… (510)
附表： 当 X≥0 时 N(X)表…… (511)
世界交易所名称…… (512)
各种符号的总结…… (513)
注释…… (517)

第一章

介　　绍

衍生证券(derivative security,也称衍生证券,衍生工具)是一种证券,其价值依赖于其它更基本的标的(underlying,也称基本的)变量。近年来,在金融领域衍生证券变得越来越重要。许多交易所正在进行大量的期货和期权交易。金融机构与它们的公司客户在交易所外的场外市场(over－the－counter,即 OTC 市场)频繁进行远期合约、互换和其它不同种类的期权的交易。其它更特殊的衍生证券常常作为债券和股票发行的一个组成部分。

衍生证券也称为或有债权(contingent claims),在这本书中经常交换使用这两个名称。我们经常可以看到,衍生证券所依附的标的变量是可交易证券的价格。例如,股票期权是一个衍生证券,其价值依赖于股票的价格。然而,正如我们将看到的,衍生证券可以依赖于几乎任何变量,从生猪价格到某个滑雪胜地的降雪量。

这本书有两个目的。第一个是探索那些在实际中经常遇到的衍生证券的一些性质;第二个是提供一个所有衍生证券能够进行定价和套期保值(也称为对冲)的理论框架。在第一章里,我们首先考察远期合约、期货合约和期权。在以后几章里,将更详细讨论这些证券和它们的交易方式。

1.1 远期合约

远期合约(forward contract)是一个特别简单的衍生证券。它是一个在确定的将来时间按确定的价格购买或出售某项资产的协议。通常是在两个金融机构之间或金融机构与其公司客户之间签署该合约。它不在规范的交易所内交易。

当远期合约的一方同意在将来某个确定的日期以某个确定的价格购买标的资产时,我们称这一方为多头(long position)。另一方同意在同样的日期以同样的价格出售该标的资产,这一方就称为空头(short position)。在远期合约中的特定价格称为交割价格(delivery price)。在合约签署的时刻,所选择的交割价格应该使得远期合约的价值对双方都为零[①]。这意味着无需成本就可处于远期合约的多头或空头状态。

远期合约在到期日交割。空头的持有者交付标的资产给多头的持有者,多头支付等于交割价格的现金。决定远期合约价格的关键变量是标的资产的市场价格。正如以上提到的,签署远期合约时刻该合约的价值为零。之后,它可能具有正的或负的价值,这取决于标的资产价格的运动。例如,如果合约签署之后不久该标的资产价格上涨很快,则远期合约多头的价值变为正值而远期合约空头的价值变为负值。

远期价格

某个远期合约的远期价格(forward price)定义为使得该合约价值为零的交割价格。因此,在签署远期合约协议的时刻,远期价格和交割价格是相同的。随时间推移,远期价格有可能改变,而交割价格当然保持相同。在合约开始后的任何时刻,除了偶然之外,远期价格和交割价格并不相等。一般来说,在任何给定时刻远期

价格随该合约期限的变化而变化。例如，购买或出售二个月期的远期合约的价格肯定不同于购买或出售六个月期的远期合约价格。

表 1.1 1991 年 9 月 11 日即期和远期汇率报价

即期汇率	1.7280
30 天远期汇率	1.7208
90 天远期汇率	1.7090
180 天远期汇率	1.6929

许多公司经常使用外汇远期合约。考虑表 1.1 中表示的 1991 年 9 月 11 日英镑兑美元汇率。忽略佣金和其它交易成本，表中第一行报价表示在即期市场(即立即交割)买卖英镑的价格是每英镑 $1.7280；第二行报价表示买卖 30 天期英镑远期合约的远期价格(或远期汇率)为每英镑 $1.7208；第三行报价表示买卖 90 天期英镑远期合约的远期价格为每英镑 $1.7090 等等。

远期合约的损益

一单位资产远期合约多头的损益(payoff，也称收益，回报等)是：

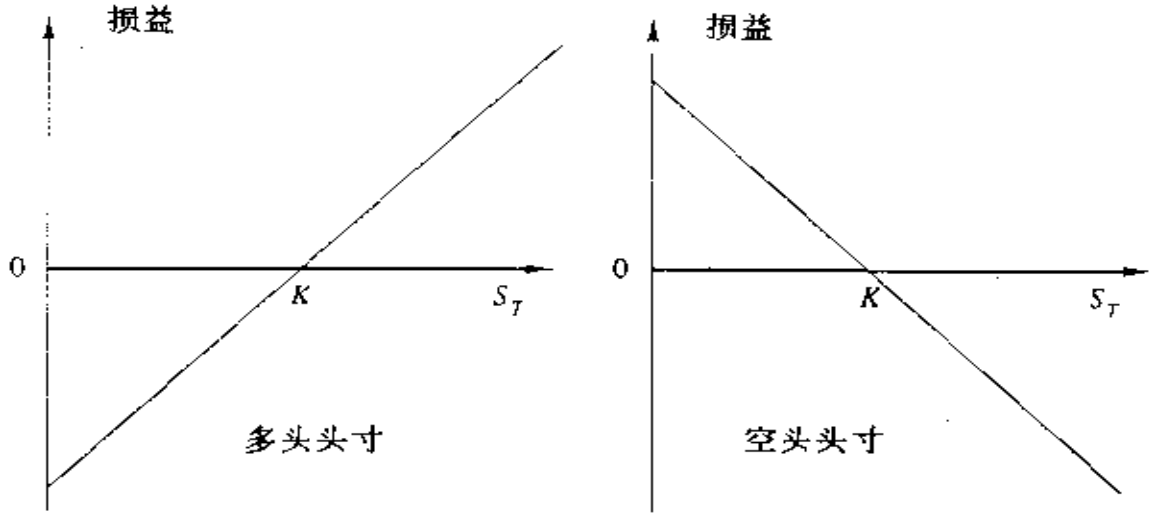
$$S_T - K$$

这里 K 是交割价格而 S_T 是合约到期时资产的即期价格。这是因为合约的持有者有义务用价格 K 购买价值为 S_T 的资产。类似地，一单位资产远期合约空头的损益是：

$$K - S_T$$

因此这些损益可能是正的，也可能是负的。它们表示在图 1.

1 中。由于签署远期合约时并没有成本，合约的盈亏也就是投资者从该合约中所得总盈利或总亏损。



K = 交割价格
S_T = 到期时资产价格

图 1.1 远期合约的损益

1.2 期货合约

像远期合约一样，期货合约(futures contract)是两个对手之间签定的一个在确定的将来时间按确定的价格购买或出售某项资产的协议。与远期合约不同，期货合约通常在规范的交易所内交易。为了使交易能够进行，交易所详细规定了期货合约的标准化条款。由于期货合约的双方不一定相识，交易所同时也向双方提供该期货合约的承兑保证。

最大的期货交易所是芝加哥交易所(Chicago Board of Trade，简称 CBOT)和芝加哥商品交易所(Chicago Mercantile Exchange，简称 CME)。在这些和其他的期货交易所中，期货合约的标的资产的范围非常广泛，包括许多商品和金融资产。其中商品包括猪

肉、活牛、糖、羊毛、木材、铜、铝、黄金和锡。金融资产包括股票指数、外汇、短期国库券和债券。

期货合约与远期合约的不同点之一是期货合约并不总是指定确切的交割日期。期货合约是按交割月划分,由交易所指定交割月中必须进行交割的交割期限。对商品来说,交割期限通常为整个交割月。合约空头方有权在交割期限中选定他或她将要进行交割的时间。通常,在任何时候,不同交割月的期货合约都有交易。交易所指定一张合约应交割的资产的数额;期货的价格的标价方法;并且还可能规定任何一天中期货价格可以变化的范围。在商品期货中,交易所也可以指定产品的质量和交割的地点。例如,现在 CBOT 中交易的小麦期货合约,合约的规模大小为 5000 蒲式耳,有 5 个交割月份的期货合约(3 月份、5 月份、7 月份、9 月份、12 月份)可供交易。交易所指定了可供交割的小麦的等级和交割的地点。

一般来说,在金融类报纸上,都有期货的价格行情。假定在 9 月 1 日,12 月份的黄金期货的报价为 $500。这一价格不包括佣金,在该价格上投资者可以买卖 12 月份交割的黄金。该价格与其他价格一样,是由场内交易决定的(即,由供求关系决定的)。如果愿意持有期货合约的多头投资者多于愿意持有期货合约空头的投资者,价格就会上升。如果情况相反,价格就会下降[2]。

在下一章中,我们将介绍一些更详细的细节,如保证金要求、每日结算程序、交割程序、买卖价差和交易所中结算所的作用。

1.3 期 权

股票期权于 1973 年首次在有组织的交易所内进行交易。从此,期权市场发展十分迅猛。现在,期权在世界各地的不同交易所中都有交易。银行和其他金融机构同时也进行大量的期权合约的

场外交易。期权的标的资产包括股票、股票指数、外汇、债务工具、商品和期货合约。

期权有两种基本类型。看涨期权(call option)的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格购买标的资产。看跌期权(put option)的持有者有权在某一确定时间以某一确定的价格出售标的资产。期权合约中的价格被称为执行价格或敲定价格(exercise price or strike price)。合约中的日期为到期日、执行日或期满日(expiration date, exercise date, maturity)。美式期权(American options)可在期权有效期内任何时候执行。欧式期权(European options)只能在到期日执行[3]。在交易所中交易的大多数期权为美式期权。但是,欧式期权通常比美式期权更容易分析,并且美式期权的一些性质总是可由欧式期权的性质推导出来。

需要强调的是,期权赋予其持有者做某件事情的权利。持有者不一定必须行使该权利。这一特点使期权不同于远期和期货,在远期和期货合约中持有者有义务购买或出售该标的资产。请注意,投资者签署远期或期货合约时的成本为零,但投资者购买一张期权合约必须支付期权费。

例证

某投资者购买 100 个 IBM 股票的欧式看涨期权,执行价格为 $140。假定股票现价为 $138,有效期期限为 2 个月,期权价格为 $5。由于期权是欧式期权,投资者仅能在到期日执行它。如果股票价格在到期日低于 $140,他或她必定选择不执行期权(即投资者不会以 $140 的价格购买市场价值低于 $140 的股票)。在这种情况下,投资者损失了其全部的初始投资 $500。如果股票的价格在到期日高于 $140,投资者将执行期权。假定股票价格为 $155,通过执行该期权,投资者可以以每股 $140 的价格购买 100 股股票。如果他很快地将这些股票卖出,且不考虑交易费用,则每股盈

利为 $15 或总盈利为 $1500。当考虑初始投资时，投资者的净盈利为每一期权合约 $10，或总盈利为 $1000(计算时忽略货币的时间价值)。图 1.2 显示了投资者每个期权的净损益随到期日股票价格变化的情况。请注意在有些情况下，投资者执行期权，但总体上也会出现损失。考虑股票价格在到期日为 $142 的情况，投资者执行期权，但其总损失为 $300。这比不执行期权将会发生的金额为 $500 的损失要好些。

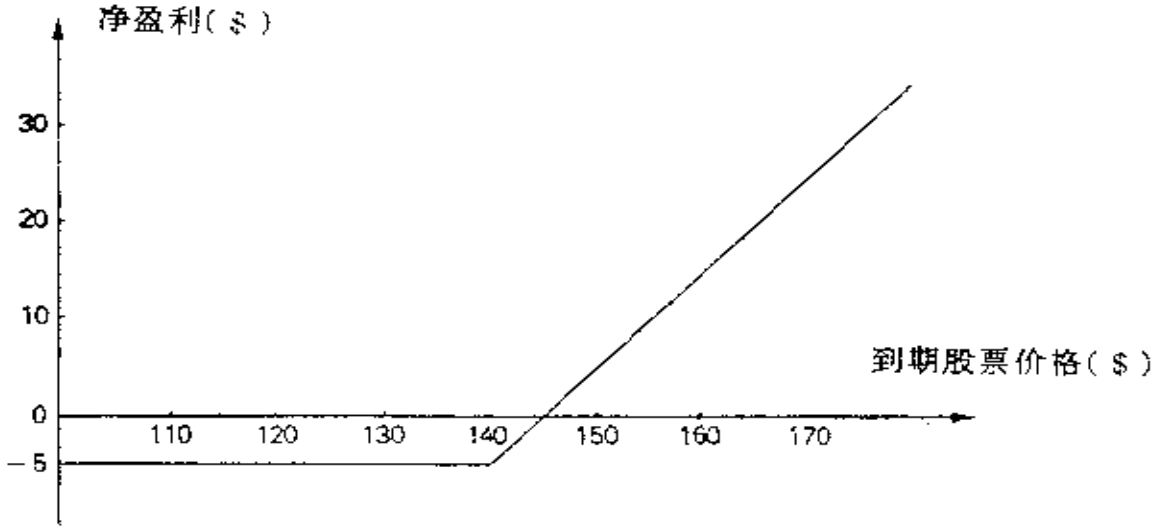


图 1.2 购买 IBM 欧式看涨期权的损益状态 期权价格 = $5；执行价格 = $140

看涨期权的购买者是希望股票价格上升，而看跌期权的购买者是希望股票价格下降。例如，某投资者购买了 100 个 Exxon 股票的欧式看跌期权，执行价格为 $90。假定股票的现价为 $86，距到期日有 3 个月，期权的价格为 $7。由于期权是欧式期权，投资者仅能于到期日，在股票价格低于 $90 时执行该期权。假定在到期日股票价格为 $65。投资者可以以每股 $65 的价格购买 100 股股票，并按看跌期权合约的规定，以每股 $90 的价格卖出相同

的股票，实现每股 $25 的盈利，即实现 $2500 的总盈利(再次忽略交易成本)。当考虑期权的初始支出成本时，投资者的每一期权所获净利为 $18，即总的净利为 $1800。当然，如果最后股票的价格高于 $90，看跌期权在到期日时价值为零，投资者每一期权损失 $7，即总损失为 $700。图 1.3 显示了随着到期日股价的变化，投资者每个期权盈利或损失的变化。

正如前面所说，股票期权通常为美式期权而非欧式期权。这表明，上例中的美式期权的投资者在到期日前就可以执行期权。后面我们将证明在某些情况下，提前执行美式期权是明智的。

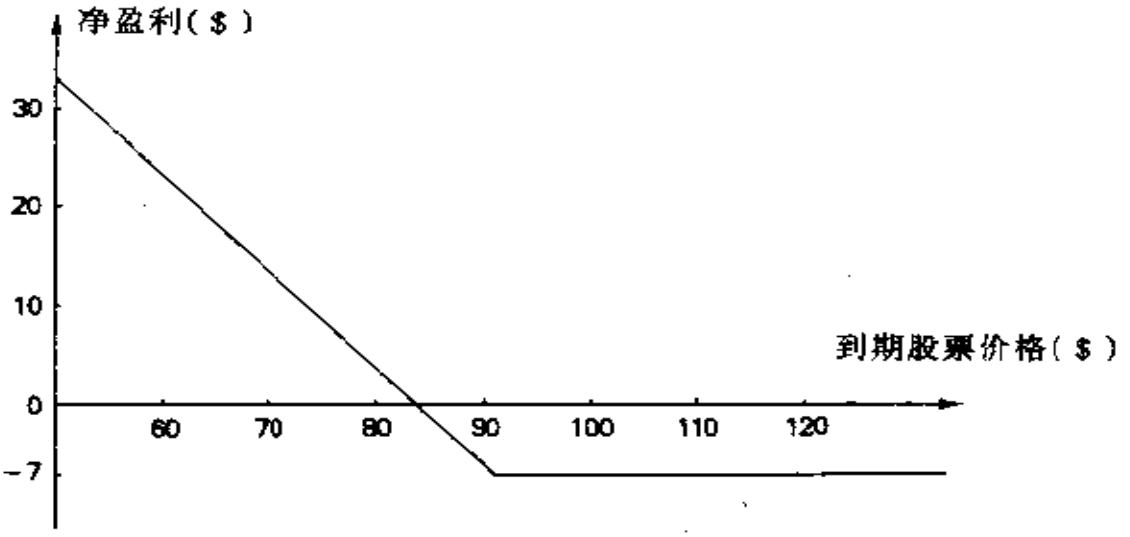


图 1.3 购买 Exxon 欧式看跌期权的损益状态 期权价格 = $7；执行价格 = $90

期权的头寸

每一期权合约都有两方。一方是持有期权多头头寸的投资者(即，购买期权的一方)。另一方是持有期权空头头寸的投资者(即

出售或承约(written)期权的一方)。期权的出售方事先收取现金,但之后具有潜在的负债。他或她的损益状态与期权购买方的损益状态正好相反。图 1.4 和图 1.5 表明在图 1.2 和 1.3 中所考虑期权的出售方的损益状态随着到期日股价的变化而变化。

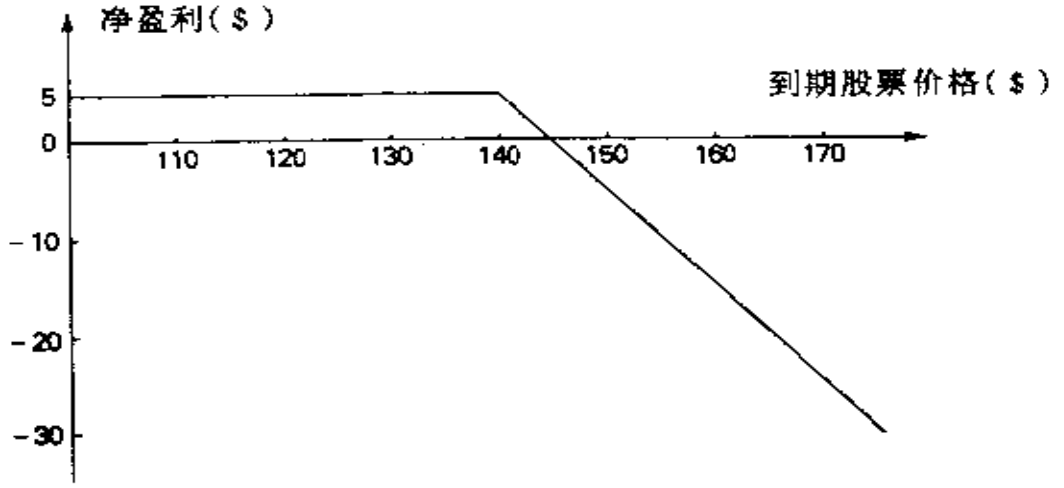


图 1.4 出售 IBM 欧式看涨期权的损益 期权价格 = $5,执行价格 = $140

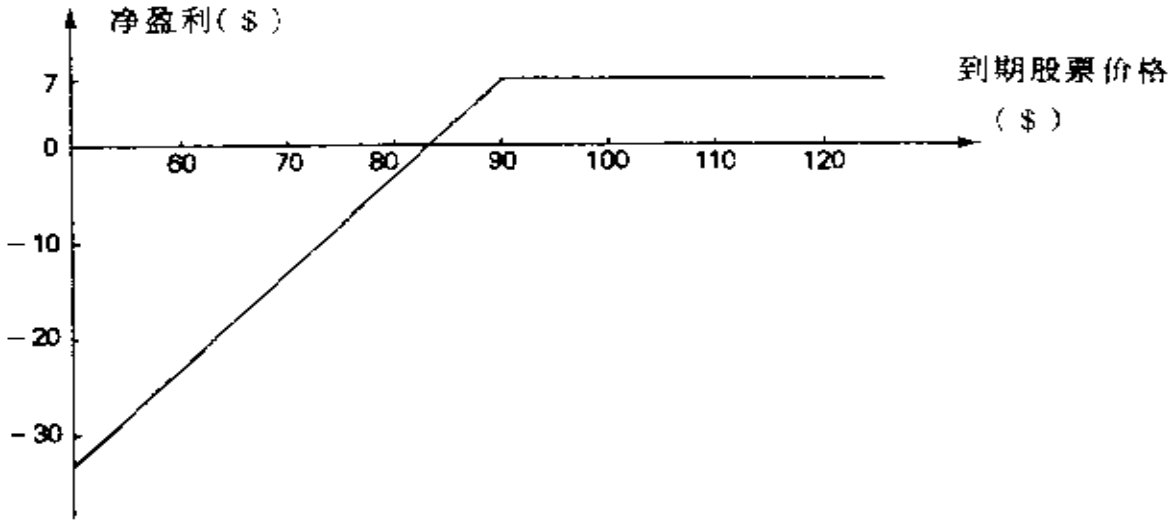


图 1.5 出售 Exxon 欧式看跌期权的损益 期权价格 = $7,执行

价格 = $90

有四种基本的期权头寸：

1. 看涨期权的多头。
2. 看跌期权的多头。
3. 看涨期权的空头。
4. 看跌期权的空头。

损益

经常使用到期日期权损益状态来描绘欧式期权投资者的头寸状况。在计算时，不包括初始期权成本。如果以 X 代表执行价格，S_T 代表标的资产的到期日价格，则欧式看涨期权多头的损益为：

$$\max(S_T - X, 0)$$

这就表明，如果 $S_T > X$，就会执行期权；如果 $S_T \leqslant X$，就不会执行期权。欧式看涨期权空头的损益为：

$$-\max(S_T - X, 0)$$

或

$$\min(X - S_T, 0)$$

欧式看跌期权多头的损益为：

$$\max(X - S_T, 0)$$

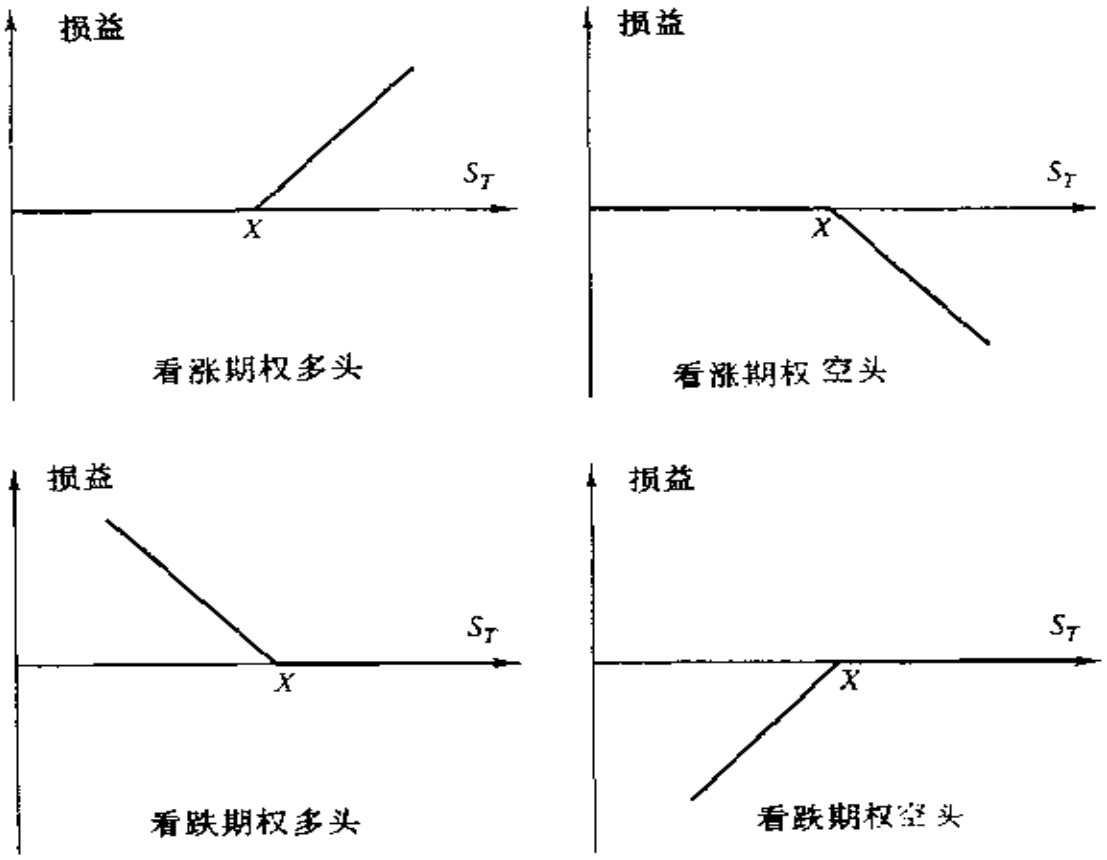
欧式看跌期权空头的损益为：

$$-\max(X - S_T, 0)$$

或

$$\min(S_T - X, 0)$$

图 1.6 为这些期权头寸的损益状态图。



$X=$ 执行价格

$S_T=$ 到期时资产价格

图 1.6 欧式期权各种头寸的损益状态图

1.4 其它衍生证券

最近几年，为满足顾客的需要，银行和其他金融机构开创性地设计了许多非标准的衍生证券。有时，金融机构直接向其客户出售这些产品。在其他情况下，他们将这些衍生证券加入债券或股票中，以便增加投资者对所发行的债券或股票的兴趣。某些证券只是一些更简单合约的组合，如远期和期权。其他的则十分复杂。

设计新颖的、有意义的衍生证券的可能性似乎是无限的。在这一部分中，我们将给出几个例子。

利率上限合约

利率上限合约(Interest rate caps)为借款公司提供保护，使得借款公司的浮动利率借款的利息率不致于高过某一水平。该利率水平被称为利率上限。如果借款利率果真高于利率上限，则利率上限合约的出售方将提供借款利率和利率上限之差。假定借款本金为 $10,000,000，利率上限为年利率 12%，在利率上限合约有效期内特定的 3 个月中，借款的浮动利率变为每年 14%。则利率上限合约的购买方在 3 个月末，将从出售方那里收到 $50,000(= $10,000,000×2%×1/4)。有时建立利率上限合约是为了确保借款有效期内支付的平均利率(而不是任一特定时间的利率)不致于超过某一特定的水平。在第十五章中，我们将进一步讨论利率上限合约。

标准石油公司的债券发行(Standrd Oil's Bond Issue)

将衍生证券加入债券发行的一个例子是 1986 年标准石油公司发行的零息票债券。除债券的到期面值 $1000 外，公司承诺以债券到期日的石油价格为基础，支付投资者一定的金额。这一额外金额等于 170 乘以到期日每桶石油价格超过 $25 的差额。但是，所支付额外金额的上限为 $2550(对应于每桶石油价格 $40)。该债券给予持有者一个与某一产品密切相关的好处，且该产品对公司的前景来说也是至关重要的。如果商品的价格上升，则公司处境良好，足以向债券持有者支付这一额外金额。

ICONs

1985 年，银行家信托公司(Banker Trust)开发了指数化外汇

期权票据或 ICONs(index currency option notes)。这是一些债券，在到期日该债券持有者收到的金额随某一外汇汇率的变化而变化。规定了两种外汇汇率 X_1 和 X_2，且 $X_1 > X_2$。如果在债券到期日外汇汇率高于 X_1，债券持有者收到全部面值。如果在债券到期日外汇汇率低于 X_2，则债券持有者收入为零。如果汇率在 X_1 和 X_2 之间，持有者收到全部面值的一部分。银行家信托公司首次为日本长期信用银行(Long Term Credit Bank of Japan)发行了 I-CONs。该 ICON 指定如果美元兑日元的汇率 S，在到期日(1995 年)高于一美元兑 169 日元，债券的持有者收到 $1000。如果汇率低于一美元兑 169 日元，则债券持有者收到的金额将有所减少，减少的金额为：

$$\max\left[0, 1000\left(\frac{169}{S} - 1\right)\right]$$

在到期日当汇率低于一美元兑 84.5 日元时，债券持有者收入为零。

范围远期合约

衍生证券的另一个有趣例子是范围远期合约(range forward contracts，或灵活的远期合约)。假定 1991 年 9 月 11 日，一家美国公司在 90 天后需要英镑。表 1.1 为当前的外汇汇率。则公司可以购买 90 天期的远期合约，价格按每英镑 $1.7090。另外，公司也可以建立范围远期合约，例如从每英镑 $1.6700 到 $1.7500。在到期日，如果即期汇率低于每英镑 $1.6700，公司按每英镑 $1.6700 支付；如果即期汇率在 $1.6700 和 $1.7500 之间，公司按当时的即期汇率支付；如果即期汇率高于 $1.7500，公司按 $1.7500 支付。与一般的远期合约相同，双方在构造范围远期合约时，通常使得该合约初始价值为零。

其他例子

前面我们已经提到，衍生证券领域中可能存在的创新是无限的。例如某些场外交易的期权的损益状态依赖于某一变量在一段时间内的最大值；某些衍生证券的执行价格是时间的函数；还有一些衍生证券具有如下的特征，即执行一个期权时自动地赋予期权持有者另一个期权，等等。到目前为止，期权和其他衍生证券的标的变量通常为股票价格、股票指数、利率、汇率和商品价格。但是，也使用其他的变量作为衍生证券的标的变量。例如滑雪场的经营者发行这样的债券，其收益取决于某个滑雪胜地的总降雪量；银行也发行某种存款工具，支付的利息取决于当地足球队的业绩。

1.5 交易者的类型

可以将衍生证券的交易者划分为套期保值者、投机者和套利者。下面我们简单讲述一下这三类交易者。

套期保值者

套期保值者(hedger)的目的在于减少他们已经面临的风险。假定一个美国公司得知在 90 天后，将支付其英国的供应商 £1,000,000。美国公司面临着明显的外汇风险。以美元支付的成本取决于 90 天后的英镑汇率。运用表 1.1 中的汇率，该公司可以选择签订购买英镑远期合约的策略，在 90 天后以 $1,709,000 购买 £1,000,000 来进行套期保值。结果是锁定了必须支付的英镑的汇率。

运用远期汇率进行的套期保值不需要进行初始投资。在有些情况下，它可为公司节省大量的资金。例如，如果汇率升到 $1.8000，则公司通过套期保值获得的利益是 $91,000。在有些情况

下,公司会期望要是当初不进行保值就好了。例如,如果汇率跌倒 $1.6000,则套期保值比不进行套期保值多损失 $109,000。这就强调了套期保值的目的是使最终结果更加确定,但它不一定改进最终结果。

另一代替远期合约的方案是公司可以购买一个看涨期权,在90天后,按某一特定的汇率(执行价格),比如 $1.70000,来获得£1,000,000。如果90天后,实际汇率在到期日高于 $1.7000,公司就会执行期权并以 $1,700,000 买入它所需要的英镑。如果实际汇率在到期日低于 $1.7000,公司按通常的做法直接在市场上买入英镑。运用这一期权策略,公司可以防止汇率的不利变化,同时仍然可以从汇率的有利变化中获利。当然,期权的这一担保作用是有代价的。由于远期合约的初始成本为零,与之相比,期权合约的成本则相对很高。

投机者

套期保值者是希望减少某项资产价格变动的风险,而投机者(speculator)则希望在市场中持有某个头寸。他们或者打赌价格会上升,或者打赌价格会下降。

远期合约可以用于投机。认为英镑兑美元会上涨的投资者可以通过持有英镑远期合约的多头来进行投机。假定当前行情处于表1.1所示的情况。若90天后英镑的实际汇率为 $1.7600,则原签订90天远期合约的多头方投资者可以以 $1.7090 的价格购买价值为 $1.7600 的英镑。他或她将获得每英镑 $0.0510 的盈利。

运用远期市场进行投机与在即期市场中购买标的资产(在本例中购买外汇)进行投机有重大的区别。在即期市场上购买一定数额的标的资产需要一个最初的现金支付,付款金额等于购买的资产的全部价值。签订与该项资产金额相同的远期合约最初不须支付现金[①],投机者运用远期市场进行投机的杠杆率比运用即期

市场投机的杠杆率高得多。

当运用期权投机时，它也能提供额外的杠杆。为了说明这一点，假定股票价格为 $32，那些认为股价会上升的投资者购买执行价格为 $35 的看涨期权，每个期权的期权费为 $0.50。如果在期权有效期内，股票价格并未高于 $35，则投资者在每个期权上会损失 $0.50（即 100% 的投资额）。但是，如果股票价格上升到 $40，则投资者在每个期权上获利 $4.50（即 900% 的初始投资）。

套利者

套利者（arbitrageurs）是衍生证券市场中第三类重要的参与者。套利包括瞬态进入两个或多个市场的交易，以锁定一个无风险的收益。在后面的章节中，我们会论述当某一资产的期货价格偏离了现货价格时，就可能会存在套利机会。我们也将讨论如何将套利理论运用于期权的定价中。在这一部分中，我们用一个非常简单的例子来说明套利的概念。

考虑在纽约和伦敦市场上同时交易的某种股票。假定在纽约市场上股票的价格为 $172，而在伦敦市场上该股票的价格为 £100，当时的汇率为一英镑 $1.7500 美元。套利者可在纽约市场上购买 100 股该种股票的同时在伦敦市场上将它们卖出，在不考虑交易成本时，就可获得无风险收益，收益额为：

$$100 \times (\$1.75 \times 100 - \$172)$$

即 $300。交易成本可能会减少小投资者的收益。但是，大的投资公司在股票市场和外汇市场上的交易成本都很低。它们会发现以上套利机会极具吸引力，并会尽可能的利用这种机会。

以上描述的套利机会不可能长期存在。随着套利者在纽约市场买入股票，供求关系将会使股票的美元价格上升。与此类似，随着他们在伦敦市场上出售股票，股票的英镑价格就会下降。很快就会使这两个价格在当前的汇率情况下达到均衡。事实上，急于

获利的套利者的存在使得股票的英镑价格和美元价格初始就不可能存在如此严重的不平衡。

将这一例子推广，我们可以说，由于许多套利者的存在，使得实际上大多数金融市场的报价中仅存在极少的套利机会。在本书中，我们关于期货价格和期权合约价值的大多数结论将建立在假设不存在套利机会的基础上。

1.6 小 结

近15到20年中，金融市场的一个引人注目的发展就是衍生证券或或有债权的日趋普遍。在许多情况下，套期保值者和投机者都发现交易某项资产的衍生证券比交易资产本身更具吸引力。某些衍生证券在交易所中交易，其他的衍生证券由金融机构直接提供给其公司客户，或由承销方将它们附加到新发行的证券中。在这一领域中似乎并不缺乏新思想。本书的大部分内容是关于衍生证券的定价问题。目的是为所有的衍生证券(不仅仅是期权或期货)的定价提供一个统一的框架。

在本章中，我们初步了解了远期、期货和期权合约。远期或期货合约包括在将来某一特定的时间以某一特定的价格买入或卖出一项资产的义务。有两种类型的期权：看涨期权和看跌期权。看涨期权的持有者有权在某一特定的日期以某一特定的价格购买一项资产。看跌期权的持有者有权在某一特定的日期以某一特定的价格出售一项资产。现在，在许多不同的资产上都有远期、期货和期权的交易。

衍生证券在资本市场一直有很成功的创新。交易者的主要类型有：套期保值者、投机者和套利者。套期保值者面临着与某项资产价格相关的风险，他们运用衍生证券来减少或消除这种风险。投机者则对资产价格的未来变动下了赌注，他们运用衍生证券获

得额外的杠杆效应。套利者利用两个不同市场价格的差异，例如，如果他们发现某项资产的期货价格偏离了现货价格，他们就可通过在这两个市场上持有相反的头寸来锁定盈利。

第二章

期货市场和期货合约套期保值应用

在第一章中我们介绍了期货合约。它们是商定将来以某一价格购买或出售某项资产的协议。与远期合约不同，期货合约通常在交易所中交易。在本章中，我们将阐述交易所组织交易期货合约的方式。我们讨论的内容包括合约的细则、保证金帐户的操作和如何进行标价等等。我们也讨论如何将期货合约用于套期保值。

2.1 期货合约的交易

假定现在是3月份，你告诉你的经纪人，指示他在CBOT上以现行市价买入7月份的玉米期货合约(5000蒲式耳)。将会怎样运行呢？程序的第一步，经纪人将你的指令交给在CBOT内的代表。从他那儿，该指令由消息员传递到场内的某个交易员。该交易员估算当时可获得的最佳价格，并用手势向其他的交易员表明他或她想以该价格买入一个合约。如果其他的交易员表明愿意持有合约的另一头寸(即7月份合约的空头)，这笔交易就做成了。如果交易没有做成，代表你的交易员就只好表明愿意以一更高的价位进行交易。最终总会成交，该交易的对手持有7月份合约的空头。你的经纪人将向你传送指令已执行的确认书和交易价格的

通知书。

场内交易池内的交易员有两类。一类是佣金经纪人(commission broker),他们执行其他人的交易指令并获得佣金;另一类是自营经纪人(locals),他们用自己帐户里的资金进行交易。传递到佣金经纪人的指令有许多不同的种类。在上述例子中,该指令是按现行市场价格取得一个7月份合约的多头寸,这是市价订单(market order)。另一类普遍的订单是限价订单(limit order),它指定某一特定的价格,并要求只有达到该价位或更为优惠的价位时,才执行指令。

平仓

平仓(closing out a position)包括开立一个与初始交易相反的头寸。例如,如果投资者在3月6日买入一个7月份玉米期货合约,他或她可在4月20日通过卖出一个7月份玉米期货合约来平仓。如果投资者在3月6日卖出一个7月份的期货合约,他或她可在4月20日通过买入一个7月份玉米期货合约来平仓。在每种情况下,投资者的全部损益反映了3月6日和4月20日之间期货价格的变化。

绝大多数初始建立的期货合约都是按这种方式平仓的。很少实际交割标的资产。尽管如此,理解交割手续也是非常重要的。正是因为具有最后交割的可能性,才使得期货价格与现货价格联系起来。

2.2 期货合约的特性

当开发一项新的合约时,交易所必须详细地指定双方之间协议的确切条款。尤其是,交易所必须指定资产、合约的规模(即每一合约将交割的资产的确切数额),怎样进行报价,交割的地点、交

割的时间和支付的价款是怎样决定的。有时，也指定其它的交割资产和交割安排的方式。只有空头方(同意出售的一方)可在这些备选方案中进行选择。

资产

当标的资产是商品时，市场中该商品的质量可能有很大的差别。当指定标的资产时，交易所对允许交割的资产的等级作出规定是非常重要的。纽约棉花交易所对其橙汁期货合约的资产等级作出了如下规定：

美国 A 级，Brix 值不超过 57 度；Brix 值与酸性的比率不得低于 13:1，不得高于 19:1；颜色和气味的得分为 37 分或高于 37 分，19 分则是有缺陷的；最低得分为 94 分。

芝加哥商品交易所 CME 在其自由长度木材期货合约中规定：

每一交割单位应包括通常的 2×4s 的木材，其长度在 8 英尺到 20 英尺之间，等级标志是建筑用材和标准用材等级或更优等级，或#1 和#2；但是标准等级或#2 的数量在任何情况下不得超过 50%。每一交割的单位的加工制造地应为 California、Idaho、Montana、Nevada、Oregon、Washington、Wyoming 或 Alberta、British Columbia、加拿大、集装箱木材的产地和等级标志为阿尔卑斯山冷杉(Alpine fir)、Englemann 云杉、hem－fir、lodgepole 松树和/或 spruce pine fir。

对于某些商品来说，一定等级范围内的商品均可以用来交割，但要根据所选用的等级来调整收取的价款。例如，在 CBOT 的玉米期货合约中，标准等级是“#2 黄”，但根据交易所建立的差别条款，可以选用其他替代物。

期货合约的金融资产通常很明确，并且不会模棱两可。例如

不必指定日元的等级。然而，在 CBOT 交易的中、长期国债期货合约就具有一些有意思的特点。在长期国债期货合约中，标的资产是任何到期期限超过 15 年并且在 15 年内不可回赎的长期美国国债。在中期国债期货合约中，标的资产是任何到期期限不低于 6.5 年且不超过 10 年的国债。在这两种情况下，交易所运用公式根据所交割的国债的期限和利息来调整收取的价款。在第四章中，我们将讨论这个问题。

合约的规模

合约的规模规定了每一合约中交割的资产的数量。对交易所来说，这是一项重要的决策。如果合约的规模过大，许多希望对冲较小风险头寸的投资者或希望持有较小头寸的投机者就不可能利用该交易所进行交易。而另一方面，由于成本是与每一个交易的合约密切相关，如果合约规模过小，则交易成本就会很高。

某一合约的适当规模取决于可能存在的客户。由于某个农产品期货合约中交割资产的价值可能为 $10,000 到 $20,000，而一些金融期货的合约规模会高得多。例如，在 CBOT 中交易的长期国债期货，其交割标的资产的面值为 $100,000。

交割的手续

交易所必须指定商品交割的地点。这对商品期货尤为重要，因为商品期货可能存在很高的运输费用。在芝加哥商品交易所 CME 的自由长度木材合约中，交割地点的规定如下：

> 每一单位应分别进行纸包装并装载在平板货车上，或以双门货车进行运输，买方不需支付额外的费用。冷杉的标准交割地是 California、Idaho、Montana、Nevada、Oregon、华盛顿及 British Columbia。
>
> 当指定几个交割地点时，空头方收取的价款有时会根据他选

择的交割地点进行调整。例如，在 CBOT 交易的玉米期货合约中，交割的地点可以是芝加哥、Burns Habor、Toledo 或 St. Louis。在 Toledo 和 St. Louis 交割的价款要按在芝加哥期货合约的价格进行调整，每蒲式耳折扣 4 美分。

期货合约按交割月份来划分。交易所必须指定在交割月份中可以进行交割的确切时期。对于许多期货合约来说，交割时期是整个交割月。

交割月份随合约的不同而不同，由交易所根据客户的需要进行选择。例如国际货币市场（IMM）的外汇期货的交割月份为 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份；而 CBOT 的玉米期货合约的交割月份为 3 月份、5 月份、7 月份、9 月份和 12 月份。在任何给定的时间，交易的合约包括有最近交割月的合约和一系列随后交割月的合约。由交易所指定特定月份合约开始交易的时刻，交易所同时也对给定合约的最后交易日作了规定。最后交易日通常是最后交割日的前几天。

期货报价

期货的报价方式非常方便且容易理解。例如，纽约商品交易所 NYMEX 的原油期货价格是以每桶原油的美元数来进行报价的，取两位小数（即近似到美分）。CBOT 的中期国债和长期国债期货价格是以美元和 1/32 美元的倍数来进行报价的。在交易中可以允许的最小价格变动与标价方式保持一致。即，原油期货的最小价格变动为 $0.01（或每桶 1 美分），中期和长期国债期货的最小价格变动为 1/32 美元。

每日价格变动的限额

对大多数合约来说，是由交易所来规定其每日价格变动的限额。例如，在期货合约开仓时，原油期货的每日价格变动限制为

$1。如果价格下降的金额等于每日价格限额，则称该合约达到跌停板(limit down)。如果上升的金额等于每日价格限额，则称该合约达到涨停板(limit up)。涨停板变动(a limit move)是指在任何方向上的价格波动等于每日价格变动限额的变动。通常，价格一旦达到当天的涨停板或跌停板，该合约当天就停止交易，但是在某些情况下，交易所有权进行干涉并改变每日价格变动的限额。

制定每日价格变动限额的目的是阻止由于过度的投机而造成价格的巨幅变化。然而，当标的商品的价格迅速上升或迅速下降时，这些限制将成为交易的人为阻碍。在总体上价格限额是否对期货市场有利，仍然是一个有争议的问题。

头寸限额

头寸限额是指一个投机者最多可以持有的合约数量。例如，在芝加哥商品交易所 CME 的自由长度木材期货合约中，头寸限额(在开仓时刻)为 1000 张合约，且在任意一个交割月份中期货合约的数量不得超过 300 张。真正的套期保值者则不受头寸限额的影响。头寸限额的目的是防止投机者的过分操作对市场造成的不利影响。

2.3 保证金的操作

如果两个投资者相互间直接接触并同意在将来某时刻按某一特定的价格交易一项资产，这就明显地存在着风险。一方投资者可能会后悔该项交易，极力想毁约。另一方面，该投资者可能没有财力来保证该项协议的实施。交易所的一个核心作用就是组织交易以便最大程度上减少合约违约的情况。这就是保证金的由来。

盯市

为了说明保证金是如何操作的，我们来考虑一个投资者，他或她于1992年6月1日星期一与其经纪人联系，打算购买两张纽约商品交易所(COMEX)1992年12月份的黄金期货合约。我们假定当时的期货价格为每盎司黄金$400。由于合约的规模为100盎司，所以投资者约定以这一价格购买总额为200盎司的黄金。经纪人将要求投资者将款项存在保证金帐户(margin account)中。投资者在最初开仓交易时必须存入的资金数量被称为初始保证金(initial margin)。初始保证金由经纪人来决定。我们假定每一合约的初始保证金为$2000，即初始保证金总额为$4000。在每天交易结束时，保证金帐户要进行调整，以反映该投资者的盈利或损失。这就是所谓的盯市(marking to market)操作。

例如，假定在6月1日交易结束时，黄金期货价格从$400跌到$397。投资者损失了200×$3即$600。这是由于该投资者约定要以$400的价格购买的200盎司的12月份黄金，现在仅按$397的价格出售。因此保证金帐户的余额要减少$600，即减少到$3400。与此类似，如果12月份黄金期货的价格在第一个交易日结束时升到$403，保证金帐户的余额也增加$600，即增加到$4600。一笔交易是在该交易发生日结束时首次进行盯市结算的。随后，在每个交易日结束时，都要进行盯市结算。到了交割期，由期货空头方履行交割，收取的价格通常为合约最后盯市时的期货价格。

注意，盯市制不仅仅是经纪人和其客户之间的协议。当期货价格下降$600时，期货多头投资者的保证金帐户减少了$600，投资者的经纪人必须向交易所支付$600，交易所将这资金转交给空头投资者的经纪人。与此类似，当期货价格上升时，空头方的经纪人将资金支付给交易所，交易所再将它转交给多头方的经纪人。

在后面，我们将详细论述保证金帐户的操作机制。

维持保证金

投资者有权提走保证金帐户中超过初始保证金的那部分资金。为了确保保证金帐户的资金余额在任何情况下都不会为负值，设置了维持保证金(maintenance margin)，维持保证金数额通常低于初始保证金数额。如果保证金帐户的余额低于维持保证金，投资者就会收到保证金催付(margin call)通知，要求在一个很短的期限内将保证金帐户内资金补足到初始保证金的水平。我们将这一追加的资金称作变动保证金(variation margin)。如果投资者不能提供变动保证金，经纪人将出售该合约来平仓。在前例中，投资者平仓包括通过出售 200 盎司交割月份为 12 月份的黄金来结清现有的合约。

表 2.1 说明如果随后期货价格为表中序列所示时，上例中的投资者的保证金帐户的操作。为了便于说明，我们假定每张合约的维持保证金为 $1500，即总额为 $3000。在 6 月 9 日，保证金帐户的余额比维持保证金还低了 $340。于是经纪人就发出要求追加保证金 $1340 的“保证金催付”通知。该表假定投资者在 6 月 10 日收盘时补足了这个追加保证金。在 6 月 15 日，保证金帐户的余额再度低于维持保证金，经纪人又发出要求追加 $1260 的“保证金催付”通知。投资者在 6 月 16 日收盘时补足了这个追加保证金。在 6 月 22 日，投资者决定卖出 2 张合约来平仓。在那天期货的价格为 $392.30，投资者的累计损失为 $1540。注意在 6 月 10 日、17 日、18 日和 19 日，投资者的保证金帐户上有超过初始保证金的超额资金。该表假定投资者没有抽走这笔超额资金。

表 2.1　两张黄金期货合约多头的保证金的操作

初始保证金为每张合约 $2000，即总额为 $4000；维持保证金为每张合约 $1500，即总额为 $3000。合约于 6 月 1 日以 $400 的价格开仓，并于 6 月 22 日按 $392.30 的价格平仓。第 2 列的数字除了第一个和最后一个外，为交易当天期货的收盘价。

日期	期货价格（$）	每日盈利（亏损）（$）	累计盈利（亏损）（$）	保证金帐户余额（$）	保证金催付（$）
	400.00			4,000	
1	397.00	(600)	(600)	3,400	
2	396.10	(180)	(780)	3,220	
3	398.20	420	(360)	3,640	
4	397.10	(220)	(580)	3,420	
5	396.70	(80)	(660)	3,340	
8	395.40	(260)	(920)	3,080	
9	393.30	(420)	(1,340)	2,660	1,340
10	393.60	60	(1,280)	4,060	
11	391.80	(360)	(1,640)	3,700	
12	392.70	180	(1,460)	3,880	
15	387.00	(1,140)	(2,600)	2,740	1,260
16	387.00	0	(2,600)	4,000	
17	388.10	220	(2,380)	4,220	
18	388.70	120	(2,260)	4,340	
19	391.00	460	(1,800)	4,800	
22	392.30	260	(1,540)	5,060	

进一步的细节

一些经纪人允许对投资者保证金帐户的余额支付利息。如果利率是公道的，即在任何其它的地方也能获得该项利率，则保证金帐户的余额就不一定代表真实的成本。为了满足初始保证金的要

求(不是后来的"保证金催付"),投资者有时可以将有价证券存放在其经纪人那里。通常短期国库券可以按其面值的90%来代替现金。股票有时也可以代替现金,但通常大约为其面值的50%。

盯市的结果是期货合约每日进行结算而不是在其最后期限才进行结算。在每个交易日结束时,将投资者的盈利(亏损)加入其保证金帐户(或从保证金帐户中扣除)。这再次将期货合约的价值变为零。一个期货合约实际上是每天平仓并以新的价格重新开仓。

交易所设置初始保证金和维持保证金的最低水平。经纪人要求客户存放的保证金可能比交易所规定的要高。然而,经纪人要求客户交付的保证金不得低于交易所规定的保证金水平。保证金数额大小是由标的资产价格的变化程度来决定的。波动率越高,要求的保证金水平就越高。维持保证金通常为初始保证金的75%。

要求的保证金数额可能取决于客户的目标。对于一个真正的套期保值者来说,例如某个公司生产某产品并卖出该产品的期货,对它的保证金要求通常低于对投机者的保证金要求。这是由于套期保值者的违约风险小。通常当日交易和价差交易要求的保证金低于套期保值交易的保证金。所谓当日交易(day trade)是指交易者向其经纪人宣布他或她计划在同一天中平仓的交易。即,如果交易者已经开了一个多头,他或她计划在同一天的晚些时候做空头平仓。如果交易者已经开了一个空头,则计划在同一天的晚些时候做多头平仓。所谓价差交易(spread transaction)是指交易者在持有某一交割月份合约的多头的同时还持有另一交割月份合约的空头的交易。

注意对空头方的保证金要求与对多头方的保证金要求一致。做期货的空头与做期货的多头一样容易。而现货市场则不具有这种对称性。持有现货市场的多头就是购买资产,这不存问题。持

有现货市场的空头则是卖出一项不属于你的资产。这是一个比较复杂的交易，不同的市场有不同的规定。在下一章再详细讨论这个问题。

结算所和结算保证金

交易结算所(exchange clearinghouse)是交易所的附属机构，它作为期货交易的媒介或中间人。它保证每笔交易的双方履行合约。结算所拥有一定数量的会员，会员公司在结算所附近设立办公场所。那些不是结算所会员的经纪人，必须通过结算所的会员来执行业务。结算所的主要责任是对每日发生的所有交易进行记录，以便计算每一会员的净头寸。

与经纪人要求投资者开设一定的保证金帐户一样，结算所也要求其会员在结算所开设一定的保证金帐户。我们称它为结算保证金(clearing margin)。与投资者保证金帐户的操作方式类似，结算所会员的保证金帐户在每一交易日结束时也按照其盈利和亏损进行调整。但是，对结算所会员来说，只有初始保证金，没有维持保证金。每一天每一种合约的保证金帐户的余额必须保持一定的金额，即必须等于初始保证金乘以流通在外的合约数。因此，结算所会员在每个交易日结束时，根据每天中发生的交易和价格变动，可能必须在其结算保证金帐户中追加资金。另一方面，它也可能在此时从结算保证金帐户中抽出资金。经纪人如果本身不是结算所的会员，则他必须在结算所会员那里开设一定的保证金帐户。

交易结算所在计算结算保证金时有两种方式：或是基于总值，或是基于净值，来计算流通在外的合约数。基于总值(gross basis)方式是将客户开的多头总数与客户开的空头总数相加。基于净值(net basis)方式是允许多头和空头相互抵消。假定某结算所会员有两个客户，一方持有 20 张合约的多头，另一方持有 15 张合约的空头。基于总值的方式将以 35 张合约为基础来计算结算保证金；

基于净值方式将以5张合约为基础来计算结算保证金。现在大多数的交易所运用基于净值方式计算结算保证金。

需要强调的是，保证金制度的最终目的是减少市场参与者由于对方违约而蒙受损失的可能性。整体来说，该制度是成功的，由于违约而产生的损失几乎是不存在的。

2.4 报纸行情

许多报纸都刊载有期货的行情报价。在《华尔街日报》货币和投资版中的“商品”、“利率工具”、“指数交易”和“外汇”的条目下，就有期货的报价。表2.2为1991年10月18日星期五的《华尔街日报》中的商品期货的报价。这些报价是前一个交易日进行交易的价格(1991年10月17日，星期四)。在第三章中，我们将给出指数期货和外汇期货的报价。在第四章中，我们将给出利率期货的报价。

在每一页的页首，刊载有期货合约的标的资产、交易该期货合约的交易所、合约的规模和价格的报价方法。表2.2中，第一项资产是在CBOT中交易的玉米。合约的规模为5,000蒲式耳，以每蒲式耳多少美分来进行报价的。在第一列中显示了交易的特定合约的月份。1991年10月17日交易的玉米期货合约的到期月分别为1991年12月份、1992年3月份、1992年5月份、1992年7月份、1992年9月份和1992年12月份。

价格

每行中前三个数字分别为开盘价、交易当天达到的最高价和交易当天达到的最低价。开盘价是在每天交易开始后，立即成交的期货合约的价格。1991年10月17日交易的12月份玉米期

货，开盘价是每蒲式耳 247 $\frac{1}{4}$ 美分。当天交易的价格在 246 $\frac{3}{4}$ 和 249 $\frac{1}{4}$ 之间。

结算价格

每行中的第四个数字是结算价格(settlement price)。这是在交易日结束之前的最后几秒钟内期货合约交易的平均价格。第五个数字是当天结算价与上一个交易日结算价相比的变化值。对于 1991 年 12 月份的玉米期货合约来说，结算价格在 1991 年 10 月 17 日是 248 美分，比 1991 年 10 月 16 日价格上涨了 2 美分。

结算价格是很重要的，因为结算价格可用于计算每日盈亏和保证金要求。对于 1991 年 12 月份的玉米期货合约来说，持有期货合约多头的投资者会发现，1991 年 10 月 17 日保证金帐户的余额比 1991 年 10 月 16 日多了 $100(=5000×2 美分)。与此类似，期货合约空头的投资者会发现 1991 年 10 月 17 日其保证金帐户的余额比 10 月 16 日减少了 $100。

表 2.2　1991 年 10 月 18 日《华尔街日报》商品期货行情报价

COMMODITIES FUTURES PRICES

Thursday, October 17, 1991.

Open Interest Reflects Previous Trading Day.

—GRAINS AND OILSEEDS—

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
CORN (CBT) 5,000 bu.; cents per bu								
Dec	247¼	249¼	246¾	248	+ 2	275	220	121,226
Mr92	256½	258¼	256	257¼	+ ¾	277½	228½	66,974
May	263	264¾	262¼	263¾	+ ¾	279½	234¾	24,144
July	267¼	269½	266¾	268	+ ¾	282	239½	15,280
Sept	259½	260¾	259½	260	+ 1	265	236½	7,529
Dec	257½	257½	256	256¾	+ ⅛	262½	236½	6,905
Est vol 33,000; vol Wed 34,250; open int 237,087, + 1,880.								
OATS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.								
Dec	134½	135	133	133½	— ¾	151½	118½	9,227
Mr92	143½	144	141¾	142¼	— ½	157	126½	1,968
May	149	149	148½	147	— 1	159½	132	216
July	152	152½	151¼	150	— 1	161½	139¾	185
Est vol 1,250; vol Wed 1,549; open int 11,649, + 113.								
SOYBEANS (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.								
Nov	554½	556¼	546½	547¼	— 4¾	675	537	46,939
Ja92	566	568	558	558½	— 4¾	659	527½	28,160
Mar	576½	579	569	569¾	— 4½	666	538	20,226
May	586½	589	578	578¼	— 6¼	668	547	8,345
July	593½	596½	586½	586¾	— 5¼	668	554	8,703
Aug	597	597½	589	589	— 4¾	660	565	739
Sept	589	589	585	582	— 3	628	553	651
Nov	589½	591½	582¼	582½	— 6½	620¾	553	4,806
Est vol 37,000; vol Wed 26,970; open int 116,471, —340.								
SOYBEAN MEAL (CBT) 100 tons; $ per ton.								
Oct	183.50	184.00	181.40	181.40	— .80	201.00	159.90	2,041
Dec	180.70	181.20	178.70	178.70	— 1.30	198.50	160.00	32,996
Ja92	180.30	180.30	178.00	178.10	— 1.20	197.00	161.30	10,054
Mar	179.00	179.00	176.70	176.70	— 1.10	197.00	163.50	11,445
May	178.50	177.00	175.20	175.20	— 1.10	194.00	164.50	5,992
July	176.20	177.00	175.10	175.20	— .90	196.00	166.00	2,918
Aug	176.50	176.70	175.00	175.00	— 1.00	188.50	172.00	1,015
Sept	176.00	176.50	176.00	175.50	— .50	186.00	172.00	860
Oct	189.00	189.00	187.50	187.50	— .50	194.00	186.00	324
Dec	189.00	189.00	188.00	188.00	—1.20	199.00	187.00	435
Est vol 18,000; vol Wed 18,081; open int 68,080, + 1,833								
May	44.90	45.00	43.35	43.50	— 1.67	59.00	43.35	1,003
July	45.10	45.10	43.55	43.90	— 1.42	59.00	43.55	226
Est vol 4,934; vol Wed 2,668; open int 10,872, + 271.								

—FOOD & FIBER—

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
COCOA (CSCE)—10 metric tons; $ per ton.								
Dec	1,213	1,227	1,211	1,219	+ 8	1,535	953	18,040
Mr92	1,273	1,285	1,274	1,278	+ 7	1,538	997	15,380
May	1,312	1,315	1,308	1,311	+ 8	1,385	1,056	6,236
July	1,338	1,343	1,338	1,341	+ 11	1,410	1,056	4,213
Sept	1,366	1,370	1,365	1,365	+ 7	1,429	1,080	2,337
Dec	1,403	1,403	1,396	1,402	+ 10	1,460	1,119	2,495
Mr93	1,437	1,437	1,430	1,434	+ 9	1,490	1,272	2,585
May	....	....	....	1,459	+ 9	1,450	1,210	1,117
July	....	....	....	1,484	+ 9	1,447	1,320	842
Est vol 3,723; vol Wed 6,186; open int 54,245, —365.								
COFFEE (CSCE) -37,500 lbs.; cents per lb.								
Dec	82.00	83.75	82.00	82.80	+ .30	116.00	78.90	27,347
Mr92	86.15	87.60	86.15	86.65	+ .20	107.50	80.10	12,571
May	88.65	90.10	88.65	89.15	+ .35	106.00	85.40	3,856
July	91.50	91.90	91.50	91.65	+ 1.15	108.00	87.85	907
Sept	93.70	94.70	93.70	94.15	+ 1.15	108.00	90.50	719
Dec	97.00	97.00	96.95	96.95	— 2.05	107.25	93.90	109
Est vol 10,008; vol Wed 7,739; open int 44,509, —187.								
SUGAR—WORLD (CSCE)—112,000 lbs.; cents per lb.								
Mar	8.79	8.89	8.79	8.90	— .02	10.14	7.56	52,748
May	8.69	8.78	8.69	8.78	— .04	9.77	7.63	18,993
July	8.68	8.72	8.67	8.68	— .02	9.16	7.85	9,353
Oct	8.67	8.68	8.64	8.64	— .04	9.06	8.05	6,877
Mar	....	....	....	8.62	+ .04	8.45	8.37	215
Est vol 6,965; vol Wed 14,171; open int 89,184, —1,047.								
SUGAR—DOMESTIC (CSCE)—112,000 lbs.; cents per lb.								
Jan	21.75	21.75	21.70	21.71	+ .01	23.01	21.68	3,260
Mar	21.80	21.82	21.80	21.80	. .	22.80	21.74	3,218
July	....	....	....	456.9	+ 1.1	470.5	439.0	1,383
Est vol 8,000; vol Wed 10,704; open int 92,152, + 1,676.								
SILVER (CBT)—1,000 troy oz.; cents per troy oz.								
Oct	407.0	410.0	405.0	410.0	....	527.0	380.0	2
Dec	414.0	415.0	408.0	412.0	— 1.0	575.0	374.0	4,277
Fb93	419.0	419.0	415.0	416.5	— 0.5	476.0	384.0	123
Apr	424.0	424.0	419.0	421.0	....	485.0	385.0	123
June	429.0	429.0	424.0	425.0	— 1.0	494.0	400.0	829
Est vol 50; vol Wed 82; open int 5,389, — 7.								
CRUDE OIL, Light Sweet (NYM) 1,000 bbls.; $ per bbl.								
Nov	23.78	23.96	23.72	23.93	+ .26	28.10	17.20	40,068
Dec	23.53	23.68	23.48	23.66	+ .25	27.70	17.10	83,651
Ja92	23.25	23.38	23.22	23.36	+ .21	27.60	17.35	44,703
Feb	22.96	23.05	22.91	23.06	+ .18	27.00	17.50	23,465
Mar	22.68	22.70	22.62	22.74	+ .14	26.75	17.25	15,170
Apr	22.38	22.38	22.31	22.42	+ .10	26.50	17.50	24,906
May	22.14	22.14	22.03	22.17	+ .08	24.60	17.30	9,133
June	21.95	21.95	21.82	21.97	+ .06	24.50	17.70	9,997
July	21.79	21.79	21.70	21.80	+ .04	23.59	17.90	7,892
Aug	21.67	21.67	21.54	21.66	+ .03	21.68	17.75	5,727
Sept	21.42	21.42	21.42	21.54	+ .02	24.00	17.78	2,448
Oct	....	....	....	21.43	....	22.00	18.85	2,586
Nov	21.25	21.25	21.25	21.36	— .01	21.45	19.70	2,235
Dec	21.25	21.25	21.25	21.31	— .02	24.00	18.25	8,459
Ja93	21.23	21.25	21.25	21.24	— .02	21.25	20.10	2,559
Feb	....	....	....	21.19	— .02	20.91	20.50	1,103
Mar	....	....	....	21.14	— .02	21.25	18.64	3,007
June	....	....	....	21.14	— .02	23.00	18.60	9,199
Sept	....	....	....	21.15	— .02	21.05	20.85	620
Dec	....	....	....	21.16	— .02	23.00	18.70	6,844
Ju94	....	....	....	21.26	— .02	21.35	20.60	6,969
Est vol 88,660; vol Wed 133,184; open int 309,246, +2,722.								
HEATING OIL NO. 2 (NYM) 42,000 gal.; $ per gal.								
Nov	.6880	.6955	.6870	.6940	+.0096	.7800	.5230	24,422
Dec	.6995	.7060	.6980	.7044	+.0082	.8262	.5330	47,504
Ja92	.7010	.7065	.7000	.7062	+.0069	.8700	.5340	28,438
Feb	.6835	.6870	.6820	.6863	+.0064	.8670	.5225	12,725
Mar	.6500	.6525	.6490	.6520	+.0057	.6525	.5415	6,590
Apr	.6175	.6220	.6175	.6225	+.0057	.6220	.5000	7,805

Reprinted by permission from *The Wall Street Journal*, October 18, 1991. Copyright ©Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

TABLE 2.2 Commodity Futures Quotes from *The Wall Street Journal*, October 18, 1991 (*continued*)

SOYBEAN OIL (CBT) 60,000 lbs.; cents per lb.

Oct	19.44	19.54	19.33	19.34	+ .04	24.90	18.50	1.216
Dec	19.70	19.79	19.55	19.55	....	24.75	18.85	17,637
Ja92	19.84	19.95	19.73	19.74	....	24.15	19.00	13,140
Mar	20.16	20.20	20.03	20.05	– .02	24.10	19.35	11,499
May	20.52	20.60	20.32	20.33	– .04	24.00	19.60	4,158
July	20.83	20.85	20.58	20.59	– .09	24.30	19.88	1,790
Aug	20.70	20.70	20.70	20.70	– .11	22.20	20.70	537
Sept	20.85	20.85	20.75	20.75	– .20	22.30	20.90	419
Oct	20.70	20.75	20.70	20.72	– .23	22.30	20.65	426
Dec	21.07	21.07	21.07	21.05	– .20	23.60	21.00	144

Est vol 17,000; vol Wed 12,019; open int 60,986, +521.

WHEAT (CBT) 5,000 bu.; cents per bu.

Dec	349½	353	349	352¾	+ 3¼	353	272½	32,039
Mr92	351¼	355	351½	354½	+ 2¾	355	279	17,001
May	344	346½	344	345¼	+ 1½	346½	280½	4,373
July	331	333½	330	330	+ ¼	332½	279	6,545
Sept	325½	327¼	325½	325½	+ 1	327¼	292	350
Dec	346	346½	345	345	+ ½	346½	338	180

Est vol 10,000; vol Wed 11,215; open int 60,488, +540.

WHEAT (KC) 5,000 bu.; cents per bu.

Dec	355	357	354	356	+ 3¼	357	272½	19,002
Mr92	354½	357	354	356¼	+ 2½	357	275½	14,193
May	344½	348	344½	347½	+ 3¼	348	273	3,868
July	337	340	336½	339¼	+ 3¼	340	295	3,639

Est vol 5,255; vol Wed 8,593; open int 40,708, – 47.

WHEAT (MPLS) 5,000 bu.; cents per bu.

Dec	335	338¼	335	337¾	+ 3	338½	269½	10,104
Mr92	343	345¼	343	344½	+ 2½	345¼	279½	3,963
May	346	347	346	346½	+ 2½	347	284	697

Est vol 2,595; vol Wed 3,653; open int 14,897, – 59.

BARLEY (WPG) 20 metric tons; Can. $ per ton

Oct	83.80	83.80	83.50	83.80	+ .50	94.50	74.20	502
Dec	85.80	85.80	85.60	85.60	....	95.80	77.20	2,407
Mr92	90.50	90.60	90.00	90.00	– .10	97.50	81.00	2,178
May	92.50	92.70	92.40	92.40	....	96.00	85.70	486

Est vol 420; vol Wed 359; open int 5,593, +127.

FLAXSEED (WPG) 20 metric tons; Can. $ per ton

Oct	....	....	....	194.00	– 1.10	292.00	183.00	10
Dec	199.90	200.10	197.80	197.20	– 2.70	272.50	183.10	1,688
Mr92	207.50	207.50	205.00	205.20	– 1.90	234.50	193.20	1,970
May	....	....	....	210.00	– 2.10	232.00	200.20	594

Est vol 1,725; vol Wed 385; open int 6,799, +170.

May	21.95	21.95	21.95	21.95	– .04	22.30	21.81	1,121
July	....	....	....	22.04	– .04	22.39	21.95	1,699
Sept	....	....	....	22.05	– .03	22.39	21.95	294

Est vol 318; vol Wed 189; open int 9,588, +129.

COTTON (CTN)–50,000 lbs.; cents per lb.

Dec	64.00	64.05	63.20	63.29	– .66	76.35	63.20	19,798
Mr92	65.90	66.00	65.45	65.44	– .41	77.15	64.70	10,234
May	66.60	66.60	66.25	66.30	– .20	77.30	65.10	4,252
July	67.25	67.25	67.00	67.12	– .13	77.70	65.50	3,767
Oct	65.90	66.10	65.90	66.00	+ .05	70.60	65.60	461
Dec	65.85	66.05	65.81	65.85	– .12	69.00	65.30	1,436

Est vol 3,950; vol Wed 3,246; open int 40,708, –16.

ORANGE JUICE (CTN)–15,000 lbs.; cents per lb.

Nov	161.50	165.25	161.25	163.60	+ 2.80	166.20	111.00	3,493
Ja92	157.60	157.60	156.70	156.70	+ 8.00	157.60	112.40	5,606
Mar	150.70	150.70	150.00	150.70	+ 8.00	150.70	112.60	2,600
May	150.95	150.95	150.00	150.95	+ 8.00	150.95	115.00	634
July	150.95	150.95	150.95	150.95	+ 8.00	150.95	115.25	120

Est vol 1,800; vol Wed 1,788; open int 12,499, –252.

–METALS & PETROLEUM–

COPPER-HIGH (CMX)–25,000 lbs.; cents per lb.

Oct	106.70	107.20	106.20	107.00	+ .90	109.50	95.30	1,505
Nov	106.00	106.70	105.60	106.35	+ 1.30	107.80	95.10	1,492
Dec	105.10	106.90	104.70	105.95	+ 1.30	108.50	94.50	24,915
Ja92	....	....	....	104.80	+ 1.25	108.50	95.00	930
Feb	....	....	....	104.05	+ 1.15	108.10	95.00	290
Mar	102.70	103.40	102.40	103.35	+ 1.10	106.80	93.90	4,684
Apr	....	....	....	102.80	+ 1.00	100.00	93.50	235
May	101.40	101.70	101.40	101.70	+ .95	106.20	93.30	1,915
June	....	....	....	101.85	+ .95	102.00	94.80	130
July	....	....	....	101.30	+ .85	100.80	92.80	1,591
Sept	....	....	....	100.65	+ .80	103.65	97.80	1,284
Dec	....	....	....	99.65	+ .80	100.50	91.60	1,708
Mr93	98.50	98.60	98.50	98.70	+ .75	99.50	92.80	389

Est vol 6,000; vol Wed 4,879; open int 41,291, –359.

GOLD (CMX) - 100 troy oz.; $ per troy oz.

Oct	358.50	359.10	358.50	360.00	+ 1.80	476.00	343.00	327
Dec	360.80	362.60	360.00	363.30	+ 1.80	483.00	346.00	50,054
Fb92	363.40	365.20	363.00	365.20	+ 1.90	436.50	349.80	11,252
Apr	366.50	368.30	366.10	367.98	+ 2.00	446.00	354.00	11,252
June	368.60	369.00	368.50	370.60	+ 2.10	467.00	355.00	8,356
Aug	....	....	....	373.50	+ 2.20	426.50	359.60	4,446
Oct	....	....	....	376.20	+ 2.20	410.80	364.20	1,384

May	.6010	.6025	.6000	.6035	+ .0057	.6025	.4875	4,854
June	.5865	.5900	.5865	.5905	+ .0057	.5900	.4900	1,365
July	.5820	.5840	.5820	.5860	+ .0057	.5840	.5160	5,802
Aug	.5860	.5860	.5860	.5915	+ .0062	.5870	.5070	2,098
Sept	....	....	....	.6015	+ .0062	.5980	.5375	101
Oct	....	....	....	.6100	+ .0062	.6065	.5450	126
Dec	....	....	....	.6270	+ .0067	....	....	230

Est vol 33,364; vol Wed 40,477; open int 147,104, +1,303.

GASOLINE, Unleaded (NYM) 42,000 gal.; $ per gal.

Nov	.6380	.6480	.6380	.6450	+ .0124	.8675	.4860	13,942
Dec	.6355	.6400	.6345	.6390	+ .0104	.7525	.4775	19,960
Ja92	.6270	.6330	.6270	.6320	+ .0097	.6435	.4790	14,474
Feb	.6280	.6320	.6280	.6330	+ .0087	.6320	.5070	15,313
Mar	.6380	.6405	.6380	.6420	+ .0075	.6405	.5050	7,077
Apr	.6775	.6790	.6775	.6800	+ .0070	.6790	.5500	8,042
May	.6730	.6735	.6715	.6730	+ .0065	.6735	.5525	5,427
June	....	....	....	.6610	+ .0060	.6580	.5520	3,984
July	....	....	....	.6480	+ .0060	.6500	.5270	3,726
Aug	.6325	.6325	.6325	.6350	+ .0060	.6335	.5070	4,277

Est vol 21,097; vol Wed 18,810; open int 95,712, –376.

NATURAL GAS, (NYM) 10,000 MMBtu.; $ per MMBtu's

Nov	2.010	2.020	2.010	2.014	+ .013	2.040	1.430	2,426
Dec	2.185	2.190	2.175	2.186	+ .006	2.360	1.665	5,124
Ja92	2.315	2.315	2.305	2.314	+ .004	2.360	1.790	5,953
Feb	1.930	1.930	1.925	1.927	....	2.040	1.535	4,664
Mar	1.625	1.625	1.620	1.620	+ .004	1.675	1.250	2,120
Apr	1.460	1.461	1.460	1.461	+ .011	1.500	1.250	1,084
May	1.465	1.465	1.465	1.465	+ .005	1.495	1.250	994
June	1.475	1.475	1.472	1.475	+ .010	1.510	1.250	1,089
July	1.480	1.480	1.480	1.480	+ .005	1.510	1.270	724
Aug	1.485	1.485	1.485	1.485	....	1.570	1.420	735
Sept	....	....	....	1.510	....	1.550	1.440	509

Est vol 2,109; vol Wed 3,714; open int 25,568, +509.

BRENT CRUDE (IPE) 1,000 met bbls.; $ per bbl.

Dec	22.15	22.45	22.15	22.42	+ .25	22.55	18.45	29,884
Ja92	22.05	22.10	21.96	21.88	+ .29	22.17	19.40	44,735
Feb	21.72	21.75	21.62	21.72	+ .22	21.97	19.33	10,664
Mar	21.35	21.40	21.31	21.35	+ .07	21.50	19.10	2,608
Apr	21.08	21.10	21.08	20.98	+ .18	21.10	19.20	3,359
May	20.84	20.85	20.70	20.70	+ .60	20.85	19.05	2,404
June	....	....	....	20.60	+ .40	19.76	19.50	1,547
July	....	....	....	20.55	+ .40	20.28	19.45	2,795

Est vol 22,218; vol Wed 43,970; open int 98,936, –1,462.

TABLE 2.2 Commodity Futures Quotes from *The Wall Street Journal*, October 18, 1991 (*continued*)

CANOLA (WPG) 20 metric tons; Can. $ per ton

Nov	274.10	275.50	274.10	274.40	+ .30	326.50	247.10	10,620
Ja92	280.40	283.70	280.40	280.60	+ .20	317.50	253.40	11,152
Mar	286.40	287.50	286.40	286.40	....	321.50	261.80	4,539
June	295.80	296.60	295.50	295.50	+ .90	326.40	267.00	3,258

Est vol 2,050; vol Wed 3,257; open int 29,585, +1,029.

WHEAT (WPG) 20 metric tons; Can. $ per ton

Oct	99.00	99.00	98.00	98.00	– 1.00	111.60	84.10	570
Dec	96.00	96.30	94.80	95.00	– 1.00	104.30	86.00	4,868
Mr92	98.50	98.80	97.80	98.00	– .10	106.00	89.00	4,316
May	100.70	101.00	100.00	100.00	– .20	104.00	92.00	1,081
July	102.80	102.90	102.50	102.50	+ .50	102.90	100.30	143

Est vol 1,460; vol Wed 1,260; open int 10,978, +393.

–LIVESTOCK & MEAT–

CATTLE-FEEDER (CME) 44,000 lbs.; cents per lb.

Oct	85.85	85.85	85.45	85.67	– .17	88.30	80.20	2,484
Nov	86.35	86.35	85.65	85.82	– .45	88.10	80.90	3,846
Ja92	85.37	85.37	84.90	85.07	– .25	87.80	80.80	2,171
Mar	83.52	83.65	83.25	83.60	– .20	87.10	80.27	952
Apr	83.20	83.20	83.00	83.12	– .23	87.00	79.90	461
May	82.05	82.25	82.02	82.10	– .02	86.50	78.95	390
Aug	81.85	81.95	81.70	81.70	+ .10	83.00	80.50	85

Est vol 1,548; vol Wed 1,741; open int 10,410, –232.

CATTLE-LIVE (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

Oct	73.90	74.25	73.75	74.20	+ .27	76.90	68.62	5,957
Dec	76.95	77.00	76.65	76.95	+ .10	77.27	71.15	24,981
Fb92	75.87	75.95	75.67	75.90	+ .07	76.70	71.00	14,263
Apr	75.75	75.75	75.45	75.67	– .05	77.00	72.10	9,705
June	72.55	72.55	72.30	72.47	– .07	75.95	70.25	3,915
Aug	70.75	70.75	70.30	70.30	– .20	72.60	69.25	958
Oct	71.10	71.10	71.00	71.00	– .02	72.10	69.80	135

Est vol 10,962; vol Wed 16,125; open int 69,914, –606.

HOGS (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

Oct	44.60	44.80	44.00	44.00	– .60	49.55	42.05	1,751
Dec	44.10	44.10	43.52	43.57	– .57	48.92	42.00	8,519
Fb92	43.32	43.32	42.80	42.90	– .45	48.35	41.60	3,779
Apr	41.80	41.87	41.35	41.37	– .40	46.62	40.70	2,650
June	46.30	46.30	46.10	46.10	– .17	50.60	45.55	416
July	46.20	46.45	46.15	46.20	– .17	48.20	45.55	267
Aug	....	....	....	44.87	– .10	46.85	44.10	185

Est vol 4,112; vol Wed 3,780; open int 17,618, – 141.

PORK BELLIES (CME) 40,000 lbs.; cents per lb.

Feb	44.45	44.60	42.57	42.57	– 2.00	63.15	42.57	8,017
Mar	44.15	44.22	42.42	42.50	– 1.70	63.05	42.42	1,521
Dec	376.70	376.70	376.70	379.20	+ 2.20	431.00	346.00	2,495
Fb93	....	....	....	382.30	+ 2.30	404.20	371.00	957
Apr	....	....	....	385.40	+ 2.40	410.00	375.00	1,006
June	....	....	....	388.70	+ 2.50	418.50	376.40	2,519
Aug	....	....	....	392.10	+ 2.60	....	....	660
Dec	....	....	....	398.90	+ 2.60	....	....	300

Est vol 40,000; vol Wed 23,221; open int 94,760, +2,608.

PLATINUM (NYM)–50 troy oz.; $ per troy oz.

Oct	371.50	371.50	371.50	370.70	+ 1.90	513.00	330.00	518
Ja92	371.00	373.50	370.60	372.70	+ 1.40	451.50	334.50	13,253
Apr	374.00	376.00	374.00	376.20	+ 1.40	436.50	339.50	1,533
July	380.00	380.00	378.50	379.80	+ 1.40	427.50	342.00	771
Oct	....	....	....	386.80	+ 1.40	404.00	356.50	460

Est vol 1,368; vol Wed 1,810; open int 16,533, +40

PALLADIUM (NYM) 100 troy oz.; $ per troy oz.

Dec	85.35	86.50	85.35	86.30	+ .90	114.50	78.00	2,040
Mr92	86.50	86.50	86.50	87.20	+ .90	102.50	80.30	1,139

Est vol 165; vol Wed 309; open int 4,016, +154.

SILVER (CMX)–5,000 troy oz.; cents per troy oz.

Oct	410.0	410.0	410.0	409.7	– 0.1	471.0	399.0	557
Dec	414.0	416.0	408.5	412.5	– 0.2	623.5	374.0	56,967
Mr92	421.0	422.5	415.0	419.0	– 0.1	613.0	382.0	11,302
May	427.0	427.0	421.0	423.4	+ 0.1	589.0	385.0	6,001
July	430.0	430.0	426.0	427.7	+ 0.3	557.0	395.0	4,794
Sept	429.5	429.5	429.5	432.2	+ 0.5	483.0	408.0	1,393
Dec	436.0	436.0	436.0	438.8	+ 0.7	507.0	408.0	6,283
Mr93	....	....	....	446.9	+ 0.8	519.0	429.0	1,698
May	....	....	....	451.6	+ 1.0	471.0	438.0	1,554

EXCHANGE ABBREVIATIONS
(for commodity futures and futures options)

CBT-Chicago Board of Trade; CME-Chicago Mercantile Exchange; CMX-Commodity Exchange, New York; CRCE-Chicago Rice & Cotton Exchange; CTN-New York Cotton Exchange; CSCE-Coffee, Sugar & Cocoa Exchange, New York; FOX-London Futures and Options Exchange; IPE-International Petroleum Exchange; KC-Kansas City Board of Trade; MCE-MidAmerica Commodity Exchange; MPLS-Minneapolis Grain Exchange; NYM-New York Mercantile Exchange; PBOT-Philadelphia Board of Trade; WPG-Winnipeg Commodity Exchange.

GAS OIL (IPE) 100 metric tons; $ per ton

Nov	220.75	223.00	218.75	222.75	+ 3.75	225.00	169.00	26,408
Dec	210.00	223.00	219.00	223.00	+ 3.50	232.00	172.00	27,797
Ja92	216.00	219.75	216.00	219.50	+ 3.25	231.00	174.50	12,778
Feb	210.00	211.50	209.50	211.00	+ 2.00	220.00	175.75	5,849
Mar	200.00	203.50	200.00	202.00	+ 2.00	204.00	174.25	3,914
Apr	191.00	195.00	194.25	194.75	+ 1.50	195.00	171.00	2,778
May	188.00	188.00	188.00	188.00	+ 2.00	188.00	172.00	830
June	....	....	....	185.00	+ 3.00	184.00	172.00	478

Est Vol 16,000; vol Wed 21,536; open int 82,832, +1,759.

OTHER COMMODITY FUTURES

Settlement prices of selected contracts. Volume and open interest of all contract months.

	Vol.	High	Low	Close	Net Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
BROILERS (CME) 60,000 lbs.; ¢ per lb.								
Dec	0	....	....	49.75	....	51.05	46.50	357
CATTLE-LIVE (MCE) 20,000 lb.; ¢ per lb.								
Dec	90	77.00	76.65	76.95	+ .10	77.27	71.15	296
CORN (MCE) 5,000 bu.; cents per bu.								
Dec	1,400	249¼	246¾	248	+ 2	275	220	12,258
GOLD-KILO (CBT) 32.15 troy oz.; $ per troy oz.								
Dec	50	362.5	360.5	362.3	+ 1.80	424.0	346.0	414
HOGS (MCE) 20,000 lb.; ¢ per lb.								
Dec	70	44.10	43.52	43.57	– .57	48.92	42.00	719
LUMBER (CME) 160,000 bd. ft.; $ per 1,000 bd.ft								
Nov	461	194.7	189.8	190.9	+ .60	233.4	165.0	2,474
PROPANE (NYM) 42,000 gal.; ¢ per gal.								
Nov	284	47.75	41.50	42.50	+ .80	45.00	25.25	2,943
RICE-ROUGH (CRCE) 2000 cwt; $ per cwt								
Nov	325	8.850	8.590	8.710	+ .110	8.940	7.500	2,211
SILVER (MCE) 1,000 troy oz.; cents per troy oz.								
Nov	25	....	....	410.7	– 0.1	408.6	384.3	605
SORGHUM (KC) 5,000 bu.; cents per bu.								
Dec	0	....	....	235½	+ 1	257½	206	100
SOYBEANS (MCE) 1,000 bu.; cents per bu.								
Nov	5,400	556½	546½	547½	– 4¾	674	517	17,941
SOYBEAN MEAL (MCE) 20 tons; $ per ton								
Dec	20	181.2	178.7	178.7	– 1.30	198.5	160.0	307
WHEAT (MCE) 1,000 bu.; cents per bu.								
Dec	300	353	349	352¾	+ 3¼	353	277½	3,975

有效期内的最高价和最低价

每行中的第六个和第七个数字是交易某一特定合约所达到的历史最高价和最低价。1991 年 12 月份玉米期货合约的最高价和最低价分别为 275 美分和 220 美分(截止到 1991 年 10 月 17 日，该合约已经交易了一年多)。

未平仓合约数和交易量

表 2.2 中的最后一列为每一合约的未平仓合约数(open interest,也称头寸开放权益数)。这是流通在外的合约的总数。它是所有多头数之和,相应地也是所有空头数之和。由于数据处理中的困难,所以未平仓合约数的信息比价格信息要迟一个交易日。因此,在 1991 年 10 月 18 日的《华尔街日报》中,未平仓合约数是 1991 年 10 月 16 日交易结束时的数据。对于 1991 年 12 月份的玉米期货合约来说,未平仓合约数为 121,226。

在每种商品期货行情报价的结尾一行,表 2.2 刊载有 1991 年 10 月 17 日该商品合约的估计总交易量,以及 1991 年 10 月 16 日这天该商品合约的实际交易量。它也载有 1991 年 10 月 16 日所有商品合约的未平仓合约总数以及这些未平仓合约总数相对于前一天(1991 年 10 月 15 日)未平仓合约总数的变化量。对于所有玉米期货合约来说,1991 年 10 月 17 日估计的交易量为 33,000,1991 年 10 月 16 日实际交易量为 34,250。1991 年 10 月 16 日该种商品所有期货合约的未平仓合约总数为 237,082,比前一天增加 1,880。

有时会发生一天中的交易量超过交易结束时的这天未平仓合约数。这就表明当天存在大量的当日交易。

期货的价格模式

从表 2.2 中我们可以找出期货价格的不同模式。纽约商品交易所(New York Mercantile Exchange)中,铂期货的价格随着期限的增加而增加。我们称之为正常市场(normal market)。与此相反,纽约商品期货交易所(New York Commodity Exchange)中的铜期货的价格随着期限的增加而减少。我们称之为逆转市场(inverted market)。对于棉花来说,则属于混合型。期货的价格最初随着期限的增加而增加,接着随期限的增加而减少。在第三章中,我们将讨论决定一个商品期货价格模式的因素。

2.5 期货价格收敛于现货价格

随着期货合约的交割月份的逼近,期货的价格收敛于标的资产的现货价格。当到达交割期限时,期货的价格等于或非常接近于现货的价格。

为了说明原因,首先假定在交割期间,期货的价格高于现货的价格。这就存在一个明显的套利机会:

1. 卖空期货合约。
2. 买入资产。
3. 进行交割。

这必定会盈利,该盈利额等于期货价格高于现货价格的那部分。一旦交易者发现这一套利机会,期货的价格就会下降。其次,假定在交割期间,期货的价格低于现货的价格。打算获得该标的资产的公司将会发现,购买期货合约然后静等空头方交割对公司更为有利。一旦公司进行如此操作,期货的价格就会上升。

图 2.1 说明了期货的价格收敛于现货的价格。图 2.1(a)中,在交割月份之前,期货价格高于现货价格(这与表 2.2 中的铂期货

合约相符合)。图 2.1(b)中,在交割月份之前,期货价格低于现货价格(这与表 2.2 中的铜期货合约相符合)。

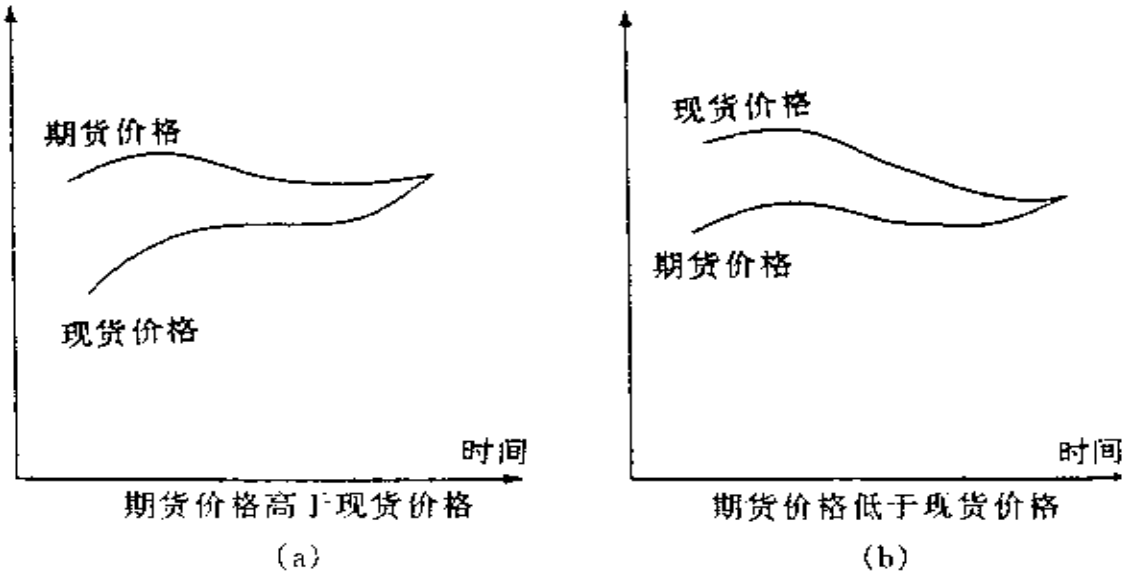


图 2.1　随交割日期临近,期货价格与现货价格之间的关系

2.6　现金结算

一些金融期货,如标的资产为股票指数的期货,是以现金结算的。这是由于直接交割标的资产非常不方便或者是不可能。例如,标的资产为 S&P500 的指数期货合约,交割标的资产将包括交割一个 500 种股票的组合。当合约以现金结算时,按最后交易日结束时的价格进行盯市,并将所有的头寸了结。最后交易日的结算价格是标的资产现价的收盘价。这就保证了期货价格收敛于现货价格。

最后交易日的结算价格等于现货收盘价这一规则的一个例外

情况是 S&P500 期货合约。该期货合约的最后结算价格取决于最后交易日次日早晨该指数的开盘价。它的目的是为了避免股票指数期货、股票指数期权和股票指数期货期权在同一天到期而产生的相关问题。套利者经常在这三种合约中持有大量的相互抵销头寸,当他们企图平仓时,可能会出现交易混乱并在到期日结束时引起价格的巨幅波动。新闻媒介用"triple witching hour"来形容在到期日最后一个小时内的交易。

2.7 利用期货套期保值

如果公司知道它要在将来某一特定的时间出售某一资产,则可以通过持有期货合约的空头来对冲它的风险。这就是空头套期保值(short hedge)。如果资产的价格下降,则公司在出售该资产时将发生损失,但将在期货的空头上获利。如果资产的价格上升,公司在出售该资产时将获利,但期货的空头将有损失。与此类似,如果公司知道它在将来要购买某一资产,它可以通过持有该资产期货合约的多头来对冲风险。这就是多头套期保值(long hedge)。期货套期保值并不一定能改进整个财务绩效,认识到这一点是很重要的。事实上,我们可以预计期货合约的套期保值大约有 50% 的时候是会有损失的。期货套期保值是通过使结果更确定,以减少风险。

在实际应用时,期货合约套期保值并不理想的原因如下:

1. 需要对冲其价格风险的资产与期货合约的标的资产可能并不完全一样。

2. 套期保值者可能并不能肯定购买或出售资产的确切时间。

3. 套期保值可能要求期货合约在其到期日之前就进行平仓。

这些问题就引入了基差风险(basis risk)的概念。

基差风险

在套期保值的情况下，基差(basis)的定义为[①]：

基差＝计划进行套期保值资产的现货价格－所使用合约的期货价格

如果要进行套期保值的资产与期货合约的标的资产一致，在期货合约到期日基差应为零。在到期日之前，如表 2.2 和图 2.1 所示，基差可能为正值或为负值。

当现货价格的增长大于期货价格的增长时，基差也随之增加，称为基差扩大(strengthening of the basis)。当期货价格的增长大于现货的价格增长时，基差减少，称为基差减少(weakening of the basis)。

为了检验基差风险的本质，我们使用如下的符号：

S_1：在 t_1 时刻现货的价格

S_2：在 t_2 时刻现货的价格

F_1：在 t_1 时刻期货的价格

F_2：在 t_2 时刻期货的价格

b_1：在 t_1 时刻的基差

b_2：在 t_2 时刻的基差

我们假定在 t_1 时刻进行对冲操作，并在 t_2 时刻平仓。我们考虑这样一个例子，在建立套期保值初始时刻，现货和期货的价格分别为 $2.50 和 $2.20；在平仓时，现货和期货的价格分别为 $2.00 和 $1.90。即 $S_1=2.50$，$F_1=2.20$，$S_2=2.00$，$F_2=1.90$。

根据基差的定义：

$$b_1 = S_1 - F_1$$

$$b_2 = S_2 - F_2$$

在本例中，$b_1 = 0.30$，$b_2 = 0.10$。

考虑第一种情况，套期保值者知道将于 t_2 时刻出售资产，并在 t_1 时刻持有期货的空头。该资产实现的价格为 S_2，期货头寸的盈利为 $F_1 - F_2$。则套期保值资产获得的有效价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

在本例中，上式为 \$2.30。在 t_1 时刻 F_1 的价值是已知的。如果此时 b_2 也是已知的，就可以进行完全的套期保值（即，套期保值可以消除价格的所有不确定性）。套期保值风险是与 b_2 有紧密相关的不确定性。我们称之为基差风险（basis risk）。考虑下一种情况，公司知道它将于 t_2 时刻购买资产，并在 t_1 时刻进行多头套期保值。为该资产支付的价格为 S_2，套期保值的损失为 $F_1 - F_2$。则套期保值资产所支付的有效价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

与前面的表述方式一致，在本例中为 \$2.30。在 t_1 时刻 F_1 的价值是已知的，b_2 代表了基差风险。

对诸如外汇、股票指数、黄金和白银这些投资资产来说，基差风险是很小的。这是由于套利理论会使投资资产的期货价格和现货价格之间较好地保持某一确定的关系，这点我们将在第三章中进行讨论。某一投资资产的基差风险主要来源于将来无风险利率水平的不确定性。对于原油、玉米或铜这些商品来说，供需之间的不平衡以及有时保存商品的困难，可能导致基差的大范围变化，因此存在着很高的基差风险。

有时，投资者面临风险的资产不同于进行套期保值的合约的标的资产[②]。在这种情况下，基差风险就会很大。定义 S_2^* 为 t_2 时刻期货合约的标的资产的价格。和以前一样，S_2 是已经进行保值的资产在 t_2 时刻的价格。通过套期保值，公司确定了购买（或

收取)资产的价格为：

$$S_2 + F_1 - F_2$$

也可以变形为：

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

$S_2^* - F_2$ 和 $S_2 - S_2^*$ 代表了基差的两个组成部分。当打算进行套期保值的资产与期货合约中的标的资产一致时，存在的基差为 $S_2^* - F_2$。当两个资产不同时，上式中的 $S_2 - S_2^*$ 项就是两个资产不一致时产生的基差。

注意，基差风险可以使得套期保值者的头寸状况得以改善或更加糟糕。考虑一个空头套期保值。如果基差意想不到地扩大，则套期保值者的头寸状况就会得到改善；相反，如果基差意想不到地缩小，则套期保值者的头寸状况就会恶化。对于多头套期保值来说，情况则相反。如果基差意想不到地扩大，则保值者的头寸状况会恶化；而当基差意想不到地缩小时，保值者的头寸状况就会改善。

合约的选择

影响基差风险的一个关键因素是套期保值所选用的期货合约。选择包括两个方面：

1. 选择期货合约的标的资产。

2. 选择交割月份。

如果打算保值的资产正好是期货合约的标的资产，通常以上第一项选择是非常容易的。在其他的情况下，必须仔细分析才能确定一个合适的期货合约，该期货合约的期货价格与打算保值的资产价格的相关性最好。

交割月的选择可能受几个因素的影响。可以假定，当套期保值的到期日与某一交割月份一致时，应选择该交割月份的期货合约。事实上，在这种情况下，通常选择随后交割月份的期货合约。这是由于在某些情况下，交割月份中的期货价格非常不稳定。同时，如果多头的保值者在交割月份中持有合约，则他或她面临着不得不接收实物资产交割的风险。这会使成本很高并且极不方便。

整体上看，当套期保值的到期日与交割月份之间的差距增加时，基差风险增加。因此，最好的方法是尽量选择最接近套期保值到期的那个交割月份，当然交割月份要在套期保值到期之后。假定某个特定合约的交割月份是 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份。套期保值的到期日如果是 12 月份、1 月份和 2 月份，则应选择 3 月份的期货合约；如果套期保值的到期日为 3 月份、4 月份和 5 月份，则应选择 6 月份的期货合约；以此类推。这一原则假定所有合约都有很强的流动性，能满足套期保值者的要求。实际上，到期期限短的期货合约的流动性最强。因此，在有些情况下，保值者可能倾向于使用到期期限短的合约，并不断将合约向前进行展期。在本章的最后一部分中，将解释这一策略。

例 2.1

在 3 月 1 日，某个美国公司预期在 7 月底收到 50,000,000 的日元。国际货币交易所(IMM)的日元期货的交割月为 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份。每一合约交割的金额为 12,500,000 日元。因此，公司在 3 月 1 日卖出 4 个 9 月份日元期货。当 7 月底收到日元时，公司平仓其期货合约。我们假定 3 月 1 日的期货价格为每日元 0.7800 美分，当期货合约平仓时现货和期货的价格分别为每日元 0.7200 和 0.7250 美分，即当合约平仓时基差为 −0.0050。则收到的有效价格为最后的现货价格加上在期货中的盈利：

$$0.7200 + 0.0550 = 0.7750(\text{每日元美分数})$$

也等于初始的期货价格加上最后的基差：

$$0.7800 - 0.0050 = 0.7750(\text{每日元美分数})$$

公司收到总额为 50×0.00775 百万美元，即 $387,500。

例 2.2

在 6 月 8 日，某公司得知在 10 月份或 11 月份的某时刻它将购买 20,000 桶原油。在 NYMEX 交易的原油期货合约每一个月份都有交割，每张合约的规模为 1,000 桶。公司决定使用 12 月份期货合约来进行套期保值，并买入了 20 张 12 月份的期货合约。6 月 8 日期货价格为每桶 $18.00。公司准备在 11 月 10 日购买原油。因此在那天进行平仓。在 11 月 10 日现货和期货的价格分别为每桶 $20.00 和 $19.10，因此基差为 $0.90。支付的有效价格为每桶 $18.90，即总额为 $378,000。可以用最后的现货价格 $20.00 减去期货的盈利 $1.10 计算出来，也可用最初期货价格 $18.00 加上最后的基差 $0.90 来计算。

2.8　最佳套期比率

套期比率是持有期货合约的头寸大小与风险暴露资产大小之间的比率。在此之前，我们一直都假定套期比率为 1.0。现在我们说明，如果套期保值者的目的是使风险最小化，则套期比率为 1.0 不一定是最佳的。

定义：

ΔS：在套期保值期限内，现货价格 S 的变化。

ΔF：在套期保值期限内，期货价格 F 的变化。

σ_S：ΔS 的标准差。

σ_F：ΔF 的标准差。

ρ：ΔS 和 ΔF 之间的相关系数。

h：套期保值率。

当套期保值者持有资产的多头和期货的空头时，在套期保值期限内保值者头寸的价值变化为：

$$\Delta S - h\Delta F$$

对于一个多头套期保值来说，为：

$$h\Delta F - \Delta S$$

在以上两种情况下，套期保值头寸价格变化的方差，v 为：

$$v = \sigma_S^2 + h^2\sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F$$

所以

$$\frac{\partial v}{\partial h} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F$$

设上式等于零，注意到 $\partial^2 v/\partial h^2$ 为正值，我们发现使方差最小的 h 值为：

$$h = \rho\frac{\sigma_S}{\sigma_F} \tag{2.1}$$

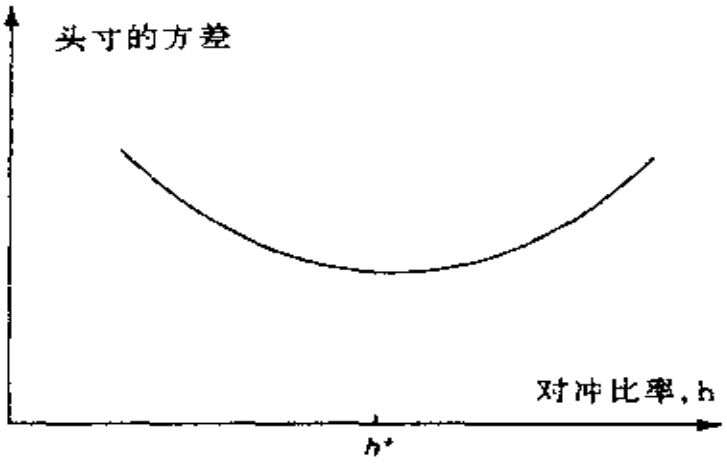


图 2.2 套期保值者头寸的方差与套期率的关系

因此，最佳的套期率等于 ΔS 和 ΔF 之间的相关系数乘以 ΔS 的标准差与 ΔF 的标准差的比率。图 2.2 说明套期保值者头寸价值的方差与套期比率之间的关系。

如果 $\rho=1$ 且 $\sigma_F=\sigma_S$，最佳的套期率 h 为 1.0。由于在这种情况下，期货价格完全反映了现货价格，以上的值正好是我们所预期的值。如果 $\rho=1$ 且 $\sigma_F=2\sigma_S$，最佳套期率为 0.5。这一结果也正如我们所预期的，这是由于在这种情况下，期货价格变化总是等于现货价格变化的两倍。

例 2.3

某公司知道它将在 3 个月后购买 100 万加仑的航空燃料油。在 3 个月内每加仑航空燃料油的价格变化的标准方差为 0.032。公司选择购买热油(heating oil)期货合约的方法来进行套期保值。在 3 个月内热油期货价格变化的标准方差为 0.040，且 3 个月内航空燃料油价格的变化与 3 个月内热油期货价格变化之间的相关系数为 0.8。因此最佳的套期率为：

$$0.8\times\frac{0.032}{0.040}=0.64$$

一张热油期货合约是 42,000 加仑。因此公司应购买：

$$0.64\times\frac{1,000,000}{42,000}=15.2\text{ 张合约。}$$

省略小数，需要 15 张合约。

2.9　向前延展的套期保值

有时套期保值的到期日比所有可供使用的期货合约的交割日期都要晚。保值者必须将该套期保值组合向前进行延展。这包括将一个期货合约平仓，同时持有另一个到期日较晚的期货合约头寸。套期保值可向前延展许多次。考虑某个公司，它希望运用空头套期来减少 T 时刻收到资产的价格变动的风险。如果存在期

货合约 1,2,3,…,n(并不一定所有合约现在都有交易),它们的到期日逐个后延,公司可以运用下列策略:

t_1 **时刻**:卖空期货合约 1

t_2 **时刻**:将期货合约 1 平仓

卖空期货合约 2

t_3 **时刻**:将期货合约 2 平仓

卖空期货合约 3

· ·
· ·
· ·

t_n **时刻**:将期货合约 n−1 平仓

卖空期货合约 n

T **时刻**:将期货合约 n 平仓

在这一策略中,存在 n 个基差风险或不确定性的来源。在 T 时刻,合约 n 的期货价格和套期保值资产的现货价格之差存在不确定性。另外,在期货合约向前展期的其他 n−1 个情况下,合约平仓时的价格与下一个新合约开仓时的价格之差也存在着不确定性。

例 2.4

在 1992 年 4 月,某公司计划在 1993 年 6 月出售 100,000 桶原油,并决定以 1.0 的套期比率对冲风险。当前的现货价格为 $19。尽管每个月份交割的期货合约都有交易且有的交割有效期长达一年,我们仍然假定,只有最近 6 个月份的合约流动性强,能满足公司的需要。因此,公司出售 100 张 1992 年 10 月的期货。在 1992 年 9 月,它将套期保值向前展期到 1993 年 3 月份的合约。在 1993 年 2 月,它将套期保值向前展期到 1993 年 7 月的合约。

在 1992 年 4 月到 1993 年 7 月之间,一个可能结果是石油的价格由每桶 $19 下降到每桶 $16。假定 1992 年 10 月份的期货合约以每桶 $18.20 的

价格卖空，以每桶 $17.40 的价格平仓，每桶获利 $0.80；1993 年 3 月份的期货合约以每桶 $17.00 的价格卖空，以每桶 $16.50 的价格平仓，每桶获利 $0.50；1993 年 7 月份的期货合约以每桶 $16.30 的价格卖空，以每桶 $15.90 的价格平仓，每桶获利 $0.40。在本例中，期货合约获得每桶石油 $1.70 的盈利，作为对石油价格下降 $3 的补偿。

2.10 小　结

在本章中，我们了解了期货市场是如何运作的。在期货市场中，期货合约在交易所内进行交易，交易所必须仔细地制定交易合约的确切性质特征、执行的程序和管理市场的规章。与之相反，远期合约是相当熟悉的投资双方通过电话直接协商订立的。因此，远期合约可以不是标准化的，也不要求制定大量的规章和操作程序。

大部分最初订立的期货合约最终并不进行标的资产的交割。而是在交割月份的交割日之前，就进行平仓了。但是，正是最后交割的可能性，决定了期货的价格。对于每一期货合约来说，在一定的时间范围内都可以进行交割，且存在着一整套完整的交割程序。一些合约，如标的资产是股票指数的期货合约，它们是以现金而不是以标的资产来进行交割的。

订立合约的细则是交易所的一项重要的活动。任何合约的双方必须知道什么东西可以交割，在什么地方交割以及在什么时候交割。他们也必须知道如下细节：如交易时间、价格的报价方式、最大价格变动幅度等等。

保证金是期货市场的一个重要组成部分。投资者在其经纪人处开设一定的保证金帐户。保证金帐户每日进行调整，以反映投资者的盈利或亏损。如果价格发生了相反的变动，经纪人可能不时地要求投资者追加保证金。经纪人或者是结算所会员，或者在

结算所会员处开设一定的保证金帐户。每个结算所会员要在结算所开设一定的保证金帐户。结算所每日对保证金帐户余额进行调整，以便反映会员所负责业务的盈利或亏损。

交易所保证完整地、系统地收集有关的价格信息，并且可在几秒钟内将信息传递给全世界的投资者。许多报纸（如《华尔街日报》）每日都载有前一交易日的各种交易信息。

期货合约可以用来对冲某个公司面临的某种商品的价格风险。在期货市场中持有的头寸，可以抵消将来商品价格对公司业务的影响。期货套期保值中的一个重要的概念是基差。基差是资产的现货价格和期货价格之差。套期保值风险是指套期保值有效期内基差价值的不确定性。这就是所谓的基差风险。

套期比率是持有期货合约的头寸与风险头寸的比率。1.0 的套期比率并不一定总是最佳的。如果保值者希望使其总头寸的变化方差最小，适当的套期比率也可能不为 1.0。当不存在到期日晚于套期到期日并且流动性较强的期货合约时，有时可以运用向前展期套期保值的策略。它包括持有一系列的期货合约头寸。当第一个期货合约快要到期时，将它平仓，然后再持有另一个到期日稍晚的期货合约。当第二个期货合约快要到期时，将它平仓，然后再持有第三个期货合约……以此类推。如果期货价格变化和现货价格变化之间的相关性很好时，展期的套期保值策略的效果也很好。

第三章

远期和期货价格

在本章中，我们将讨论远期价格和期货价格与其标的资产价格之间的相互关系。因为不是每日结算，分析远期合约一般来说比分析期货合约容易些。因此，本章的第一部分的大多数分析是直接进行远期定价而非期货定价。幸运的是，我们可以看到，当同一资产的远期和期货两种合约的到期日相同时，该资产的远期价格和期货价格是非常近似的。即可以认为所获得的有关远期价格的结论也适用于期货价格。

本章的第一部分对如下几方面：

1．无收益的证券；

2．提供已知现金收益的证券；

3．提供已知红利收益的证券的远期合约提供了关键解答。

本章的第二部分将利用以上分析的结果来计算股票指数、外汇、黄金和白银的期货合约价格。

本章将明确区分两类资产：一类是众多投资者仅为了进行投资而持有的资产；另一类是几乎完全为了进行消费而持有的资产。基于前一类资产的远期和期货价格能够以相对直接了当的方法进行定价，而那些基于后一类资产的合约却不能这样定价。在本书的后面，我们将发现在为期权以及其它更复杂的衍生证券定价时，做如上的划分也是十分必要的。

3.1 某些预备知识

在开始计算远期合约价格之前，给出如下的预备知识是十分有用的。

连续复利

在本书中，除非特别说明，所使用的利率均以连续复利来计算。习惯于以一年、半年或其它方式来计算复利的读者可能会有些陌生。但是，在期权以及其它复杂衍生证券定价时，连续复利得到广泛的应用，因而从现在开始就熟悉它是很有必要的。

假设数额 A 以年利率 R 投资了 n 年。如果利率按每一年计一次复利计算，则以上投资的终值为：

$$A(1+R)^n$$

如果每年计 m 次利息，则终值为：

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \tag{3.1}$$

设 A＝ $100，每年 R＝10%，n＝1，即我们考虑一年的情形。当我们一年只计一次复利(m＝1)时，从公式可知 $100 增长到

$$\$100\times 1.1 = \$110$$

当我们一年计两次利息(m＝2)时，从公式可知 $100 增长到

$$\$100\times 1.05\times 1.05 = \$110.25$$

当我们一年计四次利息(m＝4)时，从公式可知 $100 增长到

$$\$100\times 1.025^4 = \$110.38$$

表 3.1 表示了进一步提高复利频率所带来的效果(即提高 m)。当 m 趋于无穷大时,就称为连续复利(continuous compounding)。在连续复利情况下,数额 A 以利率 R 投资 n 年后,将达到:

$$Ae^{Rn} \tag{3.2}$$

这里 e 是一个数学常数,2.71828。在表 3.1 的例子中,A=100,n=1,R=0.10,因此,A 以连续复利计息将增长到:

$$100e^{0.1} = 110.52$$

这个数值(精确到小数点后两位)与用每天计复利得到的结果一样。从大部分实用目的来看,通常认为连续复利与每天计复利等价。对一笔以利率 R 连续复利 n 年的资金,其结果是乘上 e^{Rn}。对一笔以利率 R 连续复利贴现 n 年的资金,则应乘上 e^{-Rn}。

假设 R_1 是连续复利的利率,R_2 是与之等价的每年计 m 次复利的利率,从式(3.1)和(3.2),我们有:

$$Ae^{R_1 n} = A\left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{mn}$$

或

$$e^{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{m}\right)^{m}$$

表 3.1　复利频率

提高计复利的频率对 $100 在一年末的价值的影响,利率为每年 10%

复利频率	$100 在一年末的价值(美元)
每一年(m=1)	110.00
每半年(m=2)	110.25
每季度(m=4)	110.38
每月(m=12)	110.47

每周(m=52)	110.51
每天(m=365)	110.52

这意味着：

$$R_1 = m\ln\left(1 + \frac{R_2}{m}\right) \tag{3.3}$$

和

$$R_2 = m(e^{R_1/m} - 1) \tag{3.4}$$

这些公式可将复利频率为每年计 m 次的利率转换为连续复利的利率，反之亦然。ln 为取自然对数。它的定义是：如果 $y = \ln x$，则 $x = e^y$。

例 3.1

考虑一个年息为 10% 的利率，半年计一次息。利用式(3.3)，$m = 2$，$R_2 = 0.10$，可得到一个等价的连续复利的利率为：

$$2\ln(1 + 0.05) = 0.09758$$

或年利息 9.758%。

例 3.2

假设债权人给出贷款利息为年息 8%，连续复利计息。而实际上利息时一季度支付一次。利用式(3.4)，$m = 4$，$R_1 = 0.08$，每季度计一次息的等价年利率为：

$$4(e^{0.02} - 1) = 0.0808$$

或年利率为 8.08%。这意味着，对于 $1,000 的贷款，则要求借款人每季度必须支付 $20.20 的利息。

卖空

本章中的一些套利策略涉及了卖空操作。这是一项交易策略，即证券价格下跌时盈利，而证券价格上升时亏损。它是指卖出

并不拥有的证券，以后再将其买回。

为解释卖空的机理，我们假设一个投资者与经纪人联系，卖空500股IBM股票。经纪人立即从另一位客户处借来500股IBM股票，然后象通常一样在公开市场上将其卖掉，将出售股票所得存在这位投资者的帐户内。只要能借到股票，这位投资者就能够按自己的愿望不断维持该空头头寸。然而到某个阶段，投资者会指示经纪人轧平该头寸。经纪人于是用投资者帐户上的资金去购买500股IBM股票，然后将之归还原主。如果股票价格下降了，则投资者会盈利，若股票价格上升了，则投资者会有损失。若在合约未平仓期间，经纪人借不到股票了，投资者就成了所谓挤空(Short－squeezed)，尽管他或她可能并不想轧平头寸，也必须立即平仓。

目前，管理部门只允许在价格升档(uptick)时才能卖空，即该证券的价格在最近一段时间是上升态势时可以卖空。经纪人要求空头客户支付数额较大的初始保证金，象期货合约一样，如果证券价格出现了不利的变动(这里是指价格上市)，则要增加附加保证金。最初卖出证券的所得一般成为初始保证金的一部分。有一些经纪人对保证金帐户内的资金支付利息，并且诸如短期国库券这样的可在市场流通的证券能够存放在经纪人处，做为初始保证金。正如期货交易例子中一样，保证金并不代表一个真实的成本。

空头客户必须将该证券的任何收入，如红利或利息付给经纪人，这些收入都是被卖空的证券应该正常得到的。经纪人然后将之转到被借了证券的客户的帐户上。假设一位投资者于4月份卖空了500股IBM股票，每股价格是$120，7月份，当股票价格为$100时，该投资者买回了这些股票，结清了头寸。假设5月份每股股票支付了$4的红利。投资者在4月份建立空头头寸时，共收到：500×$120＝$60,000。5月份的红利使投资者需付出：500×$4＝$2,000。7月份投资者轧平头寸时，需付出：500×$100＝$50,000。因此，净收益为：

$ 60,000 - $ 2,000 - $ 50,000 = $ 8,000。

假设

在本章中，我们假定对部分市场参与者而言，以下几条全部是正确的：

1. 无交易费用；
2. 所有的交易收益（减去交易损失后）使用同一税率；
3. 市场参与者能够以相同的无风险利率借入和贷出资金；
4. 当套利机会出现时，市场参与者将参与套利活动。

注意，我们并不要求这几条假设对所有的市场参与者都是正确的。我们只要求这些假设对部分参与者是正确的，例如大的投资机构。这并非不合情理。正像在第一章讨论的那样，投资者一旦发现套利机会就会进行套利，这意味着在现实中一出现套利机会，很快就会消失。因此，为了我们分析的目的，有理由假设不存在套利机会。

再回购利率

对许多在期货市场上操作的套利者而言，其相关的无风险利率就是所谓的再回购利率（repo rate）。再回购协议（repo or repurchase agreement）是指证券所有者同意将其证券出售给另一方，之后再以稍高一些的价格将这些证券买回的协议。这里，对方提供了贷款。证券买卖的价差就是对方的利息收益。这种贷款几乎没有风险，因为如果借钱的公司不遵守协议的话，债权人只需保留证券即可。

再回购利率仅比短期国库券利率稍高一点。最普通的回购类型是隔夜回购（overnight repo），该回购协议每天都重新商定。但是，期限长达两周的长期协议（即所谓的期限回购（term repo））有

时也会用到。

符号

本章中将要用到的符号如下：

T：远期合约到期的时间（年）

t：现在的时间（年）

S：远期合约标的资产在时间 t 时的价格

S_T：远期合约标的资产在时间 T 时的价格（在 t 时刻这个值是未知的）

K：远期合约中的交割价格

f：时刻 t 时，远期合约多头的价值

F：时刻 t 时的远期价格

r：对 T 时刻到期的一项投资而言，时刻 t 以连续复利计算的无风险利率。

变量 T 和 t 是从合约生效之前的某个日期（具体是什么时间无关紧要）开始计算的，以年为单位。在我们现在的分析中，感兴趣的变量当然是 T－t，代表远期合约中，以年为单位表示的剩下的时间。设置 T 和 t 两个变量是有原因的。在以后的章节中，当我们考虑时间对衍生证券价格的影响时，设置两个变量的意义就会显现出来。在目前阶段，读者可以简单地认为 T－t 是一个变量。

值得注意的是，远期价格 F 完全不同于远期合约的价值 f。正如在第一章中讨论的那样，任何时刻的远期价格都是使得合约价值为 0 的交割价格。合约开始生效时，一般设定交割价格等于远期价格，所以，F＝K 且 f＝0。随着时间的变化，f 和 F 都在变化。下面几节的分析和例子将进一步探讨这两个变量之间的不同之处。

3.2 无收益证券的远期合约

最容易定价的远期合约是基于不支付收益证券的远期合约。不付红利的股票和贴现债券就是诸如此类的证券。[1]

由于没有套利机会，对无收益证券而言，该证券远期价格 F 与现价 S 之间关系应该是：

$$F = Se^{r(T-t)} \tag{3.5}$$

为了证明以上式子，先假设 $F > Se^{r(T-t)}$。一个投资者可以以无风险利率借 S 美元，期限为 T－t，用来购买该证券资产，同时卖出该证券的远期合约。在时刻 T，资产按合约中约定的价格 F 卖掉，同时归还借款本息 $Se^{r(T-t)}$。这样，在时刻 T 就实现了 $F - Se^{r(T-t)}$ 的利润。

再假设 $F < Se^{r(T-t)}$。投资者可以卖出标的证券，将所得收入以年利率 r 进行投资，期限为 T－t，同时购买该资产的远期合约。在时刻 T，投资者以合约中约定的价格 F 购买资产，冲抵了原来的空头，实现的利润为 $Se^{r(T-t)} - F$。

例 3.3

考虑一个基于不支付红利的股票的远期合约，3 个月后到期。假设股价为 S 40，3 个月期无风险利率为年利率 5%。这里，T－t = 0.25，r = 0.05，S = 40，有

$$F = 40e^{0.05\times0.25} = 40.50$$

这将是今天签订远期合约中的交割价格。如果实际的远期价格大于 $40.50，则某套利者可以先借钱，买股票，然后卖出远期合约，则可获得净收益。如果实际的远期价格小于 S 40.50，则套利者可以卖股票，将所得收入进行投资，同时购买远期合约，同样可获得净收益。

为了更正式地进行讨论，考虑如下两个证券组合：

组合 A：一个远期合约多头加上一笔数额为 $Ke^{-r(T-t)}$ 的现金；

组合 B：一单位标的证券

在组合 A 中，假设现金以无风险利率投资，则到时刻 T 时，现金数额将达到 K。在远期合约到期时，这笔钱正好可用来购买该标的证券。在时刻 T，两个组合都将包含一单位的标的证券。可以知道，它们在早些时候，如时刻 t 时，两个组合的价值也应该相等，否则，投资者就可以通过购买相对便宜的组合，出售相对昂贵的组合来获得无风险利润。

因此有：

$$f + Ke^{-r(T-t)} = S$$

或者：

$$f = S - Ke^{-r(T-t)} \tag{3.6}$$

当一个新的远期合约生效时，远期价格等于合约规定的交割价格，且使该合约本身的价值为 0。因此，远期价格 F 就是公式(3.6)中令 f=0 的 K 值，即

$$F = Se^{r(T-t)}$$

此式与式(3.5)是一致的。

例 3.4

考虑一个 6 个月期的远期合约的多头状况，标的证券是一年期贴现债券，远期合约交割价格为 $950。我们假设 6 个月期的无风险利率(连续复利)为年利率 6%，债券的现价为 $930。这里 $T-t=0.50$，$r=0.06$，$K=950$，$S=930$，根据式(3.6)可以知道远期合约多头头寸的价值 f 为：

$$f = 930 - 950e^{-0.5\times0.06} = 8.08$$

类似地，该远期合约空头的价值为 −8.08。

3.3 支付已知现金收益证券的远期合约

在本节中我们考虑另一种远期合约，该远期合约的标的资产将为持有者提供可完全预测的现金收益。例如支付已知红利的股票和付息票的债券。设 I 为远期合约有效期间所得收益的现值，贴现率为无风险利率。

由于没有套利机会，F 和 S 之间的关系应是：

$$F = (S - I)e^{r(T-t)} \tag{3.7}$$

为证明此式，首先假设先假设 $F>(S-I)e^{r(T-t)}$。某套利者可以借钱，购买资产，卖出远期合约。到时刻 T 时，依照合约中约定条款，资产以价格 F 卖掉。假定用所得收入偿还部分借款，则还有 $(S-I)e^{r(T-t)}$ 金额的借款要在 T 时刻归还。于是，在时刻 T，实现的利润为 $F-(S-I)e^{r(T-t)}$。

其次再假设 $F<(S-I)e^{r(T-t)}$。套利者可以出售资产，将所得收入进行投资，同时购买远期合约。在这种情况下，在时刻 T，实现的利润为 $(S-I)e^{r(T-t)}-F$。

例 3.5

考虑一个股价为 $50 的股票的 10 个月期远期合约。我们假设对所有的到期日，无风险利率（连续复利）都是年利率 8%，且利率的期限结构是平坦的。同时我们假设在 3 个月、6 个月以及 9 个月后都会有每股 $0.75 的红利付出。红利的现值 I 为：

$$I = 0.75e^{-0.02} + 0.75e^{-0.04} + 0.75e^{-0.06} = 2.162$$

变量 T − t 为 0.8333 年，因此远期价格 F 为：

$$F = (50 - 2.162)e^{0.08\times 0.8333} = 51.14$$

如果远期价格低于上面的值，则套利者可以卖出股票购买远期合约。若远期价格高于此数，则套利者可以卖出远期合约，购买股票。

为了更正式地进行讨论，我们将前一节中的组合 B 变为：

组合 B：一个单位的证券加上以无风险利率借 I 数额的资金。

由于证券的收益可以用来偿还借款，因此在 T 时刻，这个组合与一单位的证券具有相同的价值。组合 A 在 T 时刻也具有同样的价值。因此，在 T 时刻，这两个组合应具有相同的价值，即：

$$f + Ke^{-r(T-t)} = S - I$$

或

$$f = S - I - Ke^{-r(T-t)} \tag{3.8}$$

远期价格 F 就是使 f=0 的 K 值。由式(3.8)可得：

$$F = (S - I)e^{r(T-t)}$$

这与式(3.7)是一致的。

例 3.6

考虑一种五年期债券，价格为 $900。假设这种债券的一年期远期合约的交割价格为 $910。在 6 个月后和 12 个月后，预计都将收到 $60 的利息。第二次付息日正好在远期合约交割日之前。6 个月期和 12 个月期的无风险利率分别为年利率 9% 和 10%。在此例中，S=900，K=910，r=0.10，T−t=1，且有

$$I = 60e^{-0.09\times 0.5} + 60e^{-0.10} = 111.65$$

由式(3.8)可以得出远期合约多头的价值 f：

$$f = 900 - 111.65 - 910e^{-0.1} = -35.05$$

远期合约空头的价值为 -35.05。注意，在本例中，在合约的开始和结束都没有应付利息。我们将在第四章讨论由应付利息引起的问题。

3.4 支付已知红利率证券的远期合约

正如将在以后几节讨论的那样，可以认为货币和股票指数是提供已知红利收益率的证券。本节中我们对基于这类证券的远期合约进行一般性分析。

一个已知的红利收益率意味着表示为证券价格百分比的收益是已知的。我们假设红利收益率按照年率 q 连续支付。为进一步解释它的含义，假设 q=0.05，即红利收益率为每年 5%。当证券价格为 S 10 时，下一个小的时间段的红利按照每年 S 0.50 的比率支付。当证券价格为 S 100 时，下一个小的时间段的红利按照每年 S 5 的比率支付，依此类推。

为确定远期合约的价值，3.2 节中的组合 B 可以更改为：

组合 B：$e^{q(T-t)}$ 个证券并且所有的收入都再投资于该证券。

组合 B 中拥有证券的数量随着获得红利的增加而不断增长，因此，到时刻 T 时，正好拥有一个单位的该证券。在时刻 T 时，组合 A 和组合 B 价值相等。在 t 时刻两者也相等，可得：

$$f + Ke^{-r(T-t)} = Se^{-q(T-t)}$$

或：

$$f = Se^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \tag{3.9}$$

远期价格 F 就是使 f=0 时的 K 值：

$$F = Se^{(r-q)(T-t)} \tag{3.10}$$

注意，如果在远期合约有效期间红利收益率是变化的，(3.10)式仍然是正确的，此刻 q 等于平均红利收益率。

例 3.7

考虑一个 6 个月期远期合约，标的资产提供年率为 4% 的连续红利收益率。无风险利率(连续复利)为每年 10%。股价为 $25，交割价格为 $27。这里，S=25，K=27，r=0.10，q=0.04，T−t=0.5。由式(3.9)可知，远期合约多头的价值 f 为：

$$f = 25e^{-0.04\times 0.5} - 27e^{-0.1\times 0.5} = -1.18$$

从式(3.10)可知远期价格 F 为：

$$F = 25e^{0.06\times 0.5} = 25.76$$

3.5　一般结论

对所有的资产(既包括以投资为目的的资产，也包括以消费为目的的资产)，下式都是正确的：

$$f = (F - K)e^{-r(T-t)} \tag{3.11}$$

这是因为，无论 $f>(F-K)e^{-r(T-t)}$ 还是 $f<(F-K)e^{-r(T-t)}$，都存在套利机会。

首先考虑 $f>(F-K)e^{-r(T-t)}$ 的情形。我们购买一个到期时刻为 T、交割价格为 F 的远期合约，同时卖出一个到期时刻为 T、交割价格为 K 的远期合约。由于第一个合约的价值为 0，这个策略产生的初始现金流等于 f。终值的现金流为：

$$(S_T - F) + (K - S_T) = -(F - K)$$

从而投资导致了正的净现金流，其现值为：

$$f-(F-K)e^{-r(T-t)}$$

同样，如果 $f<(F-K)e^{-r(T-t)}$，我们出售一个到期时刻为 T、交割价格为 F 的远期合约，同时购买一个到期时刻为 T、交割价格为 K 的远期合约。该投资的现金流为正，其现值为：

$$(F-K)e^{-r(T-t)}-f$$

容易证明，式(3.11)与 3.2、3.3 和 3.4 节中从 F 和 f 中推导出的公式是一致的。

3.6 远期价格和期货价格

附录 3A 给出了一个套利的讨论，指出：当无风险利率恒定，且对所有到期日都不变时，两个交割日相同的远期合约和期货合约有同样的价格。附录 3A 的讨论还可以扩展到利率为一个已知的时间的函数的情形。

当利率变化无法预测时(正如现实世界中的一样)，远期价格和期货价格从理论上来讲就不一样了。两者之间关系的证明不在本书的范围之内。但是，我们对两者之间的关系能有一个感性认识。考虑如下情形：标的资产价格 S 与利率高度正相关。当 S 上升时，一个持有期货多头头寸的投资者会因每日结算而立即获利。由于 S 的上涨几乎与利率的上涨同时出现，获得的利润将会以高于平均利率的利率进行投资。同样，当 S 下跌时，投资者立即亏损。亏损将以低于平均利率水平的利率融资。持有远期多头头寸的投资者将不会因利率变动而受到与上面期货合约同样的影响。因此，期货多头比远期多头更具有吸引力。当 S 与利率正相关性很强时，期货价格要比远期价格高。当 S 与利率的负相关性很强

时，类似上面的讨论可知远期价格比期货价格要高。

有效期仅为几个月的远期合约价格与期货合约价格之间的理论差异在大多数情况下时小得可以忽略不计的。随着合约有效期的增长，这个差异开始变大。实际上，许多没有反映在理论模型中的因素使得远期和期货价格不一样。这些因素包括：税收、交易费用、保证金的处理方式等。同时，在某些情况下，期货合约比远期合约流动性更强、更易于交易。但是，尽管有以上这些因素，在大多数情况下，假定远期和期货价格相等仍是合情合理的。这也是贯穿本书始终的一个假定。符号 F 既可代表期货价格又可代表远期价格。

实证研究

在本章末尾列出了一些对远期和期货合约进行比较的实证研究论文。Cornell 和 Reinganum 研究了 1974 年至 1979 年间英镑、加拿大元、德国马克、日元以及瑞士法郎的远期和期货价格。他们发现在统计意义上，两个价格之间没有显著的差别。Part 和 Chen 研究了 1977 年至 1981 年间的英镑、德国马克、日元和瑞士法郎，得出了相同的结论。

French 研究了 1968 年到 1980 年间的铜和白银。结果显示白银的期货价格和远期价格有明显的差异(5% 的置信区间)，期货价格通常比远期价格高。铜的研究结果没有这么显著。Part 和 Chen 研究了 1977 年至 1981 年间的黄金、白银、银币、铂、铜以及胶合板，他们的研究结果与 French 对白银的研究结果是类似的：期货价格与远期价格有显著的不同，且期货价格高于远期价格。Rendleman 和 Carabini 研究了 1976 年至 1978 年间的短期国债市场，他们也发现期货价格与远期价格在统计意义上有显著的不同。

3.7 股票指数期货

股票指数(stock index)反映了一个假想的股票组合的价值变化。每种股票在组合中的权重等于组合投资中该股票的比例。组合中的股票可以有相同的权重,或权重以某种方式随时间变化。定义一个很小的时间段里股票指数的上升百分比等于同一时间内组成该组合的所有股票总价值的上升百分比。股票指数通常不因派发现金红利而调整。也就是说,大多数的指数在计算其百分比变化时,不考虑股票组合收到的任何现金红利。

值得注意的是,如果假想组合中的股票保持不变,则组合中个股的权重就不会保持不变。如果组合中某一股票的价格比其它股票上涨快得多,该股票的权重就会自动地增大。由此可以推出:如果设定组合中股票的权重为常数,则该组合每天都将发生变化。如果组合中某股票的价格上涨比别的股票更快,该股票的持有量就应减少以维持这个权重。

股票指数

表 3.2 为 1991 年 10 月 18 日在《华尔街日报》上刊登的 4 个不同股票指数的期货合约的价格。这些价格是 1991 年 10 月 17 日的收盘价。这些股票指数如下:

1. S&P500(标准普尔 500)指数。在芝加哥商品交易所 CME 交易,该指数是一个包括 500 种股票的组合:400 种工业股、40 种公用事业股、20 种交通事业股和 40 种金融机构股。在任一时间股票的权重为该股票的总市值(=股价×流通的股票数)。该指数占纽约股票交易所全部上市公司股票总市值的 80%。在芝加哥商品交易所 CME 交易的该指数期货合约价格为指数乘以 500。

2. 日经 225 股票平均指数。该指数是一个在东京股票交易

所交易的225家最大股票的组合。权重为股票的价格。在芝加哥商品交易所CME交易的该指数期货合约价格为指数乘以5。

3. 纽约股票交易所NYSE综合指数。该指数时一个在纽约股票交易所上市的所有股票组成的组合。象S&P500一样，权重为市场价值。在纽约期货交易所交易的该指数期货合约的价格为指数乘以500。

表3.2　1991年10月18日《华尔街日报》股票指数期货行情

FUTURES

S&P 500 INDEX (CME) 500 times index

	Open	High	Low	Settle	Chg	High	Low	Open Interest
Dec	393.50	395.85	391.75	393.75	— .85	401.50	316.50	139,641
Mr92	395.70	398.50	394.10	396.15	— .75	404.00	374.70	3,170
June	....	....	....	398.40	— .70	407.00	379.00	781

Est vol 48,495; vol Wed 45,886; open int 143,622, +662.
Indx prelim High 393.81; Low 390.32; Close 391.92 — .88

NIKKEI 225 Stock Average (CME)—$5 times NSA

Dec	24900.	24950.	24870.	24930.	+160.0	28900.	22380.	11,272
Mr92	....	....	....	25440.	+170.0	26725.	23000.	292

Est vol 380; vol Wed 362; open int 11,564, +64.
The Index: High 24643.11; Low 24344.68; Close 24439.85 +105.18

NYSE COMPOSITE INDEX (NYFE) 500 times index

Dec	216.45	217.70	215.60	216.75	— .35	219.70	175.50	4,762
Mr92	218.40	217.95	217.40	217.85	— .35	220.35	207.60	685

Est vol 4,764; vol Wed 5,686; open int 5,488, —150.
The Index: High 216.54; Low 215.07; Close 215.81 — .24

MAJOR MKT INDEX (CBT) $500 times index

Oct	323.70	325.70	322.20	324.05	— .90	325.70	314.90	4,010
Nov	323.75	325.70	322.40	324.10	— .95	325.70	315.20	1,888
Dec	324.80	326.20	323.00	324.75	— .95	326.20	315.75	195

Est vol 3,500; vol Wed 2,018; open int 6,104, +167.
The Index: High 325.88; Low 322.55; Close 323.79 — 1.09

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, October 18, 1991. Copyright ©1991, Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

4. 主要市场指数MMI。该指数是一个在纽约股票交易所上市的20只蓝筹股组成的组合。这些股票根据它们的价格来加权。为反映股票分割和股票红利的影响，还要对权重进行一些调整。MMI与广泛引用的道·琼斯工业平均指数相关性很好。道·琼斯

工业平均指数也是包含相对较少的几种股票的组合。MMI 期货合约在芝加哥交易所 CBOT 交易，该指数期货合约价格为指数乘以 500。

在第二章已经谈过，股票指数期货合约是现金交割，而不是实物交割。在最后一个交易日，所有合约是盯市的并且所有头寸必须轧平。大多数合约在最后一个交易日的结算价格通常是当天指数的收盘指数。但正如第二章已经讨论过的，S&P500 的结算价是次日的开盘指数。对于 NYSE 综合指数和 MMI，最后一个交易日是交割月份的第三个星期五。对于 S&P500，是交割月份的第三个星期五之前的那个星期四。

股票指数的期货价格

大部分指数可以看作为付红利的证券。这里的证券就是计算指数的股票组合，证券所付红利就是该组合的持有人收到的红利。根据合理的近似，可以认为红利时连续支付的。设 q 为红利收益率，由式(3.10)可得期货价格 F 为：

$$F = Se^{(r-q)(T-t)} \tag{3.12}$$

例 3.8

考虑一个 S&P500 指数的 3 个月期期货合约。假设用来计算指数的股票的红利收益率为每年 3%，指数现值为 400，连续复利的无风险利率为每年 8%。这里，$r=0.08$、$S=400$，$T-t=0.25$、$q-0.03$、期货价格 F：

$$F = 400e^{0.05\times 0.25} = 405.03$$

实际上，计算指数的股票组合的红利收益率一年里每周都在变化。例如，纽约股票交易所的大部分股票是在每年二月份、五月份、八月份和十一月份的第一周付红利的。q 值应该代表合约有

效期间的平均红利收益率。用来估计 q 的红利应是那些除息日在期货合约有效期之内的股票的红利。从表 3.2 可以看出，S&P500 指数期货的价格随到期日的变化而以每年 2.4% 的速度增长。这与无风险利率超过红利收益率大约 2.4% 的情形相对应。

如果分析者对于计算红利收益率不感兴趣，他或她可以估计指数中股票组合将要收到的红利金额总数及其时间分布。这时股票指数可看成是提供已知收入的证券，式(3.7)中的结论可用来计算期货价格。这个方法对日本、法国、德国的指数很有效，因为这些国家里所有的股票都在相同的时间里付红利。

指数套利

如果 $F>Se^{(r-q)(T-t)}$，可以通过购买指数中的成分股票，同时卖出指数期货合约而获利。若 $F<Se^{(r-q)(T-t)}$，则可通过相反操作，即卖出指数中的成分股票，买进指数期货合约而获利。这些策略就是所谓的指数套利(index arbitrage)。当 $F<Se^{(r-q)(T-t)}$ 时，指数套利操作通常由拥有指数成分股票组合的养老基金来进行，而当 $F>Se^{(r-q)(T-t)}$ 时，指数套利操作则通常由拥有短期资金市场投资的公司来进行。对于一些包含较多股票的指数，指数套利有时是通过交易数量相对较少的有代表性的股票来进行，这些代表性的股票的变动能较准确地反映指数的变动。指数套利经常采用程序交易(program trading)方法来进行，即通过一个计算机系统来进行交易。

1987 年 10 月 19 日

在正常的市况下，F 与 $Se^{(r-q)(T-t)}$ 非常接近。但是，1987 年 10 月 19 日发生的事件却很有意思。那一天股市价格下跌幅度超过 20%，纽约股票交易所的成交股数(6.04 亿)创下了历史最高记

录。这一天的大部分时间里，期货价格都明显低于指数。例如，在收盘时，S&P500 指数为 225.06 点（一天下跌了 57.88 点），而 12 月份交割的 S&P500 指数期货的价格是 201.50 点（一天下跌了 80.75 点）。这主要是因为处理卖出股票的订单有较长的延迟，使得指数套利风险太大。第二天，即 1987 年 10 月 20 日，纽约股票交易所对程序化交易运作的方式采取了临时性的限制措施。结果使得股票指数与股票指数期货之间传统的联系不能继续下去。曾在某时刻，12 月份的指数期货合约价格比 S&P500 指数低了 18%！

日经指数

式(3.12)对日经 225 指数的期货合约无效。原因是很微妙的。设 S_F 代表日经 225 指数值，这是用日元衡量的组合的价值。而在芝加哥商品交易所 CME 交易的日经 225 指数期货合约的标的变量是价值为 $5S_F$ 的美元值的变量。也就是说，期货合约的变量用日元计量，但却把它视为美元来处理。我们不可能投资于一个价值总是 $5S_F$ 美元的证券组合。最好的做法是投资于价值为 $5S_F$ 日元的组合，或者投资于价值为 $5QS_F$ 美元的组合，这里 Q 是一日元的美元价值。因此，日经 225 期货合约的标的变量是一个美元量，该变量不等于某个可交易证券的价格，因而我们无法通过套利讨论来导出理论上的期货价格。在第十二章我们将采用其它的方法来推导芝加哥商品交易所 CME 的日经 225 指数期货的价格公式。

利用指数期货对冲

指数期货能用来对冲一个高度分散化股票组合的风险。熟悉资本资产定价模型的读者应该知道，股票组合的收益与市场收益之间的关系由参数 β 来描述。它是组合超出无风险利率的超额收

益对市场超出无风险利率的超额收益进行回归得到的最优拟合直线的斜率。当 $\beta=1.0$ 时，股票组合的收益就反映了市场的收益；当 $\beta=2.0$ 时，股票组合的超额收益为市场超额收益的两倍；当 $\beta=0.5$ 时，股票组合的收益为市场收益的一半；依此类推。

假设我们希望对冲某股票组合在时间段 T－t 里的价值变动风险。设：

Δ_1：若投资于股票组合，在 T－t 内每美元的变动；

Δ_2：若投资于市场指数，在 T－t 内每美元的变动；

S：股票组合的现值；

F：一个期货合约的现值；

N：对冲股票组合时，最佳的卖空合约数量。

一个期货合约的价值 F 是期货价格乘以该合约大小。在 S&P500 指数中，一个合约的价值为指数乘以 500。若 S&P500 的期货价格为 400，则合约价值为 $400\times500=\$200,000$。

从 β 的定义，近似可得：

$$\Delta_1=\alpha+\beta\Delta_2$$

其中 α 为常数。在时间 t 至 T 间股票组合的价格变动为 $S\Delta_1$，或：

$$\alpha S+\beta S\Delta_2$$

在此段时间里期货合约价格的变动近似为 $F\Delta_2$。从而，组合价值变动中，不确定部分近似为：

$$\beta\frac{S}{F}$$

乘上一个期货合约的价格变动。因此：

$$N = \beta \frac{S}{F}$$

例 3.9

某公司想运用还有 4 个月有效期的 S&P500 指数期货合约来对冲某个价值为 $2,100,000 的股票组合。当时的期货价格为 300，该组合的 β 值为 1.5。一个期货合约的价值为 300×500 = $150,000。因而应卖出的期货合约的数量为：

$$1.5 \times \frac{2,100,000}{150,000} = 21$$

有效的股票指数对冲将使得对冲者的头寸近似以无风险利率增长。很自然地要问：为什么对冲者要不辞劳苦地用期货合约呢？如果对冲者的目的只是为了获得无风险利率，他可以将组合卖掉然后将所得收入投资短期国债即可。

一个可能的原因是：对冲者认为股票组合中的股票选择得很好。他或她可能对整个市场的表现很没有把握但坚信股票组合中的股票会比市场表现出色（在适当调整组合的 β 值之后）。采用指数期货来对冲转移了市场波动的风险，仅使对冲者股票组合超过市场的部分收益暴露于市场风险当中。另一个可能的原因是：对冲者计划长期持有该组合，但在不确定的市场状况下短期内需要保护该头寸。若采用先卖掉组合，以后再买回的策略，可能会导致过高的交易费用。

改变 β 值

运用指数期货能改变股票组合的 β 值。考虑例 3.9 中的情况。要将组合的 β 值从 1.5 减少到 0，需要 21 个合约；若要将 β 降到 1.0，则只需要卖出 21 个合约的 1/3 即 7 个合约即可；要将 β 值从 1.5 上升至 3.0，需要买 21 个合约；依此类推。一般来说，要将

组合的β值从β变到β*时，当β>β*时，应卖出：

$$(\beta - \beta^*)\frac{S}{F}$$

个合约。当β<β*时，应买入

$$(\beta^* - \beta)\frac{S}{F}$$

个合约。

3.8　货币的远期和期货合约

现在我们考虑外汇的远期和期货合约。变量S代表以美元表示的一单位外汇的即期价格；K是远期合约中约定的交割价格。外汇的持有人能获得货币发行国的无风险利率的收益（例如持有人能将外汇投资于以该国货币标价的债券）。我们设r_f为外汇的无风险利率，连续计复利。

用于外汇远期合约定价的两个组合如下：

组合A：一个远期多头加上$Ke^{-r(T-t)}$金额的现金；

组合B：$e^{-r_f(T-t)}$金额的外汇。

两个组合在时刻T时都将等于一单位的外汇。因此，在t时刻时两者也应该相等，有：

$$f + Ke^{-r(T-t)} = Se^{-r_f(T-t)}$$

或：

$$f = Se^{-r_f(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \tag{3.13}$$

远期价格（或远期汇率）F就是使得式(3.13)中f=0时的K值。因而：

$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)} \tag{3.14}$$

这是国际金融领域著名的利率平价关系。从本章前面的讨论可知，F 大致上也是期货价格。

注意：如果将 q 用 r_f 代替，则式(3.13)和(3.14)分别与式(3.9)和(3.10)等价。这是因为外汇与支付已知红利收益率的证券是一样的。这里的"红利收益率"就是外汇的无风险利率。要了解其原因，应注意到外汇持有者的利息所得也是外汇，因此其价值在用本国货币衡量时亦与外汇的价值成比例。

表 3.3　1991 年 10 月 18 日《华尔街日报》外汇期货行情

FUTURES

	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
JAPAN YEN (IMM)—12.5 million yen; $ per yen (.00)								
Dec	.7700	.7720	.7675	.7707	+ .0041	.7770	6997	75,304
Mr92	.7693	.7700	.7670	.7698	+ .0043	.7718	.7000	1,446
June	....	....	....	.7699	+ .0046	.7705	.7015	378
Sept	....	....	....	.7707	+ .0050	.7710	.7265	658
Dec	....	....	....	.7718	+ .0056	.7700	.7512	1,147
Est vol 20,149; vol Wed 17,021; open int 78,933, −2,332.								
DEUTSCHEMARK (IMM)—125,000 marks; $ per mark								
Dec	.5838	.5850	.5818	.5840	+ .0021	.6770	.5365	57,712
Mr92	.5785	.5800	.5763	.5785	+ .0021	.5923	.5353	2,819
June	....	....	....	.5733	+ .0021	.5868	.5322	234
Est vol 40,793; vol Wed 33,283; open int 60,767, +518.								
CANADIAN DOLLAR (IMM)—100,000 dlrs.; $ per Can $								
Dec	.8797	.8818	.8791	.8817	+ .0022	.8818	.8175	25,502
Mr92	.8739	.8768	.8739	.8766	+ .0022	.8768	.8253	2,649
June	.8720	.8725	.8718	.8720	+ .0022	.8725	.8330	463
Est vol 5,140; vol Wed 3,371; open int 28,736, +282.								
BRITISH POUND (IMM)—62,500 pds.; $ per pound								
Dec	1.6970	1.6990	1.6900	1.6986	+.0068	1.7900	1.5670	20,112
Mr92	1.6770	1.6810	1.6730	1.6804	+.0072	1.7200	1.5560	1,377
Est vol 12,808; vol Wed 10,072; open int 21,498, −123.								
SWISS FRANC (IMM)—125,000 francs; $ per franc								
Dec	.6692	.6700	.6655	.6696	+ .0027	.8090	.6235	24,063
Mr92	.6647	.6649	.6620	.6650	+ .0029	.6995	.6225	570
Est vol 17,700; vol Wed 14,402; open int 24,681, −22.								
AUSTRALIAN DOLLAR (IMM)—100,000 dlrs.; $ per A.$								

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, October 18, 1991. Copyright ©1991, Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

表 3.3 为 1991 年 10 月 17 日在芝加哥商品交易所 CME 的国际货币市场 IMM 上交易的外汇期货合约价格，包括：日元、德国马克、加拿大元、英镑、瑞士法郎以及澳大利亚元。期货的价格用单位外汇的美元价值来标价（对日元，用美分标出日元的价格）。以上标价方式与大部分外汇的现货价格和远期价格的标价方式有所不同，它们是用每单位美元若干数额的外汇来标价。若加拿大元的远期标价为 1.2000，则其期货标价为 0.8333。

当外汇的利率大于本国利率时（$r_f > r$），从式（3.14）可知 F 始终小于 S，且随着合约到期日 T 的增加，F 值减小。同样，当外汇的利率小于本国利率时（$r_f < r$），从式（3.14）可知 F 始终大于 S，且随着合约到期日 T 的增加，F 值也增加。在 1991 年 10 月 17 日，日本、德国、加拿大、英国、瑞士和澳大利亚的利率都比美国的利率高，因此符合 $r_f > r$ 的情况，并解释了为什么随着到期日的增长，这些货币期货价格下降。

例 3.10

表 3.3 中，加拿大元的期货价格随着到期日的增长以大约每年 2.2% 的速度下降。例如，1992 年 6 月的结算价大约比 1991 年 12 月的结算价低 1.1%。这说明美国的短期无风险利率比加拿大低 2.2%。

3.9　商品期货

下面我们考虑商品期货合约。这里可以看到，将商品区分为如下两大类是十分重要的，即：为投资目的而由相当多的投资者所持有（如黄金和白银）商品和为消费目的所持有的商品。对投资目的的商品，我们可以通过套利讨论得出准确的期货价格。但是，对消费目的的商品来说，套利讨论只能给出期货价格的上限。

黄金和白银

黄金和白银为众多投资者所拥有，目的就是投资。如果不考虑存储成本，黄金和白银类似于无收益的证券。采用前面的符号，S是黄金的现货价格。由式(3.5)可知，远期价格 F 为：

$$F = Se^{r(T-t)} \tag{3.15}$$

存储成本可看作是负收益。设 U 为期货合约有效期间所有存储成本的现值，由式(3.7)可知：

$$F = (S + U)e^{r(T-t)} \tag{3.16}$$

若任何时刻的存储成本与商品价格成一定的比例，存储成本可看作是负的红利收益率。在这种情况下，由式(3.10)可知：

$$F = Se^{(r+u)(T-t)} \tag{3.17}$$

这里，u 是每年的存储成本与现货价格的比例。

若我们回到表 2.2，可以看到黄金的期货价格随着合约到期日的增长，以每年 4.5% 的速度增加。这与 1991 年 10 月 17 日的无风险利率相近，并且与刚给出的公式相一致。

例 3.11

考虑黄金的一年期货合约。假设黄金的存储成本是每年每盎司 $2，在年底支付。假设现价为 $450，无风险利率始终为每年 7%。从而有：r = 0.07，S = 450，T − t = 1，且：

$$U = 2e^{-0.07} = 1.865$$

期货价格 F 为：

$$F = (450 + 1.865)e^{0.07} = 484.6$$

其它商品

对于那些持有的主要目的不是为了投资的商品来说，推导公式(3.15)、(3.16)和(3.17)的套利讨论需要仔细重新考虑。

假设式(3.16)的等式不成立，有：

$$F > (S + U)e^{r(T-t)} \tag{3.18}$$

为利用该式存在的好处，某套利者应采用如下策略：

1. 以无风险利率借金额为 S+U 的资金，用来购买一单位的商品和支付存储成本；
2. 卖出一单位商品的期货合约。

若我们认为期货合约与远期合约相同，这必将在时刻 T 时获利 $F-(S+U)e^{r(T-t)}$。对任何商品采用这套策略都没有问题。但是，当许多套利者都这样操作时，S 将上涨，而 F 将会下跌，直到式(3.18)不再成立。因此，我们的结论是式(3.18)不能维持很长时间。

下面再假设

$$F < (S + U)e^{r(T-t)} \tag{3.19}$$

我们可以采用某种策略来套利，该策略与不付红利股票的远期合约在远期价格很低时采用的套利策略相同。但是，该策略在卖出商品时存储成本支付给了卖出商品的人，这一般来说是不可能的。

对黄金和白银，我们知道许多投资者持有的目的仅仅是为了投资。当他们发现式(3.19)中的不等关系时，他们将从如下的策略中盈利：

1. 卖出商品，节约存储成本，以无风险利率将所得收入进行

投资；

2. 购买期货合约。

相对于单独仅持有黄金和白银的投资者而言，以上策略在到期日的无风险利润为$(S+U)e^{r(T-t)}-F$。因此，式(3.19)也不能长期成立。既然式(3.18)和(3.19)都不能长期成立，我们一定有：$F=(S+U)e^{r(T-t)}$。

对于持有目的主要不是投资的商品来说，以上讨论不再适用。个人或公司保留商品的库存是因为其有消费价值，而非投资价值。因此他们不会积极主动地出售商品购买期货合约，因为期货合约不能消费。因此式(3.19)得以存在下去。由于式(3.18)不能长久成立，有：

$$F \leqslant (S+U)e^{r(T-t)} \tag{3.20}$$

若存储成本用现货价格的比例 u 来表示，则有：

$$F \leqslant Se^{(r+u)(T-t)} \tag{3.21}$$

便利收益

当$F<Se^{(r+u)(T-t)}$时，商品使用者一定会感到持有实实在在的商品比持有期货合约是有好处的。这些好处包括：从暂时的当地商品短缺中获利或者具有维持生产线运行的能力。这些好处有时称为商品的便利收益(convenience yield)。如果存储成本可知，且现值为 U，便利收益 y 可定义为：

$$Fe^{y(T-t)}=(S+U)e^{r(T-t)}$$

若每单位的存储成本为现货价格的固定比例 u，则 y 定义为：

$$Fe^{y(T-t)}=Se^{(r+u)(T-t)}$$

或

$$F = Se^{(r+u-y)(T-t)} \tag{3.22}$$

便利收益简单地衡量了式(3.20)或(3.21)中,等式左边小于右边的程度。对于投资性资产,便利收益必为0,否则就会有套利机会。第二章中的表2.2显示出铜和原油的期货价格随着合约到期日的增长而减少。这说明便利收益 $y>r+u$。

便利收益反映了市场对未来商品可获得性的期望。在期货合约有效期间,商品短缺的可能性越大,则便利收益就越高。若商品使用者拥有大量的库存,则在不久将来出现商品短缺的可能性就很小,从而便利收益会比较低。另一方面,较低的库存会导致较高的便利收益。

3.10 持有成本

期货价格与现货价格之间的关系可用所谓的持有成本(cost of carry)来描述总结。它包括存储成本加上融资购买资产所支付的利息,再减去资产的收益。对不支付红利的股票,持有成本就是r,因为既无存储成本,又无收益;对一个股票指数,持有成本为 $r-q$,因为资产的收益率为q;对货币而言,持有成本为 $r-r_f$;对商品而言,若其存储成本占价格的比例为u,则持有成本为 $r+u$;依此类推。

设持有成本为c。对投资性资产,期货价格为:

$$F = Se^{c(T-t)} \tag{3.23}$$

对消费性资产,期货价格为:

$$F = Se^{(c-y)(T-t)} \tag{3.24}$$

这里,y为便利收益。

3.11 交割选择

尽管远期合约一般正式规定了交割的具体的特定日期，但期货合约却允许空头方选择在一个特定时间段里的任一天进行交割（一般空头方应提前几天给出其打算交割的通知）。这使得期货定价更加复杂。期货合约的到期日应是交割期的开始、中间还是末尾呢？尽管大部分期货合约在到期前就平仓了，但了解交割何时发生对计算期货价格的理论值仍然是十分重要。

如果期货价格为到期时间的增函数，则由式(3.24)可知，由持有资产所获得的好处（包括便利收益和净存储成本）小于无风险利率。因此空头方越早交割越有利，因为收到的现金所获得的利息超过了持有资产的好处。作为一般规则，这种情况下的期货价格的计算应以交割发生在交割期开始为基准。若期货价格随到期时间的增长而降低，则应相反：空头方越晚交割越有利，作为一般规则，期货价格的计算应建立在交割发生在交割期的末尾的基础上。

3.12 期货价格和预期将来的即期价格

有一个经常提到的问题，就是某资产的期货价格是否等于其预期的将来的即期价格。若你打算猜测 3 个月后某资产的价格，其期货价格是否是无偏估计呢？John Maynard Keynes 和 John Hicks 于本世纪三十年代对此进行了讨论，认为如果对冲者倾向于做空头而投机者倾向于做多头，则期货价格将低于预期的将来的即期价格。这是因为投机者承担的风险需要补偿。他们只在预期期货价格将上涨的情况下才会进行交易（另一方面，由于对冲者减少了风险，因而对冲者会接受轻微的损失）。若对冲者做多头而投机者做空头，Keynes 和 Hicks 认为，期货价格一定高于预期的将

来的现货价格。原因是类似的，为了补偿投机者承担的风险，投机者一定预期期货价格随时间而递减。

期货价格低于预期未来现货价格的情形被称为现货溢价(normal backwardation)，而期货价格高于预期未来现货价格的情形被称为期货溢价(contango)。下面我们将从资本市场的风险和收益平衡的角度来探讨造成以上两种现象的原因。

风险和收益

一般来说，一项投资的风险越高，投资者要求的预期收益将越高。熟悉资本资产定价模型的读者应该知道，经济生活中存在两类风险：系统风险和非系统风险。对投资者而言，非系统风险并不重要，因为可以通过持有高度分散化的组合来消除它。投资者承担非系统风险不应要求更高的收益。但是，系统风险不能通过分散化消除。它由投资收益与股票市场整体收益的相关性决定。因此，若承担的系统风险为正值，投资者通常要求高于无风险利率的收益。同样，若承担的系统风险为负值，投资者也会接受低于无风险利率的收益。

期货头寸的风险

考虑一个做期货多头的投机者，他希望资产的价格在到期日时能高于期货价格。我们假设投机者将期货价格的现值以无风险利率投资，同时买入期货合约。设期货合约与远期合约运作方式相同。无风险投资的所得将在交割日用来购买资产，然后立即以市场价格将该资产卖掉。对投机者而言，其现金流为：

时刻 t：$-Fe^{-r(T-t)}$

时刻 T：$+S_T$

S_T 为时刻 T 时资产的价格。

此次投资的现值为：

$$-Fe^{-r(T-t)}+E(S_T)e^{-k(T-t)}$$

这里，k 为与此项投资相对应的贴现率（即它是投资者对该投资的期望收益率），E 代表期望值。假设证券市场上所有的投资机会的净现值均为 0：

$$-Fe^{-r(T-t)}+E(S_T)e^{-k(T-t)}=0$$

或

$$F=E(S_T)e^{(r-k)(T-t)} \tag{3.25}$$

k 值取决于投资的系统风险。若 S_T 与股票市场不相关，则投资的系统风险为 0，这时，k＝r，由式(3.25)可知 $F=E(S_T)$；若 S_T 与整体股票市场正相关，则投资的系统风险为正，这时，k＞r，由式(3.25)可知 $F<E(S_T)$；最后，若 S_T 与股票市场负相关，则投资的系统风险为负，这意味着 k＜r，由式(3.25)可知 $F>E(S_T)$。

实证检验

如果 $F=E(S_T)$，期货价格随着市场预期未来现货价格的态度变动而上下波动。在较长的一段时间内，我们可以合理地假设市场对未来现货价格的期望值时上时下，几率相同。因此，当 $F=E(S_T)$时，长期持有期货合约多头头寸的平均利润应为 0。$F<E(S_T)$的情况对应于系统风险为正值的情况，由于在合约到期时，期货价格和现货价格应该相等，所以平均来说，期货价格应上涨，交易者长期持有期货合约多头头寸将会带来正的利润；同理，$F>E(S_T)$的情况意味着交易者长期持有期货合约空头头寸将带来正的利润。

期货价格实际表现如何呢？本章末尾列出了一些实证研究的文章，结论是含糊不清的。Houthakker 研究了 1937 年至 1957 年间的小麦、棉花和玉米的期货价格，发现做期货多头明显能获得利润。这说明玉米投资具有正的系统风险，即 $F<E(S_T)$。Telser 的研究结果与 Houthakker 的结论不一致。他研究了 1926 年至 1950 年间的棉花和 1927 年至 1954 年间的小麦的价格，但发现做多头或做空头并不能带来明显的利润。Telser 说："没有任何证据证明期货价格违背了简单的假设：即期货价格是期望的未来现货价格的无偏估计"。Gray 研究了 1921 年至 1959 年间的玉米期货价格，得出了与 Telser 类似的结论。Dusak 运用 1952 年至 1967 年间玉米、小麦和大豆的数据，用另一种方法进行了研究。它通过计算商品价格与 S&P500 的相关性来估计投资于这些商品的系统风险。结果是没有系统风险，并支持 $F=E(S_T)$ 的假设。然而，近来由 Chang 对同样的商品采用了更为先进的统计技术进行的研究却支持 $F<E(S_T)$ 的假设。

3.13　小　结

在大多数情况下，具有某个确定交割日期的期货合约的价格与具有同样到期日的远期合约的价格可视为一致。理论上可以证明，当利率完全可预测时，两者应精确相等；当利率变化不可预测时，两者非常接近。

为了理解期货（或远期）价格，先将期货合约的标的资产分为两类是很有帮助的：一类是众多投资者拥有，其目的仅是投资的标的资产；另一类是拥有的目的主要是为消费的标的资产。

在投资性资产的情况下，我们考虑了三种不同的情形：

1. 资产没有提供收益；

2. 资产具有已知的现金收益；

3. 资产具有已知的红利收益率。

结果总结于表 3.4。由此可以得出股票指数、货币、黄金和白银的期货合约价格。

表 3.4 投资性资产的远期/期货价格

期货合约的价格小结：标的资产现价为 S，到期日为 T，T 年期间的无风险利率为 r：

资产	交割价格为 K 的远期合约多头的价值	远期/期货价格
无收益	$S-Ke^{-r(T-t)}$	$Se^{r(T-t)}$
有已知收益，现值为 I	$S-I-Ke^{-r(T-t)}$	$(S-I)e^{r(T-t)}$
有已知红利收益率，q	$Se^{-q(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}$	$Se^{(r-q)(T-t)}$

对于消费性资产，不可能得出期货价格关于现货价格和其它可观察变量的函数关系。所谓的资产的便利收益参数就变得很重要了。该变量衡量的是商品使用者感到拥有现货实际资产比仅持有期货合约更有好处的程度。这些好处包括从本地暂时性商品短缺中获利，以及具有保持生产线得以运行的能力。使用套利讨论仅可以得到消费性资产的期货价格的上限。

持有成本的概念有时很有用。持有成本是标的资产的存储成本加上融资成本，再减去该资产收到的收益。对投资性资产，期货价格高于现货价格，差额部分反映了持有成本。对消费性资产，期货价格高于现货价格，差额部分反映了持有成本减去便利收益。

如果资本资产定价模型正确，期货价格和预期未来现货价格之间的关系将取决于现货价格与股票市场是正相关还是负相关。正相关的关系将使得期货价格低于预期未来现货价格；负相关将使得期货价格高于预期未来现货价格。只有当相关性为 0 时，理论上的期货价格才等于预期的未来现货价格。

附录 3A：当利率为常数时，远期价格与期货价格相等的一个证明

在本附录中，我们将证明当利率为常数时，远期价格和期货价格相等。假设一个持续 n 天的期货合约，F_i 为第 i 天末（$0<i<n$）的期货价格。定义 δ 为每天的无风险利率（设为常数）。考虑如下策略：

1、在第 0 天末，买入期货合约 e^{δ}（即：在合约开始生效时买入）。

2、在第 1 天末，增加多头头寸至 $e^{2\delta}$。

3、在第 2 天末，增加多头头寸至 $e^{3\delta}$。依此类推。

表 3.5 即为上述策略的总结。在第 i 天的开始，投资者拥有多头头寸 $e^{\delta i}$。第 i 天的利润（可能为负）为：

$$(F_i - F_{i-1})e^{\delta i}$$

假设这个盈利以无风险利率计复利直至第 n 天末。它在第 n 天末的价值为：

$$(F_i - F_{i-1})e^{\delta i}e^{(n-i)\delta} = (F_i - F_{i-1})e^{n\delta}$$

整个投资策略的第 n 天末的价值为：

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i - F_{i-1})e^{n\delta}$$

即有：

$$[(F_n - F_{n-1}) + (F_{n-1} - F_{n-2}) - \cdots + (F_1 - F_0)]e^{n\delta}$$
$$= (F_n - F_0)e^{n\delta}$$

由于 F_n 与最终的资产价格 S_T 相等，由此整个投资策略的最

终价值可写为：

$$(S_T - F_0)e^{n\delta}$$

将 F_0 投资于无风险债券中，将这项投资与上述策略混合可得到其在时刻 T 的收益为：

$$F_0e^{n\delta} + (S_T - F_0)e^{n\delta} = S_Te^{n\delta}$$

由于上述所有的多头期货头寸并不需要任何资金，由此可见，投资 F_0 能够在 T 时刻得到 $S_Te^{n\delta}$。

下面假设第 0 天末的远期价格为 G_0。通过将 G_0 投资于无风险债券并购买 $e^{n\delta}$ 个远期合约，在时刻 T 仍然保证具有 $S_Te^{n\delta}$ 的资产。因此就有两种投资策略：一个要求初始投资 F_0；另一个要求初始投资 G_0，两个投资在 T 时刻都得到 $S_Te^{n\delta}$。从而在无套利机会的情况下：

$$F_0 = G_0$$

换句话说：期货价格与远期价格是等价的。注意在本证明中对一天的时间周期并没有特殊限制。因此当相关假设做出后，每周结算的期货合约的价格也与远期价格相等。

表 3.5 用以体现期货价格与远期价格相等的投资策略

日期	0	1	2	…	n－1	n
期货价格	F_0	F_1	F_2	…	F_{n-1}	F_n
期货头寸	e^{δ}	$e^{2\delta}$	$e^{3\delta}$	…	$e^{n\delta}$	0
利润/损失计复利至第 n 天的	0	$(F_1-F_0)e^{\delta}$	$(F_2-F_1)e^{2\delta}$	…	…	$(F_n-F_{n-1})e^{n\delta}$
利润/损失	0	$(F_1-F_0)e^{n\delta}$	$(F_2-F_1)e^{n\delta}$	…	…	$(F_n-F_{n-1})e^{n\delta}$

第四章

利率期货

利率期货合约是标的资产价格仅依赖于利率水平的期货合约。在这一章，我们描述利率期货运作的机制以及如何报价的。我们也解释期货价格与现货价格的相互关系，讨论久期的概念，考虑包含利率期货的对冲策略。

对冲某公司的利率风险暴露比对冲诸如铜价之类的风险暴露更复杂。这是因为为了完全描述利率水平，需要整个利率的期限结构，而铜价可以由单一数字来描述。希望对冲利率风险暴露的公司必须确定它所要求对冲的期限，同时还必须确定它暴露于利率风险的期限。然后它还必须寻找合适的利率期货合约以获得相应的对冲。

4.1 某些预备知识

在我们描述利率期货合约性质之前，有必要回顾几个有关利率期限结构的概念。

即期和远期利率

n 年期即期利率是从今天开始计算并持续 n 年期限的投资的

利率。因此,3 年期即期利率是投资持续 3 年的利率,5 年期即期利率是投资持续 5 年的利率等等。考虑的投资应该是中间没有支付的"纯粹"的 n 年投资。这意味着所有的利息和本金在 n 年末支付给投资者。n 年即期利率也指的是 n 年期零息票收益率(n-year zero-coupon yield)。由定义可知,该收益率正好是不付息票债券的收益率。

远期利率是由当前即期利率隐含的将来时刻的一定期限的利率。计算方式如下:我们假设即期利率如表 4.1 的第二列所示。这些即期利率以连续复利计息。因此,一年期 10% 年利率意味着今天投资 $100,一年后投资者收到 $100e^{0.10} = \$110.52$;二年期 10.5% 年利率意味着今天投资 $100,二年后投资者收到 $100e^{0.105\times 2} = \$123.17$;依此类推。

表 4.1 远期利率的计算

年(n)	n 年期投资的即期利率 (%p.a.)	第 n 年的远期利率 (%p.a.)
1	10.0	
2	10.5	11.0
3	10.8	11.4
4	11.0	11.6
5	11.1	11.5

表 4.1 中第二年的远期利率是年利率 11%。这是一个即期利率隐含的第一年末至第二年末之间期限的利率。它可以通过一年期 10% 年即期利率和二年期 10.5% 年即期利率计算出来。正是这个第二年的利率,与第一年 10% 利率组合在一起,得到整个二年期间 10.5% 的年利率。为证明正确答案是 11%,假设投资 $100,则第一年 10% 利率和第二年 11% 利率在第二年末收益为:

$$100e^{0.10}e^{0.11} = \$123.37$$

二年期 10.5% 年利率投资的收益为：

$$100e^{0.105\times 2}$$

这个结果也是 $123.37。这个例子说明了一个一般的结论：即当这些利率是连续复利，并且将相互衔接时期的利率组合在一起时，整个期间的等价利率是这些利率的简单算术平均(10.5% 是 10% 和 11% 的平均值)。当这些利率不是连续复利时，这个结果近似成立。

第三年的远期利率是二年期 10.5% 年即期利率与三年期 10.8% 年即期利率隐含的利率，计算的结果是 11.4% 年利率。这是因为以 10.5% 年利率投资二年之后再以 11.4% 年利率投资一年可获得三年期 10.8% 年利率收益。其它的远期利率可用类似的方法计算，列在表 4.1 中的第三列。一般来说，如果 r 是 T 年期的即期利率，r^* 是 T^* 年期的即期利率，且 $T^*>T$，T^*-T 期间的远期利率如下：

$$\hat{r}=\frac{r^*T^*-rT}{T^*-T} \tag{4.1}$$

为说明这个公式，我们从表 4.1 中数据计算第四年远期利率。$T=3$，$T^*=4$，$r=0.108$，且 $r^*=0.11$，公式给出 $\hat{r}=0.116$。

零息票收益率曲线

零息票收益率曲线(zero－coupon yield curve)是表示即期利率(即零息票收益率)与到期日之间关系的曲线。图 4.1 表示了表 4.1 中数据的零息票收益率曲线。区分零息票收益率曲线与附息票债券收益率曲线是很重要的。在图 4.1 所示的情况下，收益率曲线是向上倾斜的，零息票收益率曲线总是在附息票债券收益率的上面。这是因为如下的情况影响了附息票债券收益率：在债券

到期前，投资者获得一些利息收入，对应于这些利息收入的相应贴现率低于最后支付日期相应的贴现率。

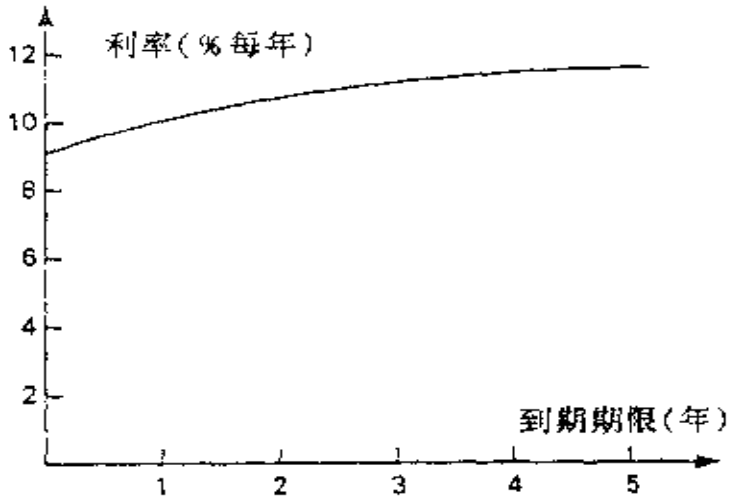


图 4.1 表 4.1 中数据的零息票收益率曲线

分析家有时也考虑远期利率与远期合约期限之间的关系曲线。因此远期利率的期限可以是 3 个月期、6 个月期或其它任何便利的时间期限。式(4.1)可重写为：

$$(r^* - r)\frac{T}{T^* - T}$$

这表明，如果收益率曲线是向上倾斜，于是 $r^* > r$，于是 $r_2 > r_1$，所以远期利率就是零息票收益率 r 和 T 趋近于 T^* 的极限(所以 r^* 趋近于 r)。我们看到在 T 时刻开始的一个相当短期间的远期利率是：

$$r + T\frac{\partial r}{\partial T}$$

这就是所谓的时刻 T 的瞬态远期利率(instantaneous forward rate)。

图 4.2 是当收益率曲线向上倾斜时的零息票收益率曲线、附息票债券的收益率曲线和远期利率曲线。由于上述理由，远期利率曲线在零息票收益率曲线之上，而零息票收益率曲线又在附息票债券的收益率曲线之上。图 4.3 说明了当收益率曲线向下倾斜时的情况。类似在向上倾斜收益率曲线中的讨论，可知在收益率曲线向下倾斜情况下，附息票债券的收益率曲线在零息票收益率曲线之上，而零息票收益率曲线又在远期利率曲线之上。

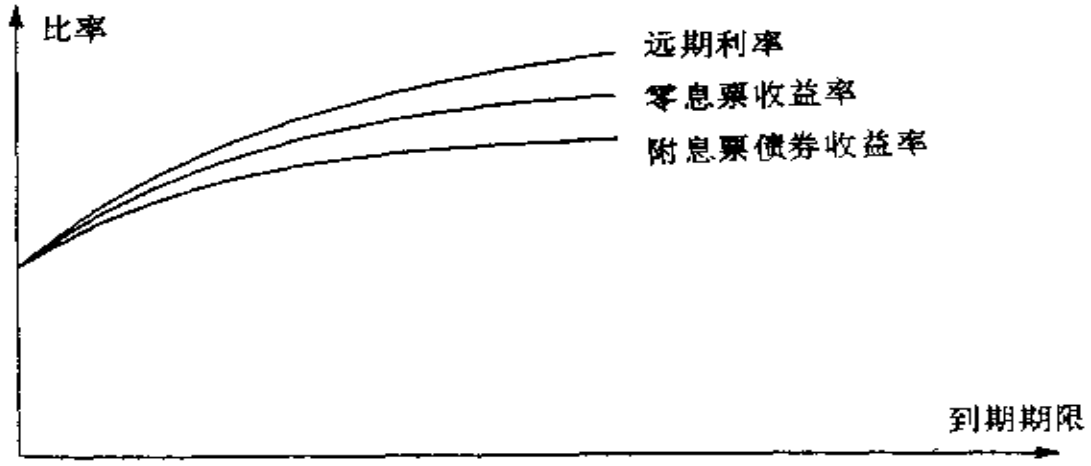


图 4.2　当收益率曲线是向上倾斜时的情况

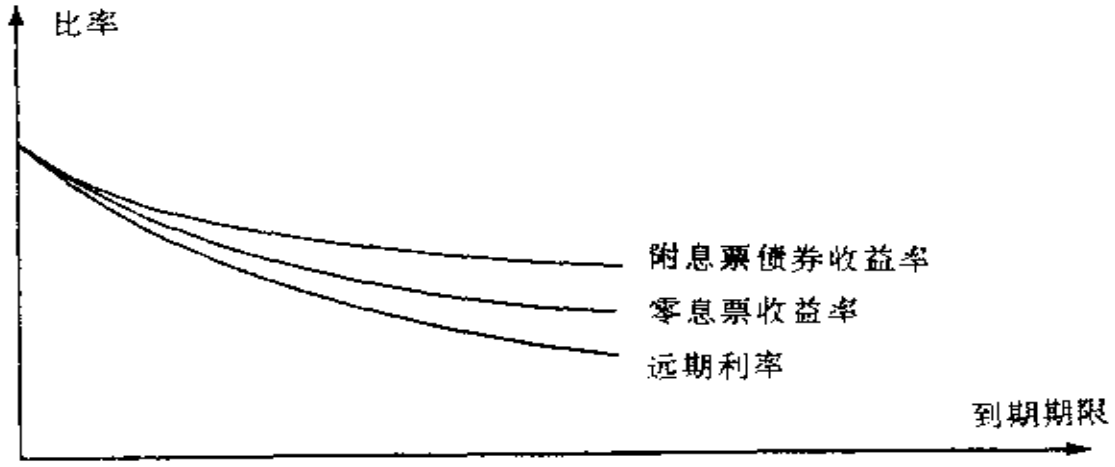


图 4.3　当收益率曲线是向下倾斜时的情况

零息票收益率曲线的确定

实际中,即期利率(或零息票收益率)并不总是能够直接观察到的。能够观察到的只是附息票债券的价格。因此,一个重要的问题是如何从附息票债券的价格得出零息票收益率曲线。

一个通常的方法就是所谓的息票剥离(bootstrap)方法。为说明这个方法,考虑表 4.2 中 6 个债券价格的数据。由于前 3 个债券不付息票,对应这些债券期限的连续复利的即期利率可以容易地计算出来。第一个债券 3 个月期限,价格 97.5,其收益率为 2.5。连续复利的 3 个月期利率是

$$4\ln\left(1+\frac{2.5}{97.5}\right)=0.1012$$

或每年 10.12%。类似地,6 个月期是:

$$2\ln\left(1+\frac{5.1}{94.9}\right)=0.1047$$

或每年 10.47%。1 年期是

$$\ln\left(1+\frac{10}{90.0}\right)=0.1054$$

或每年 10.54%。

第四个债券期限 1.5 年。按如下方式支付:

6 个月期后 $4

1 年期后 $4

1.5 年后 $104

从前面的计算中,我们知道在 6 个月末支付所用的贴现率是 10.47%,在 1 年末支付所用的贴现率是 10.54%。我们也知道债券的价格 $96 必须等于债券持有人收到的所有收入的现值。设 R 表示 1.5 年期的即期利率,因此:

$$4e^{-0.1047\times0.5}+4e^{-0.1054}+104e^{-1.5R}=96$$

化简为：

$$e^{1.5R} = 0.85196$$

或

$$R = -\frac{\ln(0.85196)}{1.5} = 0.1068$$

因此，1.5 年期的即期利率是 10.68%。这是唯一的与 6 个月期、1 年期即期利率及表 4.2 中数据一致的即期利率。

表 4.2　息票剥离方法的数据

债券本金（$）	到期期限（年）	年息票*（$）	债券价格（$）
100	0.25	0	97.5
100	0.50	0	94.9
100	1.00	0	90.0
100	1.50	8	96.0
100	2.00	12	101.6
100	2.75	10	99.8

* 注：假设每 6 个月支付所列息票数额的一半

运用 6 个月期、1 年期、1.5 年期即期利率和表 4.2 中第五个债券的信息，可以计算出 2 年期的即期利率。如果 R 表示 2 年期的即期利率，

$$6e^{-0.1047\times0.5} + 6e^{-0.1054\times1.0} + 6e^{-0.1068\times1.5} + 106e^{-2R} = 101.6$$

从以上可得出 R = 0.1081，或 10.81%。

至今，我们已经求出 5 个对应不同期限的零息票收益率曲线上的点。利用线性插值可以得到对应其它中间期限的点。第六个债券的现金流如下：

3 个月期后　　$5

9个月期后	$5
1.25年后	$5
1.75年后	$5
2.25年后	$5
2.75年后	$105

对应于第一个现金流的贴现率已经求出为10.12%。利用线性插值方法,求出以下三个现金流的贴现率分别为10.505%,10.61%和10.745%。因此前四个现金流的现值为:

$$5e^{-0.1012\times 0.25} + 5e^{-0.10505\times 0.75} + 5e^{-0.1061\times 1.25} + 5e^{-0.10745\times 1.75} = 18.018$$

最后两个现金流的现值为:

$$99.8 - 18.018 = 81.782$$

设2.75年期的即期利率为R,利用线性插值,2.25年期即期利率为:

$$0.1081 \times \frac{2}{3} + \frac{R}{3}$$

或0.0721 + R/3。因此,R的方程为:

$$5e^{-2.25\times(0.0721+R/3)} + 105e^{-2.75\times R} = 81.782$$

利用试错法或诸如牛顿法的数值方法解以上方程,得出R=0.1087。[①]2.75年期的即期利率为10.87%。

从表4.2中六个债券价格中可以描出图4.4中的零息票收益率曲线。如果给出更长期限债券,可获得更完整的期限结构。

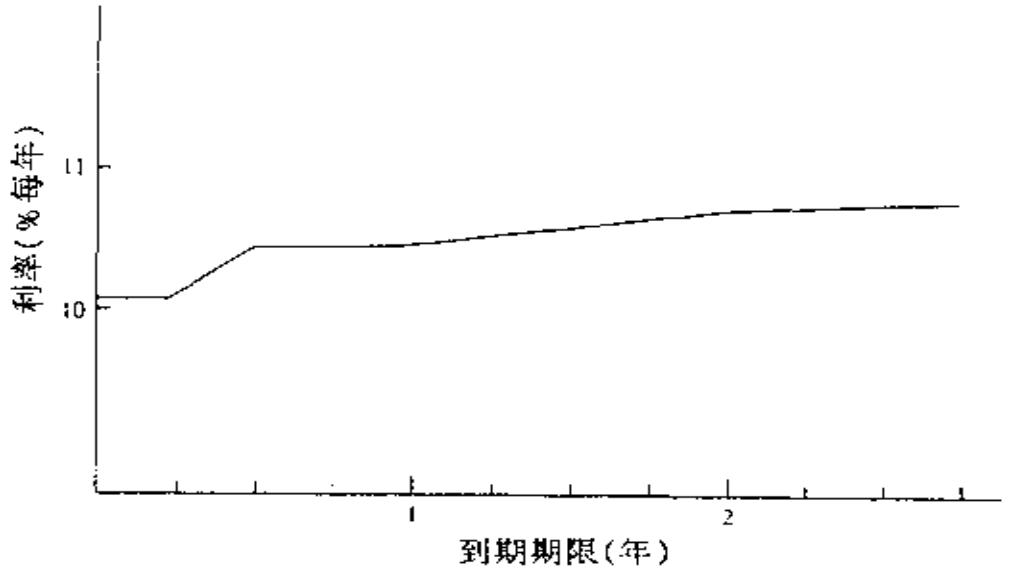


图 4.4　表 4.2 中数据的零息票收益率曲线

期限结构理论

有许多种不同的期限结构理论。最简单的是预期理论(expectations theory)。该理论认为长期利率应该反映预期的未来的短期利率。更精确地说,它认为对应某一确定时期的远期利率应该等于预期的未来的那个期限的即期利率。另一个理论是所谓的市场分割理论(market segmentation theory)。该理论认为短期、中期和长期利率之间没有什么关系。不同的机构投资于不同期限的债券,并不转换期限。短期利率由短期债券市场的供求关系来决定,中期利率由中期债券市场的供求关系来决定,等等。

比较令人感兴趣的另一个理论是所谓的流动性偏好理论(liquidity preference theory)。该理论认为远期利率应该总是高于预

期的未来的即期利率。这个理论的基本假设是投资者愿意保持流动性并投资于较短的期限。而另一方面，长期借款的借款者通常愿意用固定利率。如果银行和其它金融中介提供的利率使得远期利率等于预期未来即期利率，长期利率应该等于预期未来短期利率的平均值。在没有其它选择的情况下，投资者将倾向于存短期资金，借款者将倾向于借长期资金。于是金融中介发现他们需用短期存款来为长期固定利率贷款融资。这将包含额外的利率风险。实际上，为了使存款者和借款者匹配，避免利率风险，金融中介将提高长期利率超过预期未来的即期利率。这将减少长期固定利率借款的需求，鼓励投资者存更长期限的资金。

流动性偏好理论使得长期利率大于预期的未来的短期利率。经验检验结果说明收益率曲线向上倾斜的状况比向下倾斜的状况要多，流动性偏好理论与以上结果相一致。

4.2 长期和中期国债期货

表 4.3 是 1991 年 10 月 18 日《华尔街日报》报出的利率期货行情。最普遍的长期利率期货合约是在 CBOT 交易的长期国债利率期货。在这个合约中，期限超过合约交割月份第一天 15 年以上的，并从那天起 15 年内不能回赎的任何政府债券都可以进行交割。下面还要解释，交易所已经公开调整的方法，该方法调整空头方交割特定长期国债时可接受的价格。

中期国债和 5 年期国债期货合约也在频繁交易。对中期国债期货合约，有效期在 6.5 年和 10 年之间的任何政府债券(或票据)都能进行交割。正如以上国债期货合约一样，也有一种方法调整空头方交割特定中期国债时可接受的价格。对 5 年期国债期货合约，四个最近由政府拍卖的任何中期国债都能进行交割。

以下我们的讨论集中在长期国债期货合约上。然而，讨论的

结论也适合于其它国债期货合约：

表 4.3　1991 年 10 月 18 日《华尔街日报》利率期货行情

FUTURES

	Open	High	Low	Settle	Chg	Yield Settle	Yield Chg	Open Interest
TREASURY BONDS (CBT)—$100,000; pts. 32nds of 100%								
Dec	99-27	100-05	96-19	98-20	– 41	8.140	+ .131	276,491
Mr92	99-00	99-08	97-26	97-26	– 41	8.225	+ .135	17,282
June	97-16	97-16	96-31	96-31	– 41	8.313	+ .134	9,433
Sept	96-15	96-17	96-06	96-06	– 41	8.397	+ .136	2,439
Dec	95-24	95-24	95-15	95-15	– 41	8.474	+ .137	2,981
Mr93	....	....	....	94-26	– 41	8.546	+ .139	222
Est vol 400,000; vol Wed 190,068; op int 308,889, –3,712.								
TREASURY BONDS (MCE)—$50,000; pts. 32nds of 100%								
Dec	100-01	100-03	98-18	98-21	– 38	8.137	+ .121	16,678
Est vol 7,500; vol Wed 4,513; open int 16,673, –106.								
T-BONDS (LIFFE) U.S. $100,000; pts. of 100%								
Dec	100-00	100-02	98-25	98-30	– 1-00	100-20	96-24	4,401
Est vol 1,246; vol Wed 999; open int 4,401, +305.								
GERMAN GOVT. BOND (LIFFE)								
250,000 marks; $ per mark (.01)								
Dec	86.24	86.35	86.21	86.22	– .07	86.38	85.73	16,113
Mr92	86.55	86.59	86.50	86.51	– .06	86.63	85.39	1,530
Est vol 37,158; vol 33,460; open int 84,643, +1,539.								
TREASURY NOTES (CBT)—$100,000; pts. 32nds of 100%								
Dec	102-27	103-01	102-04	102-04	– 23	7.692	+ .103	91,105
Mr92	102-07	102-07	101-13	101-14	– 23	7.790	+ .103	3,616
Est vol 30,000; vol Wed 13,950; open int 94,771, +536.								
5 YR TREAS NOTES (CBT)—$100,000; pts. 32nds of 100%								
Dec	04-065	04-075	03-225	103-25	– 12.5	7.089	+ .092	91,659
Mr92	03-015	103-04	03-025	103-03	– 12.5	7.251	+ .092	434
Est vol 34,124; vol Wed 11,249; open int 92,093, –3,972.								
2 YR TREAS NOTES (CBT)—$200,000; pts. 32nds of 100%								
Dec	103-11	103-11	103-05	103-062	– 4½	6.275	+ .070	14,760
Est vol 800; vol Wed 582; open int 14,764, –121.								
30-DAY INTEREST RATE (CBT)—$3 million; pts. of 100%								
Oct	94.82	94.82	94.77	94.78	– .03	5.22	+ .03	1,250
Nov	94.90	94.90	94.82	94.85	– .06	5.17	+ .06	1,245
Dec	94.75	94.76	94.75	94.75	– .05	5.25	+ .05	1,103
Ja92	94.78	94.78	94.78	94.78	– .05	5.22	+ .05	693
Feb	94.85	94.86	94.85	94.85	– .06	5.15	+ .06	757
Mar	94.82	94.82	94.81	94.81	– .06	5.19	+ .06	304
June	....	....	....	94.61	– .05	5.39	+ .05	113
Est vol 281; vol Wed 408; open int 5,557, –106.								
TREASURY BILLS (IMM)—$1 mil.; pts. of 100%								
	Open	High	Low	Settle	Chg	Discount Settle	Discount Chg	Open Interest
Dec	95.08	95.08	94.98	95.02	– .05	4.98	+ .05	27,859
Mr92	95.17	95.17	95.06	95.08	– .08	4.92	+ .08	20,046
June	94.98	94.98	94.88	94.89	– .10	5.11	+ .10	2,107
Sept	94.60	94.62	94.60	94.63	– .12	5.37	+ .12	251
Est vol 7,844; vol Wed 3,781; open int 50,359, –461.								
LIBOR-1 MO. (IMM)—$3,000,000; points of 100%								
Nov	94.78	94.78	94.69	94.69	– .09	5.31	+ .09	9,535
Dec	94.22	94.22	94.16	94.16	– .06	5.84	+ .06	5,614
Ja92	94.74	94.74	94.66	94.68	– .06	5.32	+ .06	6,062
Feb	94.65	94.65	94.64	94.65	– .06	5.35	+ .06	1,069
Mar	94.61	94.69	94.59	94.61	– .07	5.39	+ .07	674
Est vol 2,347; vol Wed 1,922; open int 22,955, +124.								

	Open	High	Low	Settle	Chg	High	Low	Open Interest
MUNI BOND INDEX (CBT)-$1,000; times Bond Buyer MBI								
Dec	94-30	94-30	94-05	94-10	– 18	95-09	88-16	10,469
Mr92	93-26	93-26	93-16	93-20	– 19	94-18	88-00	122
Est vol 2,500; vol Wed 1,313; open int 10,591, –175.								
The index: Close 95-01; Yield 6.87.								
EURODOLLAR (IMM)—$1 million; pts of 100%								
	Open	High	Low	Settle	Chg	Yield Settle	Yield Chg	Open Interest
Dec	94.56	94.56	94.46	94.47	– .01	5.53	+ .01	264,211
Mr92	94.64	94.65	94.52	94.55	– .08	5.45	+ .08	216,583
June	94.44	94.46	94.31	94.32	– .11	5.68	+ .11	124,299
Sept	94.15	94.17	94.00	94.01	– .13	5.99	+ .13	79,095
Dec	93.60	93.61	93.45	93.45	– .14	6.55	+ .14	59,277
Mr93	93.44	93.44	93.30	93.30	– .15	6.70	+ .12	51,853
June	93.12	93.12	93.00	93.00	– .10	7.00	+ .10	36,057
Sept	92.83	92.83	92.72	92.73	– .08	7.27	+ .08	22,889
Dec	92.47	92.47	92.36	92.38	– .06	7.62	+ .06	20,078
Mr94	92.44	92.46	92.36	92.37	– .06	7.63	+ .06	16,782
June	92.28	92.28	92.18	92.19	– .06	7.81	+ .06	14,520
Sept	92.10	92.10	92.00	92.01	– .06	7.99	+ .06	10,224
Dec	91.79	91.79	91.71	91.73	– .06	8.27	+ .06	9,544
Mr95	91.78	91.78	91.69	91.72	– .06	8.28	+ .06	6,308
June	91.70	91.70	91.60	91.63	– .06	8.37	+ .06	5,679
Sept	91.61	91.63	91.52	91.55	– .06	8.45	+ .06	4,349
Est vol 206,438; vol Wed 63,709; open int 942,822, –1,721.								
EURODOLLAR (LIFFE)—$1 million; pts of 100%								
	Open	High	Low	Settle	Change	Lifetime High	Lifetime Low	Open Interest
Dec	94.53	94.56	94.47	94.48	– .07	94.56	90.58	18,088
Mr92	94.65	94.65	94.54	94.56	– .08	94.65	90.60	7,734
June	94.45	94.45	94.33	94.35	– .09	94.45	90.97	3,723
Sept	94.15	94.17	94.04	94.06	– .11	94.17	90.97	1,423
Dec	93.60	93.60	93.60	93.50	– .11	93.60	91.54	467
Mr93	....	....	....	93.33	– .11	93.35	91.55	405
June	....	....	....	93.03	– .08	92.80	92.60	200
Est vol 2,973; vol Wed 1,510; open int 32,240, +314.								
STERLING (LIFFE)—$500,000; pts of 100%								
Dec	89.95	89.97	89.92	89.96	+ .02	90.35	86.52	53,360
Mr92	90.36	90.37	90.32	90.35	+ .02	90.49	86.68	35,435
June	90.38	90.40	90.36	90.39	+ .02	90.46	87.45	29,134
Sept	90.34	90.37	90.34	90.36	+ .02	90.40	87.46	10,238
Dec	90.26	90.27	90.24	90.27	+ .02	90.32	87.55	6,654
Mr93	90.11	90.12	90.10	90.11	+ .02	90.16	87.50	3,819
June	89.98	90.00	89.98	89.99	+ .01	90.09	87.58	1,822
Sept	89.93	89.93	89.93	89.9%	....	90.08	88.20	1,595
Dec	....	....	....	89.86	....	90.02	88.95	1,708
Est vol 33,465; vol Wed 30,309; open int 143,765, –594.								
LONG GILT (LIFFE)—£50,000; 32nds of 100%								
Dec	94-25	94-25	94-10	94-17	– 0-06	97-17	89-10	52,997
Mr92	94-22	94-22	94-22	94-20	– 0-06	96-06	96-00	228
Est vol 36,445; vol Wed 26,424; open int 53,225, +29								

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, October 18, 1991. Copyright ©1991, Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

报价

国债价格以美元和32分之一美元报出。所报的价格是面值为$100债券的价格。因此，90－05的报价意味着面值$100,000债券的表示价格是$90,156.25。

报价与购买者所支付的现金价格并不相同。现金价格与报价之间的关系为：

现金价格＝报价＋上一个付息日以来的累计利息

为说明这个公式，设现在是1990年3月5日，所考虑的债券息票利率为11%，在2010年7月10日到期，报价为95－16（或$95.50）。由于政府债券半年付一次利息，最近的一次付息日是1990年1月10日，下一次付息日将是1990年7月10日。在1990年1月10日与1990年3月5日之间的天数是54天，而1990年1月10日与1990年7月10日之间的天数是181天。一个$100面值债券，在1月10日和7月10日支付的利息都是$5.50。1990年3月5日的累计的利息应该均摊7月10日支付给债券持有者息票，计算如下：

$$\frac{54}{181} \times \$5.50 = \$1.64$$

因此，2010年7月10日到期的每$100面值债券的现金价格是

$$\$95.5 + \$1.64 = \$97.14$$

$10,000面值债券的现金价格为$97,140。

长期国债期货合约的报价与长期国债本身报价的方式相同。表4.3表明1991年10月17日，12月份合约的长期国债期货合约的结算价格为98－20或为$98\frac{20}{32}$。每一期货合约的大小为交割

面值为 $100,000 的债券。因此，在期货价格的报价中，期货价格 $1 的变化将引起期货合约的总价值变化 $1,000。合约可在交割月份中的任何时间进行交割。

转换因子

我们前面提到，长期国债期货合约中有一条规定，空头方可以选择交割任何期限长于 15 年且在 15 年内不可回赎的债券。当交割某一特定的债券时，转换因子(conversion factor)这一参数是指空头方收到的款项。空头方报出的交割价格等于转换因子乘以期货报价。考虑累计利息，对交割每一个面值为 $100 的债券，我们给出如下关系：

空头方收到的现金 = 期货报价 × 交割债券的转换因子
　　+ 交割债券的累计利息

每一合约必须交割面值为 $100,000 的债券。假定报出的期货价格为 90－00，所交割的债券的转换因子为 1.3800，在交割时每一面值为 $100 的债券的应计利息为 $3.00。当空头方交割债券时，交割每一面值为 $100 的债券，他收到的现金为(交割时由多头方支付)：

$$(1.38 \times 90.00) + 3.00 = \$127.20$$

因此每一合约，期货合约空头方应交割面值为 $100,000 的债券，收到 $127,200 的现金。

假定所有期限的年利率均为 8%(每半年复利一次)，则某债券的转换因子就定义为交割月份第一天该债券的价值。为了便于计算，债券的有效期限和距付息日的时间取整数到最近的 3 个月。在此基础上，CBOT 给出了对应的换算表。如果取整数后，债券的有效期为半年的倍数，我们假定第一次付息是在 6 个月后。如果取整数后，债券的有效期不是 6 个月的整数倍(即额外有 3 个月)，我们假定在 3 个月后付息，并减去应累计利息。

例 4.1

某一债券息票利率为每年 14%，距到期日还有 20 年零 2 个月。为了计算转换因子，假定债券距到期日整整 20 年。假定在 6 个月后，第一次付息。即假定每 6 个月支付一次利息，一直到 20 年后支付本金时为止。我们以下按债券面值为 $100 来计算。假定年贴现率为 8%，每半年计复利一次（每 6 个月 4%），则债券的价值为：

$$\sum_{i=1}^{40} \frac{7}{1.04^i} + \frac{100}{1.04^{40}} = 159.38$$

除以债券的面值，转换因子为 1.5938。

例 4.2

某债券利息率为 14%，距到期日还有 18 年 4 个月。为了计算转换因子，假定债券距到期日还有 18 年 3 个月。将所有将来息票支付的现金流贴现到距今 3 个月后的时点上，此时债券的价值为：

$$\sum_{i=1}^{36} \frac{7}{1.04^i} + \frac{100}{1.04^{36}} = 163.73$$

由于 3 个月期的利率为 $\sqrt{1.04} - 1$ 即 1.9804%。因此从距今 3 个月后的时点贴现到现在，债券的价值为 163.73/1.019804 = 160.55。减去累计利息 3.5，债券价值变为 157.05。因此转换因子为 1.5705。

交割最便宜的债券

在任意时刻，大约有 30 种债券可以用来交割 CBOT 的长期国债期货合约。考虑利息和到期日，它们之间的区别是很大的。空头方可以选择交割最便宜的债券（cheapest - to - deliver bond）进行交割。由于空头方收到的价款为：

（期货的报价 × 转换因子）+ 累计利息

而购买债券的成本为：

债券的报价 + 累计利息

交割最便宜的债券是：

债券报价 -（期货报价 × 转换因子）

最小的那个债券。逐个计算每个可用来交割的债券，就可以找出交割最便宜的债券。

例 4.3

空头方决定交割，打算在表 4.4 的三个债券中进行选择。假定现在期货的报价为 93 - 08，即 93.25。交割每种债券的成本如下：

债券 1：99.50 - (93.25 × 1.0382) = 2.69

债券 2：143.50 - (93.25 × 1.5188) = 1.87

债券 3：119.75 - (93.25 × 1.2615) = 2.12

因此交割最便宜的债券是债券 2。

表 4.4 例 4.3 中可供交割的债券

债券	报价	转换因子
1	99.50	1.0382
2	143.50	1.5188
3	119.75	1.2615

一些因素决定了交割最便宜的债券。当收益率高于 8% 时，就转换因子制度而言，则倾向于交割息票利率较低、期限较长的债券。当收益率低于 8% 时，倾向于交割息票利率较高、期限较短的债券。其次，当收益率曲线向上倾斜时，倾向于交割距到期日期限长的债券；而当收益率曲线向下倾斜时，倾向于交割期限较短的债券。最后，有些债券的售价高于其理论值。例如低息票利率债券和那些利息可以从本金中拆分的债券。在任何情况下，都不可能证明这些债券是交割最便宜的债券。

威尔德卡游戏

在CBOT交易的长期国债期货合约于芝加哥时间下午2点停止交易。但是，长期国债现货一直要交易到下午4点。另外，空头方在下午8点以前都可以向结算所下达交割的通知。如果下达了交割通知，交割应付价格(invoice price)是以当天的结算价格为基础计算的。即在下午2点响铃以前，刚刚进行交易的价格。

这样就给了空头方一个选择权，我们称它为威尔德卡游戏(wild card play)。如果在下午2点以后债券的价格下降，他或她就可以发出交割通知，开始购买交割最便宜的债券并为交割作准备。如果债券的价格并没有下降，空头方继续保持头寸，等到第二天运用相同的策略。

就象空头方拥有的其它选择权一样，威尔斯卡选择权也不是免费的。它的价值反映在期货的价格中，当不存在该选择权时，期货的价格要低一些。

期货价格的决定

由于空头方涉及的交割时间选择权和交割债券的选择权不容易进行估价，因此精确地确定长期国债期货的理论价格也是很难的。但是，如果我们假定交割最便宜的债券和交割日期是已知的，长期国债期货合约则是这样一种期货合约，即该合约的标的资产可向其持有者提供已知的收益。第三章中的公式(3.7)表明期货的价格F与现货的价格S的关系是：

$$F = (S - I)e^{r(T-t)} \tag{4.2}$$

其中I是期货合约有效期内息票利息的现值，T是期货合约的到期时刻，t是现在的时刻，r是在t和T的期间内适用的无风

险利率。

在公式(4.2)中，F 是期货的现金价格(cash futures price)，S 是债券的现金价格(cash bond price)。正确的过程如下：

1. 根据报价计算交割最便宜的债券的现金价格。

2. 运用公式(4.2)根据债券的现金价格计算期货的现金价格。

3. 根据期货的现金价格计算出期货的报价。

4. 考虑到交割最便宜的债券和标准的 15 年期 8% 的债券的区别，将以上求出期货报价除以转换因子。

下面一个例子可以更好地说明这一过程。

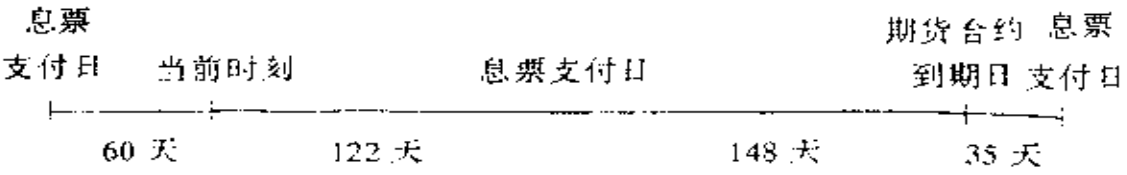


图 4.5　例 4.4 的时间图

例 4.4

假定某一国债期货合约，已知交割最便宜的债券的息票利率为 12%，转换因子为 1.4000。假定 270 天后进行交割。债券息票每半年付息一次。如图 4.5 所示，上一次付息是在 60 天前，下一次付息在 122 天后，再下一次付息是在 305 天后。利率期限结构是水平的，年利率为 10%(连续复利)。我们假定当时债券的报价为 $120。债券的现金价格为报价加上从上一次付息至今的累计利息。因此现金价格(cash price)为：

$$120 + \frac{60}{182} \times 6 = 121.978$$

在 122 天后(−0.3342 年)将会收到 $6 的利息。则利息的现值为:

$$6e^{-0.3342\times 0.1} = 5.803$$

期货合约还要持续 270 天(−0.7397 年)。如果期货合约标的资产为 12% 的债券,则其期货现金价格为:

$$(121.978 - 5.803)e^{0.7397\times 0.1} = 125.094$$

在交割时,有 148 天的累计利息。如果合约标的资产为 12% 的债券,则其期货的报价为:

$$125.094 - 6\times\frac{148}{183} = 120.242$$

事实上,期货合约是基于 8% 的标准债券的,而每一个 12% 的债券等同于 1.4000 个 8% 的标准债券。因此标准期货合约的报价应为:

$$\frac{120.242}{1.4000} = 85.887$$

4.3 短期国债期货

我们现在来考虑与短期利率有关的期货合约。在短期国债期货合约中,标的资产为 90 天的短期国债。根据合约条款,在合约到期时,该合约的空头方必须在 3 个连续的营业日内交割 $1,000,000 的短期国债。第一个交割日是交割月份中的第一日,这天发行期限为 13 周的短期国债,并且某个 1 年期短期国债还有 13 周到期。实际上,这意味当进行交割时,短期国债距到期日也许是 89 天,或 90 天,或 91 天。

短期国债也被称为贴现债券(discount instrument)。期间它不单独支付利息,在到期日投资者收到债券的面值。在期货合约到期日前,标的资产是期限长于 90 天的短期国债。例如,如果期货合约在 160 天后到期,标的资产就是 250 天的短期国债。

为进行一般性的分析，我们假定现在是0时刻，期货合约的到期期限为T年，作为标的资产的短期国债的到期期限为T^*年（T^*和T之间相差90天）。我们进一步假定到期日T和T^*的无风险连续复利率分别为r和r^*。假定期货合约标的短期国债的面值为$100，其现值$V^*$为：

$$V^* = 100e^{-r^*T^*}$$

由于在此期间短期国债没有支付收益，根据公式(3.5)，我们得出期货的价格F为V^*乘以e^{rT}；即为：

$$F = 100e^{-r^*T^*}e^{rT} = 100e^{rT-r^*T^*} \qquad (4.3)$$

根据公式(4.1)，上式化简为：

$$F = 100e^{-r(T^*-T)}$$

其中r为T和T^*期间的远期利率。这一式子表明，如果交割日的90天期利率等于现在的远期利率，则短期国债期货合约的价格即为上述价格。

套利机会

如果短期国债期货价格中隐含的远期利率不同于短期国债它们本身所隐含的远期利率，就存在潜在的套利机会。假设：45天期短期国债的年利率为10%，135天期短期国债的年利率为10.5%，还有45天到期的短期国债期货价格对应的隐含远期利率为10.6%，所有的利率均为连续复利率。根据公式(4.1)，在45天到135天中，短期国债本身隐含的远期利率为：

$$\frac{135\times 10.5 - 45\times 10}{90} = 10.75\%$$

这就高于短期国债期货价格中隐含的 10.6% 远期利率。套利者应在 45 天到 135 天的期限内以 10.6% 的利率借入资金并按 10.75% 的利率进行投资。这可通过以下的策略来进行：

1. 卖空期货合约。

2. 以 10% 的年利率借入 45 天的资金。

3. 将借入的资金按 10.5% 的利率进行 135 天的投资。

我们将以上策略称之为第 1 类套利。第一个交易确保在 45 天后，能够卖出收益率为 10.6% 的短期国债。实际上，它将这一段时间内的借款利率锁定为 10.6%。第二个和第三个交易确保了在这一段时间内，收益率为 10.75%。

如果情况与此相反，即短期国债期货的隐含利率高于 10.75%，那么就可以采用如下的相反策略：

1. 买入期货合约。

2. 以 10.5% 的年利率借入期限为 135 天的资金。

3. 将借入的资金以 10.5% 的利率进行为期 45 天的投资。我们将以上策略称之为第 2 类套利。

这两类套利可能性都包括以短期国债利率或与短期国债利率接近的利率借入资金。在第三章中，我们讨论了再购回协议使得那些拥有可交易债券组合的公司能够在短期内以短期国债利率或与之接近的利率借入资金。在验证短期国债市场是否存在套利机会时，交易者经常计算所谓的隐含再购回利率(implied repo rate)。它是与短期国债到期日相同的国债期货价格和比该短期国债的期限长 90 天的另一短期国债价格隐含的短期国债利率。如果隐含的再购回利率高于实际的短期国债利率，在理论上，就可能进行第 1 类套利。如果隐含的再购回利率低于短期国债利率，在理论上，就可能进行第 2 类套利。

例 4.5

到期日为 146 天的短期国债的现货价格(面值为 $ 100)是 $ 95.21,到期日为 56 天的 90 天国债期货合约的现金价格为 $ 96.95。由于 90 天为 0.2466 年,146 天为 0.4000 年,则 146 天的连续复利率 r^* 为:

$$-\frac{1}{0.4000}\ln 0.9521 = 0.1227$$

即 12.27%,且由期货价格隐含的连续远期复利率r为:

$$-\frac{1}{0.2466}\ln 0.9695 = 0.1256$$

即 12.56%。将等式(4.1)进行变形,我们发现由 r^* 和 r隐含的 56 天连续复利率 r 为:

$$r = \frac{r^* T^* - r(T^* - T)}{T}$$

这就是隐含的再购回利率。在本例中,该利率为:

$$\frac{12.27 \times 146}{56} - \frac{12.56 \times 90}{56} = 11.80\%$$

如果 56 天的年利率低于 11.80%,表明可使用第 1 类套利。如果高于 11.80%,表明可使用第 2 类套利。

报价

短期国债的报价是指面值为 $ 100 的短期国债的标价。假定 Y 是面值为 $ 100、距到期日还有 n 天时间的短期国债的现金价格。其报价为:

$$\frac{360}{n}(100 - Y)$$

这是所谓的贴现率(discount rate)。它是短期国债提供的以年来计算的美元收益,用占面值的百分比来表示。对于一个 90 天的短期国债来说,如果现货价格 Y 为 98,则报价就为 8.00

贴现率与短期国债获得的收益率并不相同。后者是以美元收

益除以成本来计算的。在前面的例子中，报价为 8.00，收益率为 2/98，即每 90 天的收益率为 2.04%。则 90 天按复利计算的年利率为：

$$\frac{2}{98} \times \frac{365}{90} = 0.0828$$

即 8.28%[②]。我们有时将这一收益率称为债券等价收益率(bond equivalent yield)。

90 天短期国债期货合约是交割 $1,000,000 的短期国债。短期国债期货的标报价方法不同于短期国债本身的报价方法。需运用下列关系[③]：

短期国债期货的报价 = 100 − 相应的短期国债的报价

如果 Z 是短期国债期货的报价，Y 是期货合约的现金价格，这意味着：

$$Z = 100 - 4(100 - Y)$$

或等价于：

$$Y = 100 - 0.25(100 - Z)$$

因此，表 4.3 中的 1991 年 12 月份短期国债期货收盘报价为 95.02，对应的每张面值为 $100 的 90 天期的短期国债期货的价格为 100 − 0.25(100 − 95.02) = $98.755，即合约的总价值为 $987,550。

如果交割的短期国债距到期日还有 89 天，上式中收到价款的计算则不能用前面公式中的 0.25，而应将 0.25 替换为 89/360 或 0.2472。如果距到期日还有 91 天，则上面公式中的 0.25 应改为 91/360 或 0.2528。

例 4.6

假定140天期的年利率为8%，230天期的年利率为8.25%，两者都使用连续复利。则140天到230天期间的远期利率为：

$$\frac{0.0825 \times \frac{230}{90} - 0.08 \times \frac{140}{90}}{} = 0.0864$$

或为8.64%。由于90天＝0.2466年，则在140天后交割的面值为$100的90天期的短期国债期货的价格为：

$$100e^{-0.0864 \times 0.2466} = 97.89$$

它的报价为100　4×(100　97.89)－91.56

4.4　欧洲美元期货

欧洲美元期货合约是一种十分普遍的期货合约。在国际货币市场(IMM)和伦敦国际金融期货交易所(LIFFE)中都有该期货合约的交易。欧洲美元是存放在美国银行的海外分行或存放的外国银行的美元。欧洲美元利率是银行之间将存放欧洲美元的利息率，也称之为3个月期伦敦银行同业放款利率(LIBOR)。欧洲美元的利率通常会高于相应期限的短期国债的利率。这是由于欧洲美元利率是商业放款利率而美国短期国债利率则是政府的借款利率。

表面上看来，欧洲美元期货合约在结构上与短期国债期货合约一致。根据欧洲美元期货的报价计算一张该期货合约价值的公式也与计算短期国债期货合约价值使用的公式一致。表4.3中12月份期货合约的报价为94.47，相应的欧洲美元利率的报价为5.53，因此一张合约的价格为：

$$10,000[100 - 0.25(100 - 94.47)] = \$986,175$$

但是，短期国债期货合约与欧洲美元期货合约存在着一些重要的差别。对于短期国债期货合约来说，合约的价格在到期日收敛于90天期面值为$1,000,000的短期国债的价格，并且如果持

有合约到期，就会进行交割。而欧洲美元期货合约是在到期月的第三个星期三之前的第2个伦敦营业日用现金来结算的。最后的盯市使合约的价格等于：

$$10{,}000(100 - 0.25R)$$

其中R为当时报出的欧洲美元的利率。欧洲美元利率的报价是按季度计复利的90天欧洲美元存款的实际利率。它不是贴现利率。因此欧洲美元期货合约是基于利率的期货合约，而短期国债期货合约是基于短期国债价格的期货合约。

4.5 久 期

在运用利率期货进行套期保值时，一个重要的概念是久期(duration)。债券的久期是用来衡量债券的持有者在收到现金付款之前，平均需要等待多长时间。期限为n年的零息票债券的久期为n年。然而，期限为n年的附息票债券的久期小于n年。这是由于持有者在n年之前就收到一些利息了。

假定现在是0时刻，债券持有者在t_i时刻收到的利息为c_i($1 \leqslant i \leqslant n$)。债券的价格B和收益率y(连续计复利)的关系为：

$$B = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{-yt_i} \tag{4.4}$$

债券久期D的定义为：

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \tag{4.5}$$

也可以写为：

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \left[\frac{ce^{-yt_i}}{B} \right]$$

方括号中的那项为 t_i 时刻支付的现值与债券价格的比率。债券的价格是将来所有本息的现值。因此久期是付款时间的加权平均值，对应 t_i 时刻的权重等于 t_i 时刻所有支付的现值占债券总现值之比率。权重之和为 1.0。我们现在来说明为什么在套期保值中，久期是一个重要的概念。

根据公式(4.4)：

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} c t_i e^{-yt_i} \tag{4.6}$$

再根据公式(4.5)，上式又可以改写为：

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -BD \tag{4.7}$$

如果我们将收益率曲线进行微量平移，使所有期限的利率都增加 Δy，所有债券的收益率也增加了 Δy，公式(4.7)表明，债券价格增加了 ΔB，其中：

$$\frac{\Delta B}{\Delta y} = -BD \tag{4.8}$$

或

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y$$

这表明债券价格变化的百分比等于其久期乘以收益曲线的平行增量。

例 4.7

考虑某个面值为 $100、附息票利率为 10% 的 3 年期债券。假定该债券连续复利的年收益率为 12%，即 y=0.12。息票每 6 个月付息一次，利息为 $5。债券久期的计算如表 4.5 所示。贴现率用收益率代替，将计算出的现值列在表中第三列中(例如，第一次付息的现值为 $5e^{-0.12\times 0.5}=4.709$)。第三列中的数字之和等于债券价格 $94.213。第三列中的数字除以 94.213 就可得到权重。第五列中的数字之和即为久期 2.654 年。根据公式(4.8)：

$$\Delta B = -94.213\times 2.654\Delta y$$

即

$$\Delta B = -250.04\Delta y$$

表 4.5 久期的计算

时间	付款金额	现值	权重	时间×权重
0.5	5	4.709	0.050	0.025
1.0	5	4.435	0.047	0.047
1.5	5	4.176	0.044	0.066
2.0	5	3.933	0.042	0.084
2.5	5	3.704	0.039	0.098
3.0	105	73.256	0.778	2.334
合计	130	94.213	1.000	2.654

如果 $\Delta y=+0.001$ 即 y 增加到 0.121，公式表明我们预计 ΔB 为 −0.25。换句话说，我们预计债券的价格将下降到 94.213 − 0.250 = 93.963。按 12.1% 的收益率重新计算债券价格，就能得到证明。

我们可以将债券组合的久期定义为组合中单个债券久期的加权平均，权重为单个债券的价格占组合价格的百分比。公式(4.8)表明收益曲线平移 Δy 的影响即为该组合的久期乘以 Δy。

这一分析是在假定 y 为连续复利率的基础上得出的。如果 y 为年复利率，则公式(4.8)变为：

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

4.6　基于久期的套期保值策略

设有某个利率头寸，该利率依赖于诸如某个债券组合或某个货币市场证券这样的资产，我们这里考虑运用利率期货合约对该利率头寸进行套期保值。下列字母的涵义为：

F：利率期货合约的合约价格

D_F：期货合约的标的资产的久期

S：需进行套期保值的资产的价值

D_S：需进行套期保值的资产的久期

我们假定收益率的变化 Δy，对所有期限来说都是一样的，即我们假定收益曲线只能发生平行移动。根据公式(4.8)，得到一个近似公式：

$$\Delta S = -SD_S\Delta y \tag{4.9}$$

通过合理的近似，下式也同样成立：

$$\Delta F = -FD_F\Delta y \tag{4.10}$$

因此为了对冲 Δy 的不确定性，对冲所需要的合约数为：

$$N^* = \frac{SD_S}{FD_F} \tag{4.11}$$

这就是基于久期的套期比率(duration－based hedge ratio)④。有时我们也将它称为价格敏感的套期比率(price sensitivity hedge ratio)。运用它可使整个头寸的久期为零。

例 4.8

5月20日，公司的财务主管得知将于8月5日收到$3,300,000。下一

年2月份该项资金将用于一项重要的资本投资项目。因此财务主管计划在收到款项时就将它投资于6个月期的短期国债。现在6个月期短期国债的收益率为11.20%，每半年复利一次。该财务主管担心在5月20日到8月5日之间短期国债的收益率可能会下降，于是他决定利用短期国债期货进行套期保值。9月份短期国债期货合约的报价为89.44。在本例中，如果利率下降，公司就会有损失。而当利率下降时，即当短期国债的价格上升时，对冲的期货收益一定为正值。这意味着应使用多头套期保值。

为了计算对冲所需要购买的短期国债期货合约的数量，我们注意到该期货合约的标的资产的持续期为3个月。由于短期国债是贴现证券，它的久期就是3个月或0.25年。与此类似，财务主管计划投资的6个月期的短期国债的久期就是6个月或0.50年。每一短期国债期货合约交割$1,000,000的短期国债。合约的价格为：

$$10,000[100 - 0.25(100 - 89.44)] = \$973,600$$

根据公式(4.11)，应购买的合约数为：

$$\frac{3,300,000}{973,600} \times \frac{0.5}{0.25} = 6.78$$

近似到整数位，则该财务主管应购买7张合约。

例 4.9

8月2日，基金管理者已将$10,000,000投资到政府债券中，他预计在下3个月内利率的变动将十分剧烈。他决定运用12月份的长期国债期货合约对投资组合进行套期保值。现在期货的价格为93－02即为93.0625。由于每一合约要交割面值为$100,000的债券，因此期货合约的价格为$93,062.50。

在下3个月内，债券组合的平均久期为6.80年。在长期国债期货合约中交割最便宜的债券是20年期年息票利率为12%的债券。现在该种债券的年收益率为8.80%，在期货合约到期时，该债券久期为9.20年。

为了对债券组合进行套期保值，基金管理者需要在长期国债期货上持有空头。如果利率上升，期货空头将会盈利，而债券组合将会发生损失。如果利率下降，期货空头将发生损失，而债券组合会有盈利。根据公式(4.11)，我

们可以计算出应卖空的期货合约数：

$$\frac{10,000,000}{93,062.50} \times \frac{6.80}{9.20} = 79.42$$

近似到整数位，基金管理者应卖空 79 张合约。

4.7　久期的局限性

久期的概念为利率风险管理提供了一个简单的方法。然而，它所提供的套期保值很不完美。主要有两个原因。首先涉及到凸度(convexity)的概念。其次涉及到收益曲线平移的基本假定。

凸度

对于收益曲线的一个很小的平移，组合价值的变动仅只取决于它的久期。当考虑到利率发生中等或重大变化时，此时所谓的凸度因素就变得很重要了。图 4.6 表明了具有相同久期的两个证券组合其价值变化百分比和收益率变化之间的关系。在当前的收益率上，两个曲线的倾斜程度相同。这就是说，当收益率变化很小时，两个组合价值变化的百分比相同，这就与公式(4.8)保持一致。当利率发生较大的变化时，两个组合的行为就不同了。组合 A 的凸度或曲率比组合 B 的凸度或曲率大。当收益率下降时，组合 A 价值增加的百分率要高于组合 B 价值增加的百分率；当收益率上升时，组合 A 价值下降的百分比率要低于组合 B。

如果证券组合将来提供的现金流在长时期内均匀分布，则该证券券组合的凸度是最大的。如果证券组合支付的现金流集中在某一特定的时间点上，凸度最小。从图 4.6 我们就可以看出，对于证券组合的多头方来说，如果久期相同，则凸度高的证券组合要比凸度低的证券组合总是更具吸引力。毫不奇怪，一般来说它的价格也就更贵一些。

衡量凸度的一个方法是：

$$\frac{\partial^2 B}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i t_i^2 e^{-yt_i}$$

这是用来衡量图 4.6 中 ΔB 和 Δy 之间关系曲线的曲率。一些金融机构在管理资产和负债组合时总是尽量使其久期相互匹配、凸度相互匹配。

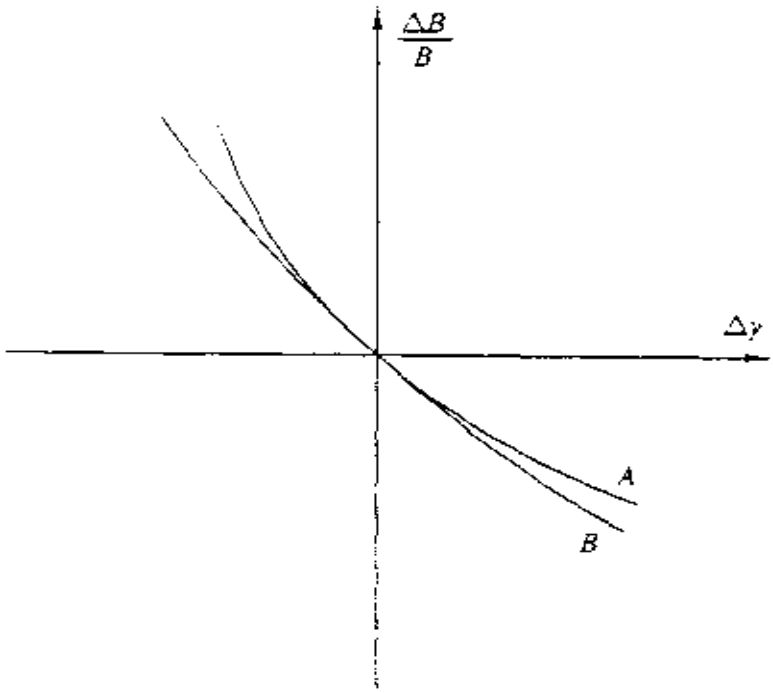


图 4.6 不同凸度的债券组合

非平行移动

久期概念的一个严重问题是它假定所有利率变化幅度相同。实际上，通常短期利率的波动率高于长期利率的波动率，且两者之间的相关性并不好。甚至有时短期利率的变化方向与长期利率的变化方向相反。因此，金融机构经常通过下面的方法来对冲其利

率风险，即将零息票收益曲线划分为区间段，并确保每一区间段都进行了对冲。假定第 i 个区间段是零息票收益曲线中从 t_i 到 t_{i+1} 这一段。金融机构可以检验以下情况的影响，即到期日在 t_i 到 t_{i-1} 期间内的所有零息票收益率增加 Δy 而其他区间段的收益率保持不变时的影响。如果风险大到难以接受，就需慎重地选择金融工具进行进一步的交易来减少风险。在银行资产和负债组合管理的教科书中，这一方法有时称之为缺口管理（GAP management）。

4.8 小 结

本章中，我们讨论了三种最普遍的利率期货合约：长期国债期货合约、短期国债期货合约和欧洲美元期货合约。我们也阐述了将这三种合约运用在套期保值中的不同方法。由于债券价格与利率成反向关系，空头套期保值可以用来防止利率上升带来的损失；多头套期保值可用来防止利率下降带来的损失。

在长期国债期货合约中，空头方拥有一些有利的交割选择权：

1. 可以在交割月份中的任意一天进行交割。

2. 交割时存在一系列可供选择的债券。

3. 在交割月份中的任意一天，在下午 2 点到下午 8 点之间任何时刻都可以下达按下午 2 点时的结算价格进行交割的意向通知书。

这些选择权将减少期货的价格。

在对冲利率风险的套期保值中，久期是一个重要的概念。久期衡量的是投资者需要平均等待多长时间才能收到报酬。它是收到支付报酬时间的加权平均数，而某一特定支付报酬时间的权重与该报酬支付的现值成正比。

本章中阐述的基于久期的保值，它的一个核心结论为：

$$\Delta B = - BD\Delta y$$

其中 B 为债券价格，D 为久期，Δy 是收益率的微小变化（连续复利），ΔB 是收益率的微小变化引起 B 的变化。这一公式使套期保值者能够评价某种债券对收益率微小变化的敏感性。它也可以帮助套期保值者评价利率期货价格对标的债券收益率微小变化的敏感性。如果套期保值者假定所有债券的 Δy 都相等，则套期保值者就可以由此计算出所需期货合约的数量，以便确保债券或债券组合不受利率微小变化的影响。

基于久期的保值策略的一个关键假设是所有的利率变化幅度相同。这意味着，在利率期限结构图中，只允许有平行移动。实际上，一般短期利率比长期利率变动剧烈，并且如果期货合约的标的债券的久期与要进行保值的资产的久期之间存在显著的不同时，保值的效果可能会很糟。

第五章

互　　换

互换是两个公司之间私下达成的协议，以按照事先约定的公式在将来交换现金流。它们可被当作一系列的远期合约的组合，因此对互换的研究很自然地成为对期货和远期合约研究的扩展。

第一份互换合约签订于 1981 年。从那以后，这个市场迅速成长。现在每年都要签订成千上万亿美元的互换合同。在这一章，我们讨论如何设计互换、如何使用互换、以及如何确定互换的价值。我们也会简单地考虑当金融机构进行互换以及其它类似的金融合约的交易时所面临的信用风险的性质。

5.1　利率互换的机制

最普通的互换类型是大众型(plain vanilla)利率互换。在这种互换里，一方(例如 B)同意向另一方(例如 A)支付若干年的现金流，这个现金流是名义本金乘以事先约定的固定利率产生的利息；同时，A 方同意在同样期限内向 B 方支付相当于同一名义本金按浮动利率产生利息的现金流。这两种利息现金流使用的货币是相同的。互换的时间期限可以从 2 年到 15 年以上。

为什么 A 和 B 进行这样的协议？最常见的原因是出于比较优势的考虑。一些公司在固定利率市场具有比较优势，而其它公

司则在浮动利率市场具有比较优势。在取得新贷款时，一个公司进入有比较优势的市场具有重要意义。然而，这将使公司想借入浮动利率贷款时可能只借到固定利率的贷款，或者想借入固定利率贷款时只借到浮动利率贷款。在此就产生了互换。互换有将固定利率贷款转换成浮动利率贷款的效果，反之亦然。

LIBOR

在许多利率互换协议中的浮动利率为伦敦同业银行间放款利率 LIBOR。我们在第四章已经谈到过它。LIBOR 是欧洲货币市场上银行提供给其它银行资金的利率。1 个月期 LIBOR 是提供一个月期资金的利率，3 个月期的 LIBOR 是提供 3 个月期资金的利率，其余依此类推。LIBOR 由银行间的交易来决定，并随经济状况的变化而变化。正如基准利率通常为国内金融市场浮动利率贷款的参考利率一样，LIBOR 也经常作为国际金融市场贷款的参考利率。为了理解它是如何使用的，考虑这样一项贷款，利率被定为 6 个月期 LIBOR + 0.5% p.a.，贷款期限被分成 6 个月的期限。对每一个期间，利率定为期间开始时的 6 个月期 LIBOR + 0.5% p.a.，在每个期间结束时支付利息。

利率互换举例

我们现在举一个比较优势如何产生利率互换的例子[①]。我们设想 A 和 B 两家都希望借入期限为 5 年的 1000 万美元，并提供了如表 5.1 所示的利率。我们设想 B 公司想按固定利率借款，而 A 公司想借入与 6 个月期 LIBOR 相关的浮动利率资金。由于 B 公司在固定利率和浮动利率市场支付的利率都比 A 公司高，显然 B 公司信用等级低于 A 公司。

表 5.1 促成利率互换的借款利率

	固定利率	浮动利率
公司 A	10.00%	6 个月期 LIBOR + 0.30%
公司 B	11.20%	6 个月期 LIBOR + 1.00%

提供给 A 公司和 B 公司利率报价的关键点是：两个固定利率的差值大于浮动利率的差值。在固定利率市场 B 公司比 A 公司多付 1.20%，但在浮动利率市场只比 A 公司多付 0.7%。

B 公司看起来在浮动利率市场有比较优势，而 A 公司在固定利率市场有比较优势[②]。这种明显的差异将产生可获利润的互换。A 公司以 10% p.a. 借入固定利率资金，B 公司以 LIBOR + 1% p.a. 借入浮动利率资金，它们然后签订一项互换协议，以保证最后 A 公司得到浮动利率资金而 B 公司得到固定利率资金。

作为理解互换进行的第一步，我们假想 A 与 B 直接接触，它们可能商定的互换类型如图 5.1 所示。A 公司同意向 B 公司支付本金为一千万美元的以 6 个月期 LIBOR 计算的利息，作为回报，B 公司同意向 A 公司支付本金为一千万美元的以 9.9% 固定利率计算的利息。

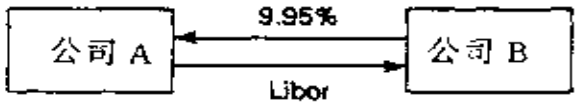


图 5.1 A 公司与 B 公司之间的直接互换协议

当考虑 A 与 B 的外部借款时，我们得到了图 5.2。A 公司有三种利率现金流：

1. 支付给外部贷款人年利率为 10.0%的利息

2. 从 B 得到年利率为 9.95%的利息

3. 向 B 支付 LIBOR 的利息

前两项现金流合起来使 A 每年支付 0.05%。这三项现金流的净效果是 A 支付 LIBOR + 0.05% p.a.。这比它直接在浮动利率市场借款少支付 0.25% p.a.。B 公司也有三种现金流：

1. 支付给外部贷款人年利率为 LIBOR + 1.0% p.a. 的利息

2. 从 A 得到 LIBOR 的利息

3. 向 A 支付年利率为 9.95%的利息

前两项现金流合起来使 B 每年支付 1.0%。这三项现金流的净效果是 B 支付了年利率为 10.95%的利息。这比它直接在固定利率市场借款少支付 0.25% p.a.。

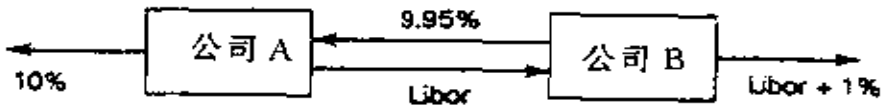


图 5.2 考虑外部借款的直接利率互换协议

这项互换协议中 A 和 B 每年都少支付 0.25%，因此总收益为每年 0.5%。这可以预先算出。利率互换协议的总潜在收益是 a − b，a 为两公司在固定利率市场的利率差，b 为两公司在浮动利率市场的利率差。在这个案例中，a = 1.20%，b = 0.70%。

金融中介的作用

通常，两个公司在安排互换时并不直接接触，它们每家同诸如银行这样的金融中介联系，这意味着总潜在收益（我们例子里为每年 0.5%）要在 A、B 和金融中介之间分配。一种可能的安排如图 5.3 所示。

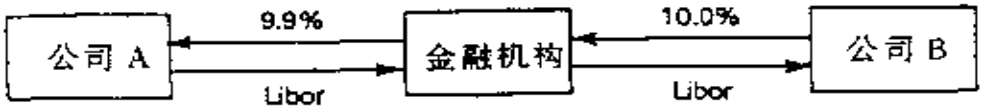


图 5.3 利用金融中介的利率互换

当考虑 A 和 B 的外部贷款时，我们得到图 5.4。A 公司有三种现金流：

1. 支付给外部贷款人年利率为 10.0% 的利息
2. 从金融机构处得到年利率为 9.90% 利息
3. 向金融机构支付 LIBOR 的利息

这三项现金流的净效果为 A 公司支付 LIBOR + 0.10% p.a.，它比直接在浮动利率市场借款减少了 0.20% p.a. 的利率支出。B 公司也有三项现金流：

1. 支付给外部贷款人 LIBOR + 1.0% p.a. 的利息
2. 从金融机构处得到 LIBOR 利息
3. 向金融机构支付年利率为 10.0% 的利息

这三项现金流的净效果为 B 公司支付年利率为 11% 的利息，比它直接在固定利率市场借款减少了 0.20% p.a. 的利率支出。金融机构的净收益为每年 0.10%（它得到的浮动利率等于支出的浮动利率，但得到的固定利率比支付的固定利率高 0.10% p.a.）。所有三方的总收益仍为前面所说的每年 0.5%。

注意金融机构分别签了两份合约，一份与 A 公司，一份与 B 公司。如果其中一家公司违约，金融机构仍要履行与另一家的协议。在大多数例子中，A 公司甚至不知道金融机构已同 B 公司进行了抵消性的互换。反过来，B 公司也是一样。

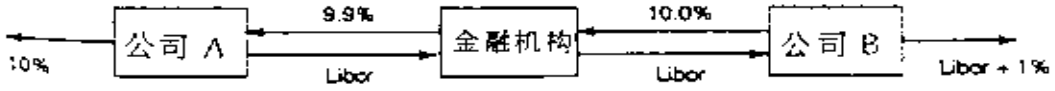


图 5.4 利用金融中介并包括外部借款的利率互换

互换利息的支付

在上面描述的互换中，每隔 6 个月为利息支付日，所有的利率都以半年计复利报出(这是因为互换是在 6 个月期 LIBOR 基础之上的)。互换协议的条款规定为每 6 个月一方支付给另一方固定与浮动利率差额的支票。设想在图 5.3 中，某一特殊支付日的 LIBOR 为 12%，A 公司付给金融机构

$$1000\text{ 万} \times 0.5 \times (12.0\% - 9.90\%)$$

即 105,000 美元。金融机构付给 B 公司

$$1000\text{ 万} \times 0.5 \times (12.0\% - 10.00\%)$$

即 100,000 美元。

在利率互换中本金并不交换，这是因为在合约中固定利率贷款与浮动利率贷款的美元本金价值不变。某一支付日使用的 6 个月期 LIBOR 为 6 个月前确定的。这就是以 LIBOR 为基础的贷款的利息支付方式。第一个支付日为互换协议开始后 6 个月。第一个支付日现金流的交换是以互换开始时 6 个月期 LIBOR 为基础的。第二个支付日是互换开始后的 12 个月，第二个支付日现金流是以互换开始后 6 个月的 6 个月期 LIBOR 为基础。

比较优势论据的可靠性

比较优势论据尽管是引入互换的一种好方式，但仍然有问题。为什么在表 5.1 中固定利率与浮动利率市场提供给 A 和 B 的加息率不同？既然互换市场已经存在了一段时间，我们很合理地预期这些差别已经被套利消除了。

加息率差别持续存在的原因可能部分由于这些公司在固定利率和浮动利率市场可得合约的性质。A 和 B 在固定利率市场可得到的 10.0%和 11.2%的利率很可能是这些公司发行 5 年期固定利率债券的利率。A 和 B 在浮动利率市场可得到的 LIBOR + 0.3%和 LIBOR + 1.0%为 6 个月期利率。贷款人通常有机会每 6 个月再考虑这些利率。如果 A 和 B 的信用等级下降，贷款人可选择在 LIBOR 上提高加息率。在极端情况下，贷款人可能拒绝继续贷款。固定利率贷款的提供者无权用这种方法改变贷款条件。

提供给 A 的利率和提供给 B 的利率之间的息差是 B 比 A 更可能违约程度的反映。在下一个 6 个月期，A 和 B 违约的可能性较小。当我们考虑更长远时间时，B 违约的可能性比 A 违约的可能性增长得更快。这就是 5 年期的利率差比 6 个月期利率差大的原因。

商定以 LIBOR + 1.0%的浮动利率贷款并进行如图 5.3 的互换后，我们以为 B 以 11.0%取得了固定利率的贷款。我们下面提出的论据表明，实际情况并非如此。实际上，只有 B 能够连续以 LIBOR + 1.0%加息率借入浮动利率资金时，付出利率才为 11.0%。例如如果 B 的信用级别下降以至浮动利率滚动贷款的利率为 LIBOR + 2.0%，B 付出的利率上升为 12.0%。表 5.1 中提供给 B 的相对较高的 5 年期借款利率表明，市场预期 B 借入资金的 6 个月期 LIBOR 之上的加息率将上升。假如真是这样，如果 B 进行互换，它的预期总借款利率将比 11.0%高，也可能比 B 直接从

固定利率市场取得的 11.2% 还高。

假如金融机构没有违约，图 5.1 中的互换为 A 公司在整个下 5 年里锁定了 LIBOR + 0.1% 的利率，不仅仅是下 6 个月。如果没有很强的理由来设想 A 的信用级别会改善，互换对 A 是一笔好交易。本章以后及在第十八章中我们将从金融机构的角度来看互换。

互换参考价格表

最普通的利率互换类似于上面描述的那种，包括了 6 个月期 LIBOR 与固定利率的交换。固定利率通常表示为国库券收益以上多少基本点(一个基本点为 0.01%)。表 5.2 显示参考价格表(indication pricing schedule)。银行的互换交易者使用这个参考表。例如，它表示当银行商定一项支付固定利率并得到 6 个月期 LIBOR 的 5 年期互换时，固定利率应定为现在的 5 年期国库券利率 7.9% 以上 44 个基本点，换言之，银行应将固定利率定在 8.34%；当银行商定一项支付 6 个月期 LIBOR 得到固定利率的 5 年期互换时，该参考价格表显示固定利率应定为现在的 5 年期国库券利率 7.9% 以上 54 个基本点，即银行应将固定利率定在 8.44%。银行的利润，即商定的两项相抵的 5 年期互换买卖价差，为每年 10 个基本点(0.1%)。[③]

表 5.2 随市场条件的变化而有规律地更新。需用注意的一点是 6 个月期 LIBOR 是在一年 360 天基础上按半年复利报出的，而国库券利率是在一年 365 天基础上按半年复利报出的，这可能使人迷惑。为了使 6 个月期 LIBOR 与国库券利率有可比性，或者将 6 个月期 LIBOR 乘以 365/360，或者将国库券利率乘以 360/365。[④]

表 5.2 利率互换的利率参考报价

到期期限	银行支付 固定利率	银行收取 固定利率	当前国库券 利率(%)
2	2-yr. TN + 30bps	2-yr. TN + 38bps	7.52
3	3-yr. TN + 35bps	3-yr. TN + 44bps	7.71
4	4-yr. TN + 38bps	4-yr. TN + 48bps	7.83
5	5-yr. TN + 44bps	4-yr. TN + 54bps	7.90
6	6-yr. TN + 48bps	6-yr. TN + 60bps	7.94
7	7-yr. TN + 50bps	7-yr. TN + 63bps	7.97
10	10-yr. TN + 60bps	10-yr. TN + 75bps	7.99

CBOT 交易 3 年期和 5 年期的互换利率的期货合约。期货合约按某个互换利率进行现金结算，这个互换利率是从经同意的表中随机挑选 7 名互换交易商的互换买价和卖价平均值的中数。CBOT 也进行互换期货的选择权交易。

储存

在实际中，两个公司不可能同时与一家金融机构接触，也不可能在同一互换中头寸状态正好相反。由于这一原因，许多大的金融机构准备储存利率互换。这包括与一方进行互换，然后对冲消除利率风险，直到找到处于互换中相反头寸的另一方。在第四章讨论的利率期货合约就是对冲的一种方法。

5.2 利率互换的定价

如果我们假设没有违约的可能性，利率互换估值有两种办法：或者是一种债券多头与另一种债券空头的组合，或者作为一系列

远期合约的组合。

与债券定价的关系

考虑一下图 5.3 中 B 公司与金融机构之间的互换。尽管本金并不交换，我们可以假设互换的价值没有变化。在互换结束时，A 付给 B 一千万美元的名义本金，B 付给 A 相同的名义本金。于是互换与下面一项安排相同了：

1. B 公司以 6 个月期 LIBOR 借给金融机构一千万美元

2. 金融机构以每年 10% 的固定利率借给 B 公司一千万美元

另一种实现方法是，金融机构出售给 B 公司一千万美元浮动利率为 LIBOR 的债券，从 B 公司购买一千万美元固定利率为 10% p.a. 的债券，因此，互换的价值是两种债券价值的差额。

通常，假设现在为零时，并假设在互换条件下金融机构在时间 ti($1 \leqslant i \leqslant n$)收到固定收入 k 美元，同时以浮动利率支付，定义：

V：互换的价值

B_1：互换中的固定利率债券的价值

B_2：互换中的浮动利率债券的价值

Q：互换协议中的名义本金

遵循以下公式：

$$V = B_1 - B_2 \tag{5.1}$$

在估计债券价值时所使用的贴现率应反映现金流的风险性。这里我们使用与以互换为基础的浮动利率相对应的风险水平作为贴现率，我们认为这是合适的。在我们的例子中，以互换为基础的浮动利率为 LIBOR，因此我们的假设意味着合适的风险水平就是与银行同业拆借市场贷款相联系的风险。假设以互换为基础的浮动利率是贴现的恰当利率，这种假设很普遍，也大大简化了估值的

程序。然而，在一些情况下，这种假设显然不正确。例如，在一项同联邦政府所作的以 LIBOR 为基础的互换中，现金流没有风险，而同一个信用等级为 BBB 级的对手进行以国库券为基础的互换里，现金流是有风险的。

如果按表 5.2 买卖报价的平均水平进行互换，则假设互换价值为零是合理的。按我们有关贴现率的假设，$B_2 = Q$。由等式(5.1)，$B_1 = Q$。因此，表 5.2 表示的参考价格的时间表定义了一系列价值为平价的债券(即所谓的平价收益债券)。从这些平价收益债券，利用 4.1 节中描述的剥离息票方法，从这些平价收益债券可以决定零息票收益曲线。这种零息票收益曲线定义了互换现金流对应的贴现率。与等式(5.1)结合起来，可以确定某个时间之前商定的互换的价值。

定义 r_i 为与到期时间 t_i 相应的贴现率。既然 B_1 是固定利率债券未来现金流的现值，

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} ke^{-r_i t_i} + Qe^{-r_n t_n}$$

考虑下一种浮动利率债券 B_2。在支付日后的暂短时间内，B_2 总是等于名义本金 Q。在支付日之间，我们利用这样一个事实，即在下一个支付日后的暂短时间内，B_2 等于 Q。在我们符号中，直到下一支付日的时间为 t_1，因此，

$$B_2 = Qe^{-r_1 t_1} + k^* e^{-r_1 t_1}$$

k^* 是在时间 t_1 将支付的浮动利率利息(已知)。

在金融机构支付固定利率利息并收取浮动利率利息的情况下，B_1 与 B_2 按同样方式计算，并且

$$V = B_2 - B_1$$

注意到互换开始签订时和互换到期时互换价值为零，这很有意思。在期间中，互换价值可能是正值，也可能是负值。

例 5.1

假设按某个互换条款，一家金融机构同意支付 6 个月期 LIBOR，收取每年 8%（半年复利）的利息，名义本金为 1 亿美元。该互换还有 1.25 年时间到期。按连续复利计算的 3 个月期、6 个月期及 15 个月期的相关贴现率分别为 10.0%、10.5%和 11.0%。上一支付日的 6 个月期 LIBOR 为 10.2%（半年复利），在这一例子里，$k=400$ 万美元，$k^*=510$ 万美元，因此

$$B_1 = 4e^{-0.25\times 0.1} + 4e^{-0.75\times 0.105} + 104e^{-1.25\times 0.11}$$
$$= 9824 \text{ 万美元}$$
$$B_2 = 5.1e^{-0.25\times 0.1} + 100e^{-0.25\times 0.1}$$
$$= 10251 \text{ 万美元}$$

因此互换价值为

$$98.24 - 102.51 = -427 \text{ 万美元}$$

如果银行处于相对的另一方，即支付固定利率利息，收取浮动利率利息，互换价值则为 +427 万美元。

与远期合约的关系

如果没有违约的风险，利率互换可以分解为一系列远期合约。这最好通过图 5.3 的例子来说明。考虑金融机构与 A 公司的互换协议，由于本金数量为一千万美元且每 6 个月交换利息，在支付日金融机构的现金流为（以百万美元为单位）

$$10\times(0.5\times LIBOR - 0.5\times 0.099)$$

或

$$5\times(LIBOR - 0.099)$$

这是一项名义本金为 5 百万美元，"交割价"为 9.9%，基于

LIBOR 的远期合约的净盈亏。这和一项规范的远期合约之间的唯一差别在于,到期日前 6 个月的 LIBOR 值决定了这个净盈亏。

假设$\hat{R}_i$为支付日 i(i≥2)之前的 6 个月期远期利率(以半年复利计)。第三章中 3.5 节表明,一项长期远期合约的价值为当前远期价格超过交割价格的现值。使用前面介绍的符号,对取得固定利率利息并支付浮动利率利息的一方,与支付数字 i(i≥2)相对应的远期合约的价值为

$$(k - 0.5\hat{R}_iQ)e^{-r_it_i}$$

在第一个支付日(在时间 t_1)发生的交换包括支付 k^* 和收取 k,这一项价值为

$$(k - k^*)e^{-r_1t_1}$$

因此互换的总价值为

$$(k - k^*)e^{-r_1t_1} + \sum_{i=2}^{n}(k - 0.5\hat{R}_iQ)e^{-r_it_i}$$

对收取浮动利率利息并支付固定利率利息一方,其价值为

$$(k^* - k)e^{-r_1t_1} + \sum_{i=2}^{n}(0.5\hat{R}_iQ - k)e^{-r_it_i}$$

例 5.2

再次考虑前面例子里的情形。以百万美元为单位,$k = 4.0$,$k^* = 5.1$,$Q = 100$,$r_1 = 0.10$,$r_2 = 0.105$,$r_3 = 0.11$,$t_1 = 0.25$,$t_2 = 0.75$,$t_3 = 1.25$。等式(4.1)给出了以连续复利形式计算的$\hat{R}_2$和$\hat{R}_3$的值

$$\hat{R}_2 = \frac{r_2t_2 - r_1t_1}{t_2 - t_1} = \frac{0.75 \times 0.105 - 0.25 \times 0.10}{0.5} = 0.1075$$

$$\hat{R}_3 = \frac{r_3t_3 - r_2t_2}{t_3 - t_2} = \frac{1.25 \times 0.11 - 0.75 \times 0.105}{0.5} = 0.1175$$

用等式(3.4)将它们转换为半年复利:$\hat{R}_2 = 0.1104$,$\hat{R}_3 = 0.1210$。因此,互换的价值为:

$$(4.0 - 5.1)e^{-0.1\times0.25} + (4.0 - 0.5\times0.1104\times100)e^{-0.105\times0.75}$$
$$+ (4.0 - 0.5\times0.1210\times100)e^{-0.11\times1.25} = -427 \text{ 万美元}$$

即 -427 万美元。这与前面例子中以债券价格为基础计算是一致的。

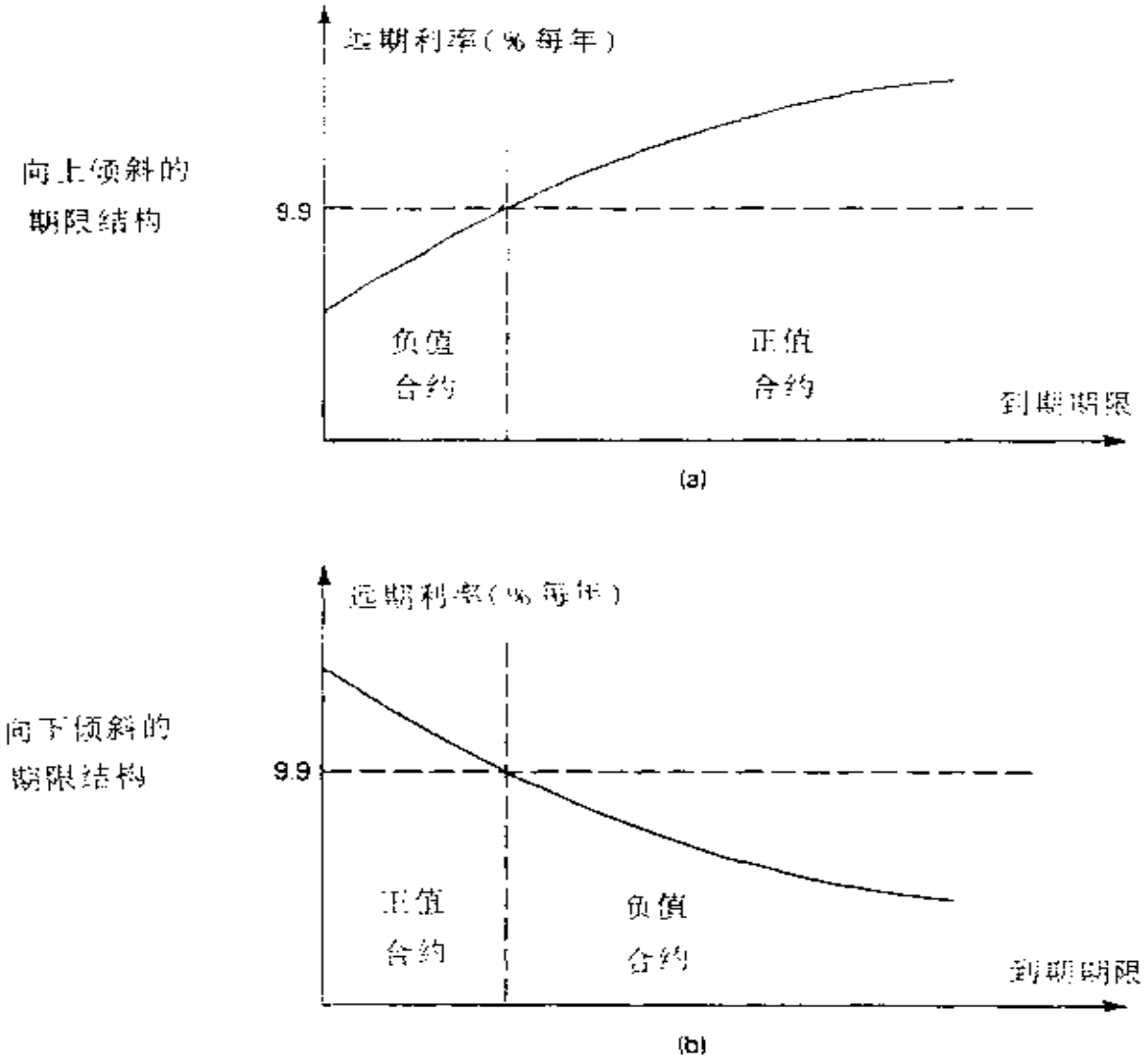


图 5.5 当利率期限结构向上倾斜与向下倾斜时

以图 5.3 中金融机构与 A 公司互换为基础时远期合约价值

在互换协议签署生效时刻，它的价值为零。这意味着当时以互换为基础的远期合约价值总和为零。然而，这并不意味着每一份单个远期合约的价值为零。通常，有些远期合约的价值为正，而有些价值为负。

对于图 5.3 中以金融机构和 A 公司间互换为基础的远期合约：

当远期利率＞9.9%时，远期合约价值＞0

当远期利率＝9.9%时，远期合约价值＝0

当远期利率＜9.9%时，远期合约价值＜0

假设互换协议签署时利率期限结构是向上倾斜的。这意味着远期利率随远期合约到期日的增加而上升。既然远期合约的价值总和为 0，这一定意味着在较早的支付日远期利率小于 9.9%，而在后面的支付日远期利率大于 9.9%。对金融机构而言，与较早支付日对应的远期合约价值因此为负，而那些与较后支付日对应的远期合约价值为正。如果互换协议签署时利率期限结构是向下倾斜的，反之亦然。在图 5.5 中说明了这种情况。

5.3 货币互换

另一种普遍的互换类型是货币互换(currency swap)。最简单的形式里，它将一种货币贷款的本金和固定利息与几乎等价的另一种货币的本金和固定利息进行交换。

举例

像利率互换一样，货币互换由比较优势引起。如表 5.3 所示。假如 A 公司与 B 公司可按固定利率美元和英镑借款，这个表显示英镑利率一般来说比美元利率高。A 公司在两种货币上都具有较低的利率水平，它的信用显然好于 B 公司。然而，在两个市场上 A

与B得到的贷款利率之间的差异并不相同，B公司在美元市场比A公司多付出2%，而在英镑市场只比A公司多付0.4%。

表5.3 促成货币互换的借款利率

	美元	英镑
公司A	8.0%	11.6%
公司B	10.0%	12.0%

A公司在美元市场有比较优势，而B公司在英镑市场有比较优势。这可能是因为A是一家美国公司，美国投资者对它更了解，而B公司是一家英国公司，英国投资者对它更了解。纳税的因素在确定借款利率时也会起重要作用。我们假设A想借英镑而B想借美元，这就为货币互换创造了很好的条件。A公司和B公司都在它们有比较优势的市场上借款，即A借入美元而B借入英镑，然后它们用货币互换方式将A的美元贷款转换成英镑贷款，同时B的英镑贷款也就转换成美元贷款。

像已提到过的那样，A和B的美元利率之差为2%而英镑之差为0.4%。根据利率互换的例子类推，我们预期各方的总收益为每年2.0% −0.4% =1.6%。

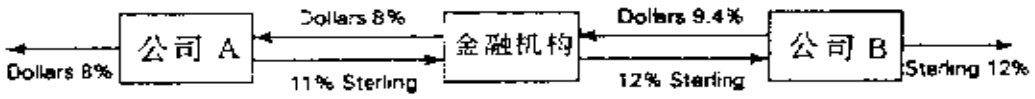


图5.6 货币互换

互换的构造有很多方式。图5.6显示了一种可能的安排。A公司借入美元而B公司借入英镑，互换的效果是将A每年8.0%的美元利率转换为每年11.0%的英镑利率。这比A直接在英镑

市场上借钱少了0.6%。金融中介获得每年1.4%美元现金流,而支出每年1.0%英镑现金流。忽略两种货币的差异,每年净获利0.4%。像预计的一样,各方的总收益为每年1.6%。

货币互换协议要求指明用两种货币形式表示的本金。本金在货币互换有效期的开始时和结束时交换。本金选择的方法是:按互换开始时的汇率折算的本金价值基本相等。在图5.6的例子里,本金数大约为1500万美元和1000万英镑。开始,本金按图5.6中箭头反方向流动。互换期限内的利息支付与最后的本金支付按图5.6中箭头的同一方向流动。这样,在互换开始时,A公司支出1500万美元,得到1000万英镑。互换期间每一年,A收取120万美元(1500万美元的8.0%)并支出110万英镑(=1000万英镑的11.0%)。在互换结束时,A公司支付1000万英镑本金并收取1500万美元本金。

读者可能感觉到图5.6中的互换并不令人满意,因为金融机构有外汇汇率风险。每年它得到$210000的收益(=1500万美元的1.4%)并支出£100000(=1000万英镑的1.0%),然而,在互换期间的每年里,金融机构可以通过在远期市场购买£100000远期来避免这类风险。这将锁定美元的净收益。如果我们想再次设计互换以使金融机构在美元上有0.4%的价差而在英镑上的价差为0,我们可作出图5.7和图5.8的安排。在图5.7中,B公司承担了一些外汇风险,因为它每年支付1.0%的英镑和8.4%美元。在图5.8中,A公司承担了一些外汇风险,它每年收取1.0%的美元而支付12.0%的英镑。通常理所当然是金融机构承担外汇风险,因为它处于对冲的最有利状态。

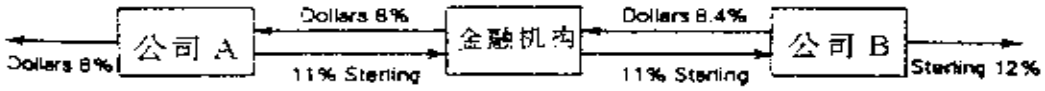


图 5.7 货币互换安排之一:B 公司承担一些外汇风险

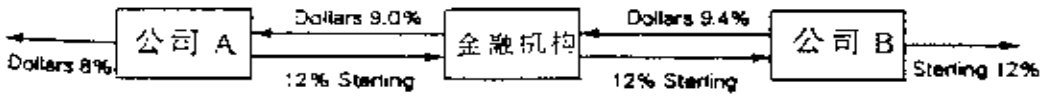


图 5.8 货币互换安排之二:A 公司承担一些外汇风险

就像利率互换一样,金融机构也经常储存货币互换,于是金融机构认真监督不同种类的货币风险,以便能够对冲这些风险。

5.4 货币互换的定价

没有违约的风险时,与利率互换的方式类似,货币互换可以分解为用两种债券表示的情况。考察图 5.6 中 B 公司的情况,一个是支付 12.0% 年利率英镑债券的多头,另一个是支付 9.4% 年利率美元债券的空头。如果 V 表示诸如图 5.6 中的互换的价值,对支付美元利率的那一方而言:

$$V = SB_F - B_D$$

其中 B_F 表示在互换中以外币形式衡量的外币债券价值,B_D

表示互换中美元债券的价值，S 表示即期汇率(以每单位外币若干国内货币数量来表示)。因此，互换的价值可以从国内货币的利率期限结构、外币的利率期限结构以及即期汇率来确定。

例 5.3

假设日元和美元的利率期限结构都是平直的，日元年利率为 4%，美元年利率为 9%(都用连续复利表示)。一家金融机构进行货币互换，它每年以日元收取年利率为 5%的利息，以美元支付年利率为 8%的利息，以两种货币表示的本金分别为 1000 万美元和 120000 万日元，互换将持续 3 年，现在的汇率为 1 美元=110 日元，在这个例子里，

$$B_D = 0.8e^{-0.09} + 0.8e^{-0.09\times 2} + 10.8e^{-0.09\times 3}$$
$$= 964 \text{ 万美元}$$
$$B_F = 60e^{-0.04} + 60e^{0.04\times 2} + 1260e^{-0.04\times 3}$$
$$= 123055 \text{ 万日元}$$

互换的价值为

$$\frac{123055}{110} - 964 = 155 \text{ 万美元}$$

如果这个金融机构一直是支付日元收到美元，互换的价值就变为 -155 万美元。

分解为远期合约

互换定价时，可将货币互换分解为一系列远期合约。假如在图 5.6 中每年有一个支付日。在每一个支付日 B 公司同意收取 120 万英镑(=1000 万英镑的 12%)并支付 141 万美元(1500 万美元的 9.4%)。另外，在最后支付日，它同意收取 1000 万英镑并支付 1500 万美元。这些交换的每一项都代表一份远期合约。假如 $t_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为第 i 个清偿日，$r_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为对应时间长度为 t_i 的美元连续复利利率，$F_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为对应时间长度为 t_i 的远期汇率。

在第三章我们指出，在所有情况下，远期合约多头的价值等于远期价格超过交割价格的现值。对应时刻 t_i 的利息交换，B 公司的远期合约价值为

$$(1.2F_i - 1.41)e^{-r_i t_i}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant n$。对应时间 t_n 的本金交换，B 公司的远期合约价值为

$$(10F_n - 15)e^{-r_n t_n}$$

这表明货币互换的价值可以总是从远期汇率的期限结构与国内利率的期限结构计算出。

例 5.4

再次考虑前面例子的情形。现在的即期汇率为 1 美元＝110 日元，或每日元兑 0.009091 美元。由于美元与日元间的利率差为每年 5%，等式(3.14)可用来给出 1 年期、2 年期、3 年期的远期汇率分别为：

$$0.009091e^{0.05\times 1} = 0.0096$$
$$0.009091e^{0.05\times 2} = 0.0100$$
$$0.009091e^{0.05\times 3} = 0.0106$$

利息交换包括收取 6000 万日元并支付 80 万美元。美元的无风险利率为每年 9%。因此，对应于利息交换的远期合约价值为(以百万美元为单位)：

$$(60\times 0.0096 - 0.8)e^{-0.09\times 1} = -0.21$$
$$(60\times 0.0101 - 0.8)e^{-0.09\times 2} = -0.16$$
$$(60\times 0.0106 - 0.8)e^{-0.09\times 3} = -0.13$$

本金的最后交换包括收取 120000 万日元并支付 1000 万美元。对应于这个交换的远期合约价值为(以百万美元为单位)：

$$(1200\times 0.0106 - 10)e^{-0.09\times 3} = 204(\text{万美元})$$

互换的总价值为 2.04 − 0.13 − 0.16 − 0.21 = 1.54 百万美元，符合前面例子计算的结果（允许舍入误差）。

假设用两种货币表示的本金数量在货币互换开始时完全相等。这时，互换的总价值为 0。然而，正如在利率互换例子一样，这并不意味着互换下的每一远期合约价值为 0。它表明，当两种货币利率有明显不同时，低利率货币的支付者处于这样的情形：对应于早期现金流交换的远期合约价值为正，而对应于最后本金交换的远期合约价值为负的期望值。高利率货币的支付者所处的情形很可能正相反，即早期现金流交换的远期合约价值为负，而最后交换的远期合约价值为正的期望值。

对应低利率货币的支付者，有这样的倾向，即互换期内大多数时候价值为负。这是因为对应于早期支付交换的远期合约价值为正，一旦这些交换发生，其余远期合约总体价值为负。对于高利率货币支付者，情况正好相反，有这样的倾向，即互换期内多数时候其价值为正。当评估互换中的信用风险时，这些结论很重要。

5.5 其它互换

用最普通形式表示，互换实际上是一项证券，包括现金流的交换，现金流是按依赖于一个或更多个基本变量值的计算公式得出的。因此进行互换的种类有许多许多。在这一部分里，我们讨论一些变量，这些变量存在于我们一直描述的最普遍的大众型利率互换以及货币互换中。

在利率互换中，可使用许多不同的浮动参考利率，6 个月期 LIBOR 最普遍。其它使用的有：3 个月期 LIBOR、1 个月期商业票据利率、短期国库券利率、免税利率等。公司选择那一特定的参考利率取决于它头寸暴露的性质。互换可以构造为将一个浮动利率（例如 LIBOR）互换为另一浮动利率（例如基准利率）。这允许金

融机构对冲具有多种不同浮动利率的资产与负债所产生的风险(头寸暴露)。

互换协议中的本金在互换期间里可以变化,以满足对方的要求。在一项本金减少方式互换(amortizing swap)中,本金以类似贷款分期付款的方式减少;在一项本金增加的互换(step - up swap)中,本金以相应于贷款协议增幅递减的方式上升;递延互换或远期互换(deferred swaps or forward swaps)中,双方开始并不交换利息支付,而是安排未来某个日期开始进行交换。

一种普通的互换是这样一种协议,以一种货币的固定利率交换另一种货币的浮动利率。这样,它是大众型利率互换与大众型货币互换的结合形式。

互换可以是可延长的或可赎回的。在可延长互换(extendable swap)中,一方有权延长某个互换的期限超过某个时期。在可赎回互换(puttable swap)中,一方有权提早中止互换。互换选择权即互换权也是可行的。利率互换选择权本质上是交换一种固定利率债券为一种浮动利率债券的权利。由于浮动利率债券的价值很接近它的面值,互换选择权也可看作是基于固定利率债券价值的选择权。互换选择权在第十五章里将进一步讨论。

基于商品的互换现在也逐渐增加了。一家每年消费 100000 桶石油的公司可以同意未来 10 年内每年支付 200 万美元并回收 100000S,这里 S 为每桶石油当时的市场价格。实际上这将该公司石油费用锁定为每桶 $20。类似地,石油生产者可能同意做反向交换,实际上,将石油销售的实现价格锁定为每桶 $20。

5.6 信用风险

互换是两个公司私下协商的合约,当然包含信用风险。考虑一家金融机构进入互换市场,抵偿 A 和 B 两个公司的交易(参见

图 5.3 或图 5.6)。如果任一方都不违约，金融机构完全保持对冲状态：一份合约价值的下降总是为另一合约价值的上升所抵偿。然而，一方有可能陷入财务困境并违约，金融机构那时仍必须兑现与另一方的合约。

假设图 5.3 中合约生效后的一段时间，金融机构与 B 的合约有正的价值，而与 A 的合约价值为负。如果 B 公司违约，金融机构将失去这份合约的正向价值。为了保持对冲状态，它不得不寻找愿意接替 B 公司位置的第三方。为了吸引第三方接替该位置，它支付第三方的数量几乎等于金融机构与 B 的合约在违约前的价值。

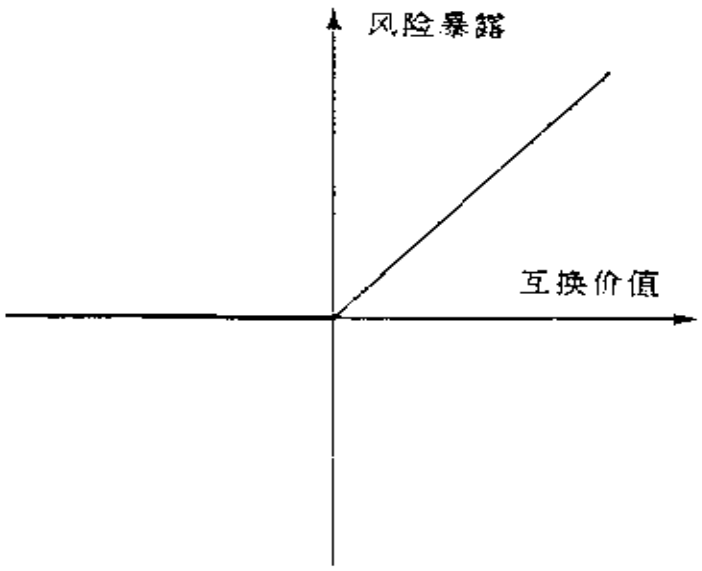


图 5.9　互换中的信用风险暴露

当金融机构互换价值为正时，金融机构在互换中具有信用风

险暴露。当金融机构互换价值为负且对方陷入财务困境时，会发生什么呢？理论上，金融机构能实现一项意外收益，因为违约有可能使它免除这项债务。在实际中，对方很可能选择将合约卖给第三方，或以某种方式重新安排其业务，这样合约中的正向价值就不会丢失。因此，金融机构最现实的假设如下：如果对方破产，当金融机构的互换价值为正时，会有一笔损失；当金融机构互换价值为负时，金融机构的状态不受影响。图 5.9 描述了这一情况。

有时金融机构能够提前预计两项抵偿合约中哪一个有可能价值为正。考虑图 5.6 中的货币互换，英镑利率高于美元利率，正如前面提到的那样，这意味着随时间推移，金融机构很可能会发现它同 A 的互换价值为负，而同 B 的互换价值为正，因此，B 的信用等级比 A 的信用等级更为重要。通常，货币互换中违约的预期损失大于利率互换中违约的预期损失。这是因为在货币互换的情况下，交换了以不同货币表示的本金。在这两类互换情况下，违约的预期损失远小于与互换同样本金的正常贷款违约时的预期损失。

在任一项合约中，金融机构区分信用风险和市场风险是非常重要的。正如前面讨论过的，当金融机构的互换合约价值为正时，信用风险产生于对方违约的可能性。市场风险来自利率、汇率这样的市场变量变化使得金融机构的互换合约价值转为负值的可能性。市场风险可通过签订抵偿合约来对冲，信用风险不能被对冲。信用风险问题将在第十八章进一步讨论。

5.7 小 结

两种最常见的互换为利率互换和货币互换。在利率互换中，一方同意在几年内按名义本金的固定利率向另一方支付利息，作为回报，在同一时间内，它按同一本金以浮动利率从另一方收取利息。在货币互换中，一方同意以一种货币按一定本金数量支付利

息，作为回报，它以另一种货币按一定本金收取利息。

利率互换中，本金并不交换。货币互换中，在互换开始时，外币本金和本国货币本金要进行交换，互换结束时，外币本金和本币本金再交换回来。对支付外币利息的一方而言，在互换开始时，收取外币本金并支付本国货币本金，在互换结束时，支付外币本金，收回本币本金。

利率互换可用来将浮动利率贷款转化为固定利率贷款，或者正好相反。货币互换可用来将一种货币的贷款转换为另一种货币的贷款。在本质上，互换是一种债券多头与另一种债券空头的组合。或者它可以被认为是一系列远期合约的组合。

互换通常由金融机构来安排。为了减少利率或汇率风险，在理想状态下，金融机构倾向于同时与两方签订相互抵销的互换协议。在实际中，金融机构经常存储互换，这意味着它们同一方签订互换协议，然后，在努力寻找取得相反头寸状态的另一方的同时，每天对冲存在的风险。

金融机构在与不同各方签订一对相互抵销的互换时，它面临着信用风险。当金融机构与其中一方互换的互换价值为正时，如果这一方违约，金融机构会遭受损失，因为它不得不兑现同另一方的互换协议。

第六章

期权市场

在第一章中我们介绍了期权。看涨期权是以某一确定价格购买一项资产的权利;看跌期权是以某一确定的价格出售一项资产的权利。欧式期权只能在到期日执行;美式期权可在期权有效期内任何一天执行。本章将阐述期权市场组织的方式,专业术语,怎样交易期权合约,怎样设置保证金的要求等等。期权在本质上不同于在前面几章中讨论的远期、期货和互换合约。期权赋予期权持有者做某件事情的权利,但期权持有者并不负有必须履行的义务。与之相反,远期、期货或者互换合约中,双方的权利与义务是对等的,即双方相互承担责任,各自具有要求对方履约的权利。

6.1 期权交易所

在世界各地的许多交易所中都进行期权交易。标的资产包括股票、外汇、股票指数和许多不同的期货合约。

股票期权

在美国交易股票期权的交易所是芝加哥期权交易所(CBOE)、费城交易所(PHLX)、美国股票交易所(AMEX)、太平洋股票交易所(PSE)和纽约股票交易所(NYSE)。在500多种不同

的股票上都可以进行期权交易。交易最活跃的股票期权是诸如IBM、柯达和通用汽车的股票期权。在每一合约中,期权持有者有权按特定的执行价格购买或出售100股股票。由于股票本身通常是以100股为单位进行交易的,所以这一规定是非常方便的。

外汇期权(货币期权)

最主要的外汇期权交易所是费城交易所。它提供澳大利亚元、英镑、加拿大元、德国马克、法国法郎、日元、瑞士法郎这几种货币的美式和欧式期权合约。期权合约的大小取决于货币的种类。例如,一个英镑期权合约,持有者有权购买或出售£31,250;而一个日元期权合约,持有者有权购买或出售¥6,250,000。

指数期权

在美国,存在许多不同种类的指数期权。最著名的两个指数期权是芝加哥交易所CBOE中的S&P100和S&P500指数期权。S&P 500指数期权是欧式期权而S&P100指数期权是美式期权。每一合约购买或出售的金额为特定执行价格指数的100倍。以现金结算而不是交割指数的证券组合。例如,S&P100看涨期权的执行价格为280,如果在指数为292时履行期权合约,则看涨期权的出售方将支付期权持有方$(292-280)\times 100=\$1200$。这一现金支付数量取决于履行期权合约的指令发布当日收盘时的股指价值。毫无疑问,投资者通常要等到这一天的最后时刻才发出这些指令。

期货期权

在期货期权(或基于期货的期权)中,标的资产是期货合约。期货合约的到期日通常紧随该期货期权的到期日之后。大多数基于期货合约的标的资产都有该资产的期货期权合约交易。当看涨

期权的买方行使权利时，他或她就会从期权出售方获得标的期货合约的多头，再加上期货价格超过执行价格的超额现金。当看跌期权的买方行使权利时，他或她就会从期权出售方获得标的期货合约的空头，再加上执行价格超过期货价格的超额现金。在这两种情况下，期货合约的价值为零，并且可立即结清。此时，期货期权的损益状况就和股票期权以期货价格代替股票价格时的损益状况一致。交易最为活跃的期货期权是芝加哥交易所(CBOT)中交易的长期国债期货期权。其它有关玉米、大豆、原油、活牛、黄金、欧洲美元和一些货币的期货期权的交易也很普遍。

6.2 场外交易的期权

并非所有的期权合约都在交易所中交易。金融机构和大公司双方直接进行的期权交易称为场外期权交易，现在场外交易越来越普遍。外汇期权和利率期权的场外交易尤为活跃。

场外期权交易的主要优点是金融机构可以根据客户的需要订立期权合约。场外期权的执行价格和到期日不必与场内交易的期权相一致。同样，期权的设计中具有非标准化的特征。例如，百慕大期权和亚式期权就是两个非标准化的期权。百慕大期权(Bermudan option)可在其有效期的某些特定天数之内执行。亚式期权(Asian option)的损益状态是根据确定时期内标的资产的平均价值来确定的，而不是按照其终值来确定的。这两种类型的期权有时会在场外进行交易。

6.3 期权合约的性质

在本章的以下部分，我们将着重论述场内交易的股票期权。在第十一章中，我们将进一步讨论指数期权、外汇期权和期货期权

的合约性质和交易。

在前面我们已经提到，股票期权合约是美式期权合约，每一合约可以购买或出售 100 股股票。交易所规定了合约的细节，如规定了失效日、执行价格、宣布红利时发生的情况、每一投资者可持有的最大头寸等等。

失效日

用于描述股票期权的一个术语是到期月，即期权失效的那个月份。因此 1 月份 IBM 的看涨期权其失效日（或到期日）在 1 月份的某一天。精确的到期时间是到期月第三个星期五之后紧随的那个星期六美国中部时间的下午 10:59。期权的最后交易日是到期月的第三个星期五。持有期权多头的投资者通常在这个星期五中部时间下午 4:30 之前给他或她的经纪人发出执行期权的指示。经纪人在第二天中部时间下午 10:59 之前完成书面报告并通知交易所打算执行期权。

股票期权是在 1 月份、2 月份或 3 月份的基础上的循环。1 月份的循环包括 1 月份、4 月份、7 月份和 10 月份这几个月份。2 月份的循环包括 2 月份、5 月份、8 月份和 11 月份这几个月份。3 月份循环包括 3 月份、6 月份、9 月份和 12 月份这几个月份。如果当前月份的到期日还未到达，则交易的期权合约包括当前月到期期权、下个月到期期权和当前月循环中的下两个到期月的期权。如果当前月份的到期日已过，则交易的期权包括下个月份到期、再下一个月份到期期权和该循环中的下两个到期月的期权。例如，设 IBM 股票期权是处于 1 月份循环中。1 月份初，交易的期权的到期月份为 1 月份、2 月份、4 月份和 7 月份。在 1 月份末，交易的期权的到期月份为 2 月份、3 月份、4 月份和 7 月份。在 5 月份初，交易的期权的到期月份为 5 月份、6 月份、7 月份和 10 月份，等等。当某一期权到期时，则开始交易另一期权。在交易所中也交易诸

如 LEAPS 这样的期限较长的股票期权。在第十一章中我们将详细讨论这类期权。

执行价格

交易所选定期权的执行价格，具有这样执行价格的期权可以交易。对于股票期权来说，通常执行价格的变动间隔分别为 $2.5，$5 或 $10（当发生股票分割或股票派发红利时，则是例外，这将在后面讨论）。交易所通常规定如下：当股票价格低于 $25 时，执行价格的变动间隔为 $2.5；当股票价格高于 $25 但低于 $200 时，执行价格的变动间隔为 $5；当股票价格高于 $200 时，执行价格的变动间隔为 $10。例如，在订立期权合约时，花旗集团的股票价格为 $12，则交易的期权的执行价格分别为 $10、$12.5、$15、$17.5 和 $20。IBM 股票的价格为 99.7/8，则交易的期权的执行价格分别为 $90、$95、$100、$105、$110 和 $115。

当引入新的到期日时，交易所通常选择最接近股票现价的那两个执行价格。如果其中有一个很接近股票现价，交易所也可以另外选择最接近股票现价的第三个执行价格。如果股票价格的波动超过了最高执行价格和最低执行价格的范围，交易中通常引入新执行价格的期权。为了说明这些规则，假定 10 月份期权刚开始交易时，股票价格为 $53。交易所最初提供的看涨期权和看跌期权的执行价格分别为 $50 和 $55。如果股票价格上升到 $55 以上时，交易所将提供执行价格为 $60 的期权；如果股票价格跌到 $50 以下时，交易所将提供执行价格为 $45 的期权，依此类推。

术语

在任何给定的时间，对于任何给定资产，可能有许多不同的期权合约在交易。如对某一股票，该股票具有四种到期日和五种执行价格的期权。如果每一个到期日和每一个执行价格都有看涨期

权和看跌期权在进行交易，则有共 40 种不同的期权合约。所有类型相同的期权（看涨期权或看跌期权）都可划分为某个期权类（option class）。例如，IBM 的看涨期权为一类而它的看跌期权则为另一类。而某个期权系列（option series）则是由具有相同到期日和执行价格的某个给定类型的所有期权组成。换句话说，某个期权系列是指交易中的某个特定合约。IBM 110 1 月份的看涨期权就是一个期权系列。

期权分为实值期权、两平期权或虚值期权（in the money，at the money or out of the money）。实值期权是指如果期权立即履约，持有者具有正值的现金流；类似地，两平期权是指如果期权立即履约，持有者的现金流为零；虚值期权是指如果期权立即履约，持有者的现金流为负。如果用 S 代表股票价格，X 代表执行价格，则当 $S>X$ 时，看涨期权是实值期权；当 $S=X$ 时，看涨期权是两平期权；当 $S<X$ 时，看涨期权是虚值期权。当 $S<X$ 时，看跌期权是实值期权；当 $S=X$ 时，看跌期权是两平期权；当 $S>X$ 时，看跌期权是虚值期权。显然，只有当期权是实值期权时，它才会被执行。不考虑交易费用时，如果一直没有提前履约的话，实值期权通常是在到期日才执行的。

内涵价值（intrinsic value，也称内在价值）定义为零和期权立即执行时所具有的价值这两者之中的极大值。因此，看涨期权的内涵价值为 $\max(S-X,0)$。看跌期权的内涵价值为 $\max(X-S,0)$。一个处于实值状态的美式期权的价值一定是大于或等于其内涵价值，因为该期权的持有者可通过立即执行期权实现其内涵价值。通常处于实值状态的美式期权的持有者最理想的做法是持有期权直到期权的到期日，而并不是立即执行它。期权具有时间价值（time value）。期权的全部价值为其内涵价值与时间价值之和。

红利和股票分割

早期的场外交易的期权是受红利保护的。如果公司派发一项现金红利，则在除权日后，公司股票期权的执行价格应减去红利金额。无论是否派发现金红利，场内交易的期权通常并不进行调整。在第十章中，我们会发现是否考虑红利对于期权估价的方式有很大的影响。

当股票分割时，场内交易的期权要进行调整。股票分割时，现有的股票被分割成更多的股票。例如，在某个股票的 3 对 1 分割方式中，3 股新发行股票将代替原来的 1 股股票。由于股票分割并不改变公司的资产和盈利能力，它对公司的股东权益并不产生影响。其它条件相同时，3 对 1 股票分割方式将会使该公司股票价格降为分割前股价的三分之一。一般来说，n 对 m 的股票分割方式将会使股票价格降为分割前股价的 m/n。期权合约中的相应条款将有所调整，以反映股票分割所引起的股票价格的预期变化。在 n 对 m 股票分割后，执行价格降为原执行价格的 m/n，每一期权合约所包含的股票数额将增为原来的 n/m。如果股票价格按预期的那样降低，则期权合约买卖双方的头寸将保持不变。

例 6.1

某个看涨期权可以按 $30 的价格购买某公司 100 股股票。假定公司进行 2 对 1 的股票分割。则期权合约的条款将变为持有者有权以 $15 的价格购买 200 股股票。

股票期权根据股票红利进行调整。股票红利可以是公司向其现有股东送股。例如，20% 的股票红利是指每拥有 5 股该公司股票的股东将收到 1 股新股。与股票分割类似，股票红利对公司的资产和盈利能力均无影响。在公司送股后，可以预计公司的股票价格将会下降。20% 的股票红利基本上等同于 6 对 5 的股票分

割。其它条件相同时,这种送股将导致股票价格下降到原价格的5/6。与股票分割的方式类似,期权合约中的相应条款将有所调整,以反映送股所带来的股票价格的预期下降。

例 6.2

某个看跌期权可以按 $15 的价格出售某公司 100 股股票。假定公司派发 25%的股票红利。这相当于 5 对 4 股票分割。期权合约的条款将变为持有者有权以 $12 的价格出售 125 股股票。

头寸限额和执行限额

交易所为每一只股票规定了期权交易的头寸限额(position limit)。它规定了每一投资者在市场看涨或看跌中可持有的期权合约的最大数量。为此目的,可以认为看涨期权的多头和看跌期权的空头是处于市场看涨的同一方。同样,看涨期权的空头和看跌期权的多头也是处于市场看跌的同一方。执行限额(exercise limit)等于头寸限额。它规定了任一投资者(或一起活动的投资小组)在任 5 个连续的交易日中可以执行期权合约的最大数量。对数据设备公司股票(Digital Equipment),在订立合约时,头寸限额/执行限额为 8000 个合约。

头寸限额和执行限额是为防止个人投资者或机构投资者的活动对市场产生不适当的影响。但是,这样的限制是否确实有必要,这仍然是一个有争议的问题。

6.4 报纸上的期权行情

许多报纸都刊载有期权的行情。在《华尔街日报》的货币和投资版中,在"上市期权"标题下很容易就可看到股票期权的报价。表 6.1 是 1991 年 10 月 18 日星期五《华尔街日报》中的期权行情。

表 6.1 1991 年 10 月 18 日《华尔街日报》股票期权行情

Thursday, October 17, 1991

Options closing prices. Sales unit usually is 100 shares.
Stock close is New York or American exchange final price.

CHICAGO BOARD

Option & Strike NY Close Price		Calls-Last Oct	Nov	Dec	Puts-Last Oct	Nov	Dec
APwrCv	30	4	5½	6⅝	r	r	r
35½	35	⅜	3	3½	r	1¾	r
BergBr	25	r	r	1/16	r	r	r
BlkEst	10	2⅝	2⅝	2⅝	1/16	1/16	r
12¾	12½	⅛	⅜	1⅛	1/16	9/16	13/16
12¾	15	1/16	⅛	½	r	r	r
BrAlSo	75	r	r	8	r	r	½
82½	80	3⅜	2½	4⅝	1/16	1	1⅝
82½	85	1/16	1/16	2	2⅛	3⅜	3⅝
82¾	90	r	r	⅜	r	r	r
Bruns	15	r	r	⅛	r	r	r
Chalmin	25	1⅛	r	r	r	1/16	r
26⅜	30	r	r	1/16	r	r	r
CompSc	55	r	r	13¼	r	r	r
67¾	60	r	8	r	r	r	r
67¾	65	2½	r	r	r	1½	r
67¾	70	r	1½	2½	r	3⅝	r
67¾	75	s	s	1⅜	s	s	r
ComBk	10	1	r	1/16	r	1/16	r
10⅝	12½	r	r	⅛	1/16	1⅛	r
CypSem	17½	3	r	r	r	r	r
22¾	20	½	3½	2⅞	r	r	1⅜
22¾	22½	r	r	1	r	r	r
Dow Ch	45	r	r	r	r	r	⅜
52⅛	50	2	2½	3⅝	1/16	⅞	1⅝
52⅛	55	1/16	⅛	1 1/16	r	3⅜	r
52⅛	60	r	s	⅜	r	s	r
Duracl	30	r	r	r	r	9/16	1 5/16
30⅝	35	r	3/16	r	r	r	r
FHP s	15	1	⅜	½	3⅛	r	r
12¾	17½	r	r	3/16	r	r	r
12¾	22½	r	r	1/16	r	r	r
12¾	30	r	r	1/16	r	r	r
FtBkSy	20	2	r	r	r	r	r
22	22½	r	½	1 1/16	r	r	r
FFB	35	r	r	1 1/16	r	r	r
Ford	25	4⅛	r	r	r	r	1/16
29¼	30	1/16	1 1/16	1⅛	⅞	1⅝	2
29¼	35	r	r	3/16	r	r	r
29¼	40	s	s	1/16	s	s	r
Fuqua	12½	r	r	½	r	s	r
11¾	15	r	s	3/16	r	s	r
Gap	27½	s	s	20¼	s	s	r
46⅛	30	s	s	17½	s	s	r
46⅛	35	r	s	r	r	s	⅜
46⅛	40	6¾	7⅛	8	r	1/16	1
46⅛	45	1⅛	3	3⅜	1/16	1⅛	2⅛
46⅛	50	r	1	1 5/16	r	4½	5
Gen El	65	6⅜	7⅛	7⅜	r	1/16	⅜
71½	70	1⅜	2⅞	3⅝	1/16	1 1/16	2
71½	75	1/16	9/16	1⅛	3½	3⅜	4½
71½	80	r	s	9/16	r	s	8½
G M	35	1⅛	r	3⅜	r	⅜	r
37½	40	r	1/16	1 1/16	2½	3⅛	3½
37½	45	r	s	9/16	r	s	r
GrLCh	100	s	7	r	r	1	r
96⅛	95	s	r	r	s	2⅛	r
96⅛	100	s	1½	r	s	5	r
Hanson	20	r	1/16	1/16	r	1	r
Heinz	35	3	3⅝	4	r	r	½
38⅛	40	1/16	⅜	1⅝	2	2⅛	2⅝
38⅛	45	r	r	1/16	6⅜	r	r
38⅛	50	r	s	1/16	r	s	r
I T T	55	r	2⅜	3¼	r	r	1½
57⅛	60	r	1/16	⅜	r	r	r
IntelE	22½	2 1/16	r	r	r	r	r

Option & Strike NY Close Price		Calls-Last Oct	Nov	Jan	Puts-Last Oct	Nov	Jan
12	12½	1/16	1/16	15/16	1/16	15/16	1 1/16
12	15	r	1/16	⅛	2⅞	3	3⅛
12	17½	r	r	1/16	5⅜	r	5½
12	20	r	s	1/16	r	s	r
CmprsL	15	r	r	10½	r	r	1/16
24⅞	20	5	4⅞	r	r	⅜	1
24⅞	22½	2⅛	3⅜	4⅝	r	r	r
24⅞	25	r	2	3⅛	r	r	r
24⅞	30	5	1/16	s	s	s	s
CmpAsc	7½	⅛	1	r	r	r	1/16
8⅛	10	1/16	9/16	⅜	2½	2	r
8⅛	12½	r	s	r	4⅜	s	4⅜
CyprMn	17½	r	r	5	r	r	r
22	20	1⅜	r	2⅜	r	r	r
22	22½	1/16	1 1/16	1¼	1 9/16	r	r
22	25	r	s	1 1/16	r	s	r
Delta	60	r	9½	r	1/16	r	⅛
68½	65	3⅜	5⅛	6⅝	r	⅞	1 5/16
68½	70	1/16	2⅜	3½	1 1/16	2½	4⅜
68½	75	r	r	1¾	5⅜	r	8
58½	80	r	s	⅜	r	s	r
DiaSrk	20	r	1/16	r	r	r	1⅜
Dryfus	25	r	r	2⅛	r	3¼	r
34¾	40	r	r	r	5⅜	r	r
EKodak	35	r	s	r	r	s	1/16
45⅜	40	5⅜	5⅛	5⅜	r	1/16	7/16
45⅜	45	1/16	1½	2½	1/16	1½	2¼
45⅜	50	r	⅛	½	r	r	r
Eaton	60	1¼	r	r	r	r	r
61⅛	65	r	r	1⅛	r	r	6¼
Elan	40	2½	6⅜	8¾	r	r	1/16
47⅜	45	2⅜	r	4¾	r	1/16	2⅜
47⅜	50	s	1¼	2⅜	s	4¼	r
Engeth	30	2 1/16	r	r	r	r	1/16
Enron	60	r	r	11½	r	r	r
71½	65	6⅜	r	r	r	r	r
71½	75	s	r	1⅜	s	r	r
Exxon	50	r	s	r	r	1/16	s
61	55	6	6¼	6	r	r	r
61	60	⅞	1 5/16	2½	1/16	1 1/16	r
61	65	r	⅛	½	4½	r	4⅝
FedExp	35	r	r	6⅝	r	1/16	⅜
40½	40	⅛	1⅜	2½	9/16	1¼	2¼
40½	45	r	1/16	1	4⅜	r	r
FstChl	22½	3⅜	r	r	r	r	r
26½	25	1 5/16	r	r	r	½	1 3/16
26½	30	r	r	½	r	r	r
Fintsfe	25	r	r	5	1/16	r	r
28⅜	30	1/16	1	2	1⅛	1⅜	3
28⅜	35	r	r	⅞	6½	r	r
28⅜	40	r	s	½	10¾	s	r
Fluor	35	9½	s	r	r	s	r
45⅛	40	5⅛	4⅜	6⅛	⅛	r	⅜
45⅛	45	⅛	1½	2⅜	½	1⅜	2⅝
45⅛	50	1/16	s	1	r	s	6
GrtWF	15	1⅛	r	1⅜	r	r	r
16⅛	17½	r	⅜	1 1/16	1⅜	r	r
16⅛	20	r	r	r	4	r	r
Grumn	35	5	s	r	r	s	r
20⅛	17½	2⅝	r	r	r	s	r
20⅛	20	⅛	1 3/16	1 1/16	r	r	r
Heibm	30	5⅛	r	r	r	r	1 1/16
35⅛	35	⅜	1⅜	2	⅛	r	2⅝
35⅛	40	r	1/16	r	5	r	5⅜
35⅛	45	1/16	r	r	r	r	r
Hitachi	80	r	r	r	2 1/16	r	4⅜
77½	85	r	r	1 9/16	r	r	r
Homfed	5	1/16	s	s	r	s	s

Option & Strike NY Close Price		Calls-Last Oct	Nov	Feb	Puts-Last Oct	Nov	Feb
182	175	r	r	r	r	2¾	r
Cadenc	15	r	5⅜	r	r	r	r
20⅜	17½	r	3⅜	r	r	1/16	r
20⅜	20	1 1/16	1⅜	r	1/16	r	r
20⅜	22½	1/16	⅜	1⅜	1⅝	r	r
CapCit	110	10⅛	15¼	r	1 1/16	r	r
414½	400	r	r	r	r	4	r
414½	420	¾	8¼	r	r	13⅝	r
414½	430	r	4⅜	r	r	r	r
414½	440	r	2⅝	r	r	r	34⅝
414½	470	r	r	r	r	56¼	r
Coke	50	s	r	13⅞	s	r	1/16
62⅝	60	3½	3⅜	5½	r	½	1⅝
62⅝	65	1/16	1/16	2⅝	2⅜	3	3⅛
62⅝	70	r	r	⅛	r	r	r
CocaCE	15	r	r	⅜	r	r	r
ColgPl	35	r	8⅜	r	r	r	r
42⅜	40	3	2⅞	3¾	r	½	1
42⅜	42½	s	1½	s	s	r	s
42⅜	45	r	⅛	1	2 1/16	2¾	r
Cmw Ed	35	r	r	r	r	r	⅜
39⅝	40	r	r	r	r	¾	1⅜
Corng	60	15½	r	15½	r	r	r
74⅜	70	4⅜	5¼	7⅜	r	r	2 1/16
74⅜	75	r	2	4½	r	r	r
CrCare	45	13/16	r	r	1/16	r	r
Diebld	50	3⅜	2½	r	r	r	r
53	55	r	⅜	r	r	r	r
Edward o	25	r	9½	s	r	1/16	s
34½	30	4⅜	4⅜	s	r	r	s
34½	35	r	1	s	r	r	s
Exaovf	20	5⅜	r	r	r	r	r
25⅜	25	r	1⅜	r	r	1 1/16	r
FarstL	25	8½	r	r	r	r	r
33⅜	30	r	4⅜	r	r	r	r
33⅜	35	r	1 1/16	2⅞	⅞	2⅛	r
33⅜	40	r	¼	1⅜	r	r	r
33⅜	45	r	⅛	r	r	r	r
FdtMc	35	5⅜	5½	5⅝	r	r	r
40⅝	40	⅜	1⅜	2⅝	r	r	r
40⅝	45	r	⅛	⅞	r	r	r
GnCine	20	r	r	1½	1/16	r	r
Gn Dyn	45	3⅜	4⅝	r	r	½	r
49⅝	50	7/16	2	4	⅜	2½	r
Gdrich	40	r	3⅛	r	r	1 1/16	r
42⅜	45	r	⅜	1 1/16	2⅝	3	r
42⅜	50	r	⅜	r	r	r	r
Harris	22½	r	1⅝	r	r	r	r
22⅛	25	r	r	r	r	2¼	r
Henlet	45	4⅝	5¼	r	r	½	1 1/16
49⅝	50	⅜	1 1/16	3⅝	½	2	3¾
49⅝	55	1/16	½	2	5⅛	5⅝	6⅝
49⅝	60	r	r	1⅛	r	r	r
Honwll	50	5¼	5⅜	r	r	r	r
55⅝	55	⅜	r	r	⅜	1⅜	r
55⅝	60	r	⅜	r	r	5	r
Humana	25	2⅜	r	r	r	7/16	⅜
28	30	r	r	r	2	r	r
In Fin	80	r	13⅜	r	r	r	1 1/16
91⅜	85	r	7½	r	r	⅜	r
91⅜	90	r	4⅝	5⅜	r	1⅜	r
Limtd	20	s	r	r	s	9/16	r
24½	22½	1½	1⅝	2⅜	r	½	1⅜
24½	25	1/16	⅜	2	1⅛	1½	2⅜
24½	30	r	1/16	⅜	6¼	r	r
Medtrn	65	r	r	14	r	⅜	r
78¼	67½	r	r	r	r	r	2
78¼	70	6	7	10	r	⅝	r

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, October 18, 1991, Copyright ©1991, Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

它是前一个交易日(即 1991 年 10 月 17 日,星期四)的期权价格。

在第一列中列出了公司名称和股票的收盘价。第二列是执行价格。之后的三列是最近三个到期月份的看涨期权的价格。最后三列是最近三个到期月份的看跌期权的价格。由于在任一时间中,最少有四个到期月份的期权在进行交易,《华尔街日报》并没有提供在任何给定执行价格中全部的交易期权的价格。字母 r 代表在 1991 年 10 月 17 日这天,该期权没有交易。字母 s 代表交易所没有提供该期权。

行情报价是购买或出售一股股票的期权的价格。我们前面曾提到,一个期权合约可购买或出售 100 股股票。因此,每一个期权合约的成本为所列出价格的 100 倍。由于大多数期权的价格低于 $10,并且一些期权的价格低于 $1,投资者不须很多资金就可进行期权交易。

从表 6.1 中,看起来在 1991 年 10 月 17 日似乎存在着套利的机会。例如,道·化学公司 10 月份执行价格为 $50 的看涨期权价格为 $2。由于股票价格为 $52 $\frac{1}{8}$。看起来应该购买看涨期权并立即执行,则可获得 $1/8 的利润。实际上,几乎不存在类似的套利机会。表 6.1 提供了 1991 年 10 月 17 日最后几笔交易的期权价格和股票价格。几乎可以肯定道·化学公司 10 月份执行价格为 $50 的看涨期权在那天的最后几笔期权交易远早于当天该公司股票的最后几笔股票交易。如果该期权交易在股票最后几笔交易的时候发生,则看涨期权的交易价格一定高于 2 $\frac{1}{8}$。

6.5 交　易

期权交易在许多方面类似于期货交易(参见第二章)。每一交易所都有一定数量的会员(个人或公司),会员在交易所中拥有席

位。交易所会员有权进入场内,并与其它会员进行交易。

做市商

大多数交易所(包括 CBOE)都采用做市商制度来进行交易。某一确定期权的做市商(Market Makers)实际上是指某个人,只要询价方向该人询价时,他或她都应报出该期权的买入价和卖出价。买入价是做市商准备买入的价格,卖出价是做市商准备出售的价格。当做市商报出期权的买入价和卖出价时,它并不知道询价的人是要买入还是要卖出期权。卖出价肯定会大于买入价,卖出价与买入价的差额就是买卖价差(bid－offer spread)。交易所设定了买卖价差的上限。若期权的价格低于 $0.50,期权买卖价差不得超过 $0.25;期权的价格在 $0.50 和 $10 之间,买卖价差不得超过 $0.50;期权的价格在 $10 和 $20 之间,买卖价差不得超过 $0.75;期权的价格超过 $20,买卖价差不得超过 $1。

做市商的存在能够确保买卖指令可在某一价格立即执行而没有任何拖延。因此做市商增加了期权市场的流动性。做市商本身可以从买卖价差中获利。他们可以运用本书后面讨论的一些方法来对冲风险。

场内会员经纪人

场内经纪人(floor broker)执行社会公众的交易指令。当投资者通知他或她的经纪人购买或出售一项期权时,该经纪人将买卖指令传递给本公司在期权交易所内的场内经纪人。如果经纪人公司没有自己的场内经纪人,它通常会通过一位独立的场内经纪人或其它公司的场内经纪人进行交易。

场内经纪人可以与其它场内经纪人交易,也可以与做市商交易。场内经纪人可获得佣金或由他或她服务的经纪人公司支付薪金。

指令登记员

许多传递给场内经纪人的指令是限价指令。即它们只能在特定的价格或在更为有利的价格上执行该指令。通常，当场内经纪人收到限价指令时，该指令并不能立即执行(例如，当做市商报出的看涨期权买入价为 $4.3/8 并且卖出价为 $5.1/4 时，则以 $5 买入看涨期权的指令并不能立即执行)。在大多数交易所中，场内经纪人将该指令传递给指令登记员(the order book official)。这个人将该指令紧随其他限价指令输入到计算机。这就确保市场价格一旦达到限价，指令就会得到立即执行。所有输入的限价指令的信息向所有的交易者公开。

与少数交易所(例如，AMEX 和费城交易所)中使用的专家体系相比，做市商/指令登记员体系是股票交易中使用最普遍的体制。在专家体系下，专家作为做市商并且保存限价指令的记录。与指令登记员不同的是，专家并不将限价指令的有关信息提供给其他的交易者。

冲销指令

购买期权的投资者可以通过发出一个出售相同期权的冲销指令来结清他或她的原期权头寸。同样地，出售期权的投资者可以通过发出一个购买相同期权的冲销指令来结清他或她的头寸。

当某一项期权合约正在交易时，如果交易双方的投资者都没有冲销现有的期权头寸，则未平仓权益或持仓量加 1；如果一个投资者正在冲销某个现有的头寸而另一个投资者并不冲销现有头寸，则持仓量保持不变；如果双方都在冲销现有的头寸，则持仓量减 1。

6.6 保证金

在购买股票时，投资者可以支付现金或使用保证金帐户。初始保证金通常为股票价值的50%，维持保证金通常为股票价值的25%。期权保证金帐户的操作方式与投资者进入期货合约时保证金帐户的操作方式一致(参见第二章)。在购买看涨期权和看跌期权时，投资者必须支付全额期权费用。不允许投资者用保证金方式购买期权。这是由于期权实际上已经包含了一定的杠杆率。按保证金方式购买期权将使这一杠杆比率上升到难以接受的水平。

当投资者出售期权时，他或她必须在保证金帐户中保持一定数额的资金。这是由于经纪人和交易所需要确保当期权行使时，该出售期权的投资者不会违约。保证金的大小取决于当时的环境。

出售无保护期权

考虑第一种情况，即无保护期权(也称裸期权)。这是指期权头寸中没有包含冲销该期权头寸的标的股票头寸。如果期权是实值期权，初始保证金为期权的标的股票价值的30%加上期权所具有的实值额。如果期权是虚值期权，初始保证金为期权的标的股票价值的30%减去期权的虚值额。期权出售方得到的期权费可用来满足部分保证金的要求。

例 6.3

某一投资者出售了4个无保护的看涨期权。期权费为$5，执行价格为$40，股票价格为$42。所要求的保证金的第一部分为$42×400的30%即$5040。期权的实值为$2。所要求保证金的第二部分为$2×400即$800。出售期权合约收到的金额为$5×400或$2000。因此仍须缴纳的

保证金为：

$$\$5,040 + \$800 - \$2,000 = \$3,840$$

如果该投资者出售的是看跌期权，其虚值为 $2，则仍须缴纳的保证金为：

$$\$5,040 - \$800 - \$2,000 = \$2,240$$

每天都重复进行与初始保证金类似的计算。当计算结果表明要求的保证金金额小于保证金帐户的现有金额时，可以随时从保证金帐户中提取资金。当计算结果表明客户需要追加大量的保证金时，交易所将发出保证金催付通知。

出售有保护看涨期权

出售有保护看涨期权是指出售股票看涨期权时已持有该股票，以备将来交割。有保护看涨期权的风险远远低于无保护看涨期权，这是由于前者的最坏情况是投资者以低于市场的价格出售他已拥有的股票。如果有保护看涨期权是虚值期权，则没有保证金的要求。持有的股票可以用前面描述过的保证金帐户购买，且收取的期权费可用来满足部分保证金的要求。如果期权是实值期权，该期权也没有保证金的要求。但是，用保证金方式购买股票的金额将减少，减少额为期权实值的金额。

例 6.4

某一投资者决定用保证金方式购买 200 股某种股票，并出售 2 个该股票的看涨期权。股票价格为 $63，执行价格为 $60，期权费为 $7。保证金帐户允许投资者借入的金额为股票价格的 50% 减去期权的实值额。在本例中，期权的实值额为 $3，则投资者可借入：

$$0.5 \times \$63 \times 200 - \$3 \times 200 = \$5,700$$

投资者也可以用收取的期权费 $7×200 即 $1400 作为购买股票的部分资金。购买股票需要 $63×200 = $12600。因此出售这个有保护看涨期权交易要求投资者支付的初始最低金额为：

$$\$12,600 - \$5,700 - \$1,400 = \$5,500$$

第八章中，我们将讨论一些复杂的期权策略，如价差期权、组合期权、跨式期权、宽跨式期权等等。当使用这些期权策略时，确定所要求的保证金需要特殊规则。

6.7 期权清算公司

期权市场中期权清算公司(OCC)的功能与期货市场中期货清算所的功能很相似(参见第二章)。它确保期权的出售方按照合约的规定条款履行他或她的义务，同时它记录所有的多头和空头头寸状况。期权清算公司拥有一定数量的会员，并且所有的期权交易必须通过其会员来结清。如果经纪人公司本身不是交易所期权清算公司的会员，它必须通过期权清算所的会员结清其交易。会员必须满足资本的最低限额要求，并且必须提供特种基金，若有任一会员无法履行期权中的义务，则可使用该基金。

在购买期权时，期权购买者必须在下一个营业日的清晨全额支付期权费。这一资金存于期权清算公司中。如前所述，期权的出售方在其经纪人那里开设一个保证金帐户，而经纪人在负责结清其交易的期权清算公司会员那里开设一个保证金帐户，随之，期权清算公司会员必须在期权清算公司开设一个保证金帐户。在先前章节描述的要求保证金是期权清算公司对它的会员提出的保证金要求。经纪人公司可向其客户要求更高的保证金。但是，经纪人公司不能向其客户降低保证金要求。

期权的执行

当投资者想要执行某个期权时，投资者需要通知他或她的经纪人。经纪人接着通知负责结清其交易的期权清算公司会员。该会员于是向期权清算公司发出执行指令。期权清算公司随机地选择某个持有相同期权空头的会员。该会员按事先订立的程序，选择某个特定的出售该期权的投资者。如果期权是看涨期权，则出售该期权的投资者须按执行价格出售股票。如果期权是看跌期权，则出售该期权的投资者须按执行价格购买股票。该投资者称为被指定者(assigned)。当某一期权履行合约时，则期权的持仓量将减少1。

在期权的到期日，所有实值期权均应执行，除非交易成本很高，抵消了期权的收益。如果到期日执行期权对其客户有利，一些经纪人公司在到期日将自动为其客户执行期权。当个人投资者持有的股票期权的实值高于$0.75，机构投资者持有的股票期权的实值高于$0.25时，期权清算公司将自动执行这些期权。

6.8　认股权证和可转换债券

前面讲述的都是场内交易期权，买卖双方在场内交易，随着交易的进行，流通的期权合约的数量也随之变动。认股权证是一种期权，它的产生与其他期权有很大的不同。认股权证(warrants)是由公司或金融机构发行(或出售)的。在某些情况下，它们以后可在交易所中进行交易。流通在外的认股权证的数量取决于初始发行的数量，并且仅当期权执行或到期时其数量才发生变化。购买或出售认股权证与购买或出售股票类似，不需期权清算公司的参与。当执行认股权时，初始发行者只须与当前认股权的持有者进行结算。

一些公司经常发行本公司股票的看涨认股权证。例如，公司在发行债券时，它可能向投资者提供一个包含债券和本公司股票的看涨认股权的组合。如果执行了认股权，公司将向认股权持有者发放库存股票，按合约中指定的执行价格收取现金。认股权证中的执行价格和到期日不必与那些正规的场内交易的看涨期权相一致。一般来说，认股权的期限比正规的场内交易的看涨期权的期限长。

有时为了满足市场需要，金融机构也发行看跌认股权证和看涨认股权证。典型的标的资产为某个指数、外汇或商品。例如，本世纪八十年代末，市场对日本的 Nikkei225 指数的看跌认股权兴趣极大。这类认股权一经发行，它们通常是在交易所中交易。当执行认股权时，金融机构通常采用现金结算。金融机构事先收取了认股权费，但必须对冲其风险。第十三章将讨论这种对冲操作的技术。

可转换债券(convertible bonds)是公司发行的、在一般债券上附加期权的一种债务工具。持有者有权在将来的特定时期内根据某个确定转换比例将可转换债券转换成该发行公司的股权。通常可转换债券是可回赎的(callable)，即发行者可在将来的特定时间以特定的价格将可转换债券购回。一旦公司决定赎回该债券，则在债券购回前，持有者往往可以选择进行转换。因此购回条款通常赋予发行公司具有强迫债券提前转换成股权的权利，而持有者则别无选择。当可转换债券转换时，公司收回债券并向持有者发放库存股票。假定利率保持不变，且不考虑购回条款，可转换债券可粗略地近似为一个普通债券加上一个看涨认股权。

6.9 小 结

在交易所和柜台交易市场中，进行着许多范围广泛的不同类

型的标的资产的期权交易。交易所必须详细制定所交易的期权合约的条款。尤其是必须详细规定期权合约的大小，确切的到期时间和执行价格。场外交易期权合约可根据客户的特定需要来制定，并且不必与场内交易期权相一致。

股票期权合约的条款不随现金红利而调整，但要随股票红利和股票分割而调整。调整的目的是使合约买卖双方的头寸保持不变。

大多数期权交易所都使用做市商体制。做市商同时报出买入价（他或她准备买入的价格）和卖出价（他或她准备出售的价格）。做市商提高了市场的流动性并能确保在执行市价订单时没有任何迟延。做市商自身也从买卖价差（即买价和卖价之差）中获利。交易所制定了买卖价差的上限。

期权的出售方具有潜在的负债，因此要求他们在经纪人那里保持一定的保证金。如果经纪人不是期权清算公司会员，则须在期权清算公司会员公司那里开设一个保证金帐户。该会员公司在期权清算公司那里开设一个保证金帐户。期权清算公司的责任是记录所有的流通的期权合约，处理执行指令等等。

第七章

股票期权价格的特征

在这一章里我们讨论影响股票期权价格的一些因素。我们利用一些不同的套利理论探讨欧式期权价格、美式期权价格和标的资产价格之间的关系。我们可证明，提前执行不付红利股票美式看涨期权决不是最佳选择，但是在某些条件下，提前执行基于这个股票的美式看跌期权则是最佳的。

7.1 影响期权价格的因素

有六种因素影响股票期权的价格：

1. 股票的现价
2. 执行价格
3. 到期期限
4. 股票价格的波动率
5. 无风险利率
6. 期权有效期内预计发放的红利

在这一部分中，我们考虑当这些因素之一发生变化而其他因素保持不变时，期权价格的变化。表 7.1 对此作了总结。

表 7.1　一个变量增加而其他变量保持不变时对股票期权价格的影响

变量	欧式 看涨期权	欧式 看跌期权	美式 看涨期权	美式 看跌期权
股票价格	+	−	+	−
执行价格	−	+	−	+
到期期限	?	?	+	+
波动率	+	+	+	+
无风险利率	+	−	+	−
红利	−	+	−	+

股票价格和执行价格

如果看涨期权在将来某一时间执行，则其收益为股票价格与执行价格的差额。随着股票价格的上升，看涨期权的价值也就越大；随着执行价格的上升，看涨期权的价值就越小。对于看跌期权来说，其收益为执行价格与股票价格的差额。因此看跌期权的行为刚好与看涨期权相反。当股票价格上升时，看跌期权的价值下降；当执行价格上升时，看跌期权的价值上升。

到期期限

以下考虑到期期限的影响。当期权的有效期限增加时，美式看跌期权和看涨期权的价值都会增加。为了说明这一点，考虑其他条件相同但只有到期日不同的两个期权，则有效期长的期权其执行的机会不仅包含了有效期短的那个期权的所有执行机会，而且它的获利机会会更多。因此有效期长的期权的价值总是大于或等于有效期短的期权价值。

随着有效期的增加，欧式看跌期权和欧式看涨期权的价值并不一定必然增加。这是因为有效期长的期权的执行机会并不一定

包含有效期短的期权的所有执行机会。有效期长的期权只能在其到期日执行。考虑同一股票的两个欧式看涨期权，一个到期期限为 1 个月，另一个到期期限为 2 个月。假定，预计在六周后将支付大量的红利。红利会使股票价格下降。这就有可能使有效期短的期权的价值超过有效期长的期权的价值。

波动率

在第十章中将对波动率作精确的定义。简单地说，股票价格的波动率是用来衡量未来股票价格变动的不确定性。随着波动率的增加，股票上升很高或下降很低的机会也随着增加。对于股票的持有者来说，这两种变动趋势将互相抵消。但对于看涨期权或看跌期权的持有者来说，则不是这样。看涨期权的持有者从股价上升中获利，当股价下跌时，由于他或她的最大损失就是期权费，所以他仅有有限的损失。与此类似，看跌期权的持有者从股价下跌中获利，当股价上升时，仅有有限的损失。因此，随着波动率的增加，看涨期权和看跌期权的价值都会增加。

无风险利率

无风险利率对期权价格的影响则不是那么直接。当整个经济中的利率增加时，股票价格的预期增长率也倾向于增加。然而，期权持有者收到的未来现金流的现值将减少。这两种影响都将减少看跌期权的价值。因此随着无风险利率的增加，看跌期权的价格将减少。而对于看涨期权来说，前者将增加看涨期权的价格，而后者将倾向于减少看涨期权的价格。可以证明对看涨期权来说，前者的影响将起主导作用，即随着无风险利率的增加，看涨期权的价格总是随之增加。

需要强调的是，所有这些结果都是建立在其他变量保持不变的基础上。尤其是，当利率上升（或下降）时，股票价格也将下降

(或上升)。若考虑利率变化和随之而来的股价变化的净效应,则可能会得出与上面相反的结论。

红利

在除息日后,红利将减少股票的价格。对于看涨期权的价值来说这是一个坏消息,而对于看跌期权的价值来说则是一个好消息。因此看涨期权的价值与预期红利的大小成反向变动,而看跌期权的价值与预期红利的大小成正向变动。

7.2　假设和符号

在不要求任何关于股票价格波动率和股票价格概率分布假定的基础上,我们现在继续推导期权价格之间的关系。我们做出的假定与第三章我们推导远期价格和期货价格做出的假定类似。即假定存在一些市场参与者,如大的投资银行,市场中:

1. 没有交易费用。

2. 所有交易利润(减去交易损失后)具有相同的税率。

3. 可以按无风险利率借入和贷出资金。

我们假定这些市场参与者随时准备利用套利机会。正如我们在第一章和第三章中讨论的那样,这意味着任何可利用的套利机会将很快消失。为了分析问题,我们可以合理地假定不存在套利机会。

以下字母的含义为:

S:股票现价

X:期权执行价格

T:期权的到期时间

t:现在的时间

S_T:在 T 时刻股票的价格

r：在 T 时刻到期的投资的无风险利率

C：购买一股股票的美式看涨期权的价值

P：出售一股股票的美式看跌期权的价值

c：购买一股股票的欧式看涨期权的价值

p：出售一股股票的欧式看跌期权的价值

σ：股票价格的波动率

注意：r 是名义利率，不是实际利率。我们可以假设 $r>0$。否则，无风险投资与持有现金相比，将不具有任何优点。（事实上，如果 $r<0$，持有现金比无风险投资更有好处。）

7.3 期权价格的上下限

在这一部分中，我们推导出期权价格的上下限。这并不需要对前面提到的因素作任何特别的假定（除了 $r>0$ 外）。如果期权的价格超过其上限或低于其下限，则套利就有利可图。

期权价格的上限

美式看涨期权或欧式看涨期权的持有者有权以某一确定的价格购买一股股票。在任何情况下，期权的价值都不会超过股票的价值。因此，股票价格是期权价格的上限：

$$c \leqslant S \text{ 和 } C \leqslant S$$

如果不存在这一关系，则套利者购买股票并卖出看涨期权，可轻易地获得无风险利润。

美式看跌期权或欧式看跌期权的持有者有权以 X 的价格出售一股股票。无论股票价格变得多么低，期权的价值都不会超过 X。因此，

$$p \leqslant X \text{ 和 } P \leqslant X$$

对于欧式期权来说，我们知道在 T 时刻，期权的价值都不会超过 X。因此现在期权的价值不会超过 X 的现值：

$$p \leqslant Xe^{-r(T-t)}$$

如果不存在这一关系，则套利者可出售期权并将所得收入以无风险利率进行投资，获得无风险收益。

不付红利的看涨期权的下限

不付红利的欧式看涨期权的下限是：

$$S - Xe^{-r(T-t)}$$

我们首先用数字例子来说明这点，然后给出比较正式的证明。

假定 S= $20，X= $18，r= 每年 10%，T－t=1 年。在本例中，

$$S - Xe^{-r(T-t)} = 20 - 18e^{-0.1} = 3.71$$

或 $3.71。考虑欧式看涨期权的价格等于 $3.00 的情况，即小于理论上的最小值 $3.71。套利者可以购买看涨期权并卖空股票。则现金流为 $20.00－ $3.00= $17.00。如果 $17.00 以年利率 10%投资 1 年，则 $17.00 将变为 $17.00e^{0.1}$= $18.79。在这一年的年末，期权到期。如果股票价格高于 $18，套利者以 $18 的价格执行期权，并将股票的空头平仓，则可获利：

$$\$18.79 - \$18.00 = \$0.79$$

如果股票价格低于 $18，则套利者从市场上购买股票并将股票空头平仓。套利者甚至可获得更高的利润。例如，如果股票价格为 $17，则套利者的盈利为：

$$\$18.79 - \$17.00 = \$1.79$$

为了给出正式的证明，我们考虑下面两个组合：

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。
组合 B：一股股票。

在组合 A 中，现金如果按无风险利率来投资，则在 T 时刻将变为 X。如果 $S_T > X$，在 T 时刻应执行看涨期权，则组合 A 的价值为 S_T。如果 $S_T < X$，期权到期价值为零，则组合 A 的价值为 X。因此在 T 时刻，组合 A 的价值为：

$$\max(S_T, X)$$

在 T 时刻组合 B 的价值为 S_T。因此，在 T 时刻组合 A 的价值通常不低于 T 时刻组合 B 的价值，并且有时组合 A 的价值会高于组合 B 的价值。因此，在不存在套利机会的情况下，下列等式是成立的：

$$c + Xe^{-r(T-t)} > S$$

或

$$c > S - Xe^{-r(T-t)}$$

由于对于一个看涨期权来说，可能发生的最坏情况是期权到期价值为零，这意味着期权的价值必须为正值，即 $c > 0$。因此

$$c > \max(S - Xe^{-r(T-t)}, 0) \qquad (7.1)$$

例 7.1

考虑一个不付红利的股票的美式看涨期权，此时股票价格为 $51 时，执

行价格为 $50，距到期日有六个月，无风险年利率为 12%。即在本例中，S=$51，X=$50，T−t=0.5，r=0.12。根据等式(7.1)，该期权价格的下限为 $S-Xe^{-r(T-t)}$ 或

$$51-50e^{-0.12\times0.5}=\$3.91$$

不付红利的欧式看跌期权的下限

对于一个不付红利股票的欧式看跌期权来说，其价格的下限为：

$$Xe^{-r(T-t)}-S$$

我们仍先用一个数字例子来说明，接着给出较正式的证明。

假定 S=$37，X=$40，r=5%每年，T−t=0.5 年。在这种情况下：

$$Xe^{-r(T-t)}-S=40e^{-0.05\times0.5}-37=2.01$$

或 $2.01。考虑欧式看跌期权价格为 $1.00 时，即小于理论上的最小值 $2.01。套利者可借入六个月期的 $38.00，同时用所借资金购买看跌期权和股票。在六个月末，套利者将支付 $38e^{0.05×0.5}=$38.96。如果股票价格低于 $40.00，套利者执行期权以 $40.00 卖出股票，归还所借款项本金和利息，其获利为：

$$\$40.00-\$38.96=\$1.04$$

如果股票价格高于 $40，套利者放弃期权，卖出股票并偿付所借款项本金和利息，甚至可获得更高的利润。例如，如果股票价格为 $42.00，则套利者的利润为：

$$\$42.00-\$38.96=\$3.04$$

为了给出正式的证明，我们考虑下面两个组合：

组合 C:一个欧式看跌期权加上一股股票。
组合 D:金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金

如果 $S_T<X$,在 T 时刻组合 C 中的期权将被执行,该组合的价值为 X。如果 $S_T>X$,在 T 时刻看跌期权到期价值为零,该组合的价值为如果 S_T。因此,组合 C 在 T 时刻的价值为:

$$\max(S_T, X)$$

假定现金按无风险利率进行投资,则在 T 时刻组合 D 的价值为 X。因此,在 T 时刻组合 C 的价值通常不低于组合 D 的价值,并且有时组合 C 的价值会高于组合 D 的价值。在不存在套利机会时,组合 C 的现在价值一定高于组合 D 的现在价值。因此:

$$p + S > Xe^{-r(T-t)}$$

或

$$p > Xe^{-r(T-t)} - S$$

由于对于一个看跌期权来说,可能发生的最坏情况是期权到期价值为零,所以期权的价值必须为正值,即 $p>0$。这意味着:

$$p > \max(Xe^{-r(T-t)} - S, 0) \qquad (7.2)$$

例 7.2

考虑一个不付红利股票的欧式看跌期权,股票价格为 \$38,执行价格为 \$40,距到期日还有三个月,无风险年利率为 10%。即在本例中,S= \$38,X= \$40,$T-t=0.25$,$r=0.10$。根据等式(7.2),期权价格的下限为 $Xe^{-r(T-t)}-S$ 或为:

$$40e^{-0.1\times0.25} - 38 = \$1.01$$

7.4　提前执行:不付红利股票的看涨期权

在这一部分中,我们将说明提前执行不付红利的美式看涨期权是不明智的。

为了说明问题的本质,考虑一个不付红利股票的美式看涨期权,距到期日还有1个月,股票价格为$50,执行价格为$40。期权的实值额很大,期权的持有者可能很想立即执行它。然而,如果投资者计划持有该股票超过一个月,那么这就不是最佳的策略。更好的方案是持有期权,并在期权的到期日执行它。此时,支付$40的执行价格的时间要比立即执行晚一个月。这就是说,可获得本金为$40、期限为一个月的利息。由于股票不支付红利,则投资者不会牺牲任何来自股票的收益。持有而非立即执行的好处还在于,股票价格在这一个月内还有可能会低于$40(虽然机会可能很遥远)。在这种情况下,投资者将不会执行期权并庆幸没有提前执行期权。

这个讨论表明:如果投资者计划在期权的有效期内持有股票(在本例中为一个月),则提前执行期权没有好处。如果投资者认为股票现在被高估,是否应该执行期权并卖出股票呢?在这种情况下,投资者最好是出售该期权而不是执行它[①]。那些确实想持有股票的投资者将会购买该期权。这类投资者是一定存在的。否则股票的现价就不会是$50。由于上述提到的原因,收取的期权费将大于期权的$10的内在价值。事实上,等式(7.1)表明期权的市场价格通常必须高于:

$$50 - 40e^{-0.1\times 0.08333} = \$10.33$$

否则,就会存在套利机会。

为了给出一个较为正式的公式,考虑以下两个组合:

组合 E:一个美式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$的现金。

组合 F:一股股票。

在期权到期时,组合 E 中的现金的价值为 X。在此之前的时刻 τ,其价值为 $Xe^{-r(T-\tau)}$。如果看涨期权在 τ 时刻执行,组合 E 的价值为:

$$S - X + Xe^{-r(T-\tau)}$$

当 $\tau<T$ 时,由于 $r>0$,组合 E 的价值总是小于 S_τ。因此,如果看涨期权在到期日前执行,则组合 E 的价值总是低于组合 F 的价值。如果持有看涨期权到期,则在 T 时刻组合 E 的价值为:

$$\max(S_T, X)$$

组合 F 的价值为 S_T。由于总是有可能存在 $S_T<X$ 的机会。这就是说,组合 E 的价值总是不低于组合 F 的价值,有时还会高于组合 F 的价值。

前面我们表明,如果立即执行期权,则组合 E 的价值低于组合 F 的价值,如果持有者直到到期日才执行期权,则组合 E 的价值将等于或高于组合 F 的价值。这就是说,在到期日之前,不付红利股票的看涨期权决不应该执行。因此,同一种不付红利股票的美式看涨期权的价值与相同股票的欧式看涨期权的价值相同:

$$C = c$$

运用等式(7.1),可以很快证明:

$$c > S - Xe^{-r(T-t)}$$

由于美式看涨期权的持有者包含有相应的欧式看涨期权的所

有执行机会，因此：

$$C \geqslant c$$

因此：

$$C > S - Xe^{-r(T-t)}$$

由于 r>0，所以 C>S－X。如果提前执行是明智的，那么 C 应该等于 S－X。我们的结论是：提前执行是不明智的。

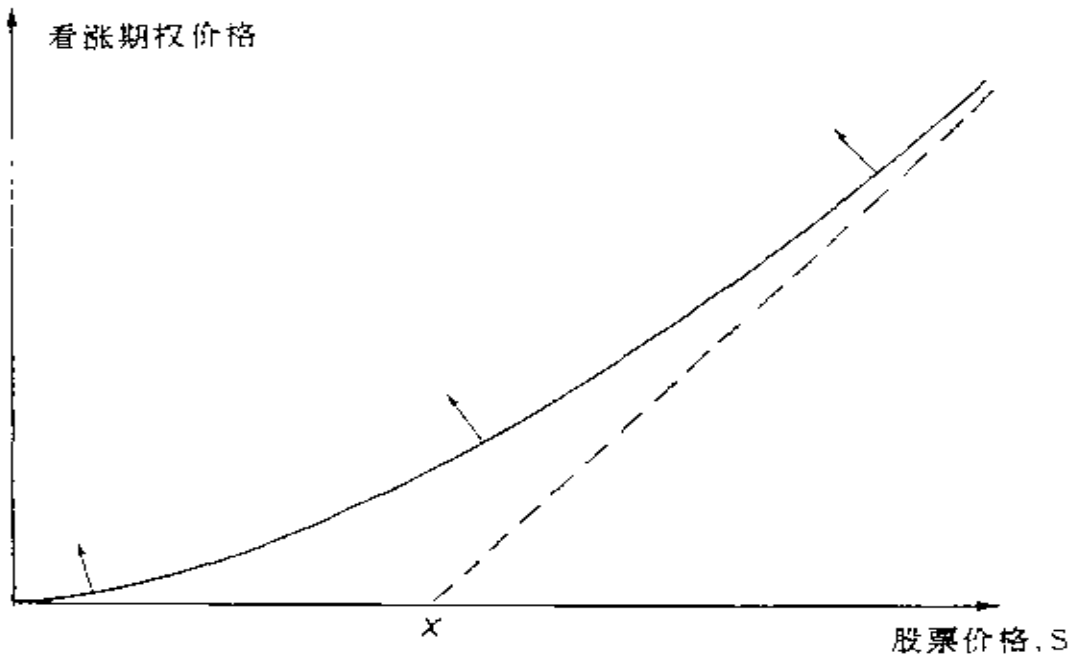


图 7.1　股价为 S 的不付红利股票的美式或欧式看涨期权的价格变化图

图 7.1 表示看涨期权的价格随股价 S、执行价格 X 而变化的一般情形。该图表明看涨期权的价格总是高于其内涵价值即高于 max(S－X,O)。随着 r、σ、T－t 的增加，看涨期权的价格按箭头所示方向变动(即，更加远离内涵价值)。

归纳说来，我们认为看涨期权不应提前执行的原因之一是由于期权提供保险。当持有看涨期权而不是持有股票本身时，看涨期权保证持有者在股票价格下降到执行价格之下时不受损失。一旦该期权被执行，股票价格取代了执行价格，这种保险就消失了。另一个原因与货币的时间价值有关。越晚支付执行价格越好。

7.5 提前执行：不付红利的看跌期权

提前执行不付红利的看跌期权可能是明智的。事实上，在期权有效期内的任一给定的时刻，如果看跌期权的实值额很大，则应提前执行它。

为了说明这一点，考虑一个极端的例子。假定执行价格为 $10，股票价格接近为 0。通过立即执行期权，投资者可立即获利 $10。如果投资者等待，则执行期权的盈利可能低于 $10，但是由于股票价格不可能为负值，所以盈利不会超过 $10。另外，现在收到 $10 比将来收到 $10 要好。这说明该期权应立即执行。

考虑下面两个组合：

组合 G：一个美式看跌期权加上一股股票。

组合 F：金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。

如果在 $\tau<T$ 时执行期权，组合 G 的价值为 X，而组合 H 的价值为 $Xe^{-r(T-\tau)}$。因此，组合 G 的价值高于组合 H 的价值。如果持有期权到期，组合 G 的价值为

$$\max(X, S_T)$$

而组合 H 的价值为 X。因此组合 G 的价值不低于组合 H，且可能高于组合 H。注意这种情况与前面情况的区别。在这里，在不考虑提前执行的决定时，看起来组合 G 比组合 H 更具吸引力，

但我们仍不能下结论说不应该提前执行该期权。

与看涨期权类似，可认为看跌期权也能提供保险。当同时持有股票和看跌期权时，看跌期权保证期权持有者在股票价格跌破某一特定的水平时不受损失。但是，看跌期权与看涨期权不同，投资者可以放弃这一保险并提前执行看跌期权立即实现执行价格，这样做可能是明智的。一般来说，随着 S 的减少，r 的增加和 σ 的减少，提前执行看跌期权是很有利的。

回忆一下等式(7.2)：

$$p > Xe^{r(T-t)} - S$$

对价格为 P 的美式看跌期权来说，由于有可能提前执行，更严格的条件是：

$$P \geqslant X - S$$

图 7.2 表明一般情况下美式看跌期权的价格是怎样随 S 的变化而变化的。在 r>0 的条件下，当股票价格足够低时，立即执行美式看跌期权是非常明智的。如果提前执行的话，该期权的价值为 X－S。因此当 S 很小时，代表看跌期权价值的曲线与看跌期权的内涵价值 X－S 重合在一起。在图 7.2 中，股票价值 S 如 A 点所示。当 r 减少，σ 增加，T 增加时，看跌期权的价值按箭头所示的方向变化。

由于在一些情况下，投资者迫切地希望提前执行美式看跌期权，因此，美式看跌期权的价值通常高于相应的欧式看跌期权的价值。由于美式期权的价值有时等于其内涵价值(参见图 7.2)，因此欧式看跌期权的价值有时低于其内涵价值。图 7.3 显示了欧式看跌期权的价格随股票价格的变化。注意图 7.3 中的 B 点，在 B 点上期权的价格等于其内涵价值，B 点所代表的股票价格必定大于图 7.2 中的 A 点所代表的股票价格。图 7.3 中的 E 点为当 S=

0，欧式看跌期权的价格为 $Xe^{-r(T-t)}$。

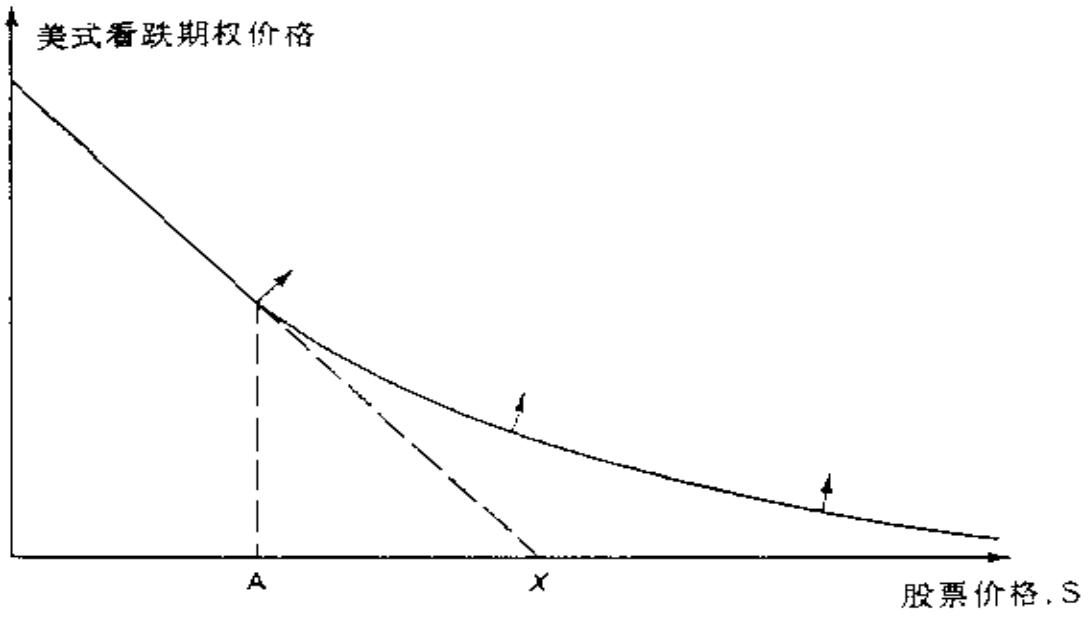


图 7.2 股价为 S 的美式看跌期权的价格变化图

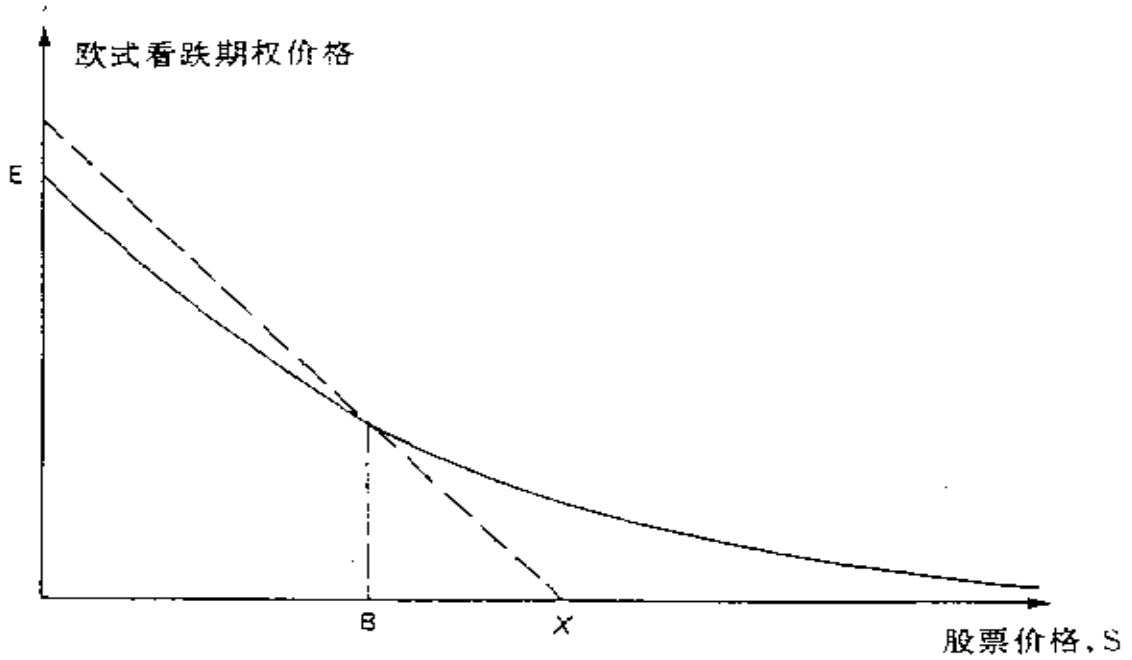


图 7.3 股价为 S 的欧式看跌期权的价格变化图

7.6　看跌与看涨期权之间平价关系

P 和 C 分别代表美式看跌期权和看涨期权的价格，而 p 和 c 则分别代表欧式看跌期权和看涨期权的价格。变量 P、p、C 和 c 都是 S、X、r、T－t 和 σ 的函数。对于不付红利的股票来说，

$$C = c$$

$$P > p, \text{当 } r > 0$$

现在我们要推导出 p 和 c 之间的重要关系式。考虑下面两个组合：

组合 A：一个欧式看涨期权加上金额为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。

组合 C：一个欧式看跌期权加上一股股票。

在期权到期时，两个组合的价值均为：

$$\max(S_T, X)$$

由于是欧式期权，所以在到期日前不能提前执行。因此现在组合必须具有相等的价值。这就是说，

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S \tag{7.3}$$

这就是所谓的欧式看涨和看跌期权之间的平价关系（put－call parity）。它表明具有某一确定执行价格和到期日的欧式看涨期权的价值可根据相同执行价格和到期日的欧式看跌期权的价值推导出来，反之亦然。

如果(7.3)不成立，则存在套利机会。假定股票价格为 $31，执行价格为 $30，无风险年利率为 10%，3 个月期的欧式看涨期权

的价格为 $3,3 个月期的欧式看跌期权的价格为 $2.25。在这种情况下,

$$c + Xe^{-r(T-t)} = 3 + 30e^{-0.1\times0.25} = 32.26$$
$$p + S = 2.25 + 31 = 33.25$$

相对于组合 A 来说,组合 C 被高估了。正确的套利策略是买入组合 A 中的证券并卖空组合 C 中的证券。这包括买入看涨期权,卖空看跌期权和股票。这一策略产生如下正的现金流:

$$-3 + 2.25 + 31 = \$30.25$$

当按无风险利率进行投资时,在 3 个月后,这个现金流增加为 $30.25e^{0.1\times0.25} = \$31.02$。如果在期权到期日股票的价格高于 $30,将执行看涨期权。如果股价低于 $30,将执行看跌期权。在任何一种情况下,投资者均按 $30 购买一股股票。该股票可用来平仓原空头股票。因此净利为:

$$\$31.02 - \$30.00 = \$1.02$$

对另一种情况下,如果假定看涨期权的价格为 $3 而看跌期权的价格为 $1。因此:

$$c + Xe^{-r(T-t)} = 3 + 30e^{-0.1\times0.25} = 32.25$$
$$p + S = 1 + 31 = 32.00$$

相对于组合 C 来说,组合 A 被高估了。套利者可以卖空组合 A 中的证券并买入组合 C 中的证券来锁定利润。这包括卖出看涨期权,买入看跌期权和股票。在 0 时刻,这一策略的初始投资为:

$$\$31 + \$1 - \$3 = \$29$$

当以无风险利率借入资金时，3 个月后须偿付的金额为 $\$29e^{0.1\times0.25}=\$29.73$。与前例类似，或者是执行看涨期权或者是执行看跌期权。因此，卖出看涨期权并买入看跌期权将会使股票以 $30.00 的价格售出。因此净利为：

$$\$30.00-\$29.73=\$0.27.$$

美式看涨期权和看跌期权之间的关系

看涨与看跌期权之间平价关系仅适用于欧式期权。但也可推导出不付红利股票的美式期权价格之间的某种关系。

由于 P>p，因此根据(7.3)，则

$$P>c+Xe^{-r(T-t)}-S$$

同时，由于 c=C，

$$P>C+Xe^{r(T-t)}-S$$

或

$$C-P<S-Xe^{-r(T-t)} \tag{7.4}$$

为了更进一步导出 C 和 P 的关系，考虑以下两个组合：

组合 I：欧式看涨期权加上金额为 X 的现金。

组合 J：美式看跌期权加上一股股票。

在这两个组合中，期权的执行价格和到期日相同。假定组合 I 中的现金按无风险利率进行投资。如果看跌期权没有提前执行，在 T 时刻，组合 J 的价值为：

$$\max(S_T,X)$$

此时，组合 I 的价值为：

$$\max(S_T, X) + Xe^{r(T-t)} - X$$

因此,组合 I 的价值高于组合 J 的价值。然后假定组合 J 的看跌期权提前执行,比如说在 τ 时刻执行。这意味着在时刻 τ 组合 J 的价值为 X。然而,就算看涨期权的价值为零,组合 I 在 τ 时刻的价值应该是 $Xe^{r(\tau-t)}$。即在任何情况下,组合 I 的价值都高于组合 J 的价值。因此:

$$c + X > P + S$$

由于 $c=C$

$$C + X > P + S$$

或

$$C - P > S - X$$

结合等式(7.4),我们得到

$$S - X < C - P < S - Xe^{-r(T-t)} \qquad (7.5)$$

例 7.3

考虑不付红利股票的美式看涨期权,执行价格为 $20,到期期限为 5 个月,期权价格为 $1.5。则同一股票相同执行价格和到期期限的欧式看涨期权的价格也是如此。假定股票的现价为 $19,无风险年利率为 10%。根据(7.3),执行价格为 $20,到期期限为 5 个月的欧式看跌期权的价格为:

$$1.50 + 20e^{-0.1\times0.4167} - 19 = \$1.68$$

根据(7.5),

$$19 - 20 < C - P < 19 - 20e^{-0.1\times0.4167}$$

或

$$1 > P - C > 0.18$$

这表明 P－C 在 $1.00 和 $0.18 之间。由于 C 为 $1.50，P 必须在 $1.68 和 $2.50 之间。换句话说，与美式看涨期权执行价格和到期期限相同的美式看跌期权价格的上限和下限分别为 $2.50 和 $1.68。

7.7　红利的影响

在假定期权的标的资产为不付红利的股票时，我们得到 7.3 到 7.6 节中的有关结论。在这一部分中，我们讨论红利的影响。在美国，通常场内交易的股票期权的到期期限小于 8 个月。在期权有效期内，通常可以合理正确地预计应付红利。我们用字母 D 表示在期权有效期内红利的现值。为此，我们假定在除息日发放红利。

看涨期权和看跌期权的下限

我们将组合 A 和组合 B 重新定义为：

组合 A：欧式看涨期权加上金额为 $D+Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。
组合 B：一股股票。

经过与(7.1)类似的推导，得出：

$$c > S - D - Xe^{-r(T-t)} \tag{7.6}$$

我们将组合 C 和组合 D 重新定义为：

组合 C：欧式看跌期权加上一股股票。
组合 D：金额为 $D+Xe^{-r(T-t)}$ 的现金。

经过与(7.2)类似的推导,得出:

$$p > D + Xe^{-r(T-t)} - S \tag{7.7}$$

提前执行

当预期有红利发放时,我们不再肯定美式看涨期权不应提前执行。有时在除息日前,立即执行美式看涨期权是明智的。这是因为发放红利将使股票价格跳跃性下降,使期权的吸引力下降。而在其他任何情况下提前执行美式看涨期权都是不明智的。在第十章中将详细讨论这一观点。

看涨与看跌期权之间的平价关系

比较 T 时刻重新定义的组合 A 和组合 C 的价值,表明:当存在红利时,看跌与看涨期权之间的平价关系变为:

$$c + D + Xe^{-r(T-t)} = p + S \tag{7.8}$$

红利将使(7.5)修正为

$$S - D - X < C - P < S - Xe^{-r(T-t)} \tag{7.9}$$

为了证明这一不等式,考虑

组合 I:欧式看涨期权加上金额为 D+X 的现金。
组合 J:美式看跌期权加上一股股票。

在任何情况下,可以得出组合 I 的价值高于组合 J 的价值。因此:

$$P + S < c + D + X$$

由于欧式看涨期权的价值不会高于美式看涨期权的价值，即 c<C，因此

$$P + S < C + D - X$$

或

$$S - D - X < C - P$$

这就证明了(7.9)式中不等式的前半部分。对于不付红利的股票，我们得出(7.5)式，即

$$C - P < S - Xe^{-r(T-t)}$$

由于红利减少看涨期权的价值而增加看跌期权的价值，对支付红利的股票的期权来说，这一不等式也一定成立。这就证明了(7.9)式中不等式的后半部分。

7.8　实证研究

一旦收集到适当的数据，验证本章结论的实证研究就似乎相当简单。而事实上，则存在一定的复杂因素：

1. 确保精确地同时观测股票价格和期权价格是非常重要的。例如，通过观测每一天的最后交易的价格来验证是否存在套利机会是不适当的。表 6.1 中相应的数据已对这一观点已作了说明。

2. 详细考虑投资者是否已利用任何可观测到的套利机会，也是非常重要的。如果套利机会仅存在片刻时间，在实践中，可能没有办法来发现它。

3. 当决定是否可能有套利机会时，必须考虑交易费用。

4. 看涨和看跌期权之间的平价关系仅适用于欧式期权。而场内交易的股票期权是美式期权。

5. 必须估计期权有效期内支付的红利。

在本章的参考书目中列示了一些实证研究的论文。作者分别为 Bhattacharya、Galai、Gould 和 Galai、Klemkosky 和 Resnick 及 Stoll。Galai 和 Bhattacharya 验证期权的价格是否会低于其下限；Stoll、Gould 和 Galai，及 Klemkosky 和 Resnick 的两篇论文验证看涨和看跌期权之间平价关系是否成立。我们将讨论 Bhattachary 的结论和 Klemkosky 与 Resnick 的结论。

Bhattachary 的研究检验了实践中看涨期权的理论上的下限值是否适用。他使用的数据包括 1976 年 8 月到 1977 年 6 月中 196 交易日 58 种股票的期权的交易价格。首先验证是否满足期权价格大于内涵价值的条件，即 C 是否大于 $\max(S-X,0)$。观察了 86,000 个期权价格，发现有大约 1.3% 偏离了该条件。这些偏离中的 29% 经过下一次交易，其偏离消失了。这表明在实践中投资者不可能利用这一偏离。当考虑交易费用时，偏离所造成的获利机会将消失。Bhattachary 接着验证了期权的售价是否低于其下限，即低于 $S-D-Xe^{-r(T-\tau)}$（参见(7.6)式）。在观察中，他发现确实有 7.6% 的售价低于下限。然而，当考虑交易费用时，就不存在获利机会了。

Klemkosky 和 Resnick 根据 1977 年 7 月至 1978 年 6 月之间交易的期权价格的数据来验证看跌与看涨期权之间平价关系。他们用以上数据作了一系列的验证，以确定期权提前执行的可能性以及提前执行有利可图而被放弃了的数据。通过这项研究，他们证明将美式期权与欧式期权同等对待是合理的。他们挑选了看涨期权价格远低于看跌期权价格的 540 种情况和看涨期权价格远高于看跌期权的 540 种情况。在考虑交易成本后，第一种情况中有 38 种可产生套利机会，而第二种情况中有 147 种会产生套利机会。当假定发现机会和进行交易之间有 5 或 15 分钟的迟延时，套利机会仍然存在。Klemkosky 和 Resnick 的结论是：在他们的观

测期内，有些交易者是可以利用套利机会获利的，尤其是市场的做市商。

7.9 小　结

影响股票期权价值的因素有如下六种：股票的现价、执行价格、到期期限、股票价格波动率、无风险利率和期权有效期内预期的红利。当股票现价、到期期限、波动率和无风险利率增加时，看涨期权的价值通常也随之增加。当执行价格和预期红利增加时，看涨期权的价值就会减少。当执行价格、到期期限、波动率和预期红利增加时，看跌期权的价值通常也随之增加。当股票现价和无风险利率增加时，看跌期权的价值就会减少。

不需任何关于股票价格概率分布的假定，我们就可以得出有关股票期权价值的一些结论。例如，股票的看涨期权的价格一定总是低于股票本身的价格。与此类似，股票看跌期权的价格一定总是低于股票期权的执行价格。

不付红利股票的看涨期权的价格必须高于

$$\max(S - Xe^{-r(T-t)},0)$$

其中，S 为股票价格，X 为执行价格，r 为无风险利率，T 为到期期限。不付红利的看跌期权的价格必须高于

$$\max(Xe^{-r(T-t)} - S,0)$$

当支付红利的现值为 D 时，看涨期权的下限变为

$$\max(S - D - Xe^{-r(T-t)},0)$$

看跌期权的下限变为

$$\max(Xe^{-r(T-t)} + D - S, 0)$$

看涨和看跌期权之间的平价关系是股票的欧式看涨期权价格 c 和欧式看跌期权价格 p 之间的关系。对于不付红利的股票来说，期权平价关系为

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

对于支付红利的看涨和看跌期权之间的平价关系为

$$c + D + Xe^{-r(T-t)} = p + S$$

对美式期权来说，看涨和看跌期权之间的平价关系并不成立。但是，可利用套利理论获得美式看涨期权价格和看跌期权价格之间价差的上限和下限。

在后面的章节中，借助对股票价格概率分布的一些特殊假定，我们将对本章的一些结论做进一步的分析。这有助于我们推导欧式股票期权的精确的定价公式。也有助于我们推导美式期权定价的数值方法。

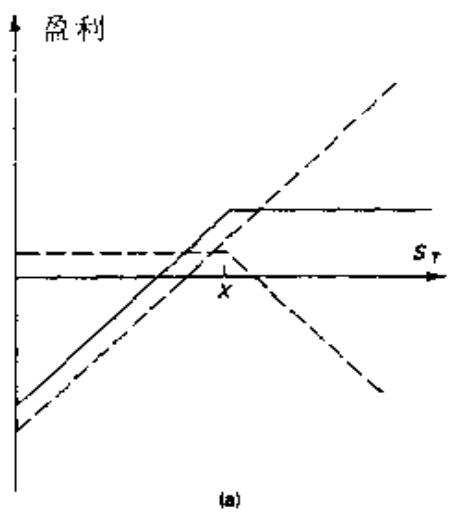
第八章

期权的交易策略

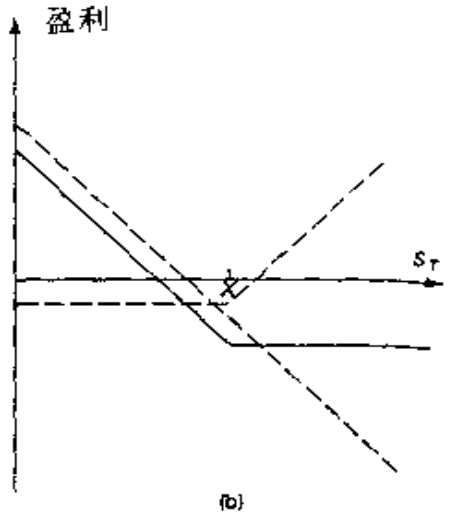
在第一章中，我们讨论了投资于单一股票期权的损益状态。在本章中，我们讨论运用一些期权可获得范围更加广泛的损益状态。在第一部分中，我们考虑期权头寸和其股票本身头寸组合的情况。接着我们讨论当投资于同一股票的两种或两种以上不同的期权时，它们所构造的损益状态。期权的妙处之一在于它们具有产生不同损益状态的功能。除非特别声明，我们指的期权均为欧式期权。直到本章末，我们将证明：如果欧式期权的执行价格可以是任何可能的价格，则在理论上就可以建立任意形式的损益状态。

8.1 包括一个简单期权和一个股票的策略

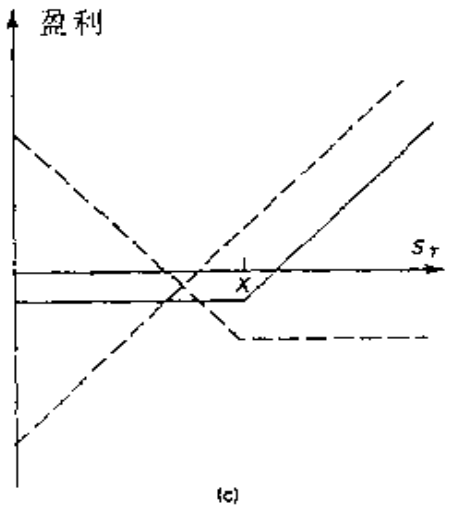
包括一个简单股票期权和一个该股票的策略，有许多不同的种类。这些策略的损益如图 8.1 所示。在本图和本章其他图中，虚线代表构造该组合中的单个证券的收益与股票价格之间的关系，而实线代表整个组合的损益和股票价格的关系。



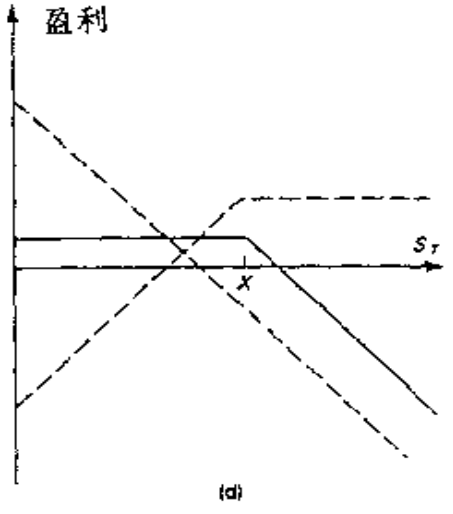
股票多头和看涨期权空头的组合



股票空头和看涨期权多头的组合



股票多头和看跌期权多头的组合



股票空头和看跌期权空头的组合

图 8.1 包括一个简单期权和一个股票的各种交易策略的损益状态

在图 8.1(a)中,组合证券是由一个股票的多头加上一个看涨期权的空头组成。这一组合代表的投资策略被称为出售一个有担保的看涨期权(writing a covered call)。这是由于股票多头"轧平"或保护投资者免受股票价格急剧上升带来的巨大损失的可能性。在图 8.1(b)中,组合证券是由一个股票的空头加上一个看涨期权的多头组成。其损益状态与出售一个有担保的看涨期权的损益状态相反。在图 8.1(c)中,投资策略包括购买一个股票看跌期权和该股票本身。这一策略有时被称为有保护的看跌期权(protective put)策略。在图 8.1(d)中,组合证券由一个看跌期权的空头和一个股票的空头组成。其损益状态与有保护的看跌期权的损益状态相反。

图 8.1(a)、(b)、(c)和(d)中的损益状态分别与第一章中讨论的出售看跌期权、购买看跌期权、购买看涨期权和出售看涨期权的损益状态具有相同的形状。借助看涨与看跌期权之间的平价关系,就可以理解其中的原因。重新回忆一下第七章中的看涨和看跌期权之间平价公式:

$$p + S = c + Xe^{-r(T-t)} + D \qquad (8.1)$$

其中,p 为欧式看跌期权的价格,S 为股票价格,c 为欧式看涨期权的价格,X 是看涨期权和看跌期权的执行价格,r 为无风险利率,T 为看涨期权和看跌期权的到期期限,D 为期权有效期内预期发放的红利的现值。

等式(8.1)表明看跌期权的多头加上股票的多头等同于看涨期权的多头加上金额为 $Xe^{-r(T-\tau)}+D$ 的现金。这就解释了图 8.1(c)的损益状态类似于看涨期权多头损益状态的原因。图 8.1(d)头寸与图 8.1(c)头寸正好相反,因此其损益状态类似于看涨期权空头的损益状态。

可以将等式 8.1 变形为

$$S - c = Xe^{-r(T-t)} + D - p$$

这表明，一个股票的多头加上一个看涨期权的空头等同于一个看跌期权的空头加上金额为 $Xe^{-r(T-t)} + D$ 的现金。这就解释了图 8.1(a)的损益状态类似于看跌期权空头损益状态的原因。图 8.1(b)的头寸正好与图 8.1(a)的头寸相反，因此其损益状态类似于看跌期权多头的损益状态。

8.2 差价期权

差价期权(Spreads)交易策略是指持有相同类型的两个或多个期权头寸(即，两个或多个看涨期权，或者两个或多个看跌期权)。

牛市差价期权

最普遍的差价期权类型为牛市差价期权(Bull Spreads)。这种期权可通过购买一个确定执行价格的股票看涨期权和出售一个相同股票的较高执行价格的股票看涨期权而得到。两个期权的到期日相同。该策略如图 8.2 所示。两条虚线分别表示两个单个期权头寸的损益状态。整个策略的损益为两个虚线表示的损益之和，在图中用实线表示。由于随着执行价格的上升，看涨期权的价格通常随之下降，售出的执行价格较高期权的价值总是小于购买执行价格较低期权的价值。因此，用看涨期权组成的牛市差价期权时，购买该期权需要初始投资。

假定 X_1 为购入看涨期权的执行价格，X_2 为出售的看涨期权的执行价格，S_T 为期权到期日股票价格。表 8.1 显示在不同情况下，牛市差价期权将实现的整体盈利状态。如果股票价格上涨并高于较高的那个执行价格，则盈利为两个执行价格之差，$X_2 - X_1$。

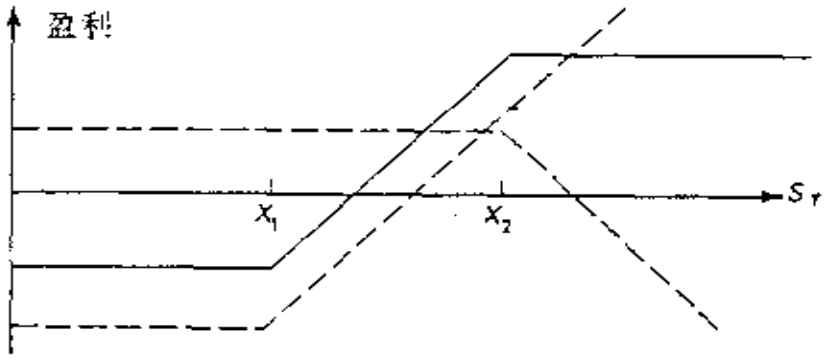


图 8.2 利用看涨期权构造牛市价差期权

如果到期日股票价格在两个执行价格之间，盈利为 $S_T - X_1$。如果到期日股票价格低于较小的那个执行价格，则盈利为 0。计算图 8.2 的损益时，扣除了初始投资。

表 8.1　牛市差价期权的盈利

股票价格范围	买入看涨期权的盈利	卖出看涨期权的盈利	总盈利
$S_T \geqslant X_2$	$S_T - X_1$	$X_2 - S_T$	$X_2 - X_1$
$X_1 < S_T < X_2$	$S_T - X_1$	0	$S_T - X_1$
$S_T \leqslant X_1$	0	0	0

牛市差价期权策略限制了投资者当股价上升时的潜在收益，同时该策略也限制了投资者当股价下降时的损失。这一策略可表述为投资者拥有一个执行价格为 X_1 的看涨期权，并且通过卖出一个执行价格为 $X_2(X_2 > X_1)$ 的看涨期权而放弃了上升的潜在盈利。作为对放弃上升潜在收益的补偿，投资者获得了执行价格为 X_2 的期权费。有三种不同类型的牛市差价期权：

1. 期初两个看涨期权均为虚值期权。

2. 期初一个看涨期权为实值期权，另一个看涨期权为虚值期权。

3. 期初两个看涨期权均为实值期权。

类型 1 最具挑战性。构造该策略时所需成本很低，当然该策略获得相对高收益（$=X_2-X_1$）的可能性也小。从类型 1 到类型 2，从类型 2 到类型 3，牛市差价期权策略趋于保守。

例 8.1

某投资者以 $3 购买一个执行价格为 $30 的看涨期权，同时以 $1 售出一个执行价格为 $35 的看涨期权。如果股票价格高于 $35，则这一牛市差价期权策略的收益为 $5；如果股票价格低于 $30，则这一策略的收益为 0；如果股票价格在 $30 和 $35 之间，收益为股票价格与 $30 的差额。该牛市差价期权策略的成本为 $3 - $1 = $2。收益如下表所示：

股票价格变动范围	损益状态
$S_T \leqslant 30$	-2
$30 < S_T < 35$	$S_T - 32$
$S_T \geqslant 35$	3

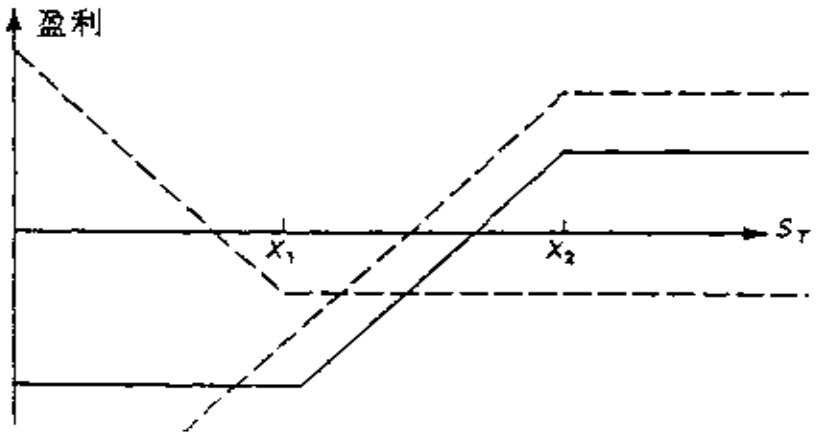


图 8.3 利用看跌期权构造牛市价差期权

通过购买较低执行价格的看跌期权和出售较高执行价格的看跌期权也可以建立牛市差价期权，如图 8.3 所示。与用看涨期权建立的牛市差价期权不同，用看跌期权建立的牛市差价期权投资者开始会得到一个正的现金流（忽略保证金要求）。毫无疑问，用看跌期权建立的牛市差价期权的最终收益低于用看涨期权建立的牛市差价期权的最终收益。

熊市差价期权

持有牛市差价期权的投资者预期股票价格上升。与此相反，持有熊市差价期权（Bear Spreads）的投资者预期股票价格下降。与牛市差价期权类似，熊市差价期权策略可通过购买某一执行价格的看涨期权并出售另一执行价格的看涨期权来构造。然而，在熊市差价期权策略中，所购买的期权的执行价格高于所卖出的期权的执行价格。图 8.4 中的实线为熊市差价期权的损益。利用看涨期权构造的熊市差价期权可以获得一个初始的现金流入（忽略保证金的要求），这是因为出售的看涨期权的价格高于购买的看涨期权的价格。

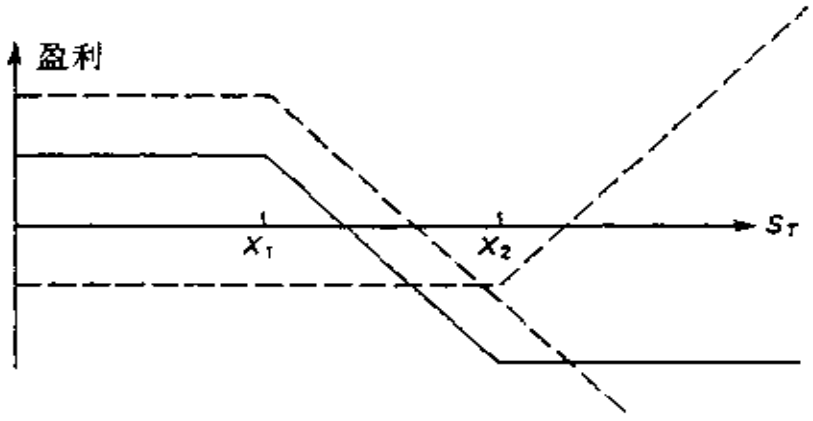


图 8.4　利用看涨期权构造的熊市差价期权

假定执行价格为 X_1 和 X_2，且 $X_1 < X_2$。表 8.2 显示了不同情况下，熊市差价期权组合实现的损益状态。如果股票价格高于 X_2，收益为负，即为 $-(X_2 - X_1)$。如果股票价格低于 X_1，损益为 0。如果股票价格在 X_2 和 X_1 之间，损益为 $-(S_T - X_1)$。计算实际的盈利时，应加上了初始的现金流入。

表 8.2 熊市差价期权的损益

股票价格范围	买入看涨期权的损益	卖出看涨期权的损益	总损益状态
$S_T \geqslant X_2$	$S_T - X_2$	$X_1 - S_T$	$-(X_2 - X_1)$
$X_1 < S_T < X_2$	0	$X_1 - S_T$	$-(S_T - X_1)$
$S_T \leqslant X_1$	0	0	0

例 8.2

投资者以 $1 购买了执行价格为 $35 的看涨期权并以 $3 的价格出售了执行价格为 $30 的看涨期权。则如果股票价格高于 $35，熊市差价期权的收益为 − $5；如果股票价格低于 $30，其收益为 0。如果股票价格在 $30 和 $35 之间，其收益为 $-(S_T - 30)$。这一投资的初始现金流入为 $3 − $1 = $2。因此损益状态如下：

股票价格范围	损益状态
$S_T \leqslant 30$	+2
$30 < S_T < 35$	$32 - S_T$
$S_T \geqslant 35$	−3

与牛市差价期权类似，熊市差价期权同时限制了股价向有利方向变动时的潜在盈利和股价向不利方向变动时的损失。熊市差价期权可以不用看涨期权而仅用看跌期权来构造。投资者购买执行价格较高的看跌期权并出售执行价格较低的看跌期权，如图 8.

5 所示。持有由看跌期权构造的熊市差价期权需要初始投资。本质上，投资者购买某一执行价格的看跌期权，并通过出售一个较低执行价格的看跌期权而放弃了一些潜在的盈利机会。作为对放弃盈利机会的补偿，投资者获得了出售期权的期权费。

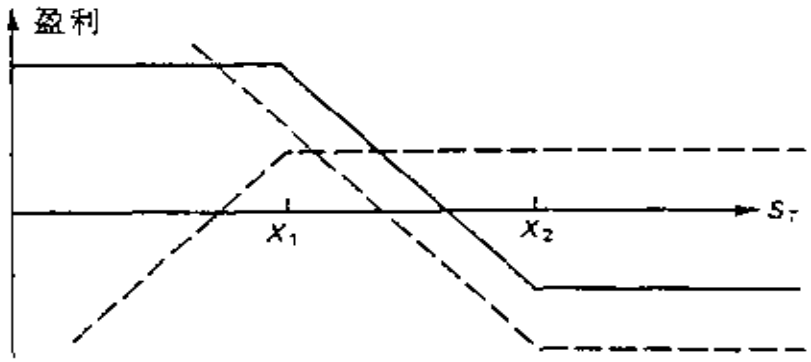


图 8.5　利用看跌期权构造的熊市差价期权

蝶式差价期权

蝶式差价期权(Butterfly Spresds)策略由三种不同执行价格的期权头寸所组成。可通过如下方式构造：购买一个较低执行价格 X_1 的看涨期权，购买一个较高执行价格 X_3 的看涨期权，出售两个执行价格 X_2 的看涨期权，其中 X_2 为 X_1 与 X_3 的中间值。一般来说，X_2 非常接近股票的现价。该投资策略的损益如图 8.6 所示。如果股票价格股票价格保持在 X_2 附近，运用该策略就会获利；如果股票价格在任何方向上有较大波动，则会有少量损失。因此对于那些认为股票价格不可能发生较大波动的投资者来说，这是一个非常适当的策略。这一策略需要少量的初始投资。蝶式差价期权的损益如表 8.3 所示。

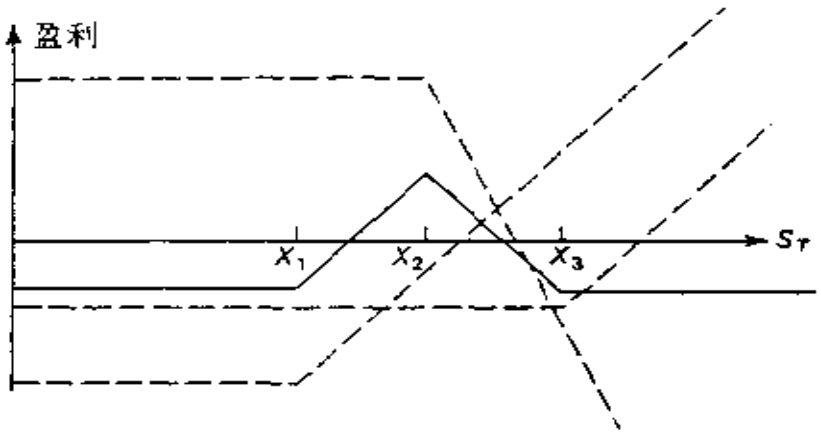


图 8.6 利用看涨期权构造的蝶式差价期权

表 8.3 蝶式差价期权的损益

股票价格范围	第一个看涨期权多头的损益	第二个看涨期权多头的损益	看涨期权空头损益	组合的损益
$S_T<X_1$	0	0	0	0
$X_1<S_T<X_2$	S_T-X_1	0	0	S_T-X_1
$X_2<S_T<X_3$	S_T-X_1	0	$-2(S_T-X_2)$	X_3-S_T
$S_T>X_3$	S_T-X_1	S_T-X_3	$-2(S_T-X_2)$	0

注：在以上计算中运用了如下关系，即 $X_2=0.5(X_1+X_3)$。

假定某一股票的现价为 $61。如果某个投资者认为在以后的六个月中股票价格不可能发生重大变化。假定六个月期看涨期权的市场价格如下：

执行价格($)	看涨期权的价格($)
55	10
60	7
65	5

通过购买一个执行价格为 $55 的看涨期权，购买一个执行价格为 $65 的看涨期权，同时出售两个执行价格为 $60 的看涨期权，投资者就可构造一个蝶式差价期权。构造这个蝶式差价期权的成本为 $10 + $5 − (2 × $7) = $1。如果在六个月后，股票价格高于 $65 或低于 $55，该策略的收益为 0，投资者的净损失为 $1。如果股票价格在 $56 和 $64 之间，运用该策略就可获利。当六个月后股票价格为 $60 时，就会得到最大的收益 $5。也可运用看跌期权构造蝶式差价期权。投资者可购买一个执行价格较低的看跌期权，购买一个执行价格较高的看跌期权，同时出售两个中间执行价格的看跌期权，如图 8.7 所示。在本例中的蝶式差价期权也可通过如下方式构造：买入一个执行价格为 $55 的看跌期权，买入一个执行价格为 $65的看跌期权，同时出售两个执行价

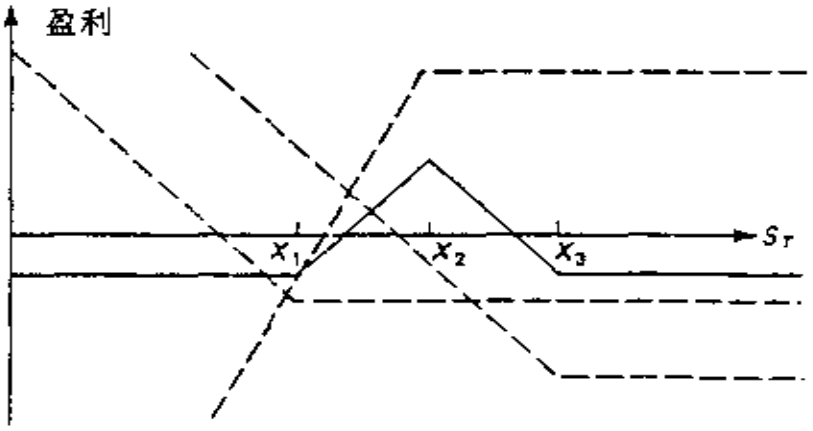


图 8.7　利用看跌期权构造的蝶式差价期权

格为 $60 的看跌期权。如果以上所有的期权均为欧式期权，运用看跌期权构造的蝶式差价期权与运用看涨期权构造的蝶式差价期权完全一样。可以利用欧式看涨与看跌期权之间的平价关系可证明：在这两种情况下，初始投资也相同。

利用与以上较早描述的策略相反的操作可以卖空蝶式差价期权。出售执行价格为 X_1 与 X_3 的期权，购买 2 个执行价格为 X_2 的期权（X_2 为 X_1 与 X_3 的中值）。如果股票价格发生较大的变化，这个策略将获得一定的利润。

日历差价期权

至今为止，我们一直都假定构造差价期权的所有期权到期日相同。现在我们讨论日历差价期权（Calendar Spreads），它涉及的期权执行价格相同，但到期日不同。

日历差价期权可通过以下方式构造：出售一个看涨期权同时购买一个具有相同执行价格且期限较长的看涨期权。期权的到期日越长，其价格越高。因此日历差价期权需要一个初始投资。假定在期限短的期权到期时，出售期限长的期权，则日历差价期权的损益状态如图 8.8 所示。这与图 8.6 中的蝶式差价期权的损益状态类似。如果期限短的期权到期时，股票的价格接近期限较短的期权的执行价格，投资者可获得利润。然而，如果股票价格远高于或远低于该执行价格时，就会发生损失。

为了理解日历差价期权的损益状态，我们首先考虑在期限短的期权到期时，股票价格非常低的情况。期限短的期权的价值为零，且期限长的期权的价值接近零。投资者就会发生损失，损失的金额略小于最初构造该投资策略时的成本。接着我们考虑在期限较短的期权到期时，股票价格 S_T 非常高的情况。期限短的期权的成本为 $S_T - X$，期限长的期权（假定提前执行是不明智的）的价值略高于 $S_T - X$，其中 X 为期权的执行价格。这时投资者也会发生

损失，损失的金额略小于最初构造该投资策略时的成本。如果 S_T 接近 X，则期限短的期权的成本很小或几乎没有成本。而期限长的期权是很有价值的。在这种情况下，投资者就可获得较大的利润。

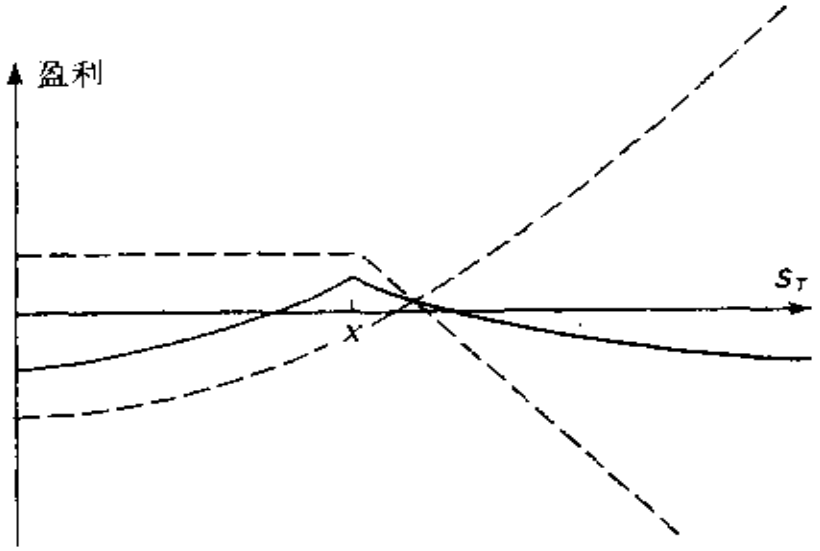


图 8.8　两个看涨期权构造的日历差价期权

在一个中性的日历价差期权(neutral calendar spread)中，执行价格非常接近股票的现价。牛市日历价差期权(Bullish calendar spread)的执行价格较高，而熊市日历价差期权(Bearish calendar spread)的执行价格较低。

日历价差期权既可以用看涨期权来构造，也可以用看跌期权来构造。投资者购买一个期限较长的看跌期权，同时卖出一个期限较短的看跌期权。其损益状态与使用看涨期权构造的日历差价期权的损益状态类似，如图 8.9 所示。

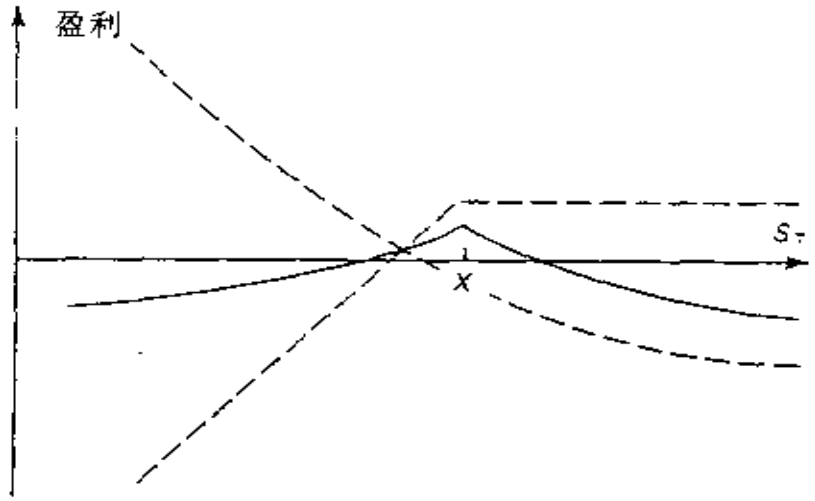


图 8.9 运用两个看跌期权建立的日历差价期权

逆日历差价期权(reverse calendar spread)正好与图 8.8 或图 8.9 中的损益状态相反。投资者购买期限短的期权,同时出售期限长的期权。当期限短的期权到期时,如果股票价格远高于或远低于该期权的执行价格,则可获得少量的利润。但是,当股票价格与该期权执行价格接近时,会导致一定的损失。

对角差价期权

牛市、熊市和日历差价期权都可通过购买一个看涨期权同时出售另一个看涨期权来构造。在牛市和熊市差价期权两种情况下,两个看涨期权的执行价格不同而到期日相同。在日历差价期权情况下,两个看涨期权的执行价格相同而到期日不同。而一个对角线差价期权(Diagonal Spreads)中,两个看涨期权的执行价格和到期日都不相同。对角线差价期权有许多不同的种类。其损益

状态通常随相应的牛市或熊市差价期权损益状态的变化而变化。

8.3　组合期权

组合期权是一种期权交易策略，该期权策略中包括同一种股票的看涨期权和看跌期权。我们将讨论所谓的跨式期权、strips 期权、straps 期权和宽跨式期权

跨式期权

组合期权策略中非常普遍的就是跨式期权(Straddle)策略。同时买入具有相同执行价格、相同到期日的、同种股票的看涨期权和看跌期权就可构造该策略，其损益状态如图 8.10 所示。执行价格用 X 来表示。如果在期权到期日，股票价格非常接近执行价格，跨式期权就会发生损失。但是，如果股票价格在任何方向上有很大偏移时，就会有大量的利润。表 8.4 计算了该期权策略的损益。

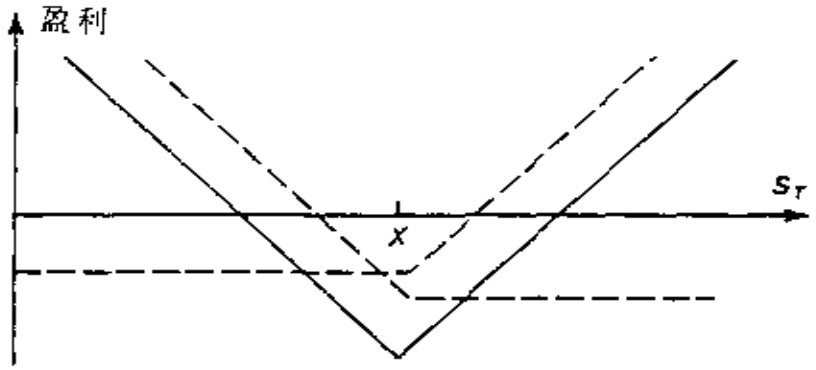


图 8.10　跨式期权

表 8.4 跨式期权的损益状态

股票价格的范围	看涨期权的损益	看跌期权的损益	组合的损益
$S_T \leqslant X$	0	$X - S_T$	$X - S_T$
$S_T > X$	$S_T - X$	0	$S_T - X$

当投资者预期股票价格会有重大变动，但不知其变动方向时，则可应用跨式期权策略。假设某投资者认为某一股票的价格在三个月后将发生重大的变化，该股票的现行市场价值为 $69。该投资者可通过同时购买到期期限为三个月，执行价格为 $70 的一个看涨期权和一个看跌期权来构造跨式期权。假定看涨期权的成本为 $4，看跌期权的成本为 $3。如果股票价格保持 $69 不变，我们很容易知道该策略的成本为 $6（初始投资需要 $7，此时看涨期权到期时价值为 0，看跌期权到期时价值为 $1）。如果到期时股票价格为 $70，则会有 $7 的损失（这是可能发生的最坏情况）。但是，如果股票价格跳跃到 $90，则该策略可获利 $13；如果股票价格跌到 $55，可获利 $8，以此类推。

如果某公司将被兼并收购时，进行该公司股票跨式期权策略操作似乎是很自然的事。如果兼并收购成功，可以预计股价会急剧上升。如果兼并收购不成功，可以预计股价会急剧下降。在实践中，赚钱可并不那么容易！当预计股票价格会剧烈跳跃变化时，该股票的期权价格将远远高于那些预计价格变化很小的同类股票的期权价格。

我们有时称图 8.10 中的跨式期权为底部跨式期权（bottom straddle）或买入跨式期权（straddle purchase）。顶部跨式期权（top straddle）或卖出跨式期权（straddle write）的情况正好相反。同时出售相同执行价格和相同到期日的看涨期权和看跌期权可构造顶部跨式期权。这是一个高风险的策略。如果在到期日股票价格接近执行价格，会产生大量的利润。然而，一旦股票在任何方向上有

重大变动，其损失是无限的。

Strips 与 Straps

一个 Strip 是由具有相同执行价格和相同到期日的一个看涨期权和两个看跌期权的多头组成。一个 Strap 是由具有相同执行价格和相同到期日的两个看涨期权和一个看跌期权的多头组成。图 8.11 为 strips 和 straps 的损益状态。在 strip 中，投资者认为股票价格会有很大的变化，且股价下降的可能性要大于股价上升的可能性。在 strap 中，投资者也认为股价将会有很大的变化，但他认为股价上升的可能性要大于股价下降的可能性。

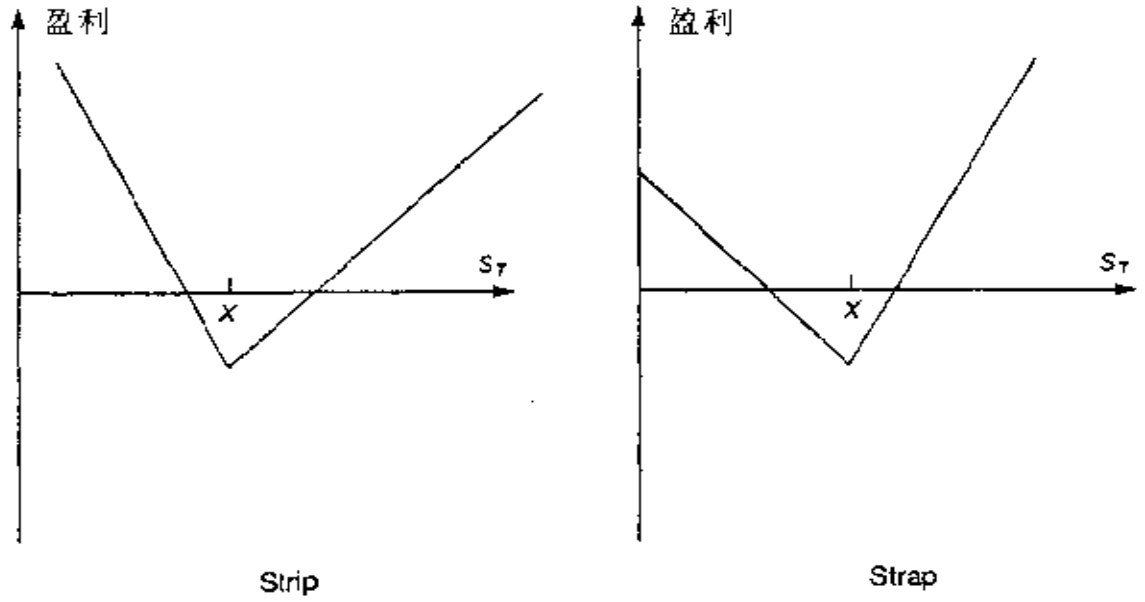


图 8.11　strips 和 straps 的损益状态。

宽跨式期权

宽跨式期权(strangle)有时也被称为底部垂直价差组合(bot-

tom vertical combination)，投资者购买相同到期日但执行价格不同的一个看跌期权和一个看涨期权。其损益状态如图 8.12 所示。看涨期权的执行价格 X_2 高于看跌期权的执行价格 X_1。表 8.5 计算了宽跨式期权的损益。

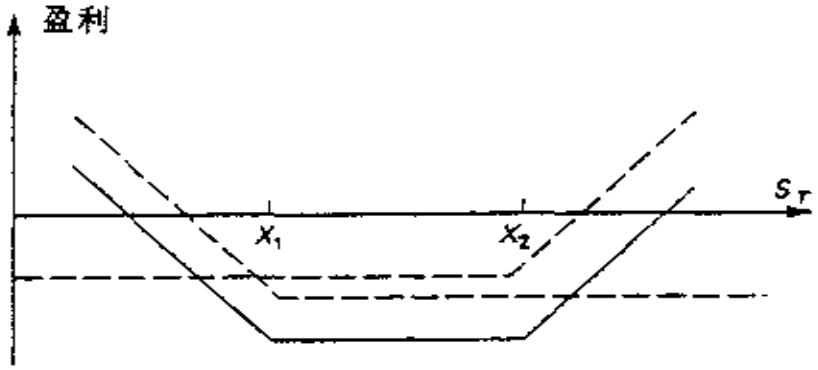


图 8.12 宽跨式期权

表 8.5 宽跨式期权的损益

股票价格范围	看涨期权的损益	看跌期权的损益	组合的损益
$S_T \leqslant X$	0	$X_1 - S_T$	$X_1 - S_T$
$X_1 < S_T < X_2$	0	0	0
$S_T \geqslant X_2$	$S_T - X_2$	0	$S_T - X_2$

宽跨式期权策略与跨式期权策略类似。投资者预期股票价格会有大幅变化，但不能确定股价是上升还是下降。比较图 8.12 和图 8.10，我们可以发现在宽跨式期权策略中股价的变动程度要大于跨式期权策略中的股价变动，投资者才能获利。但是，当股价最终处于中间价态时，宽跨式期权的损失也较小。

运用宽跨式期权所获的利润大小取决于两个执行价格的接近程度。它们距离越远，潜在的损失就越小，为获得利润，则股价的变动需要更大一些。

有时将出售一个宽跨式期权称为顶部垂直价差组合(top vertical combination)。如果投资者认为股价不可能发生巨大变化,则可运用该策略。但是,与出售跨式期权类似,由于投资者的潜在损失是无限的,所以该策略的风险极高。

8.4　其他复合期权的损益状态

本章说明利用几种期权组合的方法,可得到令人感兴趣的收益和股票价格之间的关系式。如果在 T 时刻到期的欧式期权的执行价格可以取任何价位,理论上在 T 时刻就可获得任意形式的损益状态。说明这一问题的最简单的例子是蝶式差价期权。蝶式差价期权可通过分别购买执行价格分别为 X_1 和 X_3 的期权,同时出售两个执行价格为 X_2 的期权,其中 $X_1<X_2<X_3$ 且 $X_3-X_2=X_2-X_1$。蝶式差价期权的损益如图 8.13 所示。这就很象一个"钉子"。随着 X_1 和 X_3 越来越接近,钉子变得越来越小。通过将大量的小钉子结合起来,就可近似得出任何损益状态方程。

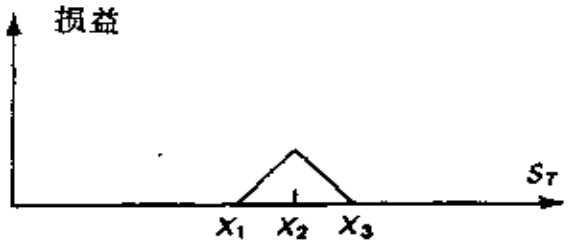


图 8.13　蝶式差价期权的损益

8.5　小　结

许多普通的期权交易策略都包括单一的期权和其标的股票。例如,出售一个有担保的看涨期权包括购买股票同时出售基于该

股票的看涨期权；一个有保护的看跌期权包括购买一个股票同时购买基于该股票的看跌期权。前者类似于出售看跌期权；后者类似于购买看涨期权。

差价期权既包括持有两个或多个看涨期权，也包括持有两个或多个看跌期权。购买较低执行价格的看涨期权(或看跌期权)，同时出售较高执行价格的看涨期权(或看跌期权)可构造牛市差价期权。购买较高执行价格的看涨期权(或看跌期权)，同时出售较低执行价格的看涨期权(或看跌期权)可构造熊市差价期权。蝶式差价期权包括购买一个低执行价格和一个高执行价格的看涨期权(或看跌期权)，同时出售两个中间价位执行价格的看涨期权(或看跌期权)。日历差价期权包括出售较短到期日的看涨期权(或看跌期权)，同时购买较长到期日的看涨期权(或看跌期权)。对角差价期权包括购买一个期权同时卖出另一个期权，且这两个期权的到期日和执行价格均不相同。

组合策略包括既持有看涨期权也持有同一股票的看跌期权。跨式期权包括持有具有相同执行价格和相同到期日的同种股票的看涨期权的多头和看跌期权的多头。strip 包括持有相同执行价格和到期日的一个看涨期权多头和两个看跌期权多头。strap 包括持有相同执行价格和到期日的两个看涨期权多头和一个看跌期权多头。宽跨式期权包括持有相同到期日不同执行价格的一个看涨期权多头和一个看跌期权多头。运用期权还可以构造很多有趣的损益状态。毫不奇怪，期权的运用将日趋广泛并不断受到投资者的青睐。

第九章

股票价格行为的一种模式

如果某变量的价值以某种不确定的方式随时间变化，则称该变量遵循某种随机过程(stochastic process)。随机过程分为“离散时间”和“连续时间”两种。一个离散时间随机过程是指标的变量值只能在某些确定的时间点上变化的过程，而一个连续时间随机过程是指标的变量值的变化可以在任何时刻发生的过程。随机过程也可分为连续变量和离散变量两种过程。在连续变量过程中，该变量在某一范围内可取任意值，而在离散变量过程中，变量只可能取某些离散值。

本章中我们导出股价的连续变量、连续时间的随机过程。理解这一过程是弄清期权定价和其它一些更复杂的衍生金融工具定价的首要步骤。应当指出，实际上我们观察到的股价并不是按照连续变量、连续时间过程来进行的。股票价格被限制为离散值(通常为1/8美元的倍数)，而且只有当交易所开市时才能观察到股价变化。但是在大多数应用中，可以看到连续变量、连续时间过程是一种有用的模型。

在本章和下一章中，我们向读者介绍著名的随机微积分(stochastic calculus)。随机微积分是常规微积分的延伸，它研究连续时间随机过程。许多人认为连续时间随机过程太复杂，应当把它们全部留给“火箭专家”来处理。事实并不如此。理解这些过程

的最大障碍是表达方式。这一章我们提供一种循序渐进的方法以帮助读者克服这一困难。

9.1 马尔科夫性质

马尔科夫过程(Markov process)是一种特殊类型的随机过程。这个过程说明只有变量的当前值与未来的预测有关,变量过去的历史和变量从过去到现在的演变方式则与未来的预测不相关。

人们通常假设股票价格遵循马尔科夫过程。假设现在 IBM 股票价格为 $100。如果股价遵循马尔科夫过程,那么一个星期以前、一个月以前、或是一年以前的股价并不会影响我们对将来的预测,唯一相关的信息就是股票的现价为 $100[①]。对将来的预测是不确定的,必须以概率分布的方式表达。马尔科夫性质隐含了在将来任一特定时刻股价的概率分布仅仅取决于股票当前的价格 $100。

股价的马尔科夫性质与弱型市场有效性(the weak form of market efficiency)相一致,也就是说,一种股票的现价已经包含了所有信息,当然包括了所有过去的价格记录。如果弱型市场有效性不正确的话,技术分析师可通过分析股价的过去历史数据图表获得高于平均收益率的收益。事实上,几乎没有什么证据表明他们能够做到这一点。

正是市场竞争保证了弱型市场有效性成立。有许多许多投资者紧盯着股票市场并试图从中获利,这种实际情况导致了在任何指定时刻的股价包含了以往价格的信息。假设已经发现以往股价中某种特殊模式总是给出 65% 的未来价格上涨机会。这种方式一旦被观察到,众多投资者就会购买股票,从而股票的需求就会突然增加。其结果为股价骤然上涨,过去观察的效应将失效。任何可盈利的交易机会都会如此。

9.2　维纳过程

股价行为模型通常用著名的维纳过程(wiener processes)来表达。维纳过程是马尔科夫随机过程的一种特殊形式。物理学中这种观察用于描绘某个粒子受到大量小分子碰撞的运动,有时称为布朗运动(Brownian motion)。

我们要理解遵循维纳过程的变量 z 的行为,可以考虑在小时间间隔上变量 z 值的变化。设一个小的时间间隔长度为 Δt,定义 Δz 为在 Δt 时间内 z 的变化。要使 z 遵循维纳过程,Δz 必须满足两个基本性质:

性质 1:Δz 与 Δt 的关系满足方程式(9.1)

$$\Delta z = \epsilon \sqrt{\Delta t} \tag{9.1}$$

其中 ϵ 为从标准正态分布(即均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布)中取的一个随机值。

性质 2:对于任何两个不同时间间隔 Δt,Δz 的值相互独立。

从性质 1,我们得到 Δz 本身具有正态分布,

$$\Delta z \text{ 的均值} = 0$$

$$\Delta z \text{ 的标准差} = \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z \text{ 的方差} = \Delta t$$

性质 2 则隐含 z 遵循马尔科夫过程。

下面我们考虑在一段相当长的时间 T 中 z 值的增加。我们将它表示为 $z(T)-z(0)$。这可以被看作是在 N 个长度为 Δt 的小时间间隔中 z 的变化的总量,这里

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

因此，

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \qquad (9.2)$$

其中 ϵ_i(i=1,2,……,N)是从标准正态分布的随机抽样值。从性质 2 中可知，ϵ_i 是相互独立的，从方程(9.2)可以得到 z(T)－z(0)是正态分布的[②]，

$$[z(T) - z(0)] \text{的均值} = 0$$
$$[z(T) - z(0)] \text{的方差} = N\Delta t = T$$
$$[z(T) - z(0)] \text{的标准差} = \sqrt{T}$$

因此，在任意长度为 T 的时间间隔内，遵循维纳过程的变量值的增加具有均值为 0、标准差为$\sqrt{T}$的正态分布。我们现在很清楚看到，为何 Δz 被定义为 ε 与的乘积而不是 ε 与 $\sqrt{\Delta t}$的乘积。对于相互独立的正态分布，方差具有可加性，而标准差不具有可加性。很自然，这样定义随机过程就可以使变量变化的方差(而不是标准差)与所考虑的时间段的长度成比例。

例 9.1

假设一个遵循维纳过程的变量 z 的最初值为 25，以年为单位计时。在第一年末，变量值服从均值为 25、标准差为 1.0 的正态分布；第二年末，服从均值为 25、标准差为$\sqrt{2}$或 1.414 的正态分布。注意：变量值在将来某一时间的不确定性(用标准差表示)随着我们观察未来的时间长度的平方根增加而增加。

在常规微积分中，通常在微小变化接近为 0 时将这个变化当作极限来处理。这样$\frac{\Delta y}{\Delta x}$取极限就成为 dy/dx 等等。当处理连续

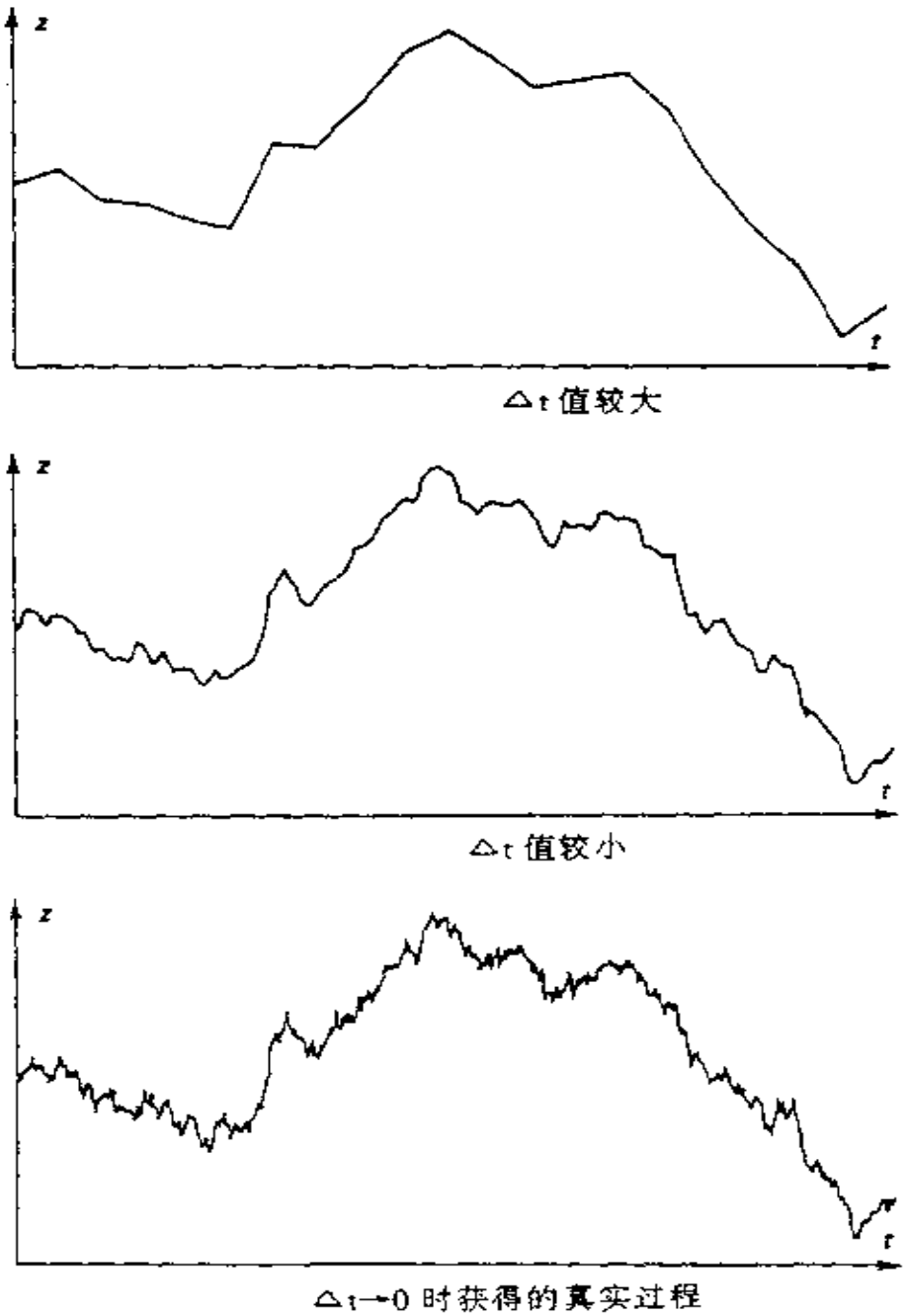


图 9.1　当公式(9.1)中 Δt→0 时维纳过程的图示

时间随机过程时，我们可作同样处理。当 $\Delta t \to 0$ 时，以上描述的 z 过程的极限就是维纳过程。图 9.1 说明了 $\Delta t \to 0$ 取极限时，z 的轨迹运动情况。与常规微积分相似，我们将方程(9.1)的极限情况表示为：

$$dz = \epsilon \sqrt{dt}$$

一般化的维纳过程

到现在为止我们讨论的基本维纳过程漂移率为 0，方差率为 1.0。漂移率为 0 意味着在未来任意时刻 z 的期望值等于它的当前值。方差率为 1.0 意味着在长度为 T 的一段时间段后 z 变化的方差为 1.0×T。变量 x 的一般化维纳过程(generalized wiener process)用 dz 定义如下：

$$dx = adt + bdz \tag{9.3}$$

其中 a 和 b 为常数。

理解方程(9.3)较好的方法是分别考虑方程右边的两个组成部分。adt 项说明了 x 变量单位时间的漂移率期望值为 a。如果缺省 bdz 项，方程变为

$$dx = adt$$

即

$$\frac{dx}{dt} = a$$

或

$$x = x_0 + at$$

其中 x_0 为 x 在零时刻的值。经过长度为 T 的时间段后，x 增加的值为 aT。方程(9.3)右边的 bdz 项可被看作为增加到 x 的轨迹上噪声或波动率。这些噪声或波动率的值为维纳过程的 b 倍。

短时间 Δt 后，从方程(9.1)和(9.3)可得 x 值的变化 Δx 为

$$\Delta x = a\Delta t + b \in \sqrt{\Delta t}$$

其中，如前所述，ε 是从取自标准正态分布中的随机抽样值。因此 Δx 具有正态分布，且

$$\Delta x \text{ 的均值} = a\Delta t$$

$$\Delta x \text{ 的标准差} = b\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta x \text{ 的方差} = b^2\Delta t$$

类似以上讨论，可得任意时间 T 后 x 值的变化具有正态分布，且

$$x \text{ 的均值} = aT$$

$$x \text{ 的标准差} = b\sqrt{T}$$

$$x \text{ 的方差} = b^2T$$

因此方程(9.3)给出的一般性维纳过程其漂移率(即单位时间平均漂移)的期望值为 a，方差率(即单位时间的方差)的期望值为 b^2。如图 9.2 所示。

例 9.2

考虑这么一种情况：某公司以千美元计的现金头寸遵循一般性的维纳过程，每年漂移为 20，每年方差为 900。最初的现金头寸为 50。第一年末现金头寸将具有正态分布，均值为 70，标准差为 $\sqrt{900}$ 或 30。在第六个月末，它将具有正态分布，均值为 60，标准差为 $30\sqrt{0.5} = 21.21$。注意：我们在未来某一时间用标准差衡量的现金头寸不确定性随我们考察将来时间长度的平方根增加而增加。另外，注意现金头寸可能为负(这种情况可解释为该公司在借款)。

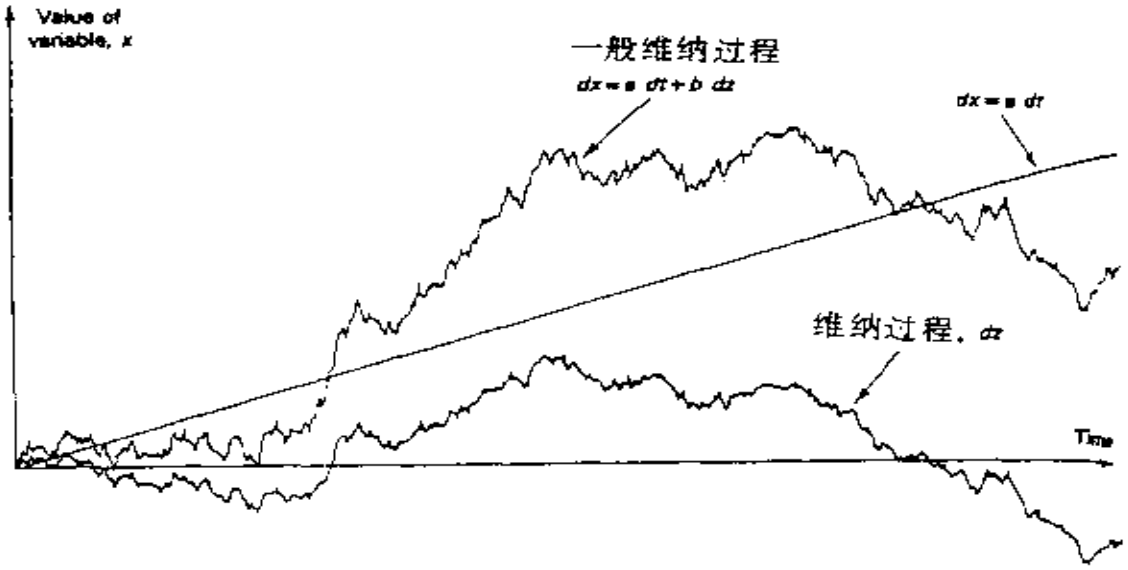


图 9.2 一般维纳过程:a=0.3,b=1.5

ITO过程

我们还可进一步定义另一种类型随机过程:即著名的ITO过程(ITO process)。这是一个一般化的维纳过程,其中参数a和b是标的变量x和时间t值的函数。ITO过程数学表达式为:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (9.4)$$

ITO过程的期望漂移率和方差率都随时间变化而变化。

9.3 股票价格的行为过程

这一部分我们讨论不付红利股票价格遵循的随机过程。红利

对随机过程的影响将在第十章中进行讨论。

假定股票价格遵循一般化的维纳过程是很具诱惑力的，也就是说，它具有不变的期望漂移率和方差率。但是，这个模型不能抓住股价的关键特性，即投资者要求来自股票的期望百分比收益与股票价格无关。如果投资者在股价为 $10 时要求预期收益为每年 14%，那么他在股价为 $50 时仍然要求每年 14% 的预期收益。

显然，期望漂移率为常数的假设是不恰当的，需要修正，即假设以股价的比例表示的期望漂移为常数。这个假设意味着如果股价为 S，S 的期望漂移率为 μS，μ 为某一恒定参数。因此，在短时间间隔 Δt 后，S 的增长期望值为 $\mu S\Delta t$，参数 μ 是股票的期望收益率，以小数的形式表示。

若股票价格的方差率恒为 0，这个模型即为：

$$dS = \mu S dt$$

或

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

结果为：

$$S = S_0 e^{\mu t} \tag{9.5}$$

其中 S_0 是零时刻的股票价格。方程(9.5)说明了当方差率为 0 时，股票价格以单位时间为 μ 的连续复利方式增长。

当然，实际上股票价格确实存在着波动率。一个合理假设是无论股票价格如何，短时间 Δt 后的百分比收益率的方差保持不变。换句话说，不管股票价格为 $50 还是 $10，投资者认为他或她的收益率的不确定性是相同的。定义 σ^2 为股票价格比例变化的方差率，即 $\sigma^2\Delta t$ 是 Δt 时间后股票价格比例变化的方差，$\sigma^2 S^2\Delta t$ 是经过 Δt 后股票价格的实际变化的方差。因此，S 的瞬时方差率为 $\sigma^2 S^2$。

从以上阐述可以得出结论:S 可以用瞬时期望漂移率为 μS 和瞬时方差率为 $\sigma^2 S^2$ 的 ITO 过程来表达,表示为:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

或

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{9.6}$$

方程(9.6)是描述股票价格行为最广泛使用的一种模型。变量 σ 通常被称为股票价格波动率(stock price volatility)。变量 μ 为股票价格的预期收益率。

例 9.3

考虑一种不付红利的股票,波动率为每年 30%,预期收益率以连续复利计每年 15%。即 $\mu=0.15, \sigma=0.30$,股票价格的过程为:

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

若 S 为某一特定时刻的股票价格,ΔS 为随后短时间间隔后股票价格增长,

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30 \in \sqrt{\Delta t}$$

其中 ϵ 是从标准正态分布的随机抽样值。

设时间间隔长度为 1 星期或 0.0192 年,股票价格的初始值为 $100,即 $\Delta t=0.0192, S=100$,

$$\Delta S = 100(0.00288 + 0.0416 \in)$$

上式表示价格的增加是均值为 $0.288、标准差为 $4.16 的正态分布的随机抽样值。

9.4 模型回顾

这一章所讨论的股票价格行为模型(参见式(9.6))有时也称

为几何布朗运动(geometric Brownian motion),该模型的离散形式为:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{9.7}$$

变量 ΔS 为短时间 Δt 后股票价格 S 的变化,ε 为标准正态分布(均值为 0、标准差为 1.0 的正态分布)的随机抽样值。参数 μ 为单位时间内股票的预期收益率,参数 σ 为股票价格的波动率。这两个参数假设为常数。

方程(9.7)的左边是短时间 Δt 后股票的收益比。μΔt 项是这一收益的期望值,而 $\sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$项是收益的随机部分。随机部分的方差(也是整个收益的方差)为 $\sigma^2\Delta t$。

方程(9.7)表明 ΔS/S 为均值为 μΔt,标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$的正态分布,换句话说,

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) \tag{9.8}$$

其中φ(m,s)表示均值为 m,标准差为 s 的正态分布。

蒙特卡罗模拟

假设股票的预期收益为每年 14%,收益的标准差(即波动率)为每年 20%。如果以年计时,可表示为:

$$\mu = 0.14$$
$$\sigma = 0.20$$

设 Δt=0.01,我们考虑股票价格在长度为 0.01 年(或 3.65 天)的时间段后的股票价格变化。可以得到 ΔS/S 具有均值为 0.0014(=0.14×0.01),标准差为 0.02(=0.2×$\sqrt{0.01}$)的正态分布,即

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(0.0014, 0.02) \tag{9.9}$$

我们可以通过不断从$\varphi(0.0014,0.02)$取样来模拟股票价格的一条轨迹。这个操作的第一步先从标准正态分布(即$\varphi(0,1)$)中取样值v_1,然后将其转换为$\varphi(0.0014,0.02)$中样本点v_2,使用公式:

$$v_2 = 0.0014 + 0.02v_1 \tag{9.10}$$

表 9.1 显示了股票价格运动的一组特殊模拟。设股票价格的初始值为 \$20。第一阶段中,从$\varphi(0,1)$中取的随机数为v_1为 0.52,用方程(9.10)得到$\varphi(0.0014,0.02)$中的随机样值为 0.0118。由方程(9.9)得 $\Delta S=20\times0.0118$ 或 0.236。因此,在下一阶段的开始股票价格为 \$20.236,如此类推下去。注意样本值v_2必须相互独立。否则,在第 9.1 中讨论的马尔科夫性质将不满足。

表 9.1 当 $\mu=0.14,\sigma=0.20$,时间长度为 0.01 年时股票价格模拟值

每个周期开始时的股票价格	从$\varphi(0,1)$中抽样的随机样本v_1	从$\varphi(0.0014,0.02)$抽取的对应随机样本v_2	在该周期中股票价格变化
20.000	0.52	0.0118	0.236
20.236	1.44	0.0302	0.611
20.847	−0.86	−0.0158	−0.329
20.518	1.46	0.0306	0.628
21.146	−0.69	−0.0124	−0.262
20.883	−0.74	−0.0134	−0.280
20.603	0.21	0.0056	0.115
20.719	−1.10	−0.0206	−0.427
20.292	0.73	0.0160	0.325
20.617	1.16	0.0246	0.507
21.124	2.56	0.0526	1.111

表 9.1 假设股票价格精确到 0.001,事实并非如此。为得到

股票报价，表中首列的数值应当进行四舍五入到 1/8 美元。我们应当认识到这张表只表示了股票运动的一种可能方式。不同的随机取样将会导致不同的价格运动。在模拟中可以使用任意小的时间段 Δt。然而，只有当极限 $\Delta t \to 0$ 时才能得到几何布朗运动的真实描述。表 9.1 的最后股票价格 \$21.124 可以被看作在 10 个时间段或十分之一年末股票价格分布的随机抽样值。通过如表 9.1 中所示的反复模拟运动，就可以得到十分之一年末股票价格的一个完整的概率分布。

9.5 参　数

本章讨论的股票价格的过程涉及两个参数：μ 和 σ。这两个参数的大小取决于时间计量单位。在这里和本书的其余部分，我们假设时间以年为单位计量。

参数 μ 是投资者在短时间后获得的预期收益率，以年计量，用比率的形式表示。多数投资者认为，如果让他们承担更大的风险，他们将要求获得更高的预期收益率。所以 μ 值应当取决于股票收益的风险[③]。μ 值也应当依赖经济体系中的利率水平。利率水平越高，投资者要求任一种股票的预期收益率就越高。一般来说，μ 比诸如国库券这样的无风险投资收益高出 8 个百分点。因此，当国库券收益为每年 8% 或 0.08 时，μ 的典型值应为 0.16，即股票典型的预期收益率为每年 16%。

幸运的是，我们自己不必关心 μ 值决定的细节，因为依赖于某种股票的衍生证券的价值一般是独立于 μ 的。相反，股票价格波动率参数 σ 对于决定大多数或有债权的价值是相当重要的。根据经验估计 σ 的步骤将在第十章中讨论。股票 σ 的典型值处于 0.20 到 0.40（即 20% 到 40%）的范围之间。

短时间 Δt 后股票价格比例变化的标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$。作一粗

略的近似，在相对长一段时间 T 后股票价格比例变化的标准差为 $\sigma\sqrt{T}$。这就是说，作为近似，波动率可被解释为一年内股票价格变化的标准差。

注意：在一段较长时间 T 后的股票价格比例变化的标准差并不精确地为 $\sigma\sqrt{T}$。这是因为比例变化不具有可加性（例如，股票价格先增长 10%，再增长 20%，结果总增长应该是 32%，而不是 30%）。第十章的讨论表明：在一段较长时间 T 后股票价格变化的概率分布是对数正态分布，而且股票价格的波动率精确地等于一年内股票连续复利收益的标准差。

9.6 二叉树模型

在本书多处我们将用二叉树模型作为本章讨论过的股票价格连续时间模型的离散时间形式。假设股票价格初始为 S。在二叉树模型中，股票价格在随后时间长度为 Δt 的时间段后的行为过程如图 9.3 所示。它以概率 p 上升到 Su，以概率 1 − p 下降到 Sd。

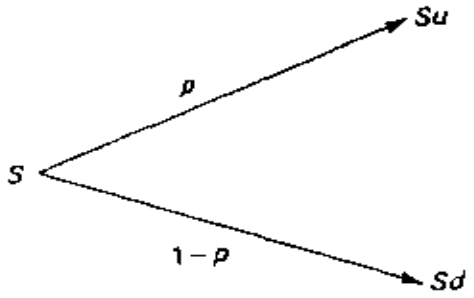


图 9.3 二叉树模型

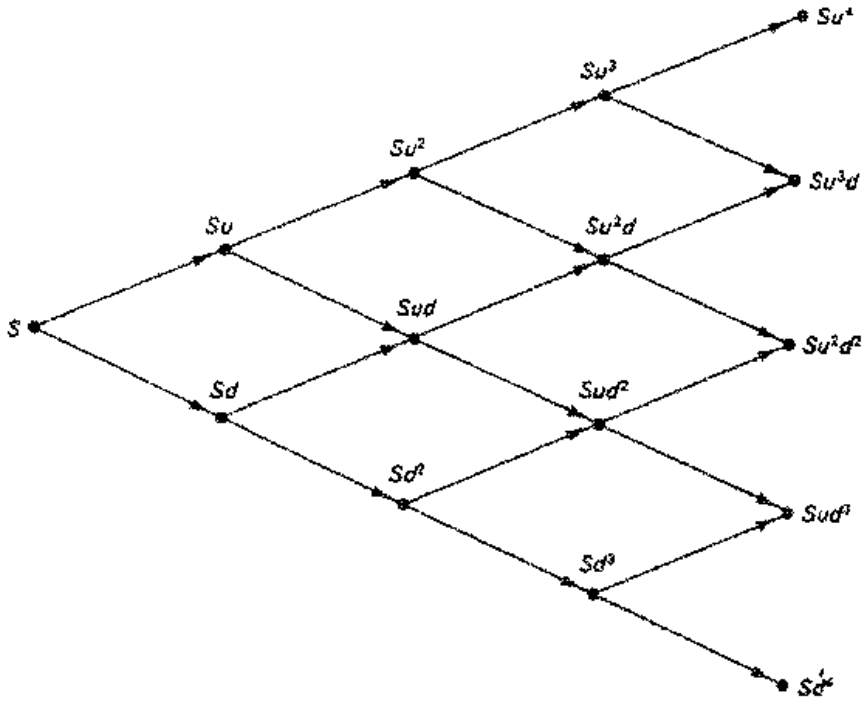


图 9.4　四周期二叉树模型的价格运动

图 9.4 则显示了二叉树模型如何在两个时间段末产生三种不同的股票价格，在三个时间段末产生四种不同股票价格，等等。

为了使很短时间 Δt 内股票的预期收益为 $\mu\Delta t$，在 Δt 内收益的方差为 $\sigma^2\Delta t$，必须适当选择 u、d 和 p。一种选择方法如下[④]

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \qquad d = \frac{1}{u}, \qquad p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

可以看出，在极限情况下，$\Delta t \to 0$，这种股票价格运动的二叉树模型成为本章已经讨论过的几何布朗运动模型。

例 9.4

考虑一种股票价格，预期收益率为每年 12%，波动率为 30%。使用二叉树模型表示 0.04 年(近似为两周)内股票价格运动情况。本例中，$\mu=0.12$，$\sigma=0.30$，$\Delta t=0.04$，由前面的等式可得：

$$u = e^{0.30\times\sqrt{0.04}} = 1.0618$$

$$d = \frac{1}{u} = 0.9418$$

$$p = \frac{e^{0.12\times 0.04} - 0.9418}{1.0618 - 0.9418} = 0.525$$

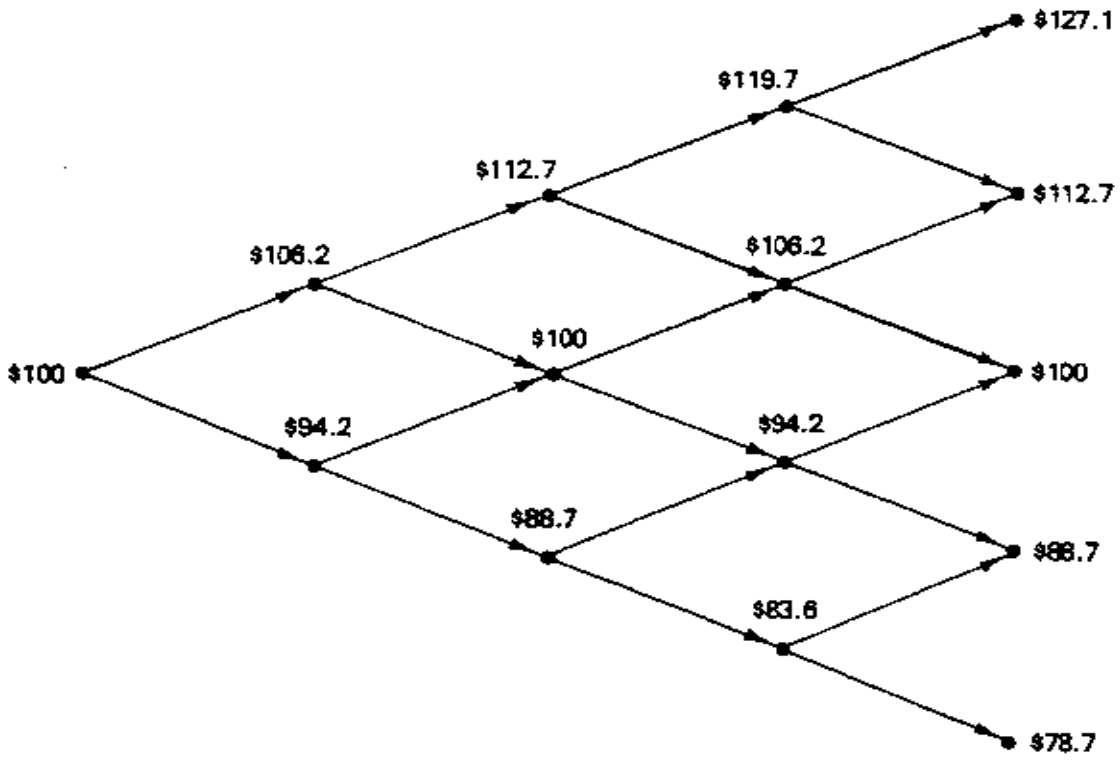


图 9.5 例 9.4 的股票价格运动

如果股票价格初始值为 $100，经过 4 个长度为 Δt 的时间段后的可能运动情况如图 9.5 所示。上升运动的概率总是为 0.525，下降运动的概率总是为 0.475。对于在第 4 段时间末产生的股票价格 $112.7，必定包含有三次上升运动和一次下降运动，有四条途径可以达到这个价格，它们是 DUUU，UDUU，UUDU 和 UUUD，其中 U 代表上升运动，D 代表下降运动。因此，在第 4 段时间末股票价格为 $112.7 的概率为：

$$4 \times 0.525^3 \times 0.475 = 0.275$$

相应的股票价格为 $127.1、$100.0、$88.7 和 $78.7 的概率同样可计算出，分别为 0.076、0.373、0.225 和 0.051。

9.7 小　结

随机过程描述了变量值的概率随时间的发展变化。马尔科夫过程中只有变量的当前值与预测未来相关。变量的以往历史以及如何演变成当前值的方式则都与预测未来不相关。

维纳过程 dz 是一个描述正态分布变量变化的过程。该过程的漂移为 0，每单位时间方差率为 1。这就是说，若零时刻变量的值为 x，在 T 时刻它是均值为 x，标准差为$\sqrt{T}$的正态分布。

一般化的维纳过程描述了单位时间内漂移为 a，方差率为 b^2 的正态分布变量的变化过程，其中 a 和 b 为常数。这就是说，若零时刻变量的值为 x，在 T 时刻它是均值为 $x + aT$，标准差为 $b\sqrt{T}$ 的正态分布。

ITO 过程是 x 的漂移率和方差率均为 x 本身和时间的函数的过程。在一个很短时间期内 x 的变化为正态分布，但长时间内 x 的变化则可能是非正态分布。

本章我们讨论了股票价格随时间变化的行为，是一个简化的马尔科夫过程。这个过程广泛地用于衍生证券的定价中，称为几何布朗运动。在此过程中，股票持有者在任何短时间后的比例收

益率都是正态分布，且任何两段时间间隔的收益相互独立。

通过模拟变量行为可得到对变量随机过程的直观理解。这包括将一段时间分割成许多时间小段，随机地对变量可能的轨迹进行取样，就可算出变量将来的概率分布。在第十四章中将进一步讨论蒙特卡罗模拟。

第十章

Black－Scholes 模型的分析

在七十年代初，Black 和 Scholes 取得了一个重大的突破，推导出基于无红利支付股票的任何衍生证券的价格必须满足的微分方程。他们运用该方程推导出股票的欧式看涨期权和看跌期权的价值。本章我们对 Black－Scholes 模型进行阐述。我们还要讨论第九章中提到的股票价格的随机过程特性以及一种称为风险中性定价的强有力工具。

在开始前，有必要强调我们即将用到的有关表示方法。在第三章中我们为远期合约定价时，对利率没有进行任何假设，变量 r 用来表示 T 时刻到期的某个投资的无风险利率。本章和下几章中，我们继续用 r 表示无风险利率。然而，除非另外说明，我们假设利率为常数，对于任何到期日都相同。在第十七章我们将讨论这种恒定利率假设放宽后的情况。

10.1 ITO 定理

股票期权的价格是该标的股票价格和时间的函数。更一般地，我们可以说任何一种衍生证券的价格都是这些衍生证券标的资产这个随机变量和时间的函数。任何研究衍生证券的严谨学者都必须对随机变量函数的行为有所了解。在这一领域内的一个重

要结论由一个叫 ITO 的数学家在 1951 年发现。因此称为 ITO 定理(Ito's lemma)。

假设变量 x 的值遵循 ITO 过程:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (10.1)$$

其中,dz 是一个维纳过程,a 与 b 是 x 和 t 的函数。变量 x 的漂移率为 a 和方差率为 b^2。ITO 定理表明 x 和 t 的函数 G 遵循如下过程:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \qquad (10.2)$$

其中 dz 是与方程(10.1)同样的维纳过程。因此 G 也遵循 ITO 过程。它的漂移率为:

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

方差率为:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

ITO 定理的完全严格证明超出了本书的范围。在附录 10A 中我们将看到这个定理可视为微分算法的著名结论的一个引申。

在第九章中我们讨论得到:

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz \qquad (10.3)$$

μ 和 σ 为常数。这是股票价格运动的一个合理的模型。从 ITO 定理得到 S 与 t 的函数 G 遵循的过程为:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma Sdz \qquad (10.4)$$

注意:S 和 G 都受到同一个基本的(underlying)不确定性来源

dz的影响。在推导Black－Scholes结果中，这一点是很重要的。

在远期合约中的应用

为说明ITO定理，我们考虑某个无红利支付股票的远期合约。假设无风险利率为常数，对于所有的到期日它都等于r。定义F为远期价格。从方程(3.5)：

$$F = Se^{r(T-t)}$$

得到

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

假设S遵循预期收益为μ，波动率为σ的几何布朗运动[方程(10.3)表示的过程]。从方程(10.4)推出F的过程表示为：

$$dF = [e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz$$

用$F=Se^{r(T-t)}$代替，上式成为：

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma F dz \tag{10.5}$$

同S一样，F遵循几何布朗运动。它的期望增长率为$\mu - r$而不是μ。

应用于股票价格对数变化

现在我们用ITO定理推导lnS遵循的过程。定义：

$$G = \ln S$$

由于：

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

从方程(10.4)得出 G 的过程为：

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

由于 μ 和 σ 为常数，这个方程表明了 G 遵循一个一般化的维纳过程。它具有恒定的漂移率 $\mu - \sigma^2/2$ 和恒定的方差率 σ^2。由第九章的结果可知，在当前时刻 t 和将来某一时刻 T 之间 G 的变化是正态分布的，均值为：

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)$$

方差为：

$$\sigma^2(T - t)$$

t 时刻 G 的值为 lnS，T 时刻 G 的值为 $\ln S_T$，其中 S_T 是 T 时刻的股票价格。因此在 T－t 期间 G 的变化为：

$$\ln S_T - \ln S$$

因此：

$$\ln S_T - \ln S \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right]$$

10.2 股票价格的对数正态分布特性

如果一个变量的自然对数服从正态分布，我们称这个变量具有对数正态分布。上文提到在第九章中讨论的股票价格行为模型满足：

$$\ln S_T - \ln S \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t), \sigma\sqrt{T - t}\right] \quad (10.6)$$

其中 S_T 为未来时刻 T 的股票价格，S 为当前时刻 t 的股票价

格，$\varphi(m,s)$代表均值为 m，标准差为 s 的正态分布，根据正态分布的特性，从方程(10.6)得到：

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] \quad (10.7)$$

这表明，S_T 具有对数正态分布。$\ln S_T$ 的标准差与 $\sqrt{(T-t)}$ 成比例，说明股票价格对数的不确定性(用标准差表示)与我们考虑的未来时间的长度的平方根成正比。

例 10.1

考虑一种股票，价格初始值为 $40，预期收益率为每年 16%，波动率为每年 20%。由方程(10.7)可知，六个月后股票价格 S_T 的概率分布为：

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln 40 + \left(0.16 - \frac{0.04}{2}\right)0.5, 0.2\sqrt{0.5}\right]$$

$$\ln S_T \sim \varphi(3.759, 0.141)$$

由于一个正态分布变量取值位于均值左右两个标准差范围内的概率为 95%。因此，置信度为 95%时：

$$3.477 < \ln S_T < 4.041$$

可写作：

$$e^{3.477} < S_T < e^{4.041}$$

或

$$32.36 < S_T < 56.88$$

因此，六个月后股票价格落在 32.36 和 56.88 之间的概率为 95%。

具有对数正态分布的变量可以在 0 和无穷大之间任意取值。图 10.1 表示的是一个对数正态分布的形态。与正态分布不同，对数正态分布的图形是偏的，这是因为它们的均值、中值与模式都是不同的。由方程(10.7)及对数正态分布的特性，可知 S_T 的期望值

$E(S_T)$表示为：

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)} \tag{10.8}$$

这与 μ 作为预期收益率的定义相符。S_T 的方差 $\text{var}(S_T)$可表示为：

$$\text{var}(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \tag{10.9}$$

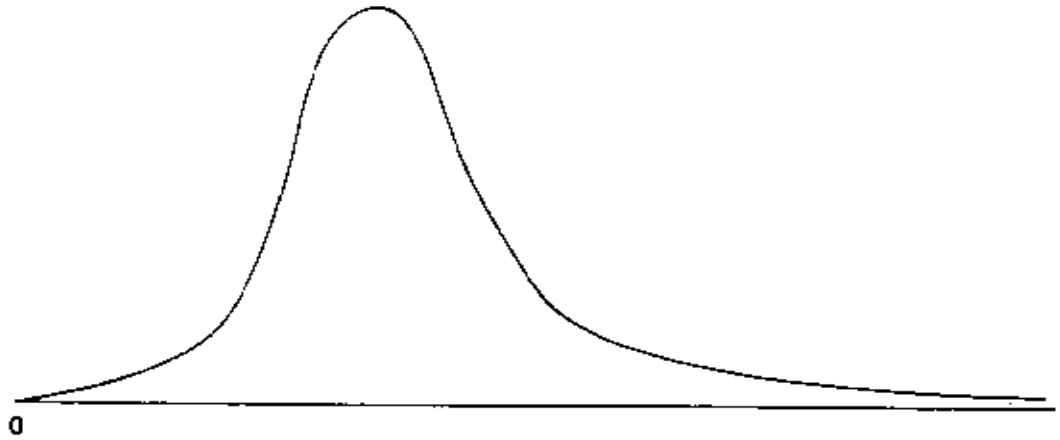


图 10.1 对数正态分布

例 10.2

考虑一种股票，当前价格为 $20，预期收益率为每年 20%，波动率为每年 40%。一年后的期望股票价格 $E(S_T)$和股票价格方差 $\text{var}(S_T)$为：

$$E(S_T) = 20e^{0.2} = 24.43$$
$$\text{var}(S_T) = 400e^{0.4}(e^{0.16} - 1) = 103.54$$

一年后股票价格的标准差为 $\sqrt{103.54}$或 10.18。

10.3 收益率的分布

利用股票价格的对数正态特性，可以获得时间 t 与 T 之间股

票连续复利收益率概率分布的有关信息。将 t 与 T 之间的连续复利年收益率定义为 η[①]，得到：

$$S_T = Se^{\eta(T-t)}$$

和

$$\eta = \frac{1}{T-t}\ln\frac{S_T}{S} \tag{10.10}$$

由于

$$\ln S_T - \ln S = \ln\frac{S_T}{S}$$

方程(10.6)给出：

$$\ln\frac{S_T}{S} \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] \tag{10.11}$$

根据正态分布特性，由方程(10.10)推出：

$$\eta \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right) \tag{10.12}$$

因此，连续复利收益率 η 是均值为 $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$，标准差为 $\frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}$ 的正态分布。

例 10.3

考虑一种股票预期收益率为每年 17%，波动率为每年 20%。三年后得到的实际(连续复利)收益率的概率分布是正态分布，其均值为：

$$0.17 - \frac{0.04}{2} = 0.15$$

或每年 15%，标准差为：

$$\frac{0.2}{\sqrt{3}} = 0.115$$

或每年 11.5%。因为一个正态分布的变量有 95% 的可能性落在其均值两边两个标准差范围内，三年后我们得到的实际收益率每年在 −8% 到 38% 之间

的可信度为95%。

期望收益率是什么?

方程(10.12)结果表明在时间 T－t 后的期望连续复利收益率为 $\mu-\sigma^2/2$。这似乎令人奇怪,因为在第三章中,μ 被定义为在任何短时间段后的收益率的期望值。这和较长时间段后的连续复利收益率的期望值有什么不同呢? 为理解这两者之间的不同,我们来看一个数值的例子。假设如下某个股票随后 5 年的年收益率,用年复利计:

$$15\%, 20\%, 30\%, -20\%, 25\%$$

这些收益的算术平均值等于 5 个值的总和再除以 5,结果为14%。然而,如果一个投资者将其资金投入该股票长达 5 年,那么实际上他或她每年的收益将少于 14%。$100 的价值 5 年后将为:

$$100 \times 1.15 \times 1.20 \times 1.30 \times 0.80 \times 1.25 = 179.40$$

与之不同,年复利为 14% 的收益应该给出:

$$100 \times 1.14^5 = 192.54$$

这个例子说明了一个一般性的结论:几年内收益的平均值并不等于几年内按年复利计算的每年平均收益。除非每年的收益恰巧相等,否则,总是前者大于后者[②]。用年复利表示的投资者实际的平均收益为:

$$(1.7940)^{1/5} - 1 = 0.124$$

或每年 12.4%。

当然,这个例子对于时间长度为一年的情况则没有这么复杂了。假设计算收益的时间长度逐渐缩短,而观察的次数增加,我们可以计算如下两个估计值:

1. 在很短时间后的预期收益率(可以通过计算许多很短时间间隔的收益的算术平均值得到)。

2. 在较长时间后的预期连续复利收益率(可以通过在数据覆盖的整个时期上用连续复利计算总收益得到)。

与刚才的例子类似,我们知道状况 1 的估计将大于状况 2 的估计。我们早些的结果表明事实就是如此。无限短时间的预期收益率为 μ,预期连续复利收益率为 $\mu-\sigma^2/2$。

讨论表明"预期收益"的说法是模棱两可的,既可以指 μ 也可以指 $\mu-\sigma^2/2$。除非另外说明,本书中我们规定它指的是 μ。

10.4 从历史数据估计的波动率

为根据历史数据估计股票价格的波动率,观察股票价格的时间间隔通常是固定的(例如每天、每周和每月)。

定义:

$n+1$:观察次数

S_i:在第 i 个时间间隔末的股票价格

τ:以年为单位表示的时间间隔的长度

令:

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

其中,$i=1,2,\cdots,n$

因为 $S_i=S_{i-1}e^{u_i}$,u_i 为第 i 个时间间隔后的连续复利收益(并不是以年为单位)。u_i 的标准差 s 的通常估计值为:

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}$$

或

$$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}u_i\right)^2}$$

其中 $\bar{u}$ 为 u_i 的均值。

由方程(10.11)可知，u_i 的标准差为 $\sigma\sqrt{\tau}$。因此变量 s 是 $\sigma\sqrt{\tau}$ 的估计值。σ 本身可被估计为 s^*，其中：

$$s^*=\frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

此估计的标准误差近似为 $\frac{s^*}{\sqrt{2n}}$。

选择一个合适的 n 值并不容易。然而数据越多，一般来说获得的精度越高。但是，σ 确实随时间而变化，太过长远的历史数据对于预测将来可能不起作用了。一个效果似乎相当不错的解决办法是使用近 90 天到 180 天的每日数据收盘价格。在估计或使用波动率参数时一个重要的问题是究竟是以日历天数计算还是以交易天数计算。在本章的后面我们将知道，至今为止的经验表明应当采用交易天数。换句话说，计算波动率的时候应扣除交易所闭市的天数。

例 10.4

表 10.1 给出了 20 个交易日的股票价格的一个可能序列。由于：

$$\sum u_i=0.09531,\qquad \sum u_i^2=0.00333$$

得到日收益标准差的估计值为：

$$\sqrt{\frac{0.00333}{19}-\frac{0.09531^2}{380}}=0.0123$$

假设以交易日为计算基础，每年有 250 个交易日，所以 $\tau=1/250$，以上数据给出的每年波动率估计值就是 $0.0123\sqrt{250}=0.194$。估计的波动率为每年 19.4%，这个估计的标准误差为：

$$\frac{0.194}{\sqrt{2\times 20}} = 0.031$$

或每年 3.1%。

表 10.1　波动率的计算

天	股票收盘价格（$）	相对股票价格 (S_i/S_{i-1})	每日收益 $u_i = ln(S_i/S_{i-1})$
0	20		
1	$20\frac{1}{8}$	1.00625	0.00623
2	$19\frac{7}{8}$	0.98758	-0.01250
3	20	1.00629	0.00627
4	$20\frac{1}{2}$	1.02500	0.02469
5	$20\frac{1}{4}$	0.98781	-0.01227
6	$20\frac{7}{8}$	1.03086	0.03040
7	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
8	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
9	$20\frac{3}{4}$	0.99401	-0.00601
10	$20\frac{3}{4}$	1.00000	0.00000
11	21	1.01205	0.01198
12	$21\frac{1}{8}$	1.00595	0.00593
13	$20\frac{7}{8}$	0.98817	-0.01190
14	$20\frac{7}{8}$	1.00000	0.00000
15	$21\frac{1}{4}$	1.01796	0.01780

16	$21\frac{3}{8}$	1.00588	0.00587
17	$21\frac{3}{8}$	1.00000	0.00000
18	$21\frac{1}{4}$	0.99415	−0.00587
19	$21\frac{3}{4}$	1.02353	0.02326
20	22	1.01149	0.01143

这些分析假设股票不支付红利,但它同样适用于支付红利的股票。包含除权日在内的一个时间间隔的收益 u_i 可表示为:

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

其中 D 为红利数量。其它时间间隔的收益仍为:

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

然而,由于除权的税收因素对于收益的确定有一定的作用,所以我们最好舍弃所有包含除权日的时间段的数据。

10.5 利用简单二叉树模型对期权定价

本节我们给出了一个例子,说明在一种特别简单的情况下如何为欧式看涨期权定价。这个例子有助于更深入理解 Black - Scholes 微分方程。

假设一种股票当前价格为 $20,我们知道一个月后价格将可能为 $22 或 $18。考虑一种 1 个月后以 $21 执行价格买入股票的欧式看涨期权。若到时股票价格为 $22,期权的价值将是 $1;若股票价格为 $18,期权的价值将是 0。这种情况如图 10.2 所

示。

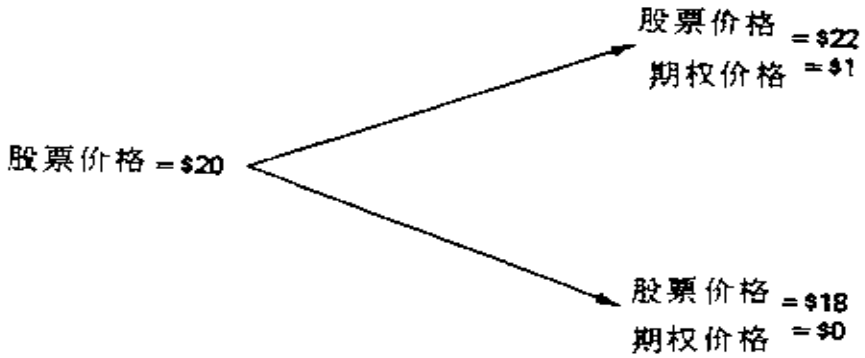


图 10.2　股票价格运动

考虑一种有价证券组合，该组合包含一个 α 股股票多头头寸和一个看涨期权的空头头寸。当股票价格上升时，有价证券组合的价值为 22α－1；当股票价格下降时有价证券组合的价值为 18α。如果选取 α 等于 0.25，这两个值相等：

$$18\alpha = 22\alpha - 1 = 4.5$$

因此对于 α 的这一取值，证券组合处于无风险状态，无论一个月后发生什么情况，它的价值总是 $4.5。当 α＝0.25 时，证券组合的当前值为：

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

其中 f 为看涨期权的当前价值。在无套利机会的情况下，无风险证券组合的盈利必定为无风险利率。设无风险利率为每月 1%（月复利），得到：

$$1.01(5 - f) = 4.5$$

或

$$f = 5 - \frac{4.5}{1.01} = 0.5445$$

即期权的当前价值为 $0.5445。

读者可能会奇怪在这一解答中，没有用到股票上涨到 $22 和下降到 $18 的概率。关于这一点我们将在 10.8 节中继续讨论。

10.6 Black－Scholes 微分方程的基本概念

Black－Scholes 微分方程是基于不付红利股票的任意一种衍生证券的价格 f 必须满足的方程。该方程在下一节中进行推导。这里我们考虑使用的方法的特性。

基本上，这里的方法与前一节中用来为一种简单情况下的期权定价的方法十分相似。一种无风险证券组合包含一些衍生证券头寸和一个股票头寸，建立一个这样的证券组合并设定其收益率等于无风险利率。在 Black－Scholes 分析中，建立的证券组合仅在很短的时期内保持无风险状态，而可以证明：如果无套利机会，这一段短期的收益必定为无风险利率。

可以建立无风险证券组合的原因是股票价格和衍生证券的价格都受同一种基本的不确定性的影响。这意味着经过任意一个短时期，两者高度相关。如果建立了一种恰当的股票和衍生证券的证券组合，股票头寸的盈利（损失）总是会与衍生证券的损失（盈利）相抵消，因而在短时期末证券组合的总价值也就确定了。

假设

推导 Black－Scholes 微分方程用到的假设如下：

1. 股票价格遵循第九章讨论的 μ、σ 为常数的随机过程。
2. 允许使用全部所得(proceeds)卖空衍生证券。
3. 没有交易费用或税收。所有证券都是高度可分的。
4. 在衍生证券的有效期内没有红利支付。
5. 不存在无风险套利机会。
6. 证券交易是连续的。
7. 无风险利率 r 为常数且对所有到期日都相同。

如第十七章将要讨论的，有些假设条件可以放松，比如 μ、r 和 σ 可以是 t 的函数。

10.7 Black－Scholes 微分方程的推导

我们现在来推导 Black－Scholes 微分方程。我们假设股票价格 S 遵循第九章中讨论的随机过程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{10.13}$$

假设 f 是依赖于 S 的衍生证券的价格。变量 f 一定是 S 和 t 的某一函数。因此从方程(10.4)可得：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{10.14}$$

方程(10.13)和(10.14)的离散形式为：

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta t \tag{10.15}$$

和

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S \Delta z \tag{10.16}$$

其中 ΔS 和 Δf 是 S 和 f 在短时间间隔 Δt 后的变化量。从 10.1 节 ITO 定理的讨论中可知 f 和 S 遵循的维纳过程相同。也就是说，方程(10.15)和(10.16)中的 $\Delta z(=\epsilon\sqrt{\Delta t})$相同。所以选择某种股票和衍生证券的证券组合就可以消除维纳过程。

恰当的证券组合应该是：

-1：　衍生证券

$+\frac{\partial f}{\partial S}$：　股票

此证券组合的持有者卖出一份衍生证券，买入数量为 $-\frac{\partial f}{\partial S}$的股票。定义证券组合的价值为 Π。根据定义：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \tag{10.17}$$

Δt 时间后证券组合的价值变化 $\Delta\Pi$ 为：

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S \tag{10.18}$$

将方程(10.15)和(10.16)代入方程(10.18)，得到：

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t \tag{10.19}$$

因为这个方程不含有 Δz，经过 Δt 后证券组合 Π 必定没有风险。从上一节中列出的假设可以得出该证券组合的瞬时收益率一

定与其它短期无风险证券收益率相同。如果该证券组合的收益率大,套利者就可以通过卖出无风险证券然后用其收入购买该证券组合来获取无风险利益;如果该证券组合的收益率小,套利者就可以通过卖出该证券组合购买无风险证券来获取无风险利益。所以结果应该是:

$$\Delta \prod = r \prod \Delta t$$

其中 r 为无风险利率。再由方程(10.17)和(10.19)可以得到:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

化简为:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (10.20)$$

方程(10.20)是 Black－Scholes 微分方程。对应于所有的可用标的变量 S 定义的不同衍生证券,此方程有许多解。解方程时得到的特定的衍生证券取决于使用的边界条件(boundary conditions)。这些边界条件确定了在 S 和 t 的可能取值的边界上衍生证券的价值。对于欧式看涨期权的情况,关键的边界条件为:

$$f = \max(S - X, 0) \text{ 当 } t = T \text{ 时}$$

对于欧式看跌期权,边界条件为:

$$f = \max(X - S, 0) \text{ 当 } t = T \text{ 时}$$

在方程(10.20)的推导过程中,应当强调的一点是:证券组合 Π 并不是永远无风险。只是对于无限短时间间隔内,它才是无风险的。当 S 和 t 变化时,$+\frac{\partial f}{\partial S}$也会变化。为保持证券组合无风险,

有必要连续调整证券组合中衍生证券与股票的相对比例。

例 10.5

基于不付红利的股票的远期合约是一个依赖于股票价格的衍生证券，所以它应当满足方程(10.20)。由方程(3.6)，远期合约的价值 f 为：

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

其中 K 为交割价格。这意味着：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

把这些代入方程(10.20)的左边，得到

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

它等于 rf，表明满足方程(10.20)。

10.8 风险中性定价

毫无疑问，风险中性定价是衍生证券分析的一个最重要工具。它来源于 Black－Scholes 微分方程(10.20)的一个关键性质。这一性质是该方程不包含任何受投资者的风险偏好影响的变量。方程中出现的变量为股票当前价格、时间、股票价格方差和无风险利率。它们都独立于风险偏好。

如果 Black－Scholes 微分方程包含股票的预期收益 μ，那么它将不独立于风险偏好。因为 μ 的值确实依赖于风险偏好。对于任何给定股票，投资者厌恶风险程度越高，μ 的值就应该越大。而幸运的是，在方程的推导过程中，μ 恰巧被消掉了。

Black－Scholes 微分方程独立于风险偏好这一事实使我们可以使用一个很巧妙的论点。如果方程中不存在风险偏好，那么风

险偏好将不会对其解产生影响。因此,在对 f 进行定价时,我们可以使用任何一种风险偏好,特别是,可以提出一个非常简单的假设:所有的投资者都是风险中性的。

在一个所有投资者都是风险中性的世界里,所有证券的预期收益率皆为无风险利率 r。因为风险中性的投资者并不需要某种补偿促使他们承担风险。而且在风险中性的世界中,将其期望值用无风险利率贴现可获得任何现金流的现值。世界是风险中性的假设确实很大程度上简化了衍生证券的分析。考虑一种衍生证券比如欧式期权,它支付数量是在 T 时刻股票价格的函数。首先,在股票的预期收益为 r 而非 μ 的假设前提下,计算 T 时刻衍生证券的期望值。用 r 作为贴现率,将这个期望值贴现到当前时间。

我们应当认识到,风险中性的假设是仅有一个求解 Black－Scholes 微分方程的人为假设,获得的方程解对于所有世界都有效,而不仅仅是风险中性世界。当我们从风险中性世界进入到风险厌恶世界时会发生两件事情:股票价格的期望增长率改变了;在衍生证券任何损益中所用的贴现率改变了。然而这两件事的效果总是正好相互抵消。

修改的二叉树模型

本节我们继续讨论 10.5 节中考虑的例子。已知股票现价为 $20,一个月后可能上涨为 $22 或下降为 $18。本例中的衍生证券为一份执行价格为 $21 的看涨期权。

一个具有启发性的事实是:在 10.5 节得到 $0.5445 期权价格的过程中,一直没有使用股票价格上涨为 $22 和下降到 $18 的概率。这就意味着期权价格独立于股票的预期收益。与 10.9 节的观察相一致,Black－Scholes 微分方程独立于股票的预期收益。

现在我们来证明看涨期权价格可以通过风险中性定价来得到。在风险中性世界中,股票的预期收益率一定等于无风险利率

每月 1%。所以上涨运动的概率 p 一定满足：

$$22p + 18(1 - p) = 20 \times 1.01$$

即，p 一定为 0.55。使用这个 p 值，计算出一个月后看涨期权的期望价格为：

$$0.55 \times 1 + 0.45 \times 0 = \$0.55$$

这是在风险中性世界中看涨期权期望最终价值。用无风险利率贴现后，这个期望值的现值为：

$$\frac{0.55}{1.01} = 0.5445$$

或 $0.5445，同 10.5 节得到的值相同。因此无风险套利理论和风险中性定价方法的结果相同。可以证明对于二叉树模型它总是成立的。正如 9.6 节讨论的，几何布朗运动可视为二叉树模型的极限情况。因此，风险中性定价对于二叉树模型恒成立的证明方法也可证明当股票价格遵循几何布朗运动时风险中性定价成立。

应用于股票远期合约

在 3.2 节中已为基于不付红利的股票远期合约进行了定价。作为风险中性定价的一个简单例子，本节中我们对其再进行一次定价。我们假设利率为常数，等于 r。这在某种程度上比 3.2 节中的假设更严格一些。考虑购买一个交割价格为 K，在 T 时刻到期的远期合约。如第一章中讨论结果，到期日远期合约的价值为：

$$S_T - K$$

其中，S_T 为时刻 T 的股票价格。由风险中性定价讨论可知，在风险中性世界中，t 时刻（$t < T$）远期合约的价值等于 T 时刻的期望价值以无风险利率贴现到 t 时刻的现值。用 f 表示远期合约

在 t 时刻的价值，这意味着：

$$f = e^{-r(T-t)} \hat{E}(S_T - K) \tag{10.21}$$

其中，$\hat{E}$ 表示风险中性世界中的期望值。由于 K 为常数，方程(10.21)化为：

$$f = e^{-r(T-t)} \hat{E}(S_T) - Ke^{-r(T-t)} \tag{10.22}$$

在风险中性世界中，股票价格增长率 μ 成为 r，由方程(10.8)得：

$$\hat{E}(S_T) = Se^{r(T-t)} \tag{10.23}$$

将方程(10.23)代入方程(10.22)中，得到：

$$f = S - Ke^{-r(T-t)} \tag{10.24}$$

这个结果与方程(3.6)一致。例 10.5 说明了这个 f 的表达式满足 Black－Scholes 微分方程。

10.9 Black－Scholes 定价公式

在 Black 和 Scholes 那篇突破性的论文中，他们成功地求解了他们的微分方程，得到了欧式看涨期权和看跌期权定价的精确公式，这些公式表示在方程(10.27)和(10.28)中。本节我们将讨论刚刚用于远期合约的简单分析怎样用来推导期权定价公式。

在风险中性世界里，欧式看涨期权到期日的期望价值为：

$$\hat{E}[\max(S_T - X, 0)]$$

其中，$\hat{E}$ 表示风险中性世界中的期望值。在风险中性定价讨

论中可知，欧式看涨期权的价格 c 是这个值以无风险利率贴现的结果：

$$c = e^{-r(T-t)} \hat{E}[\max(S_T - X, 0)] \qquad (10.25)$$

在风险中性世界里，$\ln S_T$ 具有方程(10.7)的概率分布，只要将 μ 换成 r，即：

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] \qquad (10.26)$$

对方程(10.25)右边求值是一种积分过程[③]，结果为：

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (10.27)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

N(x)为标准正态分布变量的累计概率分布函数(即这个变量小于 x 的概率)。

由于 c = C，方程(10.27)也给出了基于不付红利股票的美式看涨期权的价值。欧式看跌期权的价值可用与欧式看涨期权类似的方式计算出，也可以使用看涨期权与看跌期权之间的平价关系(见第七章)来求得。结果为：

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \qquad (10.28)$$

但不幸的是，对于基于不付红利股票的美式看跌期权定价还没有得出一个精确的解析公式。我们将在第十四章中讨论计算美

式看跌期权价值的数值算法和解析近似解。

注意为推导方程(10.27)和(10.28),我们假设 r 为常数。实际上,使用这些方程的时候,对于持续时间为期权整个有效期 T－t 的投资,我们令 r 等于无风险利率。

Black－Scholes 公式的性质

现在我们通过考虑某些参数取极端值情况说明 Black－Scholes 公式具有的很一般的性质。

当股票价格 S 变得很大时,看涨期权肯定会被执行。这时它与执行价格为 X 的远期合约非常相似。根据方程(3.6)我们期望看涨期权价格为:

$$S - Xe^{-rT}$$

这实际上就是方程(10.27)给出的看涨期权的价格。因为,当 S 非常大时,d_1 和 d_2 也都变得相当大,$N(d_1)$和 $N(d_2)$都近似为 1.0。

当股票价格变得很大时,欧式看跌期权的价格 p 趋近于 0。这与方程(10.28) 一致,因为 $N(-d_1)$和 $N(-d_2)$都近似为 0。

下面再考虑当波动率趋近于 0 的情况。由于股票实际上是没有风险的,它的价格将以 r 增长到 T 时刻的 Se^{rT},从看涨期权得到的盈利状况为:

$$\max(Se^{rT} - X, 0)$$

用贴现率 r 贴现,看涨期权今天的价值为:

$$e^{-rT}\max(Se^{rT} - X, 0)$$
$$= \max(S - Xe^{-rT}, 0)$$

为证明它与方程(10.27)一致，首先考虑 $S>Xe^{-rT}$ 的情况，即 $\ln(S/X)+rT>0$。由于 σ 趋近于 0，d_1，d_2 趋近于 $+\infty$，所以，$N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 趋近于 1.0，方程(10.27)成为

$$c = S - Xe^{-rT}$$

当 $S<Xe^{-rT}$，即 $\ln(S/X)+rT<0$。由于 σ 趋近于 0，d_1，d_2 趋近于 $-\infty$，所以，$N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 趋近于 0，方程(10.27)给出的看涨期权价格为 0。因此当 σ 趋近于 0 时，看涨期权的价格总是 $\max(S-Xe^{-rT},0)$。同样，可以证明当 σ 趋近于 0 时看跌期权的价格恒为 $\max(Xe^{-rT}-S,0)$。

10.10 累积正态分布函数

在应用方程(10.27)和(10.28)时唯一一个问题就是累计正态分布函数 N 的计算。在本书的末尾提供了 N(x)的表。该函数也可直接用数值方法求解，或者，也可用多项式近似。一种使用计算器就可以容易求得 N(x)近似值的公式如下：

$$N(x)=\begin{cases}1-N'(x)(a_1k+a_2k^2+a_3k^3) & \text{当 } x\geqslant 0\\ 1-N(-x) & \text{当 } x<0\end{cases}$$

其中

$$k=\frac{1}{1+\gamma x}$$

$$\gamma = 0.33267$$

$$a_1 = 0.4361836$$

$$a_2 = -0.1201676$$

$$a_3 = 0.9372980$$

且

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

这种近似计算出的N(x)值通常可以精确到小数点后四位，经常可达到0.0002。对于小数点后六位的精确度，则可以使用下面的公式：

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x)(a_1k + a_2k^2 + a_3k^3 + a_4k^4 + a_5k^5) & \text{当 } x \geqslant 0 \\ 1 - N(-x) & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

其中

$$k = \frac{1}{1 + \gamma x}$$

$$\gamma = 0.2316419$$

$$a_1 = 0.319381530$$

$$a_2 = -0.356563782$$

$$a_3 = 1.781477937$$

$$a_4 = -1.821255978$$

$$a_5 = 1.330274429$$

N'(x)的定义如前。

例 10.6

考虑一种期权，还有六个月的有效期，股票现价为$42，期权的执行价格为$40，无风险利率为每年10%，波动率为每年20%。即S=42，X=40，r=0.10，σ=0.20，T−t=0.5。

$$d_1 = \frac{\ln 1.05 + 0.12 \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2 = \frac{\ln 1.05 + 0.08 \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

并且

$$Xe^{-r(T-t)} = 40e^{0.05} = 38.049$$

因此，若该期权为欧式看涨期权，它的价值 c 为：

$$c = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278)$$

若该期权为欧式看跌期权，它的价值 p 为：

$$p = 38.049N(-0.6278) - 42N(-0.7693)$$

用一种多项式近似，得：

$$N(0.7693) = 0.7791, \quad N(-0.7693) = 0.2209$$
$$N(0.6278) = 0.7349, \quad N(-0.6278) = 0.2651$$

所以

$$c = 4.76, \quad p = 0.81$$

要使看涨期权的购买者达到盈亏平衡，股票价格必须上涨 $2.76；同样，使看跌期权的购买者达到盈亏平衡，股票价格必须下降 $2.81。

10.11 公司发行的本公司股票认股权证

对股票稀释的影响作出某些调整后，Black－Scholes 公式就可以用于对某公司发行的本公司股票欧式认股权证进行定价。考虑一个公司拥有 N 股发行在外的流通股股票和 M 份流通的欧式认股权证。假设每份认股权证可使其持有者在 T 时刻以每股 X 的执行价格向该公司购买 γ 股股票。

若 T 时刻该公司的股权值为 V_T，认股权证的持有者执行了认股权，由于执行价格为 MγX，该公司获得了一笔现金流收入，公司股权值增长到 $V_T + M\gamma X$。这个值在 N + Mγ 股中分配，所以认股权证执行后的瞬间股票价格成为：

$$\frac{V_T + M\gamma X}{N + M\gamma}$$

因此，认股权证持有者的盈利收入为：

$$\gamma\left[\frac{V_T + M\gamma X}{N + M\gamma} - X\right]$$

或者

$$\frac{N\gamma}{N + M\gamma}\left[\frac{V_T}{N} - X\right]$$

只有当盈利为正时，认股权证才会被执行。所以，认股权证持有者的盈利为：

$$\frac{N\gamma}{N + M\gamma}\max\left[\frac{V_T}{N} - X, 0\right]$$

这说明了认股权证的价值是

$$\frac{N\gamma}{N + M\gamma}$$

份基于 V/N 的常规看涨期权的价值，其中 V 是该公司的股权价值。

V 的值可由下式计算：

$$V = NS + MW$$

其中，S 是股票价格，W 是认股权证的价格，所以：

$$\frac{V}{N} = S + \frac{M}{N}W$$

如果：

1. 股票价格 S 用 S+(M/N)W 替换
2. 波动率 σ 为公司股权的波动率(即是股票加上认股权证的

总价值的波动率，而不仅仅是股票的波动率）

3．公式再乘以 $N\gamma/(N+M\gamma)$

那么方程(10.27)的 Black－Scholes 公式就可以求出认股权证的价格 W。

在作了以上调整后，我们就可以得到用 W 表示的求解认股权证价格 W 的公式。这可以用数值方法求解。

10.12 隐含波动率

在 Black－Scholes 定价公式中，不能直接观察到的一个参数是股票价格的波动率。在 10.4 节中我们已经讨论了如何从股票价格的历史数据来估计波动率。本节中我们可以引入另一种使用隐含波动率(implied volatility)的方法。隐含波动率是指在市场中观察的期权价格蕴含的波动率。

为解释这一方法的基本思路，我们假设当 $S=21$，$X=20$，$r=0.10$，$T-t=0.25$ 时一种基于不付红利股票的看涨期权的价值为 1.875。隐含波动率是将以上数据代入方程(10.27)中使得 $c=1.875$ 的 σ 的取值。不幸的是，我们却不能直接解出方程(10.27)，使得 σ 表示为 S、X、r、T－t 和 c 的函数形式。然而，我们可以用插值计算方法得到隐含波动率 σ。开始时我们可以令 $\sigma=0.20$，这个值使得 c 的值等于 1.76，比 1.875 小。由于 c 是 σ 的增函数，我们需要选取大一些的 σ 值。接着令 $\sigma=0.30$，得到 c 的值等于 2.10，比 1.875 大，所以可以判断 σ 是在 0.20 和 0.30 之间的值。然后，试着令 σ 的值为 0.25，结果也偏大，所以 σ 应该在 0.20 和 0.25 之间。用这种方法继续下去，每次查找可以缩小 σ 的范围，这样对任意要求精度都可计算出 σ 正确值[④]。在本例中，隐含波动率 σ 为每年 0.235 或 23.5%。

隐含波动率可以用来监视市场对于某一特定股票波动率的态

度。隐含波动率确实随时间变化。它们也可以用来根据某一期权的价格估计另一个期权的价格。通常,可以同时得到基于同一种股票的几种不同期权的几个隐含波动率,然后对这些隐含波动率进行恰当的加权平均就可以计算出该股票的综合隐含波动率。计算中给出的每个隐含波动率的权重数量应当反映相应期权价格对波动率的敏感性。为说明这一点,让我们假设已知两个隐含波动率估计。第一个为每年21%,对应于一个两平期权;第二个为每年26%,对应于一个处于深度虚值状态的期权,两种期权到期日相同。两平期权的价格对波动率的敏感程度要比深度虚值期权价格对波动率的敏感程度大得多。因此,它为"真实的"隐含波动率提供了更多的信息。我们有可能选择两平期权的隐含波动率的权重为0.90,而虚值期权的隐含波动率的权重为0.10。加权平均隐含波动率则为:

$$0.90 \times 0.21 + 0.10 \times 0.26 = 0.215$$

或每年21.5%。Latane和Rendleman,Chiras和Manaster,Whaley都讨论了其它的加权方案。Becker则在检验了各种加权方案后得出结论:只要使用期权价格对σ最敏感的期权就可以得到最好的结果。根据Becker方法在刚才的例子中波动率的估计应为21%。

10.13 波动率产生的原因

有效市场假设的拥护者们一直都认为股票价格波动率仅仅是由于股票的未来收益的新消息的随机到来而产生的。其他人则认为波动率主要由交易本身产生。因此,一个有趣的问题是:波动率在交易所开市和闭市的时候是否相同?

Fama和K.French用实际数据检验了这个问题。他们收集了很长一段时间内每一交易日收盘时的股票价格数据,计算了:

1.在中间不包含非交易日的两个连续的交易日收盘之间的

股票价格收益方差。

2. 在周五收盘与周一收盘之间股票价格收益方差。

如果交易日和非交易日是等价的，在情况 2 中的方差应该是情况 1 中方差的三倍。Fama 发现情况 2 中的方差仅比情况 1 中高出 22%。French 的结果也是同样的，他的结果是高出 19%。

这些结果意味着波动率在交易所开市的时候比闭市的时候大得多。波动率仅由新消息引起的传统观点拥护者可能争辩说多数有关股票的新消息是在交易时刻到达的[5]。但是对于主要依靠天气的农产品的期货价格的研究表明，它们与股票价格表现出同样的行为方式，即：在交易时间中它们变化得更厉害。按照推测，每天产生关于天气的消息的可能性应当是相同的。看起来唯一合理的解释就是波动率在某种程度上由交易本身产生。

所有这些对于波动率的计算和 Black－Scholes 模型有什么意义呢？如果用每日的数据计算方差，以上结果说明交易所闭市的日子可以扣除。每年的波动率由每个交易日的波动率计算得到。计算公式为：

$$\text{每年波动率} = \text{每交易日波动率} \times \sqrt{\text{每年的交易日数}}$$

这就是 10.4 节中使用的方法。

虽然波动率似乎是一种主要与交易日有关的现象，利息则是按公历日计算的。因此，D. French 建议在进行期权定价时应计算两种时间尺度：

$$\tau_1: \frac{\text{到期前的交易日天数}}{\text{每年交易日天数}}$$

$$\tau_2: \frac{\text{到期前的公历日天数}}{\text{每年公历日天数}}$$

Black－Scholes 公式也应调整为：

$$c = SN(d_1) - Xe^{-r\tau_2}N(d_2)$$

和

$$p = Xe^{-r\tau_2}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + r\tau_2 + (\sigma^2/2)\tau_1}{\sigma\sqrt{\tau_1}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + r\tau_2 - (\sigma^2/2)\tau_1}{\sigma\sqrt{\tau_1}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau_1}$$

事实上，除非很短期的期权，这种调整并没有带来多少差别。

10.14　红　利

到目前为止，我们一直假设期权的标的股票不支付红利。实际上并不总是如此。本节我们假设在期权有效期期间支付的红利可以确定地预测。由于典型的可交易期权持续时间少于9个月，这个假设可以说有一定道理。

除了在股票付红利的时候，我们可以合理地认为一种支付红利的股票是遵循第九章讨论的随机过程。在股权除权这一时点，股票价格将下降，下降幅度是每股支付的红利的数量。因为税收的因素，股票价格下降的数量比支付每股红利的现金数额要小一些。考虑这一点，本节中“红利”这个词应被解释为在除权日由红利引起的股票价格的减少量。因此，若预计每股有$1的红利，在除权日股票价格一般下降为红利的80%，为本节分析的目的，红利应定为$0.80。

欧式期权

为了分析欧式期权，我们假设股票价格是以下两个部分的总和：用来在期权的有效期中支付已知红利的无风险部分和一个有风险部分。任意给定时刻的无风险部分是在期权有效期中所有的红利以无风险利率从除权日贴现到当前时间的现值。期权到期时由红利决定的无风险部分就会消失。所以如果令 S 等于风险部分股票价格，σ 等于风险部分遵循随机过程的波动率[6]，Black－Scholes 公式仍是适用的。也就是说，假如股票价格减掉期权有效期中所有红利按无风险利率从除权日开始贴现的现值，就可以使用 Black－Scholes 公式。实际操作中，只有当在期权有效期中遇到除权日，才将红利纳入计算当中。

例 10.7

考虑一种欧式股票看涨期权，其标的股票在 2 个月和 5 个月后各有一个除权日。每个除权日的红利期望值为 $0.50。当前股票价格为 $40，执行价格为 $40，股票价格波动率为每年 30%，无风险利率为每年 9%，到期时间还有 6 个月。红利的现值为：

$$0.5e^{-0.1667\times0.09}+0.5e^{-0.4167\times0.09}=0.9741$$

由于 $S=39.0259, X=40, r=0.09, \sigma=0.3, T-t=0.5$，因此，期权价格可以由 Black－Scholes 公式求出。

$$d_1=\frac{\ln 0.9756+0.135\times0.5}{0.3\sqrt{0.5}}=0.2017$$

$$d_2=\frac{\ln 0.9756+0.045\times0.5}{0.3\sqrt{0.5}}=-0.0104$$

用 10.10 节的多项式近似可以得到：

$$N(d_1)=0.5800,\qquad N(d_2)=0.4959$$

再由方程(10.27)得看涨期权价格为：

$$39.0259 \times 0.5800 - 40e^{-0.09\times 0.5} \times 0.4959 = 3.67$$

或 $3.67。

美式期权

下面我们考虑美式看涨期权。在这一章前面，我们阐述了一个论点：没有红利支付的情况下这些看涨期权不应该提前执行。将这个论点进一步引申表明：在有红利的情况下，只有在股票付红利前的瞬时时刻执行才最优。我们假设预计有 n 个除权日，$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ 为股票支付红利前的瞬时时刻，$t_1 < t_2 < t_3 \ldots\ldots < t_n$。在这些时刻的红利分别表示为 $D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots D_n$。

我们先来考虑刚好在最后一个除权日(t_n)前提前执行的可能性。如果期权在 t_n 时刻执行，投资者获得：

$$S(t_n) - X$$

若没有执行期权，股票价格下降到 $S(t_n) - D_n$。如方程(7.6)所示，期权的价值大于

$$S(t_n) - D_n - Xe^{-r(T-t_n)}$$

所以，如果：

$$S(t_n) - D_n - Xe^{-r(T-t_n)} \geqslant S(t_n) - X$$

即

$$D_n \leqslant X(1 - e^{-r(T-t_n)}) \qquad (10.29)$$

则在时刻 t_n 执行期权不是最佳选择。另一方面，如果：

$$D_n > X(1 - e^{-r(T-t_n)}) \qquad (10.30)$$

可以证明对于足够大的 $S(t_n)$ 的值，在 t_n 时刻执行期权总是最优的。当最后除权日与期权到期日相当接近(即 $T - t_n$ 很小)而且红利很大时，(10.30)中的不等式就会被满足。

然后考虑时刻 t_{n-1}，即倒数第二个除权日。如果期权在时刻 t_{n-1} 执行，投资者得到：

$$S(t_{n-1}) - X$$

如果期权在时刻 t_{n-1} 没有执行，股票价格下降到 $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$。最接近的下一次能够执行的时间为 t_n。因此，由方程(7.6)可知，如果在 t_{n-1} 时刻不执行期权，则期权价格的下限为：

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Xe^{-r(t_n - t_{n-1})}$$

所以如果：

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Xe^{-r(t_n - t_{n-1})} \geqslant S(t_{n-1}) - X$$

或

$$D_{n-1} \leqslant X(1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})})$$

则在时刻 t_{n-1} 执行期权不是最优选择。同样，对任意 $i<n$，如果：

$$D_i \leqslant X(1 - e^{r(t_{i+1} - t_i)}) \qquad (10.31)$$

在时刻 t_i 执行期权不是最佳选择。

(10.31)中的不等式近似等价于：

$$D_i \leqslant Xr(t_{i+1} - t_i)$$

假设 X 与股票现价相当接近，要使这个不等式不被满足，股票的红利收入必须近似于或大于无风险利率。事实并不总是如此。

我们可以从分析中得出结论，即在大多数情况下，美式看涨期权提前执行需要考虑的唯一时间是最终的除权日 t_n。而且，如果对于 $i = 1, 2, \ldots, n-1$，不等式(10.31)都成立，不等式(10.29)也

成立，我们可以肯定提前执行不是最佳选择。

Black 的近似

在考虑提前执行期权情况时，Black 提出一种近似处理方法。该方法包括用本节前面介绍的公式分别计算在时刻 T 和 t_n 到期的欧式期权的价格，然后将二者之中较大的值确定为美式期权的价格。大多数情况下，这种近似效果似乎都不错。在附录 10B 中给出了 Roll，Geske 和 Whaley 提出的更精确的处理方法。

例 10.8

考虑例 10.7 中的情况，但假设期权为美式的而不是欧式的。本例中：$D_1 = D_2 = 0.5$，$S = 40$，$X = 40$，$r = 0.09$，t_1 发生在 2 个月后，t_2 发生在 5 个月后：

$$X(1 - e^{-r(t_2 - t_1)}) = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.25}) = 0.89$$

因为这个值大于 0.5，结论[见不等式(10.31)]是在第一个除权日期权不应当执行。

$$X(1 - e^{-r(T - t_2)}) = 40(1 - e^{-0.09 \times 0.0833}) = 0.30$$

因为这个值小于 0.5，结论[见不等式(10.31)]是当期权为深度实值期权时候，应当在第二个除权日提前执行。

我们再用 Black 近似为期权定价。第一笔红利的现值为：

$$0.5e^{-0.1667 \times 0.09} = 0.4926$$

在假设期权于最后除权日前瞬间执行的前提下，期权的价值可用 Black－Scholes 公式来计算，$S = 39.5074$，$X = 40$，$r = 0.09$，$\sigma = 0.30$，$T - t = 0.4167$，期权价值为 $3.52。按照 Black 近似，应当选取这个值和只能在六个月末执行的期权价值中较大的一个。由例 10.7 可知，后者为 $3.67。因此，Black 近似给出美式看涨期权的价值为 $3.67。

Whaley 根据经验检验了基于支付红利股票的美式期权定价

的三个模型:(1)附录 10B 中的公式;(2)Black 模型;(3)本节开头所示的欧式期权定价模型。他用了 15,582 个芝加哥交易所的期权数据。这些模型产生的定价误差均值分别为 1.08%,1.48% 和 2.15%。典型的看涨期权的买卖报价价差大于期权价格的 2.15%。因此,一般来说,所有三个模型运行效果良好而且处于由于交易不完善而使期权市场产生的误差容忍范围内。

直到现在,我们的讨论都是围绕美式看涨期权展开的。对于美式看跌期权的结果就不那么清晰了。红利使得美式看跌期权更不可能提前执行。可以证明,在除权日前瞬间执行美式看跌期权是很不值得的。实际上,如果:

$$D_i \geqslant X(1 - e^{-r(t_{i+1}-t_i)})$$

对于所有 i<n 和

$$D_n \geqslant X(1 - e^{-r(T-t_n)})$$

与前面给出的类似的一个论据证明了看跌期权从不应该提前执行。在其它情况下,必须使用数值方法为看跌期权定价。

10.15 小 结

本章的开头我们检验了第九章介绍的股票价格的随机过程特性。该过程表明给定股票现价,那么它在未来某一时刻的价格是对数正态分布的,还表明一段时间后股票的连续复利收益是正态分布的。我们预测未来的时间越远,未来股票价格的不确定性就越大。股票价格对数的标准差与我们预测未来时间长度的平方根成正比。

为根据经验估计股票价格的波动率,应在固定的时间间隔观察股票价格(例如:每天、每周或每月)。对于每个时间段,求出该

时间段末的股票价格与时间段初的股票价格之比的自然对数。这些对数除以以年计量的时间长度的平方根的标准差就是估计的波动率。通常为计算波动率，在计时的时候应扣除交易所闭市的日子。

通过建立一个包含期权和股票的无风险头寸，可得到任何基于股票的衍生证券价格的微分方程。能够这样操作的原因是衍生证券和期权价格都取决于同一个不确定性的来源。建立的这一头寸仅在很短的时间内保持无风险。但是，如果没有套利机会的话，无风险头寸的收益一定总是无风险利率。

股票的预期收益并没有进入 Black－Scholes 微分方程。这就产生了很有用的"风险中性定价"结果，意思是当为基于股票价格的衍生证券定价时，我们可以假设这个世界是风险中性的。这就意味着我们可以假设股票的预期收益率为无风险利率，然后以无风险利率贴现期望盈利。使用求解微分方程的方法或风险中性定价方法都可以得到欧式看涨期权和看跌期权的 Black－Scholes 方程。

隐含波动率是指将期权市场价格代入 Black－Scholes 期权定价公式时求得的波动率。交易者监视着隐含波动率，有时他们也用从某一期权价格中求得的隐含波动率计算另一种基于同一股票的期权的价格。经验的结果表明股票的波动率在交易所开市的时候比闭市的时候大得多。这说明是交易本身在某种程度上产生了股票价格波动率。

Black－Scholes 结果可以很容易推广到基于支付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权的情况。其步骤是在 Black－Scholes 公式中使用的股票价格用原股票价格减去期权有效期内预计的红利现值来代替，使用的波动率为股票价格减去红利现值的净值的波动率。

理论上，美式看涨期权可能在任何除权日之前的瞬间提前执

行。实际上,通常只需考虑最后一个除权日。Fisch Black 提出了一种近似解,就是让美式看涨期权等于两个欧式看涨期权价格中的较大者。第一个欧式看涨期权与美式看涨期权失效日相同;第二个欧式看涨期权在最后除权日前瞬时结束。在附录 10B 中我们将对一种用到二维正态分布的更精确的方法作一介绍。

附录 10A:ITO 定理的推导

在这个附录里,我们可以看到,ITO 定理可看作是其他更简单结论的自然扩展。考虑一个变量 x 的连续的,可微的函数 G。如果 x 的一个小的变化为 Δx,相应地 G 的一个小的变化为 ΔG,则

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \qquad (10A.1)$$

换句话说,ΔG 大约等于 G 对 x 的变化率乘以 Δx。误差项包括高阶小量 Δx^2。如果要求更精确的话,可以运用 ΔG 的台劳展开式:

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2G}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3G}{dx^3}\Delta x^3 + \cdots$$

连续可微函数 G 有两个变量 x、y,则类似与(10.A)式的结果为:

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y \qquad (10A.2)$$

ΔG 的台劳展开式为

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x dy}\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \cdots \qquad (10A.3)$$

当取 Δx 和 Δy 趋近于零的极限时,(10A.3)式转化为:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy \qquad (10A.4)$$

某个衍生证券是某个自变量遵循随机过程的函数。现在我们将式(10A.4)进行扩展，使它能够包括这些函数。假定变量 x 遵循式(9.4)中的一般 ITO 过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \qquad (10A.5)$$

并且 G 是 x 和时间 t 的函数。与等式(10A.3)相比较，我们得出：

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \qquad (10A.6)$$

运用第九章中的符号，我们将式(10A.5)进行离散化处理，可表示为：

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t) \in \sqrt{\Delta t}$$

或简写为：

$$\Delta x = a\Delta t + b \in \sqrt{\Delta t} \qquad (10A.7)$$

这一等式揭示了式(10A.6)和式(10A.3)之间存在的一个重大的差异。当等式(10A.3)取极限转化为(10A.4)时，由于 Δx^2 项是二阶小量，所以忽略了这一项。从(10A.7)中，导出

$$\Delta x^2 = b^2 \in^2 \Delta t + \Delta t \text{ 的更高阶小量} \qquad (10A.8)$$

该式表明等式(10A.6)中的 Δx^2 项包含 Δt 项，而这一个 Δt 项是不可忽略的。

标准正态分布的方差为 1.0。这意味着：

$$E(\in^2) - [E(\in)]^2 = 1$$

其中 E 表示期望值。由于 $E(\in)=0$，所以 $E(\in^2)=1$。因此 $\in^2\Delta t$ 的期望值为 Δt。同样 $\in^2\Delta t$ 的方差的阶数为 Δt^2，因此，当 Δt 趋向于零时，$\in^2\Delta t$ 变为非随机项且等于该值对 Δt 的期望值。因此，(10A.8)等式右边第一项就变为非随机项，并且当 Δt 趋向于零时等于 b^2dt。等式(10A.6)中当 Δx 和 Δt 趋向于零时，运用

这一最后结果，我们得到：

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt \qquad (10A.9)$$

这就是ITO定理。将等式(10A.5)中的dx代入(10A.9)，得到

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

附录 10B：计算基于支付红利股票的美式看涨期权价值的精确步骤

在 t_1 时刻支付红利 D_1 的股票的美式看涨期权的 Roll、Geske 和 Whaley 的定价公式为：

$$C = (S - D_1e^{-r\tau_1})N(b_1) + (S - D_1e^{-r\tau_1})M\left(a_1, -b_1; -\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}\right)$$

$$- Xe^{-r\tau}M\left(a_2, -b_2; -\sqrt{\frac{\tau_1}{\tau}}\right) - (X - D_1)e^{-r\tau_1}N(b_2) \qquad (10B.1)$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln[(S - D_1e^{-r\tau_1})/X] + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$b_1 = \frac{\ln[(S - D_1e^{-r\tau_1})/\bar{S}] + (r + \sigma^2/2)\tau_1}{\sigma\sqrt{\tau_1}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{\tau_1}$$

$$\tau_1 = t_1 - t$$

$$\tau = T - t$$

函数 $M(a,b;\rho)$ 是标准二维正态分布的累积概率，这个二维正态分布的第一个变量小于 a，第二个变量小于 b，两个变量之间的相关系数为 ρ。变量 $\bar{S}$ 是方程

$$c(\bar{S}, t_1) = \bar{S} + D_1 - X$$

的解。其中 $c(S, t_1)$ 代表当 $S = \bar{S}$ 且 $t = t_1$ 时由(10.27)得出的 Black-Scholes 期权的价格。当提早执行并不明智时，$\bar{S} = \infty$。在这种情况下中，$b_1 = b_2 = -\infty$，以 $S - D_1 e^{-rt_1}$ 代替 S，则式(10B.1)化简为 Black-Scholes 期权公式。在其它情况下，$\bar{S} < \infty$，当 $S(t_1) > \bar{S} + D_1$ 时，应在 t_1 时刻执行期权。

当预期存在几期红利时，只有在最后一个除息日(参见 10.14 节)提早执行期权才可能是明智的。因此，可以运用 Roll、Geske 和 Whaley 公式，其中 S 要减去除最后红利外的所有红利的现值。变量 D_1 应等于最后的红利，t_1 应为最后的除息日期。

Drezner 提供了一个更为简便的方法以供计算机编程来计算 $M(a,b;\rho)$，其精确度为万分之一。如果 $a \leqslant 0, b \leqslant 0$，且 $\rho \leqslant 0$，

$$M(a,b;\rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^{4} A_i A_j f(B_i, B_j)$$

其中，

$$f(x,y) = \exp[a'(2x - a') + b'(2y - b') + 2\rho(x - a')(y - b')]$$

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}, \qquad b' = \frac{b}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$$

$$A_1 = 0.3253030, \qquad B_1 = 0.1337764,$$

$$A_2 = 0.4211071, \qquad B_2 = 0.6243247,$$

$$A_3 = 0.1334425, \qquad B_3 = 1.3425378,$$

$$A_4 = 0.006374323, \qquad B_4 = 2.2626645$$

在其它 a、b 和 ρ 乘积为负或为零的情况下，可以运用下列等式之一：

$$M(a,b;\rho) = N(a) - M(a,-b;-\rho)$$

$$M(a,b;\rho) = N(b) - M(-a,b;-\rho)$$

$$M(a,b;\rho) = N(a) + N(b) - 1 + M(-a,-b;\rho)$$

当 a、b 和 ρ 乘积为正时，下面的公式：

$$M(a,b;\rho) = M(a,0;\rho_1) + M(b,0;\rho_2) - \delta$$

可以与前面的结果结合起来使用，其中

$$\rho_1 = \frac{(\rho a - b)\mathrm{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}}, \quad \rho_2 = \frac{(\rho b - a)\mathrm{sgn}(b)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}}$$

$$\delta = \frac{1 - \mathrm{sgn}(a)\mathrm{sgn}(b)}{4}, \quad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{当 } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

第十一章

股票指数期权、货币期权和期货期权

本章我们将着手解决股票指数、货币期权和期货期权的定价问题。首先将第十章的分析扩展到基于支付连续红利收益的股票的欧式期权。然后，我们再证明股票指数、货币和许多期货价格与支付连续红利收益的股票相类似。因此，对基于支付连续红利股票期权的定价的基本结论可以推广到基于其他资产的期权的定价问题。

11.1 支付已知红利股票的期权

考虑一种以每年恒定比率 q 支付连续红利率的股票。为理解基于股票的期权是如何定价的。我们将此股票与一种不支付红利的相似股票进行比较。如 10.14 节中解释的那样，红利的支付使得股票价格降低了等于红利的数量。所以支付连续红利率 q 使得股票价格的增长率比不支付红利时减少了 q。如果支付连续红利率 q 的股票价格从 t 时刻的 S 增加到 T 时刻的 S_T，那么，没有红利支付时的股票价格将从 t 时刻的 S 增加到 T 时刻的 $S_T e^{q(T-t)}$，或者是从 t 时刻的 $Se^{q(T-t)}$ 增加到 T 时刻的 S_T。

从上面的分析我们得到基于一种价格为 S 支付连续红利率为 q 的股票的欧式期权与基于一种价格为 $Se^{-q(T-t)}$ 不支付红利的股票的相应的欧式期权有相同的价值。这是因为在这两种情况下股票价格的最终值都是相同的。因此，为了给基于支付已知红利率的股票的欧式期权定价，我们可将股票现价从 S 减小到 $Se^{-q(T-t)}$，然后代入 Black－Scholes 公式即可。用 $Se^{-q(T-t)}$ 代替方程(10.27)和(10.28)中的 S，我们得到：

$$c = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (11.1)$$

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1) \qquad (11.2)$$

因为

$$\ln\left(\frac{Se^{-q(T-t)}}{X}\right) = \ln\frac{S}{X} - q(T-t)$$

d_1，d_2 分别为：

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

这些结果最初是由 Merton 推导出的。如 10.14 节所述，在期权定价过程中，“红利”这个词应当被定义成在除权日由红利支付引起的股票价格的减少额。如果在期权的有效期中红利率不是恒定的，只要令 q 等于期权有效期中平均年红利率，方程(11.1)和(11.2)仍然正确。

附录 11A 用与 10.7 节相同的方法得到了任何基于支付连续红利股票的衍生证券的价格 f 必须满足的微分方程。同基本微分方程一样，它不包含任何受风险偏好影响的变量。因此我们可以

使用 10.8 节中曾阐述过的风险中性定价过程。在风险中性世界中，股票的全部收益率一定是 r，而红利提供是收益率是 q，所以股票价格预期的增长比率一定是 r－q。因此，要为基于支付连续红利股票的衍生证券定价，我们设定股票的预期增长率等于 r－q，然后以贴现率 r 贴现预期盈利。这个方法可以用来推导方程(11.1)和(11.2)。

11.2　股票指数期权

有些交易所交易股票指数期权。使用的一些指数大体上反映了美国股票市场的运动状况。其中一些反映了某种特殊行业股票(如：矿产业、计算机技术和公用事业)的行情，另一些则是用来反映国外股票市场行情的。

表 11.1 为《华尔街日报》次日刊载的 1992 年 2 月 3 日期权的收盘价格。3.7 节讨论过 S&P500、纽约股票交易所(NYSE)综合指数和主要市场指数。S&P100 与 S&P500 类似，但仅包含如下 100 种股票：92 种工业股，1 种公用事业股，2 种交通运输公司股和 5 种金融机构股。

表 11.1 中的首字母缩略词 LEAPS 代表长期资产提前偿付证券，由芝加哥交易所(CBOE)发行。LEAPS 为长期的交易所内交易的期权，它们长达 3 年。表 11.1 显示了 LEAPS 期权基于 S&P500、S&P100 和主要市场指数的报价。执行价格和期权价格是指数的十分之一。一份合约是一个基于指数的十分之一的 100 倍(或 10 乘以指数)的期权。指数的 LEAPS 期权在 12 月份到期。基于 S&P100 和主要市场指数的 LEAPS 期权为美式期权而基于 S&P500 的 LEAPS 期权则是欧式期权。CBOE 和其它几家交易所也进行许多个股 LEAPS 期权的交易。这些 LEAPS 期权在 1 月份到期。

CBOE的另一项革新是基于S&P100和S&P500的封顶期权。这些期权支出的上限不超过$30。除了下面的情况期权一般是欧式的：当收盘时指数比执行价格高$30时看涨封顶期权自动执行；当收盘时指数比封顶期权水平低$30时看跌封顶期权自动执行。

表11.1中其余期权的标的指数如下：

机构指数：主要由机构持有的75种股票，按市场价值加权。

日本指数：在东京股票交易所交易的210种股票，按价格加权。

金/银指数：7种矿产股票，按市场价值加权。

价值线指数：大约1,700种美国股票，权重相等。

公用事业指数：20种电子公用事业股票，按市场价值加权。

金融信息综合指数：30种热门股票，按价格加权。

机构指数、日本指数和金融信息综合指数的期权为欧式期权。其余为美式期权。

指数期权是用现金交割而不是用指数所包含的证券交割。这就是说，在执行期权时候，看涨期权的持有者收入$S-X$的现金，而期权出售者支付这笔现金，其中S是指数的值，X是执行价格。同样，看跌期权的持有者收入$X-S$的现金，期权出售者支付这笔现金。每份合约是指数值的100倍。因此，从表11.1可知，在1992年2月3日一份执行价格为370点的4月份到期S&P100看涨期权价值为$1,775。指数的值为381.71点。所以期权处于实值状态。如果期权在2月3日执行，持有者将收入数额为$(381.71-370)\times 100=\$1,171$的现金。

一般地，股票价格指数的确切的到期日与股票期权的计算方法相同，即在到期月的第三个星期五之后的那个星期六。

表 11.1　股票指数期权的收盘价，1992 年 2 月 3 日

INDEX TRADING

Monday, February 3, 1992

OPTIONS
CHICAGO BOARD

S&P 100 INDEX-$100 times index

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
330	....	....	....	3/16	1/16	....
335	....	46½	....	3/16	1/16	....
340	....	....	....	5/16	1½	2 1/16
345	....	....	....	7/16	1½	2½
350	22	32½	....	½	2	3½
355	26½	....	....	¼	2½	....
360	21¼	24	....	1	3½	5
365	17	18¼	21½	1½	3½	5¼
370	13	15¼	17½	2¼	5¼	7½
375	9½	12	....	3½	6½	8¼
380	5½	9½	13¼	5½	8½	10½
385	3½	6¼	8½	7¼	11	13¼
390	1½	4½	6½	13¼	14	16½
395	½	3	4½	15¼	17¼	18½
400	¼	1½	3½	20½	22½	22½
405	¼	1 1/16	....	25½	....	....
410	1/16	¼	1¼	30½	32½	....

Total call volume 64,120 Total call open int. 337,404
Total put volume 75,560 Total put open int. 444,854
The index: High 381.95; Low 379.08; Close 381.71, +1.70

S&P 500 INDEX-$100 times index

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
310	97½	....	....	....	....	....
325	....	....	64½	....	½	....
330	....	....	....	....	½	....
340	....	....	....	....	½	....
345	....	....	....	....	1 5/16	....
350	....	....	....	7/16	....	....
355	....	....	....	....	2½	....
360	....	....	....	....	2½	....
365	....	....	....	½	3½	....
370	....	22½	....	1½	3½	....
375	....	18½	....	2½	4½	....
380	11¼	14½	....	3½	6¼	8½
385	8¼	....	....	4½	7½	9½
390	5	8¼	....	6½	10½	12½
395	3¼	6½	9	9½	12	14½
400	1½	4½	....	14	15½	17½
405	½	3½	....	17½	18½	....
410	¼	2	....	22½	23	22½
415	¼	1 3/16	....	26	28½	....
440	1/16	¼	....	31½	....	31¼
450	....	....	....	....	....	40¼
460	....	1/16	....	....	51½	....

Total call volume 1,268 Total call open int. 352,711
Total put volume 10,070 Total put open int. 477,482
The index: High 409.95; Low 407.45; Close 409.53, +0.74

LEAPS-S&P 100 INDEX

Strike Price	Calls—Last Dec 92	Dec 93	Puts—Last Dec 92	Dec 93
330	....	....	....	1 1/16
337½	....	....	½	1 9/16
339	4½	....	1 5/16	....
337½	2½	....	2½	3½
340	1 9/16	....	3½	....

Total call volume 40 Total call open int. 31,454
Total put volume 188 Total put open int. 121,169
The index: High 38.20; Low 37.91; Close 38.19, +0.17

Strike Price	Calls—Last Dec 92	Dec 93	Dec 94	Puts—Last Dec 92	Dec 93	Dec 94
35	....	....	....	2 1/16	2½	2½
37½	....	....	....	....	....	3½

Total call volume 0 Total call open int. 78,033
Total put volume 2,232 Total put open int. 152,987
The index: High 34.82; Low 34.34; Close 34.72, +0.26

INSTITUTIONAL INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
320	....	....	....	....	3/16	....
330	....	....	....	....	7/16	....
335	....	....	....	¼	....	....
340	....	....	....	....	1½	....
345	....	....	....	9/16	....	....
395	....	....	....	¼	....	....
400	....	....	....	1	....	....
405	....	....	....	....	4	....
410	....	....	....	2	4½	....
415	....	....	....	3½	6¼	....
420	8½	12½	....	4½	8½	....
425	6	....	13½	6	....	12
430	3¼	....	10½	8½	11¼	14½
435	2½	....	....	....	16	....
440	1	3½	....	....	....	....
445	½	2 5/16	....	....	....	....
450	¼	1½	....	....	....	....
455	¼	15/16	....	29½	30	....
490	....	1/16	¼	....	....	....

Total call volume 1,887 Total call open int. 43,959
Total put volume 4,759 Total put open int. 76,402
The index: High 426.39; Low 423.48; Close 425.69, +0.86

JAPAN INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
190	....	....	....	¼	1½	....
200	....	....	....	½	2¼	....
205	....	....	....	1 7/16	3½	....
210	....	....	....	2½	5½	6½
215	....	....	....	3½	6½	....
220	6½	10	....	5½	....	9½
225	4¼	7½	....	8	10½	....
230	2½	5½	7¼	11¼	....	....
245	....	1½	3½	....	....	....
250	3/16	....	1½	....	....	....

Total call volume 264 Total call open int. 11,205
Total put volume 563 Total put open int. 20,934
The index: Close 222.42, +1.19

PHILADELPHIA

GOLD/SILVER INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
75	....	....	....	....	1½	....
80	5¼	....	....	1 7/16	2½	....
85	2 5/16	3½	....	....	....	....
90	¼	15/16	2½	....	....	....

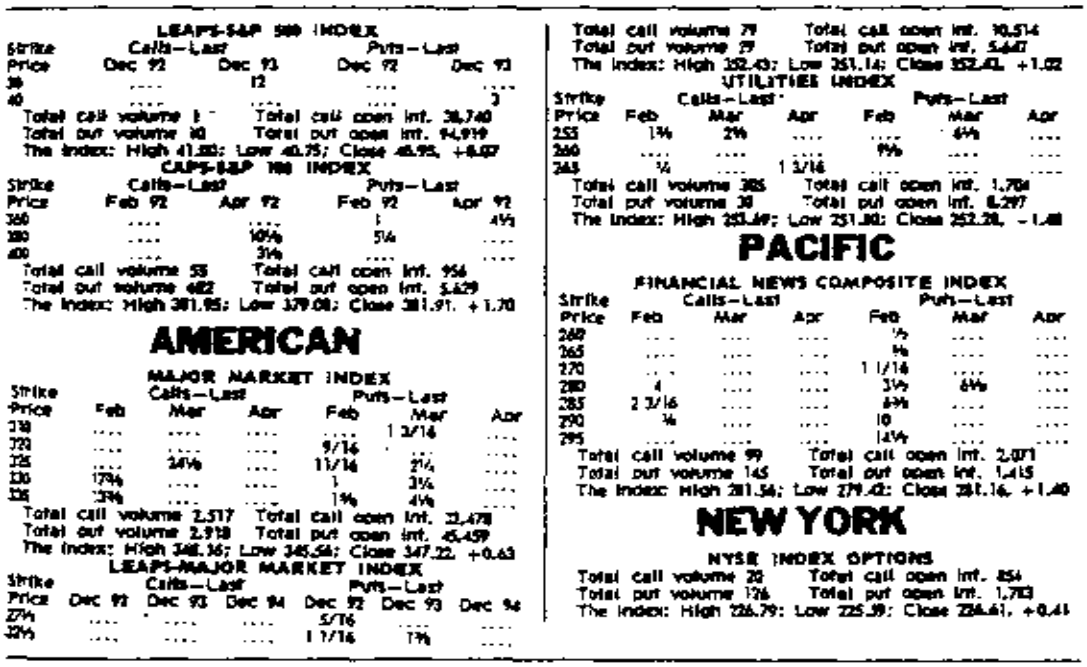
Total call volume 127 Total call open int. 1,298
Total put volume 25 Total put open int. 905
The index: High 84.24; Low 82.62; Close 83.72, +0.19

VALUE LINE INDEX OPTIONS

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
225	27	29	....	....	....	....
335	....	....	....	1 5/16	....	....
345	9¼	....	....	....	....	....
355	3½	6½	....	6½	....	....
380	1½	4	6½	10	....	13

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, February 4, 1992. Copyright ©1992. Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved.

表 11.1(续)



LEAPS-S&P 500 INDEX

Strike Price	Calls—Last Dec 92	Dec 93	Puts—Last Dec 92	Dec 93
30	....	12	....	....
40	....	....	....	3

Total call volume 1 Total call open int. 38,740
Total put volume 10 Total put open int. 94,919
The index: High 41.83; Low 40.75; Close 40.95, +0.07

CAPS-S&P 100 INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb 92	Apr 92	Puts—Last Feb 92	Apr 92
360	....	....	1	4½
380	....	10⅝	5¼	....
400	....	3⅛	....	....

Total call volume 55 Total call open int. 956
Total put volume 682 Total put open int. 5,629
The index: High 381.95; Low 379.08; Close 381.91, +1.70

AMERICAN

MAJOR MARKET INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
310	....	....	....	....	1 3/16	....
320	....	....	....	9/16	....	....
325	....	3½	....	11/16	2¼	....
330	17⅝	....	....	1	3½	....
335	12⅝	....	....	1⅝	4⅛	....

Total call volume 2,517 Total call open int. 22,478
Total put volume 2,918 Total put open int. 45,459
The index: High 348.36; Low 345.56; Close 347.22, +0.63

LEAPS-MAJOR MARKET INDEX

Strike Price	Calls—Last Dec 92	Dec 93	Dec 94	Puts—Last Dec 92	Dec 93	Dec 94
27½	....	....	....	5/16	....	....
32½	....	....	....	1 1/16	1⅝	....

Total call volume 79 Total call open int. 10,514
Total put volume 29 Total put open int. 5,647
The index: High 352.43; Low 351.16; Close 352.42, +1.02

UTILITIES INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
255	1⅛	2⅛	....	....	4⅛	....
260	....	....	....	9⅛	....	....
265	⅛	....	1 3/16	....	....	....

Total call volume 385 Total call open int. 1,784
Total put volume 38 Total put open int. 8,297
The index: High 253.69; Low 251.80; Close 252.28, +1.48

PACIFIC

FINANCIAL NEWS COMPOSITE INDEX

Strike Price	Calls—Last Feb	Mar	Apr	Puts—Last Feb	Mar	Apr
260	....	....	....	1/16	....	....
265	....	....	....	⅛	....	....
270	....	....	....	1 1/16	....	....
280	4	....	....	3½	6⅛	....
285	2 3/16	....	....	8⅜	....	....
290	¼	....	....	10	....	....
295	....	....	....	14⅛	....	....

Total call volume 99 Total call open int. 2,071
Total put volume 145 Total put open int. 1,415
The index: High 281.56; Low 279.42; Close 281.16, +1.40

NEW YORK

NYSE INDEX OPTIONS

Total call volume 20 Total call open int. 854
Total put volume 126 Total put open int. 1,783
The index: High 226.79; Low 225.39; Close 226.61, +0.41

证券组合保险

资产组合管理者可以用指数期权控制他们的价格风险。假设一种指数的价值为 S。一个管理者经营一种多元化的证券组合，该证券组合的 β 为 1.0，因此它的值反映了指数的价值(关于 β 的讨论参见 3.7 节)。若对于证券组合中每 100S 美元，管理者买入一份执行价格为 X 的看跌期权合约，就可以保护证券组合的价值使其免受指数下降到低于 X 时的损失。例如，假设证券组合价值为 $500,000，该种指数的值为 250 点。证券组合的价值是指数的 2,000 倍。这个管理者就可以通过买进 20 份执行价格为 240 点

的看跌期权使其证券组合在接下来的三个月中免受证券组合价值的价值跌落到低于 $480,000 的损失。为说明这一过程如何进行的，我们考虑三个月后指数下降到 225 点的情况。证券组合价值大约是 $450,000，但是从期权中得到的盈利为 20×($240−225)×100= $30,000，保证了证券组合的总价值仍为 $480,000。

证券组合 β 不为 1.0 的情况

接下来我们考虑一种证券组合，它的 β 为 2.0，所以不能反映指数的情况。设其现价为 100 万美元，当前无风险利率为每年 12%，证券组合和指数的红利收益率预计都为每年 4%，指数的现价为 250 点。

表 11.2　当 β=2 时，指数的价值与证券组合价值之间的关系

三个月后 指数的价值	三个月后证券组合的价值 （以百万美元为单位）
270	1.14
260	1.06
250	0.98
240	0.90
230	0.82

表 11.2 给出了三个月后指数水平和证券组合价值之间预期的联系。为说明得到这个表所需要的计算过程，我们考虑一下当三个月后指数价值为 260 点时发生的情况：

三个月后指数的价值	260
指数变化所得收益	每三个月 10/250 或 4%
指数红利	每三个月 0.25×4=1%
指数总收益	每三个月 4+1=5%
无风险利率	每三个月 0.25×12=3%

指数收益扣除无风险利率的净收益	每三个月 5－3＝2%
证券组合收益扣除	
无风险利率的净收益	每三个月 2×2＝4%
证券组合收益	每三个月 3＋4＝7%
证券组合红利	每三个月 0.25×4＝1%
证券组合价值的增加值	每三个月 7－1＝6%
证券组合的总价值	100×1.06＝106 万美元

若 S 是指数的价值，对于证券组合中每 100S 美元应当购买 β 份看跌期权。执行价格应当是当证券组合价值达到保险价值时指数所期望的价值。设本例中保险价值为 90 万美元。表 11.2 表明了购买的看跌期权的执行价格应为 240 点。这种情况下，100S＝$25,000，证券组合的价值是 100 万美元。由于 1,000,000/25,000＝40，且 β＝2，正确的策略应为购买 80 份执行价格为 240 点的看跌期权。

为证实这确实达到了要求的结果，让我们看看如果指数的值下降到 230 点时会发生什么情况。如表 11.2 所示，证券组合的价值为 82 万美元。看跌期权的盈利为(240－230)×80×100＝$80,000，这正是将证券组合管理者的总价值由 82 万美元弥补到要求的水平 90 万美元所需要的数目。

定价

在为股票指数期权定价时，通常假设股票指数遵循几何布朗运动[①]。这意味着只要 S 等于指数值，σ 等于指数波动率，q 等于指数的红利收益率，方程(11.1)和(11.2)就可以用来为基于股票指数的欧式看涨期权和看跌期权定价。

方程(11.1)和(11.2)成立的前提假设是红利连续支付且支付的红利率为常数。实际上，这两个假设都可以放宽。唯一必需的

是我们能够事先估计红利收益率。变量 q 应当等于期权有效期中的平均年红利收益率。如果有效期内包含除权日的话，计算这种平均红利收益率时可认为红利发生在整个期权有效期内。

在美国，红利通常在二月份、五月份、八月份和十一月份的第一个星期支付。因此，在任意给定时间正确的 q 值很大程度上依赖于期权的有效期限。对于一些外国指数情况更是如此。比如在日本，所有的公司都倾向于相同的除权日。

例 11.1

考虑一种 S&P500 的欧式看涨期权，还有 2 个月到期。指数的现值为 310 点，执行价格为 300 点，无风险利率为每年 8%，指数波动率为每年 20%。在第一个月和第二个月中期望得到的红利收益率分别是 0.2% 和 0.3%。即在这个例子中，$S=310$，$X=300$，$r=0.08$，$\sigma=0.20$，$T-t=0.1667$。平均红利收益率为每两个月 0.5% 或每年 3%。因此，$q=0.03$，方程(11.1)给出：

$$d_1=\frac{\ln 1.03333+0.07\times 0.1667}{0.2\sqrt{0.1667}}=0.5444$$

$$d_2=\frac{\ln 1.03333+0.03\times 0.1667}{0.2\sqrt{0.1667}}=0.4628$$

$$N(d_1)=0.7069,\qquad N(d_2)=0.6782$$

所以看涨期权价格 c 为

$$c=310\times 0.7069e^{-0.03\times 0.1667}-300\times 0.6782e^{-0.08\times 0.1667}=17.28$$

一份合约的费用为 $1,728。

估计未来红利收益率的另一种方法是尝试估计将要支付的红利的绝对数量。将最初的股票价格减去红利的现值就可以使用基本的 Black－Scholes 公式。这是 10.14 节推荐的用于支付已知红利的股票的方法。对范围广泛的股票指数，以上方法是难以实现的，因为这需要估计指数包含的每一种股票的红利收益。

在某些情况下，在到期日前执行美式看跌指数期权是最优的。有时这也可能适用于美式看涨指数期权。所以通常美式股票指数期权的价格总是比相应的欧式股票指数期权的价格要略高一些。我们将在第十四章讨论美式指数期权定价的数值方法和解析近似解。

11.3 货币期权

费城交易所在 1982 年开始了货币期权的交易。从那时起市场规模增长非常迅速。到 1992 年为止，这种货币交易包含了澳大利亚元、英镑、加拿大元、德国马克、日元、法国法郎、瑞士法郎和欧洲货币单位。对以上大多数的货币，费城交易所同时进行欧式和美式两种期权交易。它还进行德国马克与日元兑换率期权的交易。

在有组织的交易所外，也有大规模的外汇期权交易在进行。许多银行和其他金融机构随时会买卖外汇期权，这些期权的执行价格和日期都是根据他们公司客户的特殊要求而定的。对一个欲为外汇头寸保值的公司客户来讲，外汇期权方法就是另一种比远期合约更引人注目的替代方法。在未来某一确定时间将收到英镑的某公司可以通过购买同一时间到期的英镑看跌期权来对冲风险。这样保证了英镑的价值将不会低于执行价格，而且允许该公司可以从任何有利的汇率变动中受益。类似地，在未来确定时间将支付英镑的某公司可以通过购买那个时刻到期的英镑看涨期权来对冲风险。这就保证了购买英镑的费用不会超过某一数额并且允许该公司从有利的汇率变动中受益。远期合约锁定了将来的一笔交易的汇率而期权则提供了一种保险。当然，这种保险不是无偿的。进入远期市场交易无需费用而获得期权则需事先缴纳一笔费用。

表 11.3 1992 年 2 月 3 日费城交易所货币期权的报价表

Option & Underlying	Strike Price	Calls—Last			Puts—Last		
		Feb	Mar	Jun	Feb	Mar	Jun
50,000 Australian Dollars-European Style.							
ADollr	74	r	0.42	r	r	r	r
50,000 Australian Dollars-cents per unit.							
ADollr	74	1.21	r	r	0.15	r	r
75.19	75	0.58	0.86	r	0.42	0.83	r
31,250 British Pounds-cents per unit.							
BPound	170	r	r	r	0.12	0.67	r
178.73	172½	r	r	r	r	1.30	r
178.73	175	r	r	r	0.55	2.00	r
178.73	177½	r	2.00	r	1.02	r	r
178.73	180	1.20	r	r	2.72	4.00	r
178.73	182½	0.01	r	r	r	r	r
178.73	185	0.38	1.02	r	r	8.10	r
178.73	187½	r	r	r	8.85	r	r
178.73	190	0.06	r	r	r	r	r
50,000 Canadian Dollars-European Style.							
CDollar	83½	r	r	r	r	r	0.80
50,000 Canadian Dollars-cents per unit.							
CDollr	83½	r	r	r	r	r	0.80
85.16	84½	r	r	r	0.15	0.42	r
85.16	85½	r	0.43	r	r	r	r
62,500 European Currency Units-cents per unit.							
ECU	126	r	r	r	r	r	4.95
1,000,000 GermanMark-JapaneseYen cross.							
GMk-JYn	78	0.79	r	r	0.58	1.02	r
62,500 German Marks-European Style.							
DMark	58	4.18	4.01	r	r	r	r
62.08	60	r	r	r	r	0.50	r
62,500 German Marks-cents per unit.							
DMark	57	r	r	r	r	r	0.55
62.08	58	r	r	r	r	r	0.72
62.08	59	r	r	r	0.04	r	1.09
62.08	60	2.45	r	r	0.10	0.47	1.40
62.08	60½	r	r	s	0.15	0.55	s
62.08	61	1.40	r	r	0.26	0.80	r
62.08	61½	r	1.40	s	0.46	1.02	s
62.08	62	0.88	1.14	r	0.53	1.29	2.48
62.08	62½	0.53	0.98	s	0.77	r	s
62.08	63	0.44	r	1.36	1.27	r	r
62.08	63½	0.30	r	s	r	r	s
62.08	64	0.21	0.58	0.98	r	r	r
62.08	64½	0.15	0.32	s	r	r	s
62.08	66	r	r	0.55	r	r	r
6,250,000 Japanese Yen-100ths of a cent per unit.							
JYen	76	r	r	r	0.15	r	r
79.59	78	1.70	r	r	0.13	r	r
79.59	78½	r	r	s	0.29	r	s
79.59	79	r	1.50	r	r	0.97	r
79.59	79½	r	r	s	0.59	r	s
79.59	80	0.40	r	r	r	r	r
79.59	81½	0.06	r	s	r	r	s
79.59	82	0.07	r	r	r	r	r
79.59	83	0.03	r	r	r	r	r
62,500 Swiss Francs-cents per unit.							
SFranc	68	r	r	r	0.18	r	r
69.82	69	r	r	r	0.41	r	r
69.82	70	r	1.16	r	r	r	r
69.82	70½	0.63	r	s	r	r	s
69.82	72	r	0.48	r	r	r	r
69.82	73	r	r	0.99	r	r	r
Total Call Vol	11,884			Call Open Int			353,827
Total Put Vol	10,112			Put Open Int			461,509

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, February 4, 1992. Copyright ©1992, Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved worldwide.

行情报价

表 11.3 列出了 1992 年 2 月 3 日费城交易所交易的某些货币期权的收盘价。期权的到期日在三月份、六月份、九月份和十二月份，最长期限为 9 个月。它们的到期日也可以是紧接着以上月份的随后两个月。准确的失效日应为到期月第三个星期三之前的那个星期六。表 11.3 仅列出了有最短到期日的三份合约。

合约的大小在表 11.3 中每一部分的开头表示出。期权价格用买卖一个单位外汇需要若干美元数来表示。对于日元，价格是以百分之一美分表示，对于其他货币则以美分表示。这样，一份执行价格为 185 美分三月份到期的英镑的看涨期权将给予持有者以 $57,812.50 购买 £31,250 的权利。所表示的合约价格为 $31,250×0.0103 或 $321.875。英镑的即期汇率为每英镑 178.73 美分。

定价

为货币期权定价时，我们定义 S 为即期汇率，即用美元表示的每一单位外币的价值。我们假设汇率与股票遵循同种类型的随机过程：几何布朗运动。定义 σ 汇率变动波动率，r_f 为外国的无风险利率。

3.8 节中提到，一种外币与一种支付已知红利收益的股票类似。外币的持有者收入的“红利收益率”等于外币无风险利率 r_f（用外币表示）。由于我们假设股票与外币遵循同样的随机过程，只要将 q 替换成 r_f，11.1 节中推导的公式依然正确。因此，欧式看涨期权价格 c 和看跌期权价格 p 为：

$$c = Se^{-r_f(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (11.3)$$

$$p = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-r_f(T-t)}N(-d_1) \qquad (11.4)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - r_f + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - r_f - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

国内的利率为 r 和国外的利率 r_f 都假设为恒定的，对于任何到期日都相同。对一种货币看涨期权和看跌期权是对称的，一份出售 X_A 个单位 A 货币得到 X_B 个单位 B 货币的看跌期权等价于一份用 X_A 个单位 A 货币购买 X_B 个单位 B 货币的看涨期权。由方程(3.14)得到 T 时刻到期的远期汇率 F 为：

$$F = Se^{(r-r_f)(T-t)}$$

这使得方程(11.3)和(11.4)可简化为：

$$c = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - XN(d_2)] \qquad (11.5)$$

$$p = e^{-r(T-t)}[XN(-d_2) - FN(-d_1)] \qquad (11.6)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

注意在使用方程(11.5)和(11.6)时远期合约和期权的到期日必须相同。

例 11.2

考虑一份 4 个月期的英镑欧式看涨期权。假设当前的即期汇率为 $1.6000，执行价格为 $1.6000，美国的无风险利率为每年 8%，英国的无风险利率为每年 11%，期权价格为 4.3 美分。即 S=1.6，X=1.6，r=0.08，r_f=0.

11，T－t＝0.3333，c－0.043。可以通过试错法计算隐含波动率。波动率为20%时，期权价格为$0.0639；波动率为10%时，期权价格为$0.0285，依次类推。隐含波动率为14.1%。

在某些时候，在到期日前执行美式货币期权是最优的。因此美式期权的价值比相应的欧式期权要高一些。一般来说，高利率货币的看涨期权和低利率货币的看跌期权是最有可能提前执行的。这是因为我们预计高利率货币相对美元可能会贬值而低利率货币相对美元可能会升值。但遗憾的是，美式货币期权的定价却没有解析公式。我们在十四章中讨论其数值方法和近似解析解。

11.4 期货期权

如今在许多不同的交易所中进行基于期货合约的期权也称期货期权的交易。这种交易在执行时交割一份标的期货合约。如果执行一份期货看涨期权，持有者将获得该期货合约的多头头寸外加一笔数额等于期货当前价格减去执行价格的现金。如果执行一份期货看跌期权，持有者将获得该期货合约的空头头寸外加一笔数额等于执行价格减去期货当前价格的现金。

例 11.3

考虑一个投资者拥有一份执行价格为每磅70美分的25,000磅黄铜九月份期货看涨期权。假设当前九月份交割的黄铜期货价格为80美分。如果执行该期权，投资者将收入$2,500(＝25,000×10美分)再加上一个购买九月份25,000磅黄铜期货合约的多头头寸。如果愿意的话，可以毫无费用地立即冲销期货头寸。这可以使投资者最终获得$2,500的现金。

例 11.4

考虑一个投资者拥有一份执行价格为每蒲式耳200美分的5,000蒲式耳玉米十二月份期货看跌期权。假设当前十二月份交割的玉米期货价格为

180 美分。如果执行该期权，投资者将收入 $1,000(=5,000\times 20$ 美分)再加上一个出售十二月份 5,000 蒲式耳玉米期货合约的空头头寸。如果愿意的话，可以毫无费用地立即冲销期货头寸。这可以使投资者最终获得 $1,000 的现金。

期货期权中的期货既可以是金融期货，也可以是商品期货。表 11.4 给出了 1992 年 2 月 3 日许多种期货期权的收盘价格。表中的月份是标的期货合约的到期月。期权合约的到期日通常比标的期货合约的最早交割日要早几天或同时。例如，纽约股票交易所 NYSE 指数期货期权和标准普尔 S&P 指数期货期权都与标的期货合约同一天到期；而国际货币市场 IMM 货币期货期权的到期日比期货合约到期日要早两个交易日；芝加哥商品交易所 CBT 的长期国债期货期权的到期时间则是比期货到期月之前的那个月末早至少 5 个交易日的第一个星期五。

由表 11.4 可见最常见的期货期权合约是芝加哥期权交易所 CBOT 交易的长期国债期货期权和国际货币市场 IMM 交易的欧洲美元期货期权合约。所有看涨期权和看跌期权的总计未平仓合约超过了 700,000 份。其他一些未平仓合约超过 100,000 份的期货合约是玉米(CBOT)，糖(CSCE)，原油(NYM)，黄金(CMX)，日元(IMM)，德国马克(IMM)和欧洲美元(IMM)期货。当期货期权更便宜或交割该资产期货合约比交割该资产本身更方便的时候，对于投资者来说，交易标的资产期货期权比交易该标的资产的期权具有更大的吸引力。以长期国债为例，进行期货期权交易而不是该资产的期权可以交割具有高度流动性的资产，而且使我们避免了累计利息和决定最便宜交割债券带来的问题。其另一个优点是债券期货的价格信息比债券本身的价格信息更易获得，因为我们只能通过与债券交易商仔细分析才可获得债券价格信息。

表 11.4 1992 年 2 月 3 日期货期权收盘价格

FUTURES OPTIONS PRICES

Monday, February 3, 1992.

AGRICULTURAL

CORN (CBT)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
250	17¾	25	31	⅛	1¼	3½
260	8¾	16½	24½	1¼	3¼	6½
270	2⅞	10½	19½	5¼	7	10¾
280	⅛	6½	15	13	13	16
290	⅛	4	11	22½	20	22
300	c6	2	8½	42¼	...	29

Est. vol. 12,000;
Fri vol. 6,061 calls; 2,329 puts
Op. Int. Fri 91,349 calls; 54,433 puts

SOYBEANS (CBT)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
525	52½	58¼	68¼	¾	1½	4¼
550	28	38	48¾	1½	5¼	9½
575	10	22	34	7¾	13½	18
600	2¼	12¼	23	24	29½	32
625	½	7	17	48	48¼	50
650	¼	3¼	12½	72½	....	....

Est. vol. 5,800;
Fri vol. 3,528 calls; 965 puts
Op. Int. Fri 56,846 calls; 26,266 puts

SOYBEAN MEAL (CBT)
100 tons; $ per ton

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
165	12.20	10.75	16.35	.15	.85	1.65
170	7.50	9.75	12.80	.40	1.65	3.00
175	3.75	6.60	9.95	1.50	3.35	5.00
180	1.60	4.50	7.70	4.25	6.15	7.65
185	.60	2.90	5.95	8.30	9.60	10.75
190	.25	2.00	4.65	13.00	13.55	....

Est. vol. 250;
Fri vol. 66 calls; 92 puts
Op. Int. Fri 6,208 calls; 5,659 puts

SOYBEAN OIL (CBT)
60,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
1800	....	....	....	.080	.150	.270
1850	....	....	....	.100	.250	....
1900	.450	.980	....	.220	.420	.600
1950	.200	.650	....	....	....	....
2000	.100	.600	.950	.870	1.000	1.120
2050	.070	.370	....	....	....	....

Est. vol. 200;
Fri vol. 109 calls; 2 puts
Op. Int. Fri 5,502 calls; 2,751 puts

WHEAT (CBT)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
400	20¾	19	¼	3½	19	47
440	13½	15¼	11¼	5¾	24¾	....
450	8¼	12¼	....	10¼	32	....
460	5¾	9¾	8	....	....	....
470	2¾	....	....	....	....	....
480	1	....	4¾	....	....	....

Est. vol. 7,500;
Fri vol. 2,441 calls; 2,168 puts
Op. Int. Fri 50,347 calls; 42,429 puts

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
76	3.00	2.22	1.77	0.70	1.85	2.40
78	1.75	1.10	1.10	1.45	2.72	3.72
80	0.75	0.50	0.45	2.45	4.12	5.07
82	0.25	0.20	0.20	3.95	5.82	6.82
84	0.07	0.10	0.10	5.77	6.77	8.87

Est. vol. 231;
Fri vol. 277 calls; 263 puts
Op. Int. Fri 3,302 calls; 6,485 puts

CATTLE-LIVE (CME)
40,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Feb	Apr	Jun	Puts–Settle Feb	Apr	Jun
72	4.85	5.45	2.20	0.00	0.40	2.07
74	2.92	3.80	1.17	0.07	0.72	3.00
76	1.12	2.25	0.62	0.27	1.20	....
78	0.12	1.17	0.25	1.27	2.10	....
80	0.00	0.42	0.10	3.15	....	....
82	....	0.15	....	....	....	....

Est. vol. 1,931;
Fri vol. 2,513 calls; 4,053 puts
Op. Int. Fri 26,414 calls; 36,345 puts

HOGS–LIVE (CME)
40,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Feb	Apr	Jun	Puts–Settle Feb	Apr	Jun
38	3.15	2.55	....	0.05	0.40	0.15
40	1.22	1.25	4.45	0.10	1.25	0.30
42	0.15	0.45	2.80	1.02	2.25	0.70
44	0.00	0.12	1.65	2.87	3.90	1.45
46	0.00	0.02	0.85	4.87	5.80	2.65
48	0.00	0.02	0.32	....	....	....

Est. vol. 202;
Fri vol. 201 calls; 81 puts
Op. Int. Fri 2,039 calls; 3,249 puts

METALS

COPPER (CMX)
25,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
94	3.75	4.65	5.25	0.15	1.25	1.90
96	2.05	3.40	4.20	0.45	1.90	2.65
98	0.90	2.25	3.15	1.30	2.75	3.70
100	0.35	1.65	2.25	2.75	4.15	4.75
102	0.10	1.10	1.70	4.50	5.50	6.20
104	0.05	0.70	1.30	6.35	7.20	7.75

Est. vol. 450;
Fri vol. 416 calls; 294 puts
Op. Int. Fri 8,825 calls; 8,256 puts

GOLD (CMX)
100 troy ounces; $ per troy ounce

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	Jun	Puts–Settle Mar	Apr	Jun
340	18.50	19.30	22.70	0.20	1.00	2.40
350	9.20	10.80	15.00	0.80	2.50	4.50
360	2.60	4.80	8.90	4.20	6.40	8.30
370	0.50	2.10	5.10	12.00	13.50	14.40
380	0.20	1.10	3.00	21.70	22.60	22.20
390	0.10	0.60	2.00	31.60	31.80	30.90

Est. vol. 5,800;
Fri vol. 9,153 calls; 1,140 puts
Op. Int. Fri 81,423 calls; 20,271 puts

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
6300	0.16	0.68	0.74	1.14	1.65	..
6350	0.09	0.52	0.61	1.57	1.99	..

Est. vol. 14,442;
Fri vol. 11,513 calls; 6,613 puts
Op. Int. Fri 117,460 calls; 110,267 puts

CANADIAN DOLLAR (IMM)
100,000 Can.$, cents per Can.$

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
8400	....	1.14	....	0.03	0.27	0.64
8450	0.48	0.80	....	0.12	0.44	0.87
8500	0.18	0.54	..	0.32	0.67	1.17
8550	0.04	0.33	.	0.68	0.96	1.50
8600	0.01	0.19	0.20	1.13	1.31	1.88
8650	0.000	0.10	0.13	1.63	1.71	2.29

Est. vol. 1,489;
Fri vol. 938 calls; 194 puts
Op. Int. Fri 11,841 calls; 14,630 puts

BRITISH POUND (IMM)
62,500 pounds; cents per pound

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
1725	5.76	6.62	....	0.10	0.98	2.54
1750	3.46	4.82	6.08	0.30	1.68	3.62
1775	1.62	3.34	3.94	0.94	2.86	....
1800	0.58	2.18	2.88	2.40	4.80	..
1825	0.16	1.36	1.42	4.48	5.46	..
1850	0.04	0.80	0.94	6.86	7.60	.

Est. vol. 1,405;
Fri vol. 915 calls; 1,551 puts
Op. Int. Fri 15,380 calls; 14,534 puts

SWISS FRANC (IMM)
125,000 francs; cents per franc

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
6650	1.37	1.92	....	0.14	0.69	1.26
6900	0.99	1.60	1.86	0.26	0.88	1.49
6950	0.66	1.33	1.62	0.42	1.09	....
7000	0.40	1.08	1.21	0.67	1.35	2.03
7050	0.23	0.87	1.02	1.00	1.63	..
7100	0.13	0.70	....	1.40	1.95	....

Est. vol 2,270;
Fri vol. 1,416 calls; 1,390 puts
Op. Int. Fri 20,564 calls; 20,254 puts

U.S. DOLLAR INDEX (FINEX)
500 times index

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
86	1.95	2.45	....	0.08	0.57	0.58
87	1.13	1.80	....	0.22	0.91	....
88	0.51	1.26	2.40	0.60	1.36	....
89	0.19	0.84	....	1.23	1.93	....
90	0.07	0.54	..	2.14	2.62	....
91	0.02	0.33	....	....	3.40	....

Est. vol. 1,950;
Fri vol. 879 calls; 1,452 puts
Op. Int. Fri 25,195 calls; 22,405 puts

INTEREST RATE

T-BONDS (CBT)
$100,000; points and 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
96	4-35	4-30	4-08	0-00	0-52	1-51
98	2-45	2-53	2-63	0-13	1-31	2-42

Reprinted by permission of *The Wall Street Journal*, February 4, 1992. Copyright ©1992. Dow Jones & Company, Inc. All rights reserved worldwide.

表 11.4(续)

WHEAT (KC)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
430	19	16¼	14	3	....	....
440	12	....	10½	5½	....	....
450	7	....	....	....	....	....
460	....	8¼	....	....	....	....
470	....	....	....	....	....	....
480	....	....	....	....	....	....

Est. vol. 631;
Fri vol. 97 calls: 78 puts
Op. int. Fri 3,380 calls: 4,301 puts

COTTON (CTN)
50,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
51	....	....	....	.10	.80	....
52	....	....	....	.20	1.00	....
53	.72	....	....	.49	1.20	....
54	.31	....	....	1.08	1.60	2.00
55	.11	2.70	....	1.88	2.00	2.40
56	.05	1.45	3.25	2.82	2.55	2.85

Est. vol. 1,400;
Fri vol. 1,196 calls; 567 puts
Op. int. Fri 25,190 calls; 15,428 puts

ORANGE JUICE (CTN)
15,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
135	8.55	....	....	15	3.60	6.70
140	4.20	8.50	....	.80	5.00	8.50
145	1.55	5.75	....	2.65	7.40	12.00
150	.50	4.00	....	6.75	10.90	13.85
155	.25	2.60	4.75	11.50	13.65	18.95
160	.25	2.05	3.65	16.50	18.00	20.05

Est. vol. 105;
Fri vol. 49 calls: 155 puts
Op. int. Fri 2,840 calls: 4,309 puts

COFFEE (CSCE)
37,500 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
65.00	5.56	8.85	11.80	0.06	0.35	0.70
67.50	3.00	6.60	....	0.13	0.60	....
70.00	1.15	4.75	7.40	0.65	1.25	1.30
72.50	0.33	3.20	....	2.33	2.20	....
75.00	0.13	2.08	4.20	4.63	3.58	3.10
77.50	0.09	1.35	....	7.09	5.35	....

Est. vol. 3,927;
Fri vol. 1,355 calls; 1,378 puts
Op. int. Fri 27,830 calls; 14,439 puts

SUGAR–WORLD (CSCE)
112,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
7.00	1.01	1.16	1.19	0.04	0.13	0.16
7.50	0.58	0.81	0.82	0.11	0.28	0.29
8.00	0.25	0.42	0.53	0.26	0.39	0.49
8.50	0.09	0.23	0.33	0.57	0.68	0.78
9.00	0.03	0.12	0.20	1.03	1.09	1.18
9.50	0.01	0.07	0.14	1.51	1.54	1.61

Est. vol. 6,570;
Fri vol. 3,693 calls; 5,047 puts
Op. int. Fri 80,288 calls; 46,137 puts

SILVER (CMX)
5,000 troy ounces; cts per troy ounce

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
375	42.2	46.0	49.0	0.2	1.3	3.0
400	18.5	25.1	28.0	1.5	5.2	8.0
425	4.5	11.5	15.0	12.5	16.4	20.0
450	1.3	5.5	8.8	34.3	35.5	38.7
475	0.3	2.8	5.3	58.3	57.5	60.5
500	0.2	1.7	3.6	83.0	81.0	83.5

Est. vol. 2,300;
Fri vol. 2,427 calls; 1,236 puts
Op. int. Fri 66,540 calls; 19,675 puts

OTHER OPTIONS

Final or settlement prices of selected contracts. Volume and open interest are totals in all contract months.

AUSTRALIAN DOLLAR (IMM)
$100,000; $ per $

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
7500	0.28	0.72	....	0.48	0.92	....

Est. vol. 10; Fri 0 calls, 0 puts
Op. int. Fri 1,326 calls, 1,486 puts

LUMBER (CME)
160,000 bd. ft., $ per 1,000 bd. ft.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
245	....	....	....	....	....	....

Est. vol. 66; Fri 2 calls, 14 puts
Op. int. Fri 183 calls, 451 puts

MAJOR MKT INDEX (CBT)
$500 times premium

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
345	6.10	....	....	4.50	....	....

Est. vol. 25; Fri 6 calls, 1 puts
Op. int. Fri 24 calls, 45 puts

MORTGAGE-BACKED (CBT) Cpn 8.0
$100,000; pts. and 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
99	0-36	0-44	....	0-22	....	....

Est. vol. 0; Fri 10 calls, 0 puts
Op. int. Fri 45 calls, 35 puts

NYSE COMPOSITE INDEX (NYFE)
$500 times premium

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
226	3.35	5.15	6.60	3.00	4.95	6.05

Est. vol. 46; Fri 45 calls, 41 puts
Op. int. Fri 795 calls, 711 puts

NIKKEI 225 STOCK AVG. (CME)
$5 times NSA

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Jun	Puts–Settle Feb	Mar	Jun
22000	550	....	....	800	....	....

Est. vol. 8; Fri 44 calls, 10 puts
Op. int. Fri 204 calls, 290 puts

PLATINUM (NYM)
50 troy oz.; $ per troy oz.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
360	....	10.00	....	....	11.10	....

Est. vol. 101; Fri 109 calls, 32 puts
Op. int. Fri n.a. calls, n.a. puts

100	1-15	1-50	2-07	0-47	2-25	3-46
102	0-26	1-04	1-28	1-58	3-03	5-00
104	0-07	0-38	0-62	3-39	5-11	....
106	0-02	0-20	0-42	5-34	6-58	8-08

Est. vol. 90,000;
Fri vol. 50,198 calls; 42,863 puts
Op. int. Fri 408,241 calls; 305,571 puts

T-NOTES (CBT)
$100,000; points and 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
101	2-21	....	....	0-10	1-09	....
102	1-33	1-43	....	0-20	1-35	....
103	0-54	1-13	....	0-43	2-07	....
104	0-27	0-54	....	1-15	2-44	....
105	0-12	0-37	....	2-00	3-26	....
106	0-05	0-25	....	2-56	4-14	....

Est. vol. 6,500;
Fri vol. 1,532 calls; 6,875 puts
Op. int. Fri 41,882 calls; 46,379 puts

MUNICIPAL BOND INDEX (CBT)
$100,000; pts. & 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
92	....	....	....	0-14	....	....
93	1-54	1-48	....	0-21	1-01	....
94	1-08	....	....	0-36	1-21	....
95	0-31	0-41	....	0-61	1-54	....
96	0-13	0-24	....	1-41	2-36	....
97	0-07	....	....	2-38	....	....

Est. vol. 500;
Fri vol. 50 calls; 0 puts
Op. int. Fri 6,961 calls; 6,625 puts

5 YR TREAS NOTES (CBT)
$100,000; points and 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
10350	1-35	....	....	0-05	....	....
10400	1-07	....	....	0-18	1-02	....
10450	0-48	....	....	0-37	....	....
10500	0-29	0-39	....	0-51	1-37	....
10550	0-16	0-28	....	0-69	....	....
10600	0-08	0-21	....	1-09	....	....

Est. vol. 787;
Fri vol. 257 calls; 342 puts
Op. int. Fri 9,562 calls; 10,714 puts

EURODOLLAR (IMM)
$ million; pts. of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
9525	0.58	0.48	0.34	0.02	0.13	0.36
9550	0.34	0.30	0.20	0.03	0.20	0.49
9575	0.14	0.18	0.14	0.08	0.33	0.64
9600	0.05	0.09	0.08	0.26	0.49	0.82
9625	0.01	0.05	0.05	0.45	0.69	....
9650	.0004	0.03	0.03	0.69	....	....

Est. vol. 19,591;
Fri vol. 15,313 calls; 8,703 puts
Op. int. Fri 370,147 calls; 484,953 puts

LIBOR – 1 Mo. (IMM)
$3 million; pts. of 100%

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
9525	0.61	0.57	....	.0004	.0004	....
9550	0.36	0.33	0.17	.0004	0.01	0.23
9575	0.13	0.13	0.18	0.02	0.06	0.39
9600	0.01	0.02	0.07	0.15	0.20	0.23
9625	.0004	0.01	0.02	....	0.44	0.42
9650	....	....	....	....	....	....

Est. vol. 0;
Fri vol. 0 calls; 0 puts
Op. int. Fri 3,988 calls; 2,400 puts

表 11.4(续)

COCOA (CSCE)
10 metric tons; $ per ton

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
1050	95	142	....	2	10	....
1100	47	102	148	4	20	30
1150	13	70	..	20	38	....
1200	4	48	84	61	65	68
1250	2	30	....	109	98	....
1300	1	22	51	158	140	130

Est. vol. 2,360;
Fri vol 1,407 calls; 260 puts
Op. Int. Fri 14,657 calls; 14,670 puts

OIL

CRUDE OIL (NYM)
1,000 bbls.; $ per bbl.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
17	1.97	....	....	.01	.14	.23
18	1.00	1.46	1.65	.04	.32	.42
19	.21	.80	1.02	.24	.65	.78
20	.04	.37	.55	1.08	1.23	1.30
21	.01	.15	.27	....	1.99	2.03
22	.01	.06	.14	....	2.90	2.88

Est. vol. 20,783;
Fri vol. 7,517 calls; 7,279 puts
Op. Int. Fri 122,927 calls; 144,651 puts

HEATING OIL No.2 (NYM)
42,000 gal.; $ per gal.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
50	.0372	.0384	.0366	.0020	.0077	.0105
52	.0213	.0243	.0243	.0100	.0135	.0180
54	.0093	.0140	.0155	.0260	.0232	.0291
56	.0030	.0075	.0095	.0270	.0366	.
58	.0010	.0035	.0050	.0456	.0525	....
60	.0004	.0020	.0032	.0650	.0709	....

Est. vol. 1,524;
Fri vol. 886 calls; 1,073 puts
Op. Int. Fri 21,567 calls; 22,451 puts

GASOLINE–Unlead (NYM)
42,000 gal.; $ per gal.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
54	.0394	....	....	.0016	.0030	.0042
56	.0224	.0542	.0631	.0040	.0255	.0075
58	.0110	.0388	.0482	.0131	.0300	.0125
60	.0045	.0259	.0360	.0266	.0370	.0200
62	....	.0165	.0255	.0438	.0276	.0295
64	....	.0100	.0180	.0627	.0410	..

Est. vol. 3,244;
Fri vol. 2,240 calls; 2,491 puts
Op. Int Fri 25,997 calls; 22,791 puts

LIVESTOCK

CATTLE-FEEDER (CME)
44,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	Apr	May	Puts–Settle Mar	Apr	May
74	4.70	3.47	2.97	0.40	1.10	1.60

PORK BELLIES (CME)
40,000 lbs.; cents per lb.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
34	1.25	3.32	4.47	1.20	1.90	2.10

Est. vol. 160; Fri 69 calls, 39 puts
Op. Int. Fri 5,501 calls, 288 puts

SILVER (CBT)
1,000 troy oz.; cents per troy oz.

Strike Price	Calls–Settle Apr	Jun	Aug	Puts–Settle Apr	Jun	Aug
425	11.0	21.0	25.0	13.0	....	....

Est. vol. 0; Fri 28 calls, 0 puts
Op. Int. Fri 823 calls, 5 puts

SOYBEANS (MCE)
1,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
575	30	22	34	7¾	13½	18

Est. vol. 110; Fri 79 calls, 5 puts
Op. Int. Fri 4,803 calls, 178 puts

WHEAT (MPLS)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
430	p	....	....	....	....	....

Est. vol. 6; Fri 24 calls, 0 puts
Op. Int. Fri 520 calls, 878 puts

WHITE WHEAT (MPLS)
5,000 bu.; cents per bu.

Strike Price	Calls–Settle Mar	May	Jly	Puts–Settle Mar	May	Jly
480	....	....	....	....	....	....

Est. vol. 5; Fri 7 calls, 0 puts
Op. Int. Fri 106 calls, 144 puts

CURRENCY

JAPANESE YEN (IMM)
12,500,000 yen; cents per 100 yen

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
7800	1.11	1.51	....	0.10	0.51	0.86
7850	0.70	1.20	....	0.19	0.69	1.06
7900	0.36	0.92	1.18	0.38	0.91	1.31
7950	0.21	0.71	0.97	0.70	1.19	1.58
8000	0.11	0.53	0.76	1.10	1.51	1.90
8050	0.06	0.39	0.63	1.55	1.91	2.23

Est. vos 6,723.
Fri vol. 5,329 calls; 6,852 puts
Op. Int. Fri 74,411 calls; 65,603 puts

DEUTSCHEMARK (IMM)
125,000 marks; cents per mark

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Apr	Puts–Settle Feb	Mar	Apr
6200	1.17	1.68	1.52	0.15	0.66	1.31
6250	0.79	1.35	1.28	0.27	0.82	1.56
6300	0.50	1.09	1.07	0.48	1.07	1.84
6350	0.29	0.86	0.89	0.79	1.33	2.16

TREASURY BILLS (IMM)
$1 million; pts. of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
9575	0.40	0.39	....	.0004	0.10	
9600	0.19	0.22	....	0.01	0.19	0.44
9625	0.03	0.13	....	0.10	0.36	0.62
9650	.0004	....	....	....	0.56	..
9675	..	....	....	....	....	.
9700	....	....	....	....	....	.

Est. vol. 30;
Fri vol. 25 calls; 5 puts
Op. Int. Fri 2,406 calls; 1,430 puts

EURODOLLAR (LIFFE)
$1 million; pts. of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	Sep	Puts–Settle Mar	Jun	Sep
9525	0.60	0.49	0.36	0.02	0.12	0.36
9550	0.36	0.32	0.24	0.03	0.20	0.49
9575	0.16	0.19	0.14	0.03	0.32	0.64
9600	0.06	0.10	0.08	0.23	0.48	0.82
9625	0.02	0.05	0.04	0.44	0.68	1.04
9650	0.01	0.02	0.02	0.68	0.90	1.27

Est. vol. Mon. 0 calls; 0 puts
Op. Int. Fri . 5,180 calls; 5,806 puts

LONG GILT (LIFFE)
$50,000; 64ths of 100%

Strike Price	Calls–Settle Mar	Jun	...	Puts–Settle Mar	Jun	...
95	2-35	3-30	..	0-03	0-48	...
96	1-43	2-49	..	0-09	1-03	...
97	0-57	2-10	....	0-25	1-28	...
98	0-24	1-41	....	0-56	1-59	...
99	0-09	1-16	..	1-41	2-32	..
100	0-04	0-57	....	2-36	3-11	..

Est. vol. Mon. 2,070 calls; 755 puts
Op. Int. Fri. 41,175 calls; 28,077 puts

INDEX

S&P 500 STOCK INDEX (CME)
$500 times premium

Strike Price	Calls–Settle Feb	Mar	Jun	Puts–Settle Feb	Mar	Jun
400	12.30	15.35	22.60	2.70	5.85	11.75
405	8.70	11.95	19.40	4.10	7.40	12.50
410	5.65	9.00	16.40	6.05	9.40	15.45
415	3.35	6.55	13.70	8.75	11.90	17.75
420	1.80	4.60	11.35	12.20	14.95	20.25
425	0.90	3.05	9.20	16.25	18.35	23.05

Est vol. 3,777;
Fri vol. 1,888 calls; 3,859 puts
Op. Int. Fri 27,912 calls; 62,999 puts

Black 的模型

在第三章中的分析表明，资产的期货价格 F 可以通过如下表达式与其即期价格相联系：

$$F = Se^{\alpha(T-t)} \tag{11.7}$$

若是金融资产，α 就是无风险利率减去该资产的收益率；若是商品资产，α 就是无风险利率加上单位时间每一美元商品的储存费用减去便利收益(Convenience yield)。附录 11B 说明了如果 α 是时间的函数(但不是 S 或任何其它随机变量的函数)，而且 S 的波动率是常数，那么，F 的波动率就是常数而且等于 S 的波动率。在这种情况下，附录 11B 中指出期货的价格可以和支付连续红利率 r 的证券同样对待[②]。只要用 F 代替 S，并且 q = r，方程(11.1)和(11.2)就给出了欧式期货看涨期权价格 c 和欧式期货看跌期权价格 p：

$$c = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - XN(d_2)] \tag{11.8}$$

$$p = e^{-r(T-t)}[XN(-d_2) - FN(-d_1)] \tag{11.9}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

这些结果由 Black 推导出的。我们已经说明了它们成立的条件为：

1. 方程(11.7)中的变量 α 只是时间的函数。
2. 期货合约标的资产的波动率是常数。

对于股票、股票指数和货币的期货合约，这些假设都是合理的近似，对于大多数商品期货也是合理的。但是，当期货的标的资产是诸如长期和短期国债这些依赖于利率的证券时，这个假设是有疑问的。利率衍生证券将在第十五章进行讨论。

例 11.5

考虑一个原油的欧式看跌期货期权。设距到期日还有 4 个月，当前期货价格为 $20，执行价格是 $20，无风险利率是每年 9%，期货价格的波动率是每年 25%。在本例中，$F=20$，$X=20$，$r=0.09$，$T-t=0.3333$，$\sigma=0.25$。由于 $\ln(F/X)=0$，

$$d_1=\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}=0.07216$$

$$d_2=-\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}=-0.07216$$

$$N(-d_1)=0.4712,\qquad N(-d_2)=0.5288$$

看跌期权价格 p 为：

$$p=e^{-0.09\times 0.3333}(20\times 0.5288-20\times 0.4712)=1.12$$

或 $1.12。

看跌与看涨期权之间的平价关系

欧式期货看涨期权和看跌期权之间的平价关系也可用与一般期权同样的方法（参见 7.6 节）推导出来。如果 F_T 是到期日的期货价格，一份欧式看涨期权加上数额为 $Xe^{r(T-t)}$ 的现金的最终价值为：

$$\max(F_T-X,0)+X=\max(F_T,X)$$

一笔数额为 $Fe^{-r(T-t)}$ 的现金加上一份期货合约再加上一份欧式看跌期权的最终价值为（注意：这里假设期货合约和远期合约之间没有差别）：

$$F + (F_T - F) + \max(X - F_T, 0) = \max(F_T, X)$$

由于到期日两种证券组合等价，所以现在它们今天的价值也相等。现在，期货合约的价值为0。因此

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + Fe^{-r(T-t)} \qquad (11.10)$$

例 11.6

假设一份6个月后交割，执行价格为$8.50的欧式白银期货看涨期权的价格为每盎司56美分。设6个月后交割的白银期货价格现在是$8.00，6个月后到期的投资的无风险利率为每年10%。将方程(11.10)变形，可以得到与看涨期权具有相同到期日和执行价格的欧式白银期货看跌期权的价格为：

$$0.56 + 8.50e^{-0.5\times0.1} - 8.00e^{-0.5\times0.1} = 1.04$$

欧式期货期权与欧式现货期权

在期货合约到期日，任何资产的期货价格都等于当时的现货价格。所以如果期货合约与欧式期货期权合约到期日相同，欧式期货期权的价值就与相应的标的资产的欧式期权的价值相同。这就解释了以远期汇率表示的基于外汇即期汇率的欧式看涨期权的方程(11.5)和(11.6)与方程(11.8)和(11.9)相同的原因。

美式期货期权与美式现货期权

事实上，进行交易的期货期权通常是美式的。假如无风险利率为正，提前执行美式期货期权有时是最优的。因此，美式期货期权的价值要高于相应的欧式期货期权。遗憾的是，我们还没有得到美式期货期权定价的解析公式。在第十四章中讨论其数值方法和解析近似解。

当期货合约与期权合约具有相同的到期日时，美式期货期权

并不总是与相应的美式现货资产期权具有相同的价值。例如，假设有一种正常市况市场，在到期日之前期货价格总是高于现货价格。大多数指数、黄金、白银、低利率货币和一些商品就是这种情况。在正常市况市场，美式看涨期货期权一定比相应的该现货资产的美式看涨期权价值高。这是因为，在有些情况下，美式期货期权可能会提前执行，这时它将为持有者提供更大的收益。同样，美式看跌期货期权比相应的现货资产的美式看跌期权的价值要低。如果存在着一个逆况市场，期货价格总是低于现货价格，高利率货币和某些商品的情况就是这样的。此时的状况就与上面的相反。在这个市场中，美式看涨期货期权一定比相应的该现货资产的美式看涨期权的价值低，而美式看跌期货期权比相应的现货资产的美式看跌期权的价值高。

当期货合约比期权合约到期晚或两者同时到期时，以上所述的美式期货期权和美式现货资产期权的差异是正确的。实际上，期货合约到期越晚，两者的差异就越大。无论现货价格和期货价格遵循的过程是怎样假设的，以上结论也是正确的。

11.5 小 结

基于无红利支付股票的欧式期权定价的 Black－Scholes 公式可以推广到基于支付连续已知红利收益率的欧式期权定价。实际上，股票并不支付连续红利。然而，一些其它的期权标的资产可以认为与支付连续红利收益率的股票类似。特别是

1. 指数与支付连续红利的股票相似。其红利收益率是所有组成指数的股票的红利收益率的平均值。

2. 外币与支付连续红利的股票相似。其红利收益率等于外国无风险利率。

3. 期货价格与支付连续红利的股票相似。且红利收益率等

于国内无风险利率。

因此，Black－Scholes 扩展后可以用来为指数、外币和期货的欧式期权定价。在第十四章中我们将看到这种类似对于指数、外币和期货的美式期权的数值化定价方法也是很有用的。

指数期权用现金交割。在执行指数看涨期权时，其持有者获得了数额等于交易收盘时指数超过执行价格的那部分收益。同样，在执行指数看跌期权时，其持有者获得了数额等于交易收盘时执行价格超过指数的那部分收益。指数期权可以用来对证券组合进行保险。如果证券组合的 β 为 1.0，对于证券组合中每 100S 美元应当购买一份看跌期权，这里 S 是指数的值；当 β 为其他值时，对于证券组合中每 100S 美元应当购买 β 份看跌期权，其中 S 是用资本资产定价模型计算的证券组合的 beta 值。所购买的看跌期权的执行价格应当反映出要求的保险水平。

在有组织的交易所内和 OTC 市场都存在着货币期权的交易。它们可以被公司的财务主管用来对冲外汇头寸风险。比如，一个美国公司的财务主管已知在将来的某一时刻他或她的公司将收入一笔英镑，他或她可以通过购买那一时刻到期的英镑看跌期权进行保值。同样，一个美国公司的财务主管已知在将来的某一时刻将支付一笔英镑，他或她可以通过购买那一时刻到期的英镑看涨期权进行保值。

期货期权要求在执行期权时交割标的期货合约。执行看涨期权时，持有者获得了一份期货合约的多头头寸加上一笔数额等于期货价格减去执行价格的现金。同样，执行看跌期权时，持有者获得了一份期货合约的空头头寸加上一笔数额等于执行价格减去期货价格的现金。进行交割的期货合约到期日通常比期权稍晚。如果我们假设两者到期日相同，欧式期货期权与相应的资产的欧式期权价值完全相同。但是对于美式期权这一结论不成立。若期货市场是正常市况的，美式期货看涨期权比美式资产的看涨期权价

值高，而美式期货看跌期权比该资产的美式看跌期权价值低。若期货市场是逆向市况的，结果则相反。

附录 11A：基于支付连续红利率股票衍生证券所满足的微分方程的推导

定义 f 为衍生证券的价格，该衍生证券的标的为以红利率 q 支付连续红利的股票。我们假定股票价格 S 遵循下列过程：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

其中，dz 是维纳过程。变量 μ 和 σ 分别是股票价格的预期增长率和股票价格的波动率。由于股票价格提供了连续红利率，μ 并不等于股票的预期收益率。

由于 f 是 S 和 t 的函数，它遵循 ITO 定理，即

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz$$

与 10.7 节类似，我们可以建立一个证券组合，其构成如下：

$$-1: \quad \text{衍生证券}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial S}: \quad \text{股票}$$

如果 Π 是该证券组合的价值，

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S \qquad (11A.1)$$

证券组合的价值在 Δt 时间的变化 ΔΠ 由(10.19)式给出：

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

在 Δt 时间内，持有该证券组合的投资者获取资本利得 ΔΠ，红利为

$$qS\frac{\partial f}{\partial S}\Delta t$$

我们定义 ΔW 是证券组合持有者在 Δt 内财富的变化。因此，

$$\Delta W = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + qS\frac{\partial f}{\partial S}\right)\Delta t \quad (11A.2)$$

由于该表达式独立于维纳过程，该证券组合是瞬态无风险的。因此，

$$\Delta W = r\prod\Delta t \quad (11A.3)$$

将(11A.1)和(11A.2)代入(11A.3)中，得到：

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + qS\frac{\partial f}{\partial S}\right)\Delta t = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (11A.4)$$

这就是 f 必须满足的微分方程。

附录 11B：基于期货价格衍生证券所满足的微分方程的推导

假定期货价格 F 和现货价格 S 的关系为：

$$F = Se^{\alpha(T-t)}$$

其中 α 仅是时间的函数。我们进一步假定 S 遵循如下过程：

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$$

其中 σ 为常数。根据 ITO 定理，F 的波动率为 σ_F，其中：

$$\sigma_F F = \sigma S\frac{\partial F}{\partial S} = \sigma Se^{\alpha(T-t)} = \sigma F$$

因此，

$$\sigma_F = \sigma$$

即 F 的波动率等于 S 的波动率。这是 11.4 中的第一个结论。

假定 F 确实遵循如下过程：

$$dF = \mu_F Fdt + \sigma Fdz \quad (11B.1)$$

其中 dz 是维纳过程，且 σ 为常数。

由于 f 是 F 和 t 的函数，根据 ITO 定理，它满足：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial F}\mu_F F + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial F}\sigma F dz \tag{11B.2}$$

考虑某个证券组合，其组成如下：

-1：　衍生证券

$+\frac{\partial f}{\partial F}$：　期货合约

定义 Π 为证券组合的价值，ΔΠ、Δf 和 ΔF 分别为在时间 Δt 内 Π、f 和 F 的变化。由于签订期货合约的费用为零，所以：

$$\Pi = -f \tag{11B.3}$$

在 Δt 时间内，该证券组合的持有者从衍生证券中获取资本利得为 $-\Delta f$，而从期货合约中获取的收益为：

$$\frac{\partial f}{\partial F}\Delta F$$

定义 ΔW 是 Δt 时间内证券组合持有者财富的变化。则

$$\Delta W = \frac{\partial f}{\partial F}\Delta F - \Delta f$$

式(11B.1)和(11B.2)的离散形式如下：

$$\Delta F = \mu_F F\Delta t + \sigma F\Delta z$$

和

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial F}\mu_F F + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial F}\sigma F\Delta z$$

其中 $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$，$\varepsilon$ 是标准正态分布的随机抽样。则

$$\Delta W = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)\Delta t \tag{11B.4}$$

这是无风险的。因此下列等式也是成立的

$$\Delta W = r\Pi\Delta t \qquad (11B.5)$$

将(11B.3)中 Π 代入等式(11B.4)和(11B.5),得出:

$$\left[-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right]\Delta t = -rf\Delta t$$

因此

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial F^2}\sigma^2 F^2 = rf$$

当 q 等于 r 时,这与(11A.4)的结果相同。为了对衍生证券进行估值,我们得出期货价格的处理方法与支付红利率为 r 股票的处理方法相同。

第十二章

衍生证券定价的一般性方法

在本章中我们继续第十章和第十一章的思路研究衍生证券定价的一般性方法。当几个基本变量遵循连续时间随机过程，而且并不要求这些变量是可交易证券的价格时，我们可以使用这种一般性方法。

“可交易证券”(traded security)这个词在这里用来描述一种被大量投资者仅仅用于投资的交易资产。股票、债券、黄金和白银都是可交易证券，但是利率、通货膨胀率和大多数商品并不是可交易证券。在衍生证券定价中衍生证券的标的变量是不是可交易证券是一个重要的问题。在第三章关于远期合约和期货合约的文章中，我们已经看到了这一点。一般来说，当一个标的变量是可交易证券的价格时，风险中性定价结果表明投资者对风险的态度与衍生证券价格和标的变量价值之间的关系无关。当标的变量不是可交易证券价格时，他们对风险的态度就变得很重要。

12.1 单一基本变量

这一节中我们考虑依赖某个遵循如下随机过程的变量 θ 的衍生证券的特性。

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + sdz \tag{12.1}$$

其中 dz 是一个维纳过程。相应的，参数 m 和 s 分别为 θ 的期望增长率和波动率。我们假设它们只取决于 θ 和 t。但我们没有假设 θ 是一种可交易证券的价格。它可能是离金融市场极其遥远的某种东西，如美国新奥尔良中部地区的气温。

设 f_1 和 f_2 是仅决定于 θ 和时间的两种衍生证券的价格，可能是期权或其它衍生证券，在将来的某一时刻这些衍生证券的盈利为 θ 的某一函数。f_1，f_2 遵循的过程可以由 ITO 定理决定。我们设它们为：

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

和

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

其中 μ_1，μ_2，σ_1 和 σ_2 是 θ 和 t 的函数，dz 是与方程(12.1)中相同的维纳过程。这些过程的离散形式为：

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \tag{12.2}$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \tag{12.3}$$

将 $\sigma_2 f_2$ 个第一种衍生证券和 $-\sigma_1 f_1$ 个第二种衍生证券组合起来，我们可以消去 Δz，构造一个瞬时无风险证券组合。若 Π 为该证券组合的价值，

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \tag{12.4}$$

和

$$\Delta\Pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2$$

将方程(12.2)和(12.3)代入,得到:

$$\Delta\Pi = (\mu_1\sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2\sigma_1 f_1 f_2)\Delta t \tag{12.5}$$

由于 Π 瞬时无风险,它的盈利一定为无风险利率。因此,

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t$$

将方程(12.4)和(12.5)代入,得到:

$$\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1 = r\sigma_2 - r\sigma_1$$

或

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \tag{12.6}$$

风险的市场价格

定义 λ 为方程(12.6)的每一边的值,所以:

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda$$

如果 f 为一种依赖于 θ 和 t 的某个证券的价格,取掉以上公式中的下标,我们可得:

$$df = \mu f dt + \sigma f dz \tag{12.7}$$

于是:

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \tag{12.8}$$

一般来说,参数 λ 取决于 θ 和 t,但不取决于衍生证券 f 的性质。λ 被称为 θ 风险的市场价格(market price of risk)。

变量 μ 是 f 的预期收益。f 的波动率可能为 σ 和 $-\sigma$。如果 f

与θ是正相关的$\left(\text{因此}\frac{\partial f}{\partial \theta}\text{是正的}\right)$，σ为正且等于f的波动率。但是，如果f与θ是负相关的，σ为负且f的波动率等于$-\sigma$[①]。

θ的风险的市场价格衡量了风险与收益的权衡关系，这种关系是对取决于θ的证券而言的。方程(12.8)可以写为：

$$\mu - r = \lambda\sigma \tag{12.9}$$

为了直观地理解这个方程，我们注意到变量σ可以被粗略地解释为f中代表的θ风险的数量。因此，在方程的右边，我们可以看作是用θ风险的价格乘以θ风险的数量。方程的左边是要求得到风险补偿的超过无风险利率的预期收益。许多读者会注意到方程(12.9)和资本资产定价模型的相似之处，资本资产定价模型将股票的期望超额收益与它的风险联系起来。

例 12.1

考虑一种证券，其价格与石油的价格正相关，但不依赖于任何其它的随机变量。假设它提供预期收益为每年12%，波动率为每年20%，假设无风险利率为每年8%。可以得到石油风险的市场价格是：

$$\frac{0.12 - 0.08}{0.2} = 0.2$$

注意，石油并不是一种可交易证券。因此，它的风险的市场价格不能通过令μ等于石油投资的预期收益，σ等于石油价格的波动率，由方程(12.8)得到。

微分方程

使用ITO定理，方程(12.7)的参数μ和σ为：

$$\mu f = \frac{\partial f}{\partial t} + m\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{2}s^2\theta^2\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

和

$$\sigma f = s\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

将其代入方程(12.9)中，我们得到如下 f 必须满足的微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}(m - \lambda s) + \frac{1}{2} s^2 \theta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = rf \qquad (12.10)$$

方程(12.10)在结构上与 Black－Scholes 微分方程(10.20)非常相似。用 θ 替换 S 且 q=r－m+λs，这个方程就与(11A.4)中基于一种提供已知红利收益 q 的衍生证券定价的微分方程相同了。这一观察结果导致了 10.8 节中风险中性定价结果的推广，所以，当衍生证券的标的变量不是可交易证券时，该公式也可以使用。

风险中性定价

只要将

$$q = r - m + \lambda s$$

代入，方程(11A.4)中 S 的任何解都是方程(12.10)θ 的一个解，反之亦然。我们已经知道了如何用风险中性定价解(11A.4)式，该过程包括设定 S 的漂移等于 r－q 和以无风险利率贴现期望盈利。因此，我们也可以通过令 θ 的漂移为：

$$r - (r - m + \lambda s) = m - \lambda s$$

求解方程(12.10)，然后以无风险利率贴现期望盈利。

所以为衍生证券定价的方法是使 θ 的漂移减少 λs，使之由 m 变为 m－λs 并把这个世界看成是风险中性的。设 θ 是一种非红利支付股票的价格，由方程(12.9)得：

$$m - r = \lambda s$$

或

$$m - \lambda s = r$$

它表明了将 θ 的预期增长率替换为 $m-\lambda s$ 与令证券的收益等于无风险利率是等价的。也表明了第十章中的风险中性定价结果是这里所述的更一般结果的一个特例。

例 12.2

黄铜的现价为每磅 80 美分，无风险利率为每年 5%。黄铜价格的预期增长率为每年 2%，波动率为每年 20%。黄铜风险的市场价格为 0.5。假设成交了一份合约，允许持有者在 6 个月后可以无费用地收取 1,000 磅黄铜。这种情况下，$m=0.02$，$\lambda=0.5$，$s=0.2$。在风险中性世界中黄铜价格的预期增长率为：

$$m-\lambda s=0.02-0.5\times 0.2=-0.08$$

或每年 -8%。因此在风险中性世界中，该合约的预期盈利为

$$800e^{-0.08\times 0.5}=768.63$$

以每年 5% 贴现 6 个月，我们得到合约现值的估计值为 749.65。

12.2　利率风险

在这一节中我们对利率风险的市场价格为负的结论作出推导与说明。

一个典型的证券组合中，股票和债券的收益是与利率的变化负相关的。当利率减小时，股票和债券的价格倾向于增加；当利率增加时，股票和债券的价格倾向于减小。让我们考虑向证券组合中加入一个价格与某一种特定利率（比如一年期利率）正相关的证券。这种证券产生的效果将是使证券组合的风险减小而不是增加。这是因为，当利率上升时，证券组合中股票和债券价值的下降由那种债券价值的增加相抵消；当利率下降时，证券组合中股票和债券价值的增加由那种证券价值的减少相抵消。这意味着证券组合的持有者对低于无风险利率的该证券的预期收益感到满意。

设利率由 θ 表示，遵循(12.1)式的过程，而所考虑的证券的价

格为 f,遵循(12.7)式的过程。由于 θ 和 f 是正相关,σ 为正值。由刚才的推导可得 $\mu < r$。由方程(12.8)可知利率风险的市场价格为负。

例 12.3

考虑两种证券,都与 90 天利率正相关。假设第一种证券预期收益率为每年 3%,波动率为每年 20%;第二种证券波动率为每年 30%。假设瞬时无风险利率为每年 6%。用第一种证券的收益和波动率可得利率风险的市场价格为:

$$\frac{0.03 - 0.06}{0.2} = -0.15$$

由方程(12.9)变形可知第二种证券的预期收益为:

$$0.06 - 0.15 \times 0.3 = 0.015$$

或每年 1.5%。

12.3 基于几个状态变量的证券

附录 12A 和 12B 将 12.1 节的结果推广到价格取决于几个基本变量的证券。附录 12A 给出了 ITO 定理包含几个变量函数的形式。附录 12B 推导出了一个所有基于一系列遵循 ITO 过程的状态变量的衍生证券必须满足的微分方程。

假设 n 个变量 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ 遵循如下随机过程:

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i \qquad (12.11)$$

$i = 1, 2, \ldots n$,其中 dz_i 是维纳过程。参数 m_i 和 s_i 是预期增长率和波动率,可为 θ_i 和时间的函数。附录 12A 给出了依赖于 θ_i 的证券的价格 f 的过程形式为:

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i dz_i \tag{12.12}$$

在这个方程中，μ 为证券的预期收益，$\sigma_i dz_i$ 是对 θ_i 起作用的这个收益的风险组成部分。

附录 12B 中给出了：

$$\mu - r = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i \tag{12.13}$$

其中 λ_i 是 θ_i 风险的市场价格。这个方程将投资者对证券要求的预期超额净收益与 λ_i 和 σ_i 联系起来。$\lambda_i\sigma_i$ 项衡量了投资者要求的证券收益受证券对 θ_i 的依赖的影响的程度。如果 $\lambda_i\sigma_i = 0$，没有任何影响；如果 $\lambda_i\sigma_i > 0$，投资者将要求更高的收益补偿由 θ_i 引起的风险；如果 $\lambda_i\sigma_i < 0$，证券对 θ_i 的依赖使得投资者要求一个比其它情况低的收益。当变量的效果是减小而不是增加典型投资者的证券组合风险的时候，就可以出现 $\lambda_i\sigma_i < 0$ 的情况。

例 12.4

一种股票价格依赖于三个基本变量：石油价格、黄金价格和股票市场整体情况。假设这些变量风险的市场价格分别为 0.2，－0.1 和 0.4。方程(12.12)中相应于三个变量的 σ_i 因子分别估计为 0.05，0.1 和 0.15。该股票超过无风险利率的净收益为：

$$0.2 \times 0.05 - 0.1 \times 0.1 + 0.4 \times 0.15 = 0.06$$

和每年 6%。如果有这三个以外的其它变量影响 f，当这些另外的变量风险的市场价格都为 0 时，以上结果仍是正确的。

方程(12.13)与 Ross 在 1976 年提出的套利定价理论 APT 密切相关。资本资产定价模型 CAPM 的连续时间形式可以看作是这个方程的一种特殊情况。CAPM 认为投资者要求用超额净收益来补偿与股票市场收益的整体风险有关的任何风险，但对其它

的风险则不要求超额净收益。与股票市场收益有关的风险称为系统风险，其余风险称为非系统风险。如果 CAPM 理论正确的话，λ_i 正比于 θ_i 的变化与市场整体收益之间的瞬态相关性。当 θ_i 与市场整体收益瞬态不相关时，λ_i 为 0。

风险中性定价

在 12.1 节中有关微分方程(12.10)的风险中性定价结论可被推广到更一般的在附录 12B 中的微分方程(12B.11)。假如每一个标的变量的预期增长率由 m_i 换成 $m_i-\lambda_i s_i$，衍生证券总可以在风险中性世界中进行定价。变量的波动率和变量两两之间的相关系数没有改变。这个结果最早是由 Cox，Ingersoll 和 Ross 提出的，其重要作用是将原结论推广到一般风险中性定价结论中。

值得注意的是我们的风险中性定价理论的推论比其最初的形式更复杂一些。当 θ_i 不是可交易证券的价格时，我们不能断定在风险中性世界中它的预期增长率会是 $m_i-\lambda_i s_i$。我们也不能断定基于 θ_i 的衍生证券在风险中性世界中的价值与在厌恶风险世界中的价值相同。我们只能断定将 θ_i 的预期增长率由 m_i 换成 $m_i-\lambda_i s_i$，然后如同在风险中性世界中一般操作，我们将得到衍生证券的正确的估值[②]。然而，为方便起见，我们就把预期增长率由 m_i 换成 $m_i-\lambda_i s_i$ 以后的世界称为风险中性世界。

假设一种依赖于 $\theta_i(1\leqslant i\leqslant n)$的衍生证券在 T 时刻提供盈利。对该衍生证券进行定价，有必要设每个 θ_i 的预期增长率为 $m_i-\lambda_i s_i$，同时，保持每个 θ_i 的波动率等于 s_i 并对所有 i 和 k 保持 θ_i 和 θ_k 的瞬时相关系数等于 ρ_{ik}。该衍生证券的价值就是预期盈利的无风险利率贴现到现在的值。因此，在 T 时刻盈利为 f_T 的衍生证券的价值 f 为：

$$f = e^{-r(T-t)}\hat{E}(f_T) \qquad (12.14)$$

其中$\hat{E}$表示风险中性世界中(即θ_i的预期增长率为$m_i - \lambda_i s_i$的世界)的期望值。

如果以上r是一个随机变量,可以象对其它θ_i变量一样对其进行处理。在所有的计算中,r的增长率(或成比例的漂移率)应减去$\lambda_r s_r$,其中λ_r是与r有关的风险的市场价格,s_r是r的波动率[③]。进行衍生证券定价时,有必要计算在风险中性世界中在r遵循的特殊轨迹条件下的预期盈利。然后将预期盈利以轨迹中r的平均值进行贴现,预期值取自所有可能的轨迹。因此,在T时刻盈利为f_T的衍生证券的价值f为:

$$f = \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)} f_T] \tag{12.15}$$

其中$\bar{r}$是t与T之间的平均无风险利率。

当盈利f_T是标的变量遵循的轨迹的某个函数而且f_T仅取决于变量的最终值的时候,方程(12.14)和(12.15)是正确的。在前一种情况下,f被称为一个基于历史的衍生证券(history - dependent derivative security)。在第十六章中我们将讨论基于历史的一些衍生证券。

例 12.5

考虑一种衍生证券。在T时刻股票A的价格高于X_A且股票B的价格高于X_B的时候,该衍生证券的盈利为$100。我们假设两种股票的价格不相关也不支付红利。使用风险中性定价方法,该衍生证券价值为$100Q_A Q_B e^{-r(T-t)}$,其中Q_A是在风险中性世界中在T时刻股票A的价格高于X_A的概率,Q_B是在风险中性世界中在T时刻股票B的价格高于X_B的概率。可表示为:

$$Q_A = N\left[\frac{\ln(S_A/X_A) + (r - \sigma_A^2/2)(T-t)}{\sigma_A\sqrt{T-t}}\right]$$

$$Q_B = N\left[\frac{\ln(S_B/X_B) + (r - \sigma_B^2/2)(T-t)}{\sigma_B\sqrt{T-t}}\right]$$

其中 S_A 和 S_B 是股票 A 和 B 的现价，σ_A 和 σ_B 是股票 A 和 B 的波动率。

12.4 基于商品价格的衍生证券

大多数商品主要用于消费，不能被看作是“可交易证券”。它们的风险的市场价格很可能会进入衍生证券定价中。幸运的是，事实证明我们可以使用技巧通过利用期货价格估计风险的市场价格来解决问题。首先考虑基于商品的欧式期权的定价。

定义：

S：商品价格

F：与期权同时到期的基于商品的合约的期货价格。

期权到期时，S＝F。我们不再假设期权的标的变量是商品价格，而可以假设它是期货价格，可以使用第十一章中的结论。对任何基于商品价格（该价格在同一个时间给出盈利）的证券进行定价都可以使用相同的方法。

更一般地，我们可以证明商品的期货价格提供了商品价格在风险中性世界中遵循的过程的信息。为说明这一点，让我们考虑一份交割价格为 K 的远期合约。假设利率为常数，由方程（12.14）得到远期合约的价值 f 为：

$$f = e^{-r(T-t)}\hat{E}(S_T - K)$$

或

$$f = e^{-r(T-t)}[\hat{E}(S_T) - K]$$

其中$\hat{E}$表示风险中性世界中的期望值。远期或期货价格 F 是这个方程中使 f 等于 0 的 K 值。因此，

$$F = \hat{E}(S_T) \qquad (12.16)$$

这表明了期货价格是在风险中性世界中未来 T 时刻的现货价格的期望值。假设商品价格的预期增长率仅是时间的函数，而不依赖于商品价格本身或任何其它变量。那么在风险中性世界中不同时刻的商品价格的预期增长率可以从连续的期货价格中估计出来。这些预期增长率连同商品价格波动率的估计值一起定义了风险中性世界中商品价格遵循的随机过程。原则上，这就是对任何基于商品价格的衍生证券定价所需的全部要求。

例 12.6

假设在 1992 年 7 月末生牛的期货价格如下：

1992 年 8 月	62.20
1992 年 10 月	60.60
1992 年 12 月	62.70
1993 年 2 月	63.37
1993 年 4 月	64.42
1993 年 6 月	64.40

这些数据可以用来估计风险中性世界中生牛价格的预期增长率。例如，风险中性世界中 1992 年 10 月到 12 月生牛价格的预期增长率为：

$$\ln\frac{62.70}{60.60}=0.034$$

或以连续复利计为 3.4%，以年计则为 20.4%。

为了简单说明衍生证券定价方法，考虑如下衍生证券的例子。该衍生证券将在 1993 年 7 月末支付数量为生牛在前一年的平均价格。在风险中性世界中，前一年生牛的平均价格近似为上面给出的 6 个期货价格的平均值（即 62.95 美分）。假设无风险利率为每年 10%，就可以得到衍生证券的价值为：

$$62.95e^{-0.1}=56.96\text{ 美分}$$

便利收益

第三章中已介绍了商品的便利收益。它用来衡量具体商品所

有者实现了而期货合约持有者没有实现的利益。若 y 是便利收益，u 为存储费用，商品的行为仿佛是一种可交易证券，它提供的收益等于 y－u。在风险中性世界中，它的增长率为：

$$r-(y-u)=r-y+u$$

一种商品的便利收益可与它的风险市场价格相联系。从本章前部分的分析中可知，风险中性世界中商品价格的预期增长率为 m－λs，其中 m 是现实世界的预期增长率，s 是其波动率，λ 是其风险的市场价格。我们得到：

$$m-\lambda s=r-y+u$$

或

$$y=r+u-m+\lambda s$$

12.5 交叉货币期货和期权

本章概念的一个有趣的应用是交叉货币衍生证券。考虑一种 T 时刻到期的基于 Nikkei225 股票平均指数远期合约。

定义：

S(t)：t 时刻以日元计 Nikkei 指数

Q(t)：t 时刻用日元表示的 1 美元价值

K：以日元计的交割价格

q：Nikkei 指数的红利收益率

r：国内(美元)无风险利率

r_f：日元的无风险利率

F：远期合约的价格

如果远期合约的盈利是

$$S(t)-K \quad \text{日元}$$

按照3.7节所述，远期价格为 $S(t)e^{(r-q)(T-t)}$ 日元。这是因为S(t)是可交易证券的日元价格，并且在风险中性世界中它以 $r_f - q$ 的期望率增长。

一种更加难以分析的情况是当盈利定义为：

$$S(T) - K \quad \text{美元}$$

这与3.7节讨论的基于Nikkei股票平均指数的CME期货合约相一致。我们可能轻易就会得出期货价格是 $S(t)e^{(r-q)(T-t)}$ 美元。这个结果是错误的。当以美元的数目计算时，Nikkei指数不是一种可交易证券的价格。为了阐述得更清晰，我们假设Nikkei指数在连续三天中为23,000,23,050和23,025。我们可以交易一种在这三天中价值分别为23,000日元，23,050日元和23,025日元的证券组合。但我们不能交易一种在三天中分别为$23,000，$23,050和$23,025的证券组合。

在盈利为 $S(T) - K$ 美元的衍生证券定价中的问题是我们并不知道在风险中性世界中变量S(t)美元所遵循的过程。要搞清这一点，我们首先注意到对于一个日本投资者，从该衍生证券获得的盈利为：

$$[S(T) - K]Q(T) \text{ 日元}$$

该衍生证券的当前价值为：

$$e^{-r_f(T-t)}\hat{E}[S(T)Q(T) - KQ(T)] \text{ 日元}$$

或

$$e^{-r_f(T-t)}\{\hat{E}[S(T)Q(T)] - K\hat{E}[Q(T)]\} \quad \text{日元}$$

远期价格是使上式为0的K的值。因此：

$$F = \frac{\hat{E}[S(T)Q(T)]}{\hat{E}[Q(T)]} \tag{12.17}$$

我们知道，从一个日本投资者的角度来看，Q(T)在风险中性世界中期望增长率为 $r_f - r$，所以：

$$\hat{E}[Q(T)] = Q(t)e^{(r_f - r)(T-t)} \tag{12.18}$$

为确定 $\hat{E}[S(t)Q(t)]$的值，我们注意到：

$$\begin{aligned} dS(t) &= (r_f - q)S(t)dt + \sigma_S S(t)dz_S \\ dQ(t) &= (r_f - r)Q(t)dt + \sigma_Q Q(t)dz_Q \end{aligned} \tag{12.19}$$

其中 σ_S 和 σ_Q 是 S 和 Q 的波动率，dz_S 和 dz_Q 是维纳过程。由附录 12A 的 ITO 定理可得 S(t)Q(t)遵循的过程为：

$$\begin{aligned} d[S(t)Q(t)] = &[r_f - q + r_f - r + \rho\sigma_S\sigma_Q]S(t)Q(t)dt \\ &+ S(t)Q(t)[\sigma_S dz_S + \sigma_Q dz_Q] \end{aligned}$$

其中 ρ 是 S 和 Q 之间的瞬时相关系数。这表明了变量 S(t)Q(t)遵循几何布朗运动，其在风险中性世界中的预期漂移为 $2r_f - q - r + \rho\sigma_S\sigma_Q$。因此：

$$\hat{E}[S(t)Q(t)] = S(t)Q(t)e^{(2r_f - q - r + \rho\sigma_S\sigma_Q)(T-t)} \tag{12.20}$$

由方程(12.17)、(12.18)和(12.20)可得[①]

$$F = S(t)e^{(r_f - q + \rho\sigma_S\sigma_Q)(T-t)} \tag{12.21}$$

用方程(12.16)的结果，则在风险中性世界中 S(t)美元遵循的过程漂移为 $r_f - q + \rho\sigma_S\sigma_Q$。从美国投资者的角度来看，这就象一

种支付连续红利为 q^* 的以美元标价的股票，而：

$$r - q^* = r_f - q + \rho\sigma_S\sigma_Q$$

或

$$q^* = r - r_f + q - \rho\sigma_S\sigma_Q$$

这一观察使我们可以为其它基于以美元计算盈亏的 Nikkei 指数的衍生证券定价。比如方程(11.1)和(11.2)给出了在 T 时刻盈利为 S(T) − X 美元的欧式看涨期权的价格为：

$$S(t)e^{-q^*(T-t)}N(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

T 时刻盈利为 X − S(T)美元的欧式看跌期权的价格为：

$$Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)e^{-q^*(T-t)}N(-d_1)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q^* + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

并且：

$$d_2 = \frac{\ln(S/X) + (r - q^* - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

这些期权对应于在交易所内和在 OTC 交易的几种外汇指数和认股权证。

12.6 小　结

在第三章中我们已经指出，主要用于大量投资者投资的资产的远期或期货合约的定价和主要用于消费的资产的远期或期货合约的定价之间存在着重要的差别。本章中我们指出这一差别对于

其它衍生证券定价也是很重要的。当基本变量为可交易证券时，衍生证券的价值能独立于该变量的增长率和它的风险的市场价格。然而，对于其它变量，衍生证券的价值很可能取决于这两个参数。

本章的最重要的结论是风险中性定价的推论。我们曾经提出，当为衍生证券定价时，如果我们将每个基本变量的预期增长率减去其波动率与风险市场价格的乘积，我们总是可以将这个世界看成是风险中性的。调整后的增长率可以近似认为是风险中性增长率。

幸运的是，在很多情况下，我们可以估计风险中性增长率而不需要事先估计出实际的增长率和风险的市场价格。当变量为可交易证券的价格时，它的风险中性增长率是无风险利率减去该证券的红利收益率。当变量为某种商品的价格时，可以通过期货价格来计算估计风险中性增长率。当某个变量为一个或多个等于可交易证券和商品的价格的基本变量的函数时，可以用 ITO 定理从这些基本变量的风险中性增长率计算该变量的风险中性增长率。我们已经讨论了这一观点如何用于外汇指数期货和期权合约的定价问题。

附录 12A：ITO 定律的一般表示式

在附录 10A 中表示的 Ito 定律给出了单个随机变量的函数所满足的过程。这里我们介绍几个随机变量的函数所遵循过程的 Ito 定律的一般表达式。

假设函数 f 依赖于 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 和时间 t。进一步假设 x_i 遵循 Ito 过程，其瞬态漂移率 a_i 和瞬态波动率为 b_i^2 $(1 \leqslant i \leqslant n)$，即：

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \qquad (12A.1)$$

这里 dz_i 是维纳过程($1 \leqslant i \leqslant n$)。每个 a_i 和 b_i 可以是所有的 x_i 和 t 的任意函数。f 的台劳展开式给出：

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t}\Delta x_i \Delta t + \cdots \qquad (12A.2)$$

方程(12A.1)的离散形式为：

$$\Delta x_i = a_i \Delta t + b_i \in_i \sqrt{\Delta t}$$

这里 ϵ_i 是来自标准正态分布中的随机样本。dz_i 和 dz_j 之间的相关系数 ρ_{ij} 定义为 ϵ_i 和 ϵ_j 之间的相关系数。在附录 10A 中，已经讨论过：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i^2 = b_i^2 dt$$

类似地：

$$\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i \Delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt$$

当 $\Delta t \to 0$，方程(12A.2)中 Δf 展开式的前三项是一阶 Δt，所有其他的项是高阶 Δt。因此，

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

这就是 Ito 定律的一般表达式。用(12A.1)式 dx_i 代入上式，得：

$$df = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij}\right) dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i dz_i \qquad (12A.3)$$

附录 12B:推导衍生证券所满足的一般微分方程

考虑某个依赖于 n 个状态变量和时间 t 的衍生证券。我们假设总共有至少 n+1 个可交易证券(包括所考虑的这一个),这些可交易证券的价格依赖于某些或全部 n 个状态变量。实际上,这是一个适当的约束条件。可交易证券可以是具有不同执行价格和到期日的期权、远期合约、期货合约、债券、股票等等。我们假设 n+1 个可交易证券没有支付红利或其他收益[5]。其他的假设条件类似于第十章所做的假设条件。

1. 允许将全部所得卖空证券。

2. 没有交易成本和税收。

3. 所有证券是完全可分割的。

4. 不存在无风险的套利机会。

5. 证券交易是连续的。

假设 n 个状态变量遵循连续时间 Ito 扩散过程。我们用 θ_i($1 \leqslant i \leqslant n$)来表示第 i 个状态变量,并假设:

$$d\theta_i = m_i\theta_i dt + s_i\theta_i dz_i \qquad (12B.1)$$

这里 dz_i 是维纳过程,参数 m_i 和 s_i 是 θ_i 的期望增长率和 θ_i 的波动率。m_i 和 s_i 可以是 n 个状态变量中任一个变量和时间的函数。所使用的其他符号如下:

ρ_{ik}:dz_i 和 dz_k 之间的相关系数($1 \leqslant i, k \leqslant n$)

f_j:第 j 个可交易证券的价格($1 \leqslant j \leqslant n$)

r:瞬态(非常短时间间隔)无风险利率

f_j 之一是我们所考虑证券的价格。短期无风险利率 r 也许是 n 个状态变量之一。

由于 n+1 个可交易证券都依赖于 θ_i,它遵循附录 12A 中的

Ito 定律，f_j 遵循扩散过程：

$$df_j = \mu_j f_j dt + \sum_i \sigma_{ij} f_j dz_i \qquad (12B.2)$$

其中：

$$\mu_j f_j = \frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} m_i \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} s_i s_k \theta_i \theta_k \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_i \partial \theta_k} \qquad (12B.3)$$

$$\sigma_{ij} f_j = \frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} s_i \theta_i \qquad (12B.4)$$

在这些方程中，μ_j 是由 f_j 提供的瞬态平均收益率并且 σ_{ij} 是由 f_j 提供收益率的瞬态标准偏差的分量，而这也许来源于 θ_i。

由于在方程(12B.2)中有 n+1 个可交易证券和 n 个维纳过程，利用这些证券，有可能构造一个瞬态的无风险证券组合 Π。定义 k_j 为证券组合中第 j 个证券的数量大小，因此：

$$\Pi = \sum_j k_j f_j \qquad (12B.5)$$

应该选择 k_j 以消掉这些证券收益率中的随机分量。根据方程(12B.2)，这意味着：

$$\sum_j k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \qquad (12B.6)$$

其中($1 \leqslant i \leqslant n$)。因此证券组合的收益是：

$$d\Pi = \sum_j k_j \mu_j f_j dt$$

建立该证券组合的成本是 $\sum_j k_j f_j$。如果不存在套利机会，该证券组合的收益一定是无风险利率，所以：

$$\sum_j k_j \mu_j f_j = r \sum_j k_j f_j \qquad (12B.7)$$

或

$$\sum_j k_j f_j(\mu_j - r) = 0 \qquad (12B.8)$$

方程(12B.6)和(12B.8)可看作是包含 k_j 的 n+1 个线性方程组。k_j 并不是都为零。根据线性代数中的著名定理，方程(12B.6)和(12B.8)相一致的条件是：只有：

$$f_j(\mu_j - r) = \sum_i \lambda_i \sigma_{ij} f_j \qquad (12B.9)$$

或

$$\mu_j - r = \sum_i \lambda_i \sigma_{ij} \qquad (12B.10)$$

其中，一些 λ_i($1 \leqslant i \leqslant n$)仅只依赖于状态变量和时间。这证明了方程(12.13)中的结论。

将(12B.3)和(12B.4)式代入方程(12B.9)，我们得到：

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} m_i \theta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} s_i s_k \theta_i \theta_k \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_i \partial \theta_k} - r f_j = \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_j}{\partial \theta_i} s_i \theta_i$$

化简后得：

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \sum_i \theta_i \frac{\partial f_j}{\partial \theta_i}(m_i - \lambda_i s_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} s_i s_k \theta_i \theta_k \frac{\partial^2 f_j}{\partial \theta_i \partial \theta_k} = r f_j$$

去掉 f 的下标，我们得到结论：任何其价格 f 只依赖于状态变量 θ_i($1 \leqslant i \leqslant n$)和时间 t 的衍生证券都满足如下的二阶微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i}(m_i - \lambda_i s_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \rho_{ik} s_i s_k \theta_i \theta_k \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_k} = r f \qquad (12B.11)$$

在(12B.11)中加上一定的边界条件，就可获得某个特定的衍生证券。

第十三章

期权与其它衍生证券的保值

一个金融机构若是在场外市场(OTC)出售给客户一份期权或其它衍生证券，那么该金融机构就面临着风险管理的问题了。如果出售的这个期权碰巧与在交易所交易的一份期权合约相同，这个金融机构就可以在交易所购买同样的一份期权来对冲它在场外市场出售那份期权所暴露的风险。但是，当在场外市场交易的这个期权为了适应客户的需要作了某些改变，从而与交易所交易的标准化期权合约不一致时，对该期权头寸进行对冲就很困难了。以下我们就讨论针对这一问题的几种可选方法。这些分析方法不仅仅适用于期权交易所的做市商，也同样适用金融机构。

期权头寸难以对冲的一个原因是随着时间和市场情况的变化，期权价格对于标的资产价格变化较为敏感。这也就意味着保值者在标的资产上所持有的合适的保值头寸也会变化。第二个原因是期权的价值对于波动率的变化也很敏感。这第二方面的风险是无法用标的资产来对冲的。

一个与期权保值头寸密切相关的问题是构造合成期权。有价证券组合的管理者为使他们的有价证券组合不致跌落于某一水平之下，有时对构造该有价证券组合的合成看跌期权感兴趣。在这一章最后部分我们会讨论如何构造合成期权和为什么这种方法的效果并不令人满意。

13.1 一个例子

在这一节和后两节，我们举一个例子。某金融机构出售了基于100,000股不付红利股票的欧式看涨期权，获利$300,000。我们假设在股票市场股票价格是$49，执行价格是$50，无风险利率是年利率5%，股票价格波动率是每年20%，距到期时间还有20周，股票的期望收益率是每年13%[①]。使用一般的符号，这意味着：

$S=\$49, X=\$50, r=0.05,$

$\sigma=0.20, T-t=0.3846, \mu=0.13$

金融机构一般情况下很少出售基于单种股票的看涨期权。但是，用基于一种股票的看涨期权作为例子便于我们展开讨论，所得结论也适用于其它类型的期权和衍生证券。

由Black－Scholes定价模型可知该期权的价格大致为$240,000。这家机构因此以比该期权理论价值高出$60,000的价格出售了该期权，同时面临着如何对冲其暴露头寸的问题。

13.2 裸期权头寸与抵补期权头寸

金融机构的一种策略就是什么都不做，亦被称作裸期权头寸策略(naked position)。如果看涨期权被执行，该金融机构不得不以当前的市场价格购买100,000股与该期权头寸对冲，其损失为股票价格超出执行价格部分的100,000倍。例如，若20周末到期时股票价格为$60，金融机构的期权成本为$100,000\times(\$60-\$50)=\$1,000,000$，这远远高出先前的期权费收入$300,000。若20周末到期时股票价格低于$50，裸期权头寸策略将运行得很有效。该期权不会被执行，金融机构分文无损，整个交易中金融机

构净获利 $ 300,000。

该金融机构替代裸期权头寸策略的另一种可选方法是抵补期权头寸策略(covered position),所做的就是在出售看涨期权的同时购买 100,000 股股票。如果到期时该期权被执行,这个策略很有利,但在其余情况下,代价就会很昂贵。例如,如果股票价格降低到 $ 40,该机构在股票头寸上的损失将达 $ 900,000 = $ (49 − 40) × 100,000,这同样比从期权上收取的期权费 $ 300,000 高许多。从看涨期权与看跌期权之间的平价关系,也可以看出出售一个抵补看涨期权头寸风险暴露与出售一个裸看跌期权头寸风险暴露是相同的。

所以裸期权头寸和抵补期权头寸这两种策略都不是理想的套期保值方法。如果 Black − Scholes 方程式的前提假设成立的话,金融机构的这两种方法的成本平均来说应当大致为 $ 240,000[2]。但是在以上任何一种情况下,成本的范围是从 0 到 $ 1,000,000。一种理想的套期保值方法应当确保成本总为 $ 240,000,即卖出看涨期权的成本和对它进行对冲的成本之间的标准偏差为 0。

13.3　止损策略

在套期保值方法中有时采用一种所谓的止损法策略(stop − loss strategy)。为说明其基本思路,我们假设某金融机构已经出售了一个按执行价格 X 购买一单位的标的证券的欧式看涨期权。套期保值的设想就是当价格刚刚升到 X 以上就购买该证券,刚刚落到 X 以下就出售该证券。其目的就是在股票价格刚刚低于 X 时持有裸期权头寸,而在股票价格刚刚高于 X 时持有抵补期权头寸。这个过程也为了保证:在到期时刻 T,如果期权处于实值状态该机构持有标的证券,如果期权处于虚值状态则该机构不持有标的证券。该策略所形成的盈亏状态类似于该看涨期权的盈亏状

态。在图 13.1 所示的情况下，止损策略的操作为：t1 时刻买入，t2 时刻卖出，t3 时刻买入，t4 时刻卖出，t5 时刻又买入，T 时刻交割。

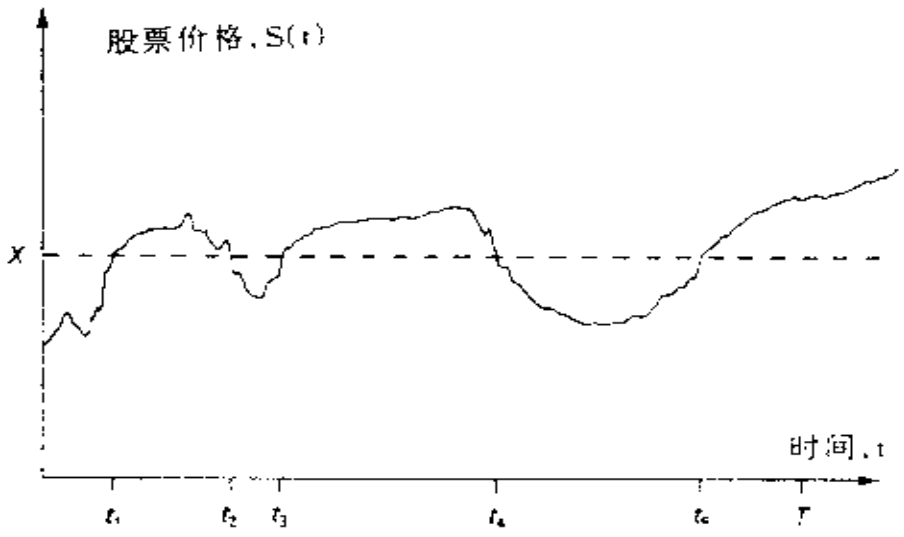


图 13.1 止损策略

通常，我们用 S 表示初始股票价格。当 S>X 时，对冲的最初支出为 S，当 S≤X，则对冲的最初支出为零。由于 0 时刻后的所有买入和卖出都以 X 成交，于是我们便会立即就得出卖出看涨期权和对冲该期权的总支出 Q 将由下式来表示：

$$Q = \max(S - X, 0) \tag{13.1}$$

实际上，如果这个公式是正确的话，不考虑交易费用，这项对冲策略将非常有效，而且，对这个期权进行套期保值的支出总是小于它的 Black－Scholes 公式的价格。因此，通过卖出该期权并将其对冲，将获得无风险收益。

而实际上公式(13.1)是不正确的，主要有两方面原因：第一个原因是套期保值者的现金流发生在不同的时刻，应当贴现为现值。

第二个原因是买入和卖出不可能精确地在完全相同的价格 X 点执行。这一点很重要。假如我们处于利率为零的风险中性的世界中，我们可以忽略货币的时间价值。但是，我们不能合理地假设买入和卖出都是在同一个价格进行的。若市场是有效率的，当股票价格恰好为 X 时，套期保值者并不知道它将继续变得高于 X 还是低于 X。

实际上，买入价格将为 $X+\delta$，卖出价格将为 $X-\delta$，其中 $\delta>0$，每一轮买入和随后的卖出将损失 2δ（不考虑交易费用）。套期保值者自然会非常密切地跟踪股票价格的变化，此时 δ 会减少。假设股票价格是连续变化，通过密切地跟踪股票价格的变化，δ 则可以达到任意小。但是，δ 越小，发生交易的机会就越频繁。每笔交易的成本减少了，但却被交易频率的增加所抵消。当 $\delta\to 0$ 时，预计的交易次数可能达到无穷大。

止损策略尽管相当诱人，但并不是很有效的套期保值措施。当股票价格轨迹不与直线 $S(t)=X$ 相交时，对于虚值期权则不存在保值成本支出。但当股票价格轨迹频繁与直线 $S(t)=X$ 相交时，保值成本支出将会高得惊人。蒙特卡罗模拟可用来评价该策略的总效果。表 13.1 列出了 13.2 节中考虑的期权的结果。假设在时间间隔为 $\triangle t$ 的末尾时刻观察股票价格并计算保值效果，保值效果参数以期权保值支出的标准偏差与该期权的 Black－Scholes 价格的比率来衡量[③]。每一结果都取 1,000 个股票价格路径交叉样本进行测试，标准误差为 2%。由表中可以看出无论 $\triangle t$ 取得多么小，都不可能使该参数减少到 0.70 以下。

表 13.1　止损策略的效果

$\triangle t$（周数）	5	4	2	1	0.5	0.25
保值效果参数	1.02	0.93	0.82	0.77	0.76	0.76

13.4 更复杂的保值策略

大多数的期权交易者使用比已讨论过的这些方法更复杂的保值策略。第一步，他们试图使他们的有价证券组合在以后的短时间间隔内免受标的资产价格微小变动的影响，这就是所谓的 Delta 套期保值(Delta hedging，也称 Delta 对冲)。然后他们又注意到参数 Gmama 和 Vega。Gmama 是有价证券组合价值的变化与其 Delta 变化的比率；Vega 是有价证券组合价值的变化与该资产价格波动率的变化的比率。通过保持 Gmama 接近于 0，可使有价证券组合对于标的资产价格较大变动不敏感；通过保持 Vega 接近于 0，使其对波动率的变动不敏感。期权交易者也经常考虑参数 Theta 和 rho。Theta 是该期权组合的变化与时间间隔的比率；Rho 是该期权的变化与无风险利率变化的比率。

在以后几节中我们详细地讨论这些保值参数。

13.5 Delta 套期保值

一种衍生衍生证券的 Delta 定义为该衍生证券的价格变化对其标的资产价格变化的比率[①]。它是衍生证券价格与标的资产价格关系曲线的斜率。

我们来考虑一个基于某种股票的看涨期权，图 13.2 为看涨期权价格与股票价格之间的关系曲线。当股票价格对应于 A 点，期权价格对应于 B 点，该看涨期权的 Delta 为图中所示的直线的斜率。近似为：

$$\Delta = \frac{\Delta c}{\Delta S}$$

其中：ΔS 为股票价格的微小变化，Δc 相应的看涨期权价格的变

化。

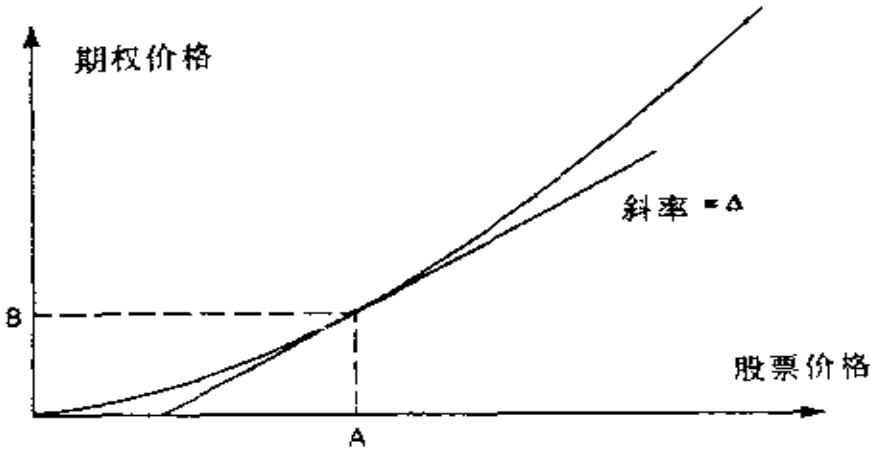


图 13.2　Delta 的计算

假设某看涨期权的 Delta 为 0.6，这意味着当股票价格变化一个小量△S 时，该期权价格变化约 60% △S。假设该期权价格是 $10，股票价格为 $100。若某投资者出售了 20 份该股票看涨期权合约(20 份股票看涨期权可购买 2,000 股股票)。投资者可采取的保值方法就是买入 0.6×2,000＝1,200 股股票。在期权头寸上的盈利(亏损)就可以由股票头寸上的损失(盈利)所抵销。例如，如果股票价格上涨 $1(持有股票就会增值 $1,200)，期权的价格将上升 0.6× $1＝ $0.60(出售的看涨期权头寸将损失 $1,200)。如果股票价格下跌 $1(持有股票就会损失 $1,200)，期权的价格将下降 0.6× $1＝ $0.60(出售的看涨期权头寸将增值 $1,200)。

在本例子中，该投资者的期权头寸的 Delta 值为 0.6×(－2,000)＝－1,200。换句话说，当股票价格上升 ΔS，该投资者在期权上就会损失 1,200ΔS。根据定义，股票的 Delta 为 1.0，1,200 股股票多头的 delt 值为＋1,200，因此该投资者保值后总头寸的

Delta 为 0。标的资产头寸的 Delta 抵销了期权头寸的 Delta。Delta 值为零的状态称为 Delta 中性(Delta neutral)。

投资者的保值头寸保持 Delta 对冲状态(或 Delta 中性状态)只能维持一个相当短暂的时间,认识到这一点很重要。这是因为随着股票价格的变化和时间的流逝,Delta 值也在不断地变化。在实际上,这套期保值操作中,需要定期地调整保值头寸,这种调整称为再均衡(rebalancing)。在本例中,第三天末股票价格也许增加到 $110,如图 13.2 所示,股票价格的上升导致了 Delta 的增加。假设 Delta 从 0.60 上升到 0.65。这意味着如果仍要保持 Delta 对冲中性的话,就需额外再购入 $0.05 \times 2,000 = 100$ 股股票。诸如这些包含频繁调整的对冲操作称之为动态对冲操作(dynamic hedging schemes)。

Delta 与 Black－Scholes 分析方法密切相关。Black 和 Scholes 提出可以建立起一种无风险的有价证券组合,其中包含一个该股票的头寸和一个基于该股票的衍生证券头寸。用 Δ 来表示,它们的有价证券组合为:

-1: 衍生证券
$+\Delta$: 股票份额

用我们刚提到的术语,我们可以说 Black 和 Scholes 通过建立一个 Delta 中性的头寸,并假设在短期内该组合头寸收益等于无风险收益率来为期权定价。

远期合同的 Delta 值

方程(3.6)说明:在其它参数不变时,当不付红利股票价格变化 ΔS,基于该股票的远期合约的价值也变化 ΔS。因此基于某个不付红利股票的远期合同的 Delta 值为 1.0。这就意味着基于一股股票的某个远期空头头寸可用购买一股该股票的方法来保值,

同样基于一股股票的某个远期多头头寸可用出售一股该股票的方法来保值。这两种套期保值操作称作“保完即忘”(hedge and forget)过程,意思是在合约的有效期内,无需再调整股票头寸。我们已经提到,当为期权或其它更复杂的衍生证券进行套期保值时,Delta保值方法并不是一种“保完即忘”的过程。要使保值有好的效果,股票头寸必须频繁重新调整。

欧式看涨期权和看跌期权的 Delta 值

对于不付红利股票的欧式看涨期权,Delta值为:

$$\Delta = N(d_1)$$

其中 d_1 与方程式(10.27)定义相同。对一个欧式看涨期权的空头进行Delta套期保值,在任何给定时刻,需同时持有 $N(d_1)$ 个股票多头头寸。类似地,对一个欧式看涨期权的多头进行 Delta 套期保值,在任何给定时刻,需同时持有 N(d1)个股票空头头寸。

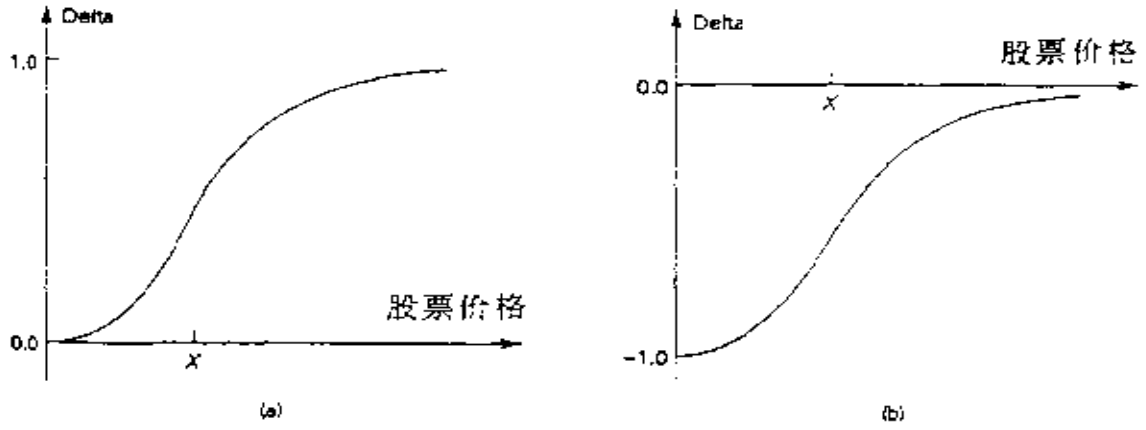


图 13.3　基于不付红利股票的看涨期权(a)和看跌期权(b)的 Delta 值与股票价格之间的变化关系图

对于不付红利股票的欧式看跌期权，Delta 值为：

$$\Delta = N(d_1) - 1,$$

其中 d_2 与方程式(10.28)定义相同。这个 Delta 为负值，这意味着看跌期权的多头应该利用连续变化的标的股票的多头头寸来保值，看跌期权的空头应该利用连续变化的标的股票的空头头寸来保值。股票看涨期权和看跌期权的 Delta 值与股票价格之间的变化关系曲线如图 13.3 所示。图 13.4 为实值期权、不盈不亏与虚值期权三种情况下，Delta 值与到期时间之间关系曲线。

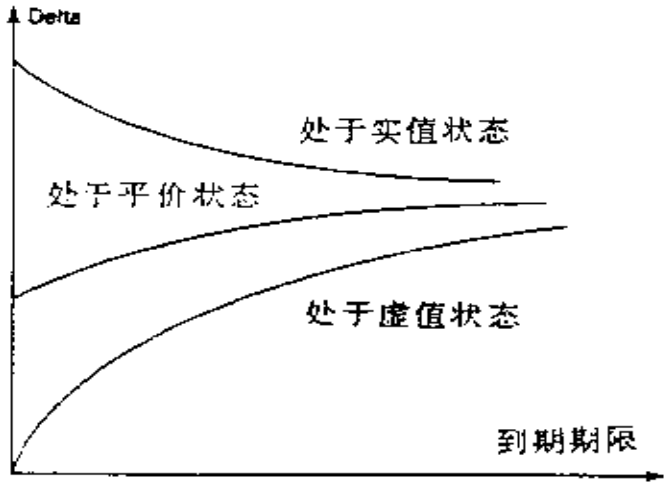


图 13.4 看涨期权的 Delta 与到期时间之间的变化关系图

模拟过程

表 13.2 和表 13.3 给出了 13.2 节例子中的 Delta 套期保值操作的两个模拟过程。假设保值过程为每周调整一次。在表 13.2

中，Delta 的初始计算值为 0.522。这意味着在出售看涨期权的同时，必须借进 $2,557,800 并按 $49 价格购买 52,200 股股票。第一周内发生的利息费用为 $2,500。到第一周末，股票价格下降到 $48\frac{1}{8}$。这使得 Delta 值相应减少到 0.458，要保持 Delta 中性，此时应出售 6,400 股股票。以上操作得到 $308,000 的现金，在第一周末累计借款余额为 $2,252,300。在第二周内，股票价格下降到 $47\frac{3}{8}$，Delta 值又减小了，如此等等。在期权临近到期时，很明显该期权将被执行，Delta 接近 1.0。因此，到 20 周时，套期保值者具有完全的抵补期权头寸。套期保值者持有股票的收入为 $5,000,000，因此出售该期权并对冲该期权风险的总计支出为 $263,400。

表 13.2　Delta 对冲的模拟；期权接近于实值期权状态；对冲成本 = $263,400

周次	股票价格	Delta	购买的股票数	购买股票的成本（以 $1000 为单位）	累计成本（包括利息，以 $1000 为单位）	利息成本（以 $1000 为单位）
0	49	0.522	52,200	2,557.8	2,557.8	2.5
1	$48\frac{1}{8}$	0.458	(6,400)	(308.0)	2,252.3	2.2
2	$47\frac{3}{8}$	0.400	(5,800)	(274.8)	1,979.7	1.9
3	$50\frac{1}{4}$	0.596	19,600	984.9	2,966.5	2.9
4	$51\frac{3}{4}$	0.693	9,700	502.0	3,471.3	3.3
5	$53\frac{1}{8}$	0.774	8,100	430.3	3,904.9	3.8
6	53	0.771	(300)	(15.9)	3,892.8	3.7
7	$51\frac{7}{8}$	0.706	(6,500)	(337.2)	3,559.3	3.4

8	$51\frac{3}{8}$	0.674	(3,200)	(164.4)	3,398.4	3.3
9	53	0.787	11,300	598.9	4,000.5	3.8
10	$49\frac{7}{8}$	0.550	(23,700)	(1,182.0)	2,822.3	2.7
11	$48\frac{1}{2}$	0.413	(13,700)	(664.4)	2,160.6	2.1
12	$49\frac{7}{8}$	0.542	12,900	643.4	2,806.1	2.7
13	$50\frac{3}{8}$	0.591	4,900	246.8	3,055.6	2.9
14	$52\frac{1}{8}$	0.768	17,700	922.6	3,981.2	3.8
15	$51\frac{7}{8}$	0.759	(900)	(46.7)	3,938.3	3 8
16	$52\frac{7}{8}$	0.865	10,600	560.5	4,502.6	4.3
17	$54\frac{7}{8}$	0.978	11,300	620.1	5,127.0	4.9
18	$54\frac{5}{8}$	0.990	1,200	65.6	5,197.5	5.0
19	$55\frac{7}{8}$	1.000	1.000	55.9	5,258.3	5.1
20	$57\frac{1}{4}$	1.000	0	0.0	5,263.4	

表 13.3　Delta 对冲的模拟；期权接近于实值期权状态；对冲成本 = $ 256,600

周次	股票价格	Delta	购买的股票数	购买股票的成本（以 $ 1000 为单位）	累计成本（包括利息，以 $ 1000 为单位）	利息成本（以 $ 1000 为单位）
0	49	0.522	52,200	2,557.8	2,557.8	2.5
1	$49\frac{3}{4}$	0.568	4,600	228.9	2,789.1	2.7
2	52	0.705	13,700	712.4	3,504.2	3.4
3	50	0.579	(12,600)	(630.0)	2,877.6	2.8
4	$48\frac{3}{8}$	0.459	(12,000)	(580.5)	2,299.8	2.2
5	$48\frac{1}{4}$	0.443	(1,600)	(77.2)	2,224.8	2.1
6	$48\frac{3}{4}$	0.475	3,200	156.0	2,383.0	2.3
7	$49\frac{5}{8}$	0.540	6,500	322.6	2,707.8	2.6
8	$48\frac{1}{4}$	0.420	(12,000)	(579.0)	2,131.4	2.0
9	$48\frac{1}{4}$	0.410	(1,000)	(48.2)	2,085.2	2.0
10	$51\frac{1}{8}$	0.658	24,800	1,267.9	3,355.1	3.2
11	$51\frac{1}{2}$	0.692	3,400	175.1	3,533.5	3.4
12	$49\frac{7}{8}$	0.542	(15,000)	(748.1)	2,788.7	2.7
13	$49\frac{7}{8}$	0.538	(400)	(20.0)	2,771.5	2.7
14	$48\frac{3}{4}$	0.400	(13,800)	(672.7)	2,101.4	2.0
15	$47\frac{1}{2}$	0.236	(16,400)	(779.0)	1,324.4	1.3
16	48	0.261	2,500	120.0	1,445.7	1.4

17	$46\frac{1}{4}$	0.062	(19,900)	(920.4)	526.7	0.5
18	$48\frac{1}{8}$	0.183	12,100	582.3	1,109.5	1.1
19	$46\frac{5}{8}$	0.007	(17,600)	(820.6)	290.0	0.3
20	$48\frac{1}{8}$	0.000	(700)	(33.7)	256.6	

表13.3是另一种事件序列，说明期权处于虚值状态时的情况。很明显，期权将不会被执行，*Delta* 接近0。至20周时，套期保值者保持为裸期权，总计支出为$256,600。

在表13.2和表13.3中，如果将套期保值支出贴现为期初值，则对冲该期权的成本近似于 *Black – Scholes* 公式的价格$240,000，但不完全相等。如果套期保值运作完美的话，每一个模拟的贴现后的对冲成本应是一致的，都是$240,000。*Delta* 对冲成本不一样的原因是由于再调整的频率仅为一周一次。若再调整的频率增加，套期保值成本不一样的偏差就会减少。

表13.4列出了我们例子中模拟股票价格变化1000次的 *Delta* 保值效果统计数据。与表13.1一样，保值效果参数仍以期权套期保值成本的标准偏差与该期权的 *Black – Scholes* 公式价格之间的比率来衡量。显然 *Delta* 套期保值法比止损策略有很大的改进。与止损策略不同，当 *Delta* 对冲的观察愈频繁，*Delta* 套期保值效果的稳定性就愈好。

表13.4 Delta对冲的效果

对冲调整的时间间隔(周数)	5	4	2	1	0.5	0.25
保值效果度量	0.43	0.39	0.26	0.19	0.14	0.09

Delta 套期保值的目标是保持金融机构的总资产价值尽量不发生变化。最初，出售看涨期权的价值为 $240,000。在表 13.2 中所述的情况下，通过计算，第 9 周该期权价值为 $414,500，因此，该金融机构的期权头寸损失了 $174,500。第 9 周用累计成本衡量的它的现货头寸比第 0 周多 $1,442,700。然而，该机构持有的股票价值从 $2,557,800 增加到 $4,171,100。所有这些操作的净效果是该金融机构总财富仅只变化 $3,900。

费用从何而来

从实际效果上看，表 13.2 与表 13.3 中的 *Delta* 套期保值操作是形成了一个合成期权头寸的多头，它对冲了卖出看涨期权而产生的看涨期权空头。在该套期保值过程中，必须在股票价格刚开始下降时即售出股票，在股票价格刚上涨时即购入股票。这就所谓的“升买跌售”的过程。$240,000 费用的发生是由于实际购买股票时的价格与打算购买该股票时的价格之间的平均差别。当然，在表 13.2 与表 13.3 中的模拟过程是假设波动率为常数，并且无交易费用的理想过程。

其余欧式期权的 *Delta* 值

对基于支付红利率为 q 的股票指数的欧式看涨期权：

$$\Delta = e^{-q(T-t)}N(d_1)$$

这里 d_1 与方程(11.1)中的定义相同。对基于同样股票指数的欧式看跌期权：

$$\Delta = e^{-q(T-t)}[N(d_1) - 1]$$

对于欧式外汇看涨期权：

$$\Delta = e^{-r_f(T-t)}N(d_1)$$

这里 r_f 是外汇无风险利率，d_1 与方程(11.3)中的定义相同。对于欧式外汇看跌期权：

$$\Delta = e^{-r_f(T-t)}[N(d_1) - 1]$$

对于欧式期货看涨期权：

$$\Delta = e^{-r(T-t)}N(d_1)$$

这里 d_1 与方程(11.8)中的定义相同。对于欧式期货看跌期权：

$$\Delta = e^{-r(T-t)}[N(d_1) - 1]$$

例 13.1

某个银行出售了一个 6 个月期限按 $ 1.6000 执行价格出售 £ 1,000,000 的欧式看跌期权。假设英镑兑美元的当前即期汇率为 $ 1.6200，英国的无风险利率为每年 13%，美国的无风险利率为每年 10%，英镑汇率波动率为每年 15%。在这种情况下，$S = \$1.6200$，$X = \$1.6000$，$r = 0.10$，$r_f = 0.13$，$\sigma = 0.15$，$T - t = 0.5$。根据欧式外汇看跌期权的计算公式可知该货币看跌期权的 *Delta* 值为：

$$[N(d_1) - 1]e^{-r_f(T-t)}$$

这里 d_1 与方程(11.3)中的定义相同，

$$d_1 = 0.0287$$

$$N(d_1) = 0.5115。$$

看跌期权的 *Delta* 值是 −0.458，这是一个看跌期权多头方的 *Delta*。银行作为看跌期权的空头方，其 *Delta* 值是 +458,000。因此，该银行进

Delta 套期保值时，开始就必须卖出£458,000 现货，这个英镑现货空头的 *Delta* 为 −458,000，正好对冲了银行的期权头寸的 *Delta* 值，使得该银行保值后的总 *Delta* 值为 0。随时间的改变，银行须不断调整该空头头寸。

运用期货合约保值

在实际操作中，*Delta* 中性保值方法中更常见的是利用期货头寸而不是利用标的资产的现货头寸保值。利用的期货合同并不一定需要与上面期权合同等衍生证券的到期日相同，为表述方便起见，我们假设期货合同正好对应一个单位的标的资产。

定义：

T^*：期货合约的到期日

H_A：在 t 时刻 *Delta* 中性保值所需标的资产的头寸数

H_F：另一种在 t 时刻 *Delta* 中性保值所需期货合约的头寸数

若标的资产为不付红利的股票，从方程式(3.5)可得期货价格：

$$F = Se^{r(T^*-t)}$$

当股票价格增加 ΔS，期货价格增加 $\Delta Se^{r(T^*-t)}$。于是期货合约的 *Delta* 值为 $e^{r(T^*-t)}$。所以 $e^{-r(T^*-t)}$ 个期货合同对股票价格变动的敏感性与一份股票对股票价格变化的敏感性是相同的。因此：

$$H_F = e^{-r(T^*-t)}H_A$$

当标的资产为红利率为 q 的股票或股票指数时，类似的讨论得：

$$H_F = e^{-(r-q)(T^*-t)}H_A \qquad (13.2)$$

当标的资产为外汇时：

$$H_F = e^{-(r-r_f)(T^*-t)} H_A$$

例 13.2

再考虑例 13.1 中的期权。假设该银行决定用 9 个月期的外汇期货合约进行对冲，在这种情况下，$T^* - t = 0.75$，并且：

$$e^{-(r-r_f)(T^*-t)} = 1.0228$$

所以 *Delta* 中性保值所需外汇期货合约的空头头寸为 $1.0228 \times £458,000 = £468,442$。由于买卖每份英镑期货合同的名义金额为 £62,500，所以应该出售 7 份（£468,442/£62,500 的近似整数值）期货合同来对冲。

我们应注意到，期货的 *Delta* 与相应远期合同的 *Delta* 是不同的。即使利率为常数，远期价格等于期货价格的情况下也是如此。我们考虑标的资产为不付红利股票的情况。一单位标的资产的期货合约的 *Delta* 为 $e^{r(T^*-t)}$ 而一单位标的资产的远期合约的 *Delta* 为 1.0。

有价证券组合的 *Delta* 值

当持有某种标的资产的期权以及该标的资产的其它衍生证券的组合时，该组合的 *Telta* 值其实就是组合内每种衍生证券的 *Delta* 值的总和。若一种有价证券组合 Π，它的第 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 种衍生证券的数量为 w_i，则有价证券组合 Π 的 *Delta* 值为：

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i$$

这里 Δ_i 时第 i 种衍生证券的 *Delta* 值。在进行 *Delta* 套期保

值时，这个公式可用来计算保值所需的标的资产或基于该标的资产的期货合约的头寸。当持有该保值头寸时，有价证券组合的 *Delta* 值就为 0，该证券组合就达到的所谓的 *Delta* 中性状态。

例 13.3

考虑某金融机构有如下的三个买卖德国马克的期权的头寸：

1. 一个 100,000 看涨期权多头，执行价格为 0.55，3 个月后到期，每份期权的 *Delta* 值为 0.533。

2. 一个 200,000 看涨期权空头，执行价格为 0.56，5 个月后到期，每份期权的 *Delta* 值为 0.468。

3. 一个 50,000 看跌期权空头，执行价格为 0.56，2 个月后到期，每份期权的 *Delta* 值为 −0.508。

所以，整个有价证券组合的总 *Delta* 值为：

$$0.533 \times 100{,}000 - 200{,}000 \times 0.468 - 50{,}000 \times (-0.508) = -14{,}900$$

这意味着可以通过购买 14,900 马克使得该组合达到 *Delta* 中性状态。

本例中亦可用 6 个月期的远期合同使该组合达到 *Delta* 中性状态。假设美国的无风险利率为每年 8%，德国的无风险利率为每年 4%。为使 *Delta* 中性，远期要售出的马克数为：

$$14{,}900e^{-(0.08-0.04)\times 0.5} = 14{,}605$$

13.6　*Theta*

衍生证券组合的 *Theta*，Θ，定义为：在其他条件不变时，该证券组合的价值变化相对于时间变化的比率[1]，有时 Θ 也被称作有价证券组合的时间损耗（*time decay*）。对基于不付红利股票的欧式看涨期权，

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

这里 d_1, d_2 的定义如方程式(10.27)。且

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

对基于股票的欧式看跌期权，

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

对基于支付红利率为 q 的股票指数欧式看涨期权，

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} + qSN(d_1)e^{-q(T-t)} - rXe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

这里 d_1, d_2 的定义如方程式(11.1)。$N'(X)$的公式在 10.10 节中给出。对基于支付红利率为 q 的股票指数欧式看跌期权，

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} - qSN(-d_1)e^{-q(T-t)} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

将 q 换作 r_f，以上最后两个方程式就是欧式外汇看涨期权和看跌期权的 *Theta* 公式。将 q 换作 r，S 换作 F，可得欧式期货期权的 *Theta* 公式。

例 13.4

我们考虑一个 4 个月期的股票指数看跌期权。指数的现值为 305，执行价格是 300，红利率是每年 3%。无风险年利率是 8%，指数价格波动率为每年 25%。在本例中，$S=305$，$X=300$，$q=0.03$，$r=0.08$，$\sigma=0.25$，$T-t=0.3333$ 年。这个期权的 *Theta* 为：

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-q(T-t)}}{2\sqrt{T-t}} - qSN(-d_1)e^{-q(T-t)} + rXe^{-r(T-t)}N(-d_2) = -18.15$$

这意味着：当 0.01 年(或 2.5 个交易日)过去了，即使指数数值或波动率未发生任何变化，期权的价值也会减少 0.1815。

单个期权的 *Theta* 几乎总为负[11]，因为当越来越临近到期日时，期权的时间价值就变得越来越不值钱。图 13.5 显示的是一种股票看涨期权的 *Theta* 值随股票价格变化的曲线。当股票价格很低时，*Theta* 近似为 0，对于一个不盈不亏期权，*Theta* 相当大并且为负值。股票价格升高时，*Theta* 趋近于 $-rXe^{-r(T-t)}$。图 13.6 的三种情况下：实值期权，不盈不亏期权和虚值期权，*Theta* 值随时间的变化。

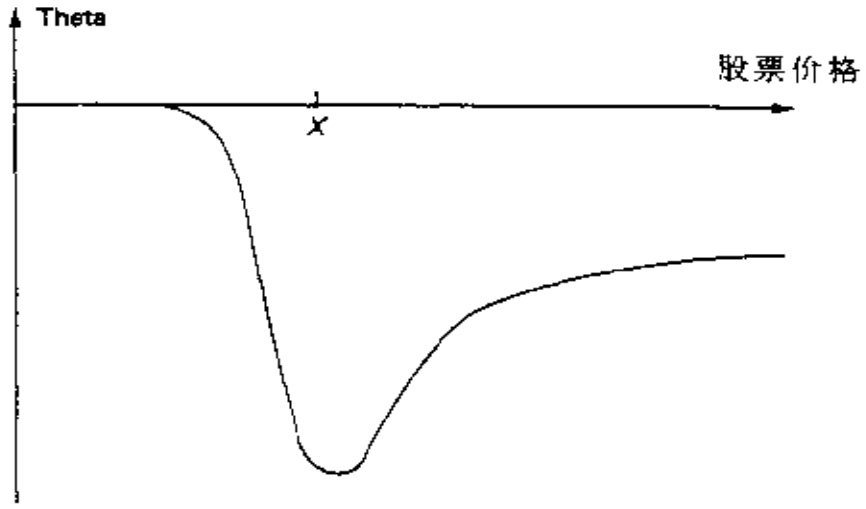


图 13.5　欧式看涨期权的 *Theta* 与股票价格之间的变化关系图

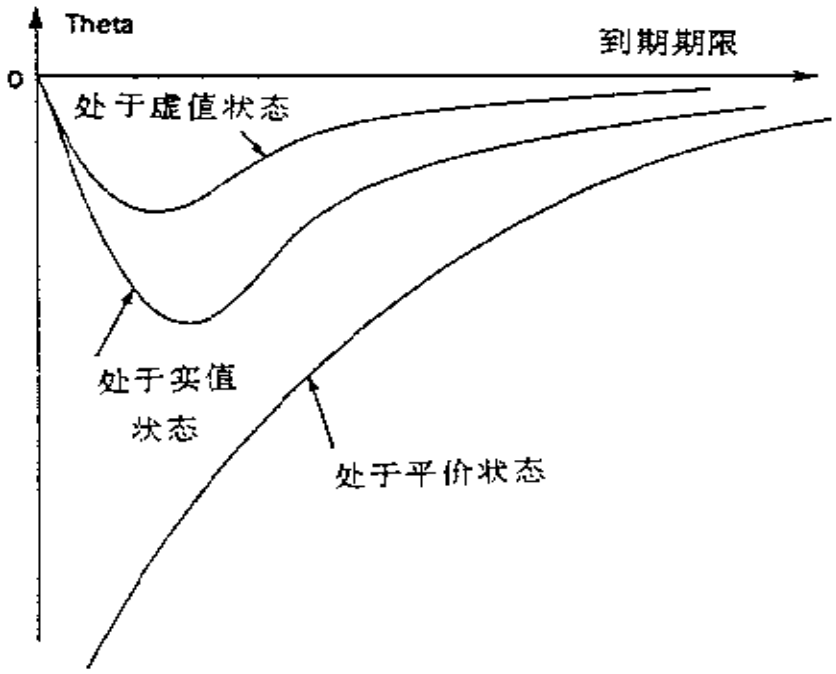


图 13.6 欧式看涨期权的 *Theta* 与到期时间之间的变化关系图

Theta 与 *Delta* 和 *Gmama* 不是同一种类型的保值参数。这是因为，虽然对于未来的股票价格存在着某些不确定性因素，而到期时间的减少却是毫无疑问的。因此我们是不可能用对冲的保值方法消除时间变化对期权组合价值的影响。我们将从 § 13.7 中看到，如果 *Theta* 的绝对值很大，*Delta* 或 *Gmama* 值一定也很大；如果一个期权头寸的 *Delta* 和 *Gmama* 都为 0，*Theta* 值意味着该头寸的价值将以无风险利率增长。

13.7 Gamma

某种标的资产的衍生证券的组合 *Gamma*，γ，定义为该组合的 *Delta* 变化相对于标的资产价格变化的比率[①]。当 γ 值小时，*Delta* 变化缓慢，为保持 *Delta* 中性并不需要进行频繁的调整，然而，当 *Gamma* 绝对值较大时，该组合的 *Delta* 对于标的资产价格相当敏感。此时在任一段时间内，若对一个 *Delta* 中性的有价证券组合不作调整是有很大的风险的。图 13.7 说明了这一点，当股票价格从 S 上涨到 S'，*Delta* 中性保值法假设期权价格从 C 增加到 C'，而实际上已从 C 变到了 C"。C'和 C"之间的误差引起保值误差，保值误差大小取决于期权价格与股票价格之间关系曲线的曲度，*Gamma* 度量了这个曲度（确实，实际操作者有时称期权的 *Gamma* 为曲度）。

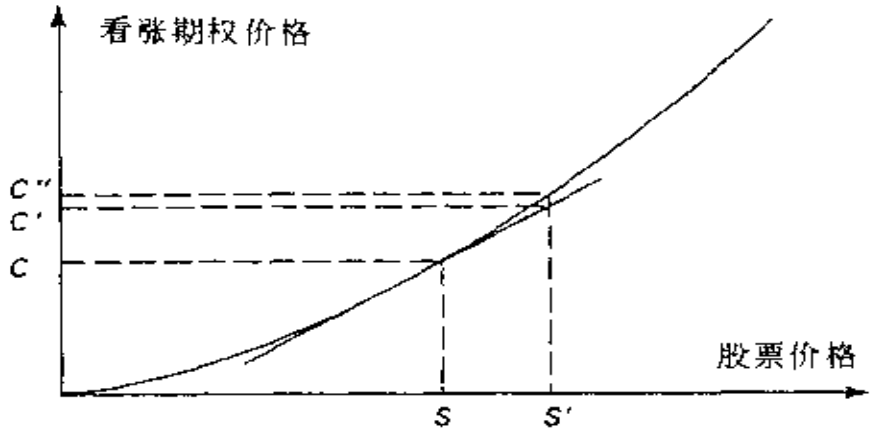


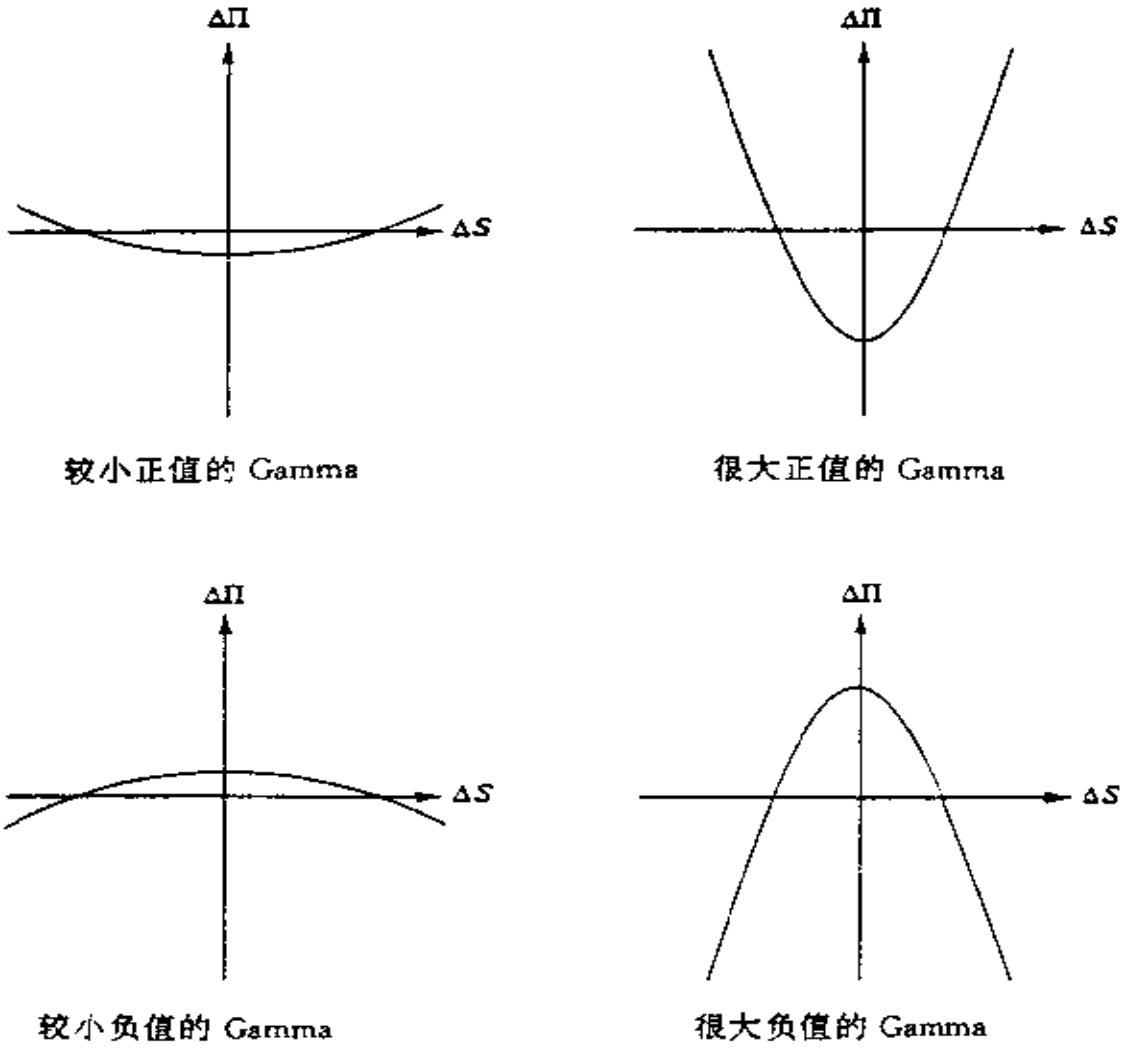
图 13.7　*Delta* 对冲的误差图示

假设 ΔS 是在小的时间段 Δt 内标的资产价格的变化，$\Delta\Pi$ 是相应的有价证券组合价格的变化。如果忽略比 Δt 高阶的项，如

Δt^2 等，附录 13A 表明：对于 *Delta* 中性的证券组合：

$$\Delta\prod = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2 \qquad (13.3)$$

这里 Θ 是证券组合的 *theta* 值。图 13.8 表明了△∏和△S



较小正值的 Gamma　　很大正值的 Gamma

较小负值的 Gamma　　很大负值的 Gamma

图 13.8　*Delta* 中性的组合中△∏和△S 之间的几种关系特性图

之间的关系特性[⑧]。可以看出：当 *Gamma* 为正值时，如果 S 的值不变的话，该组合价值减小，但是，如果 S 的值有较大正值方向或

负值方向的变化，则该组合的价值都会增加。当 *Gamma* 为负值时，以上的情况则相反。如果 S 的值不变的话，该组合价值增加，但是，如果 S 的值有较大正值方向或负值方向的变化，则该组合的价值都会减少。随着 *Gamma* 绝对值的增加，有价证券组合价值对于 S 的敏感性也增加。

构造组合证券 *Gamma* 中性

标的资产头寸或该标的资产期货合约头寸的 *Gamma* 值为0，因此，金融机构改变它的有价证券组合的 *Gamma* 值的唯一办法就是持有某个可交易期权的头寸。假设某种 *Delta* 中性的有价证券组合的 *Gamma* 等于 Γ，某个可交易期权的 *Gamma* 等于 Γ_T。如果加入到原证券组合中的可交易期权的数量是 ω_T，则总组合的 *Gamma* 是：

$$\omega_T\Gamma_T + \Gamma$$

要使证券组合的 *Gamma* 中性化，则可交易期权的头寸应为 $-\Gamma/\Gamma_T$。当然，加入可交易期权肯定会改变原组合的 *Delta* 值，所以，为了保持总的 *Delta* 中性，还需调整标的资产（或该标的资产对应的期货合约）的头寸。注意：总组合只是瞬间 *Gamma* 中性。随时间流逝，只有不断调整可交易期权头寸并使得该期权头寸总是等于 $-\Gamma/\Gamma_T$，*Gamma* 中性才可维持。

例 13.5

假设某种有价证券组合是 *Delta* 中性的，该组合的 *Gamma* 为 $-3,000$。某个特殊的可交易看涨期权的 *Delta* 和 *Gamma* 分别为 0.62 和 1.5。为使 *Gamma* 中性，组合中应购入

$$\frac{3000}{1.5} = 2,000 \text{ 份}$$

可交易的期权。但是，证券组合的 *Delta* 值将从 0 变化到 2,000 × 0.62 = 1,240。因此，为保持 *Delta* 中性，还应出售数量为 1,240 份的标的资产。

使处于 *Delta* 中性的证券组合成为 *Gamma* 中性可看作一阶校正，因为当在进行 *Delta* 对冲时，标的资产（或该标的资产的期货合约）头寸不能连续改变。

Gamma 的计算

基于不付红利股票的欧式看涨期权或看跌期权的 *Gamma* 值为：

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

这里 d_1 与方程(10.27)中的定义相同，在 10.10 节中给出了 $N'(X)$的值。*Gamma* 总是为正值，它随 S 变化的曲线如图 13.9 所示。在实值期权、虚值期权和平价期权这三种不同价值状态的期权情况下，*Gamma* 值随到期时间的变化如图 13.10 所示。对于一个平价期权，越接近到期日，*Gamma* 越大。期限很短的平价期权的 *Gamma* 值可能非常大，这意味着持有者期权头寸的价值对于股票价格的跳跃极其敏感。

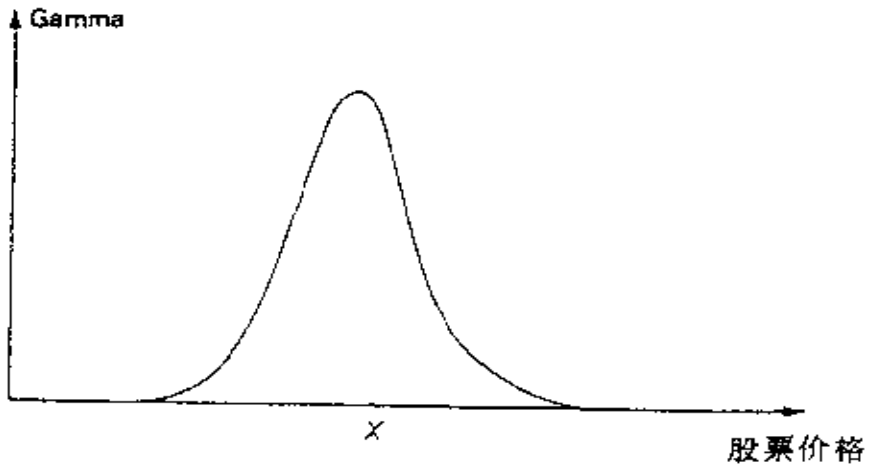


图 13.9 某个股票期权 *Gamma* 与股票价格之间的关系图

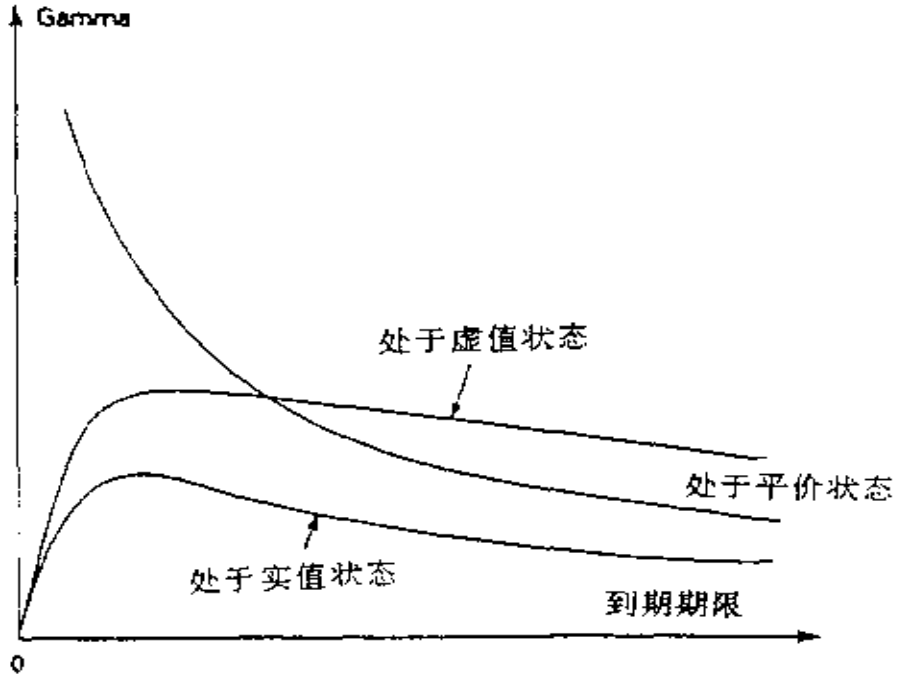


图 13.10　某个股票期权 *Gamma* 与到期日之间的关系图

对于支付连续红利率为 q 的股票指数的欧式看涨期权或看跌期权：

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

这里 d_1 的定义如方程(11.1)。当 q 设定为外汇无风险利率时，上式即为外汇欧式期权的 *Gamma* 公式。当 $q=r, S=F$ 时，上式即为欧式期货期权的 *Gamma* 公式。

例 13.6

我们考虑一个 4 个月期的股票指数看跌期权。假设指数的现值为 305，执行价格是 300，红利率是每年 3%，无风险年利率是 8%、指数价格波动率为每年 25%。在本例中，$S=305, X=300, q=0.03, r=0.08, \sigma=0.25, T-t=0.3333$ 年。则指数期权的 *Gamma* 为：

$$\frac{N'(d_1)e^{-q(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}}=0.00857$$

因此指数每增加 1 个点，引起期权的 *Delta* 增加约 0.00857。

13.8 *Delta*，*Theta* 和 *Gamma* 之间的关系

任何不付红利股票的衍生证券的价格 f 必须满足 *Black-Scholes* 方程(10.20)：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf$$

由于

$$\Theta=\frac{\partial f}{\partial t},\qquad \Delta=\frac{\partial f}{\partial S},\qquad \Gamma=\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

可得：

$$\Theta+rS\Delta+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma=rf \tag{13.4}$$

这个公式对基于不付红利股票的单种衍生证券和多个衍生证券的组合都同样正确。

对于 *Delta* 中性的组合，$\Delta=0$，并且：

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rf$$

这意味着当 *Theta* 为正值并且很大时，*Gamma* 将会为负值并且也很大；反之亦然。这一点与图 13.8 显示的是一致的。

13.9　*Vega*

到现在为止我们的讨论都隐含这样一个前提：衍生证券的标的资产价格波动率为常数。实际上，标的资产的价格波动率随时间的变化而变化，它意味着衍生证券价值有可能随波动率的运动而变化，正如标的资产价格和时间发生变动时，衍生证券的价值有可能变化一样。

一个有价证券组合的 *Vega*，Λ，定义为有价证券组合的价值变化与标的资产波动率变化的比率[9]。如果 *Vega* 的绝对值很大，证券组合的价值对于波动率的小变化就很敏感；反之，如果 *Vega* 的绝对值很小，波动率的变化就不怎么影响证券组合的价值。

标的资产的头寸或某个期货合约头寸的 *Vega* 值为零。然而，增加可交易期权的头寸可改变组合证券的 *Vega* 值。如果 Λ 是证券组合的 *Vega*，Λ_T 是可交易期权的 *Vega*，数量为 $-\Lambda/\Lambda_T$ 的可交易期权头寸将使原证券组合达到暂时的 *Vega* 中性状态。不幸的是，一种 *Gamma* 中性的证券组合一般来说并不是 *Vega* 中性的，反之亦然。因此，若套期保值者要使证券组合同时达到 *Gamma* 中性和 *Vega* 中性状态，至少要使用两种基于该标的资产的可交易衍生证券。

例 13.7

考虑某个处于 *Delta* 中性状态的有价证券组合，*Gamma* 值为 - 5,000，

Vega 值为 −8,000。假设某个可交易期权的 *Gamma* 值为 0.5，*Vega* 值为 2.0，*Delta* 值为 0.6。如果购买 4,000 个可交易期权的多头头寸，则可使该组合达到 *Vega* 中性状态，但同时将使 *Delta* 值增加到 2,400，这要求出售 2,400 个标的资产以维持 *Delta* 中性状态。该证券组合的 *Gamma* 值将从 5,000 变为 −3,000。

为了使得该组合处于 *Gamma* 中性和 *Vega* 中性状态，我们假设存在第二种可交易期权，*Gamma* 值为 0.8，*Vega* 值为 1.2，*Delta* 值为 0.5。如果 $w1, w2$ 分别为证券组合中这两种可交易期权的数量，我们要求：

$$-5{,}000 + 0.5w1 + 0.8w2 = 0$$
$$-8{,}000 + 2.0w1 + 1.2w2 = 0$$

这个方程组的解为 $w1 = 400, w2 = 6{,}000$。因此，加入 400 份第一种可交易期权和 6,000 份第二种可交易期权将使得该组合处于 *Gamma* 中性和 *Vega* 中性状态。加入以上两种可交易期权头寸后，此时 *Delta* 值为 $400 \times 0.6 + 6{,}000 \times 0.5 = 3{,}240$。所以仍需卖出 3,240 份标的资产以保持 *Delta* 中性状态。

对基于不付红利股票的欧式看涨期权和看跌期权，得 *Vega* 值为：

$$A = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

这里 d_1 的定义如方程式(10.27)。在 10.10 节中给出了 $N'(d_1)$ 的计算公式。对连续支付红利率为 q 的股票或股票指数的欧式看涨期权和看跌期权，得 *Vega* 值为：

$$A = S\sqrt{T-t}N'(d_1)e^{-q(T-t)}$$

这里 d_1 的定义如方程式(11.1)。如果用 q 替换成 r_f，以上方程式给出欧式外汇期权的 *Vega* 值。如果用 q 替换成 r，S 替换成 F，以上方程式给出欧式期货期权的 *Vega* 值。使用这公式隐含的前提为：变动波动率的期权价格与常数波动率的期权价格相

同。这种近似在一定程度上是正确的。期权的 *Vega* 总是正值。*Vega* 随 S 变化曲线如图 13.11 所示。

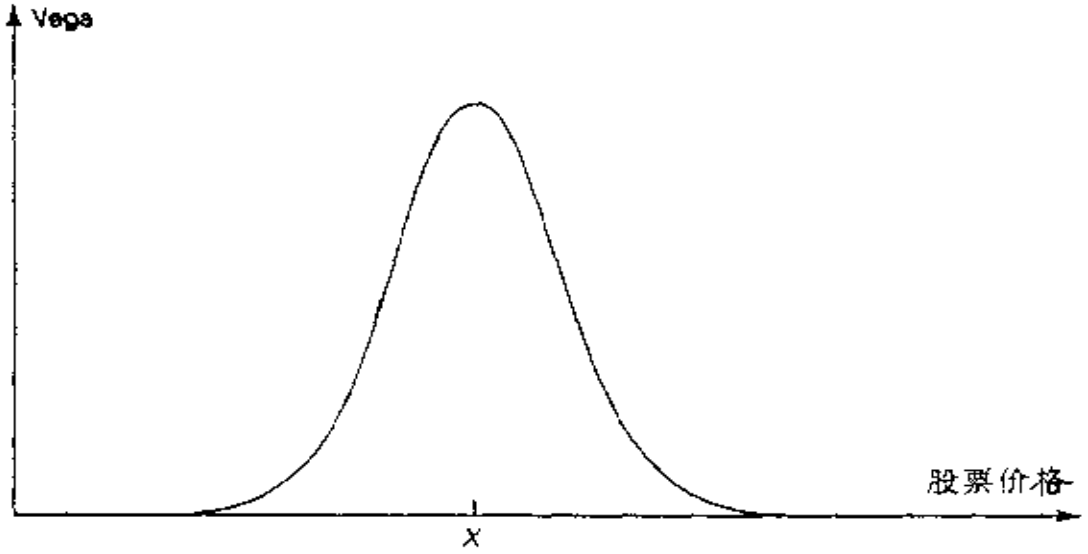


图 13.11　某个股票期权的 *Vega* 与股票价格之间的关系图

Gamma 中性校正的是保值进行再调整期间的时间流逝，而 *vega* 中性校正的是波动率的变化。正如我们所期望的，使用适当的可交易期权进行 *Vega* 或 *Gamma* 中性保值效果如何依赖于对冲再调整期间的时间和波动率的波动率。*Hull* 和 *White* 的论文对以上有关问题进行了详细的讨论。

例 13.8

再考虑例 13.5 中看跌期权。该期权的 *Vega* 为：

$$S\sqrt{T-t}N'(d_1)e^{-q(T-t)} = 66.44$$

因此波动率增加 1% 或 0.01（从 25% 到 26%）就会使期权价值增加约 0.6644。

13.10 *RHO*

衍生证券组合的 *rho* 定义为有价证券组合的价值变化与利率变化之间的比率[10]。它衡量有价证券组合的价值对利率的敏感性。对基于不付红利股票的欧式看涨期权：

$$\text{rho} = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

对基于不付红利股票的欧式看跌期权：

$$\text{rho} = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

这里 d_2 的定义如方程式(10.27)。以上这两个公式同时适用于股票、或支付红利率为 q 的股票指数的欧式看涨期权和看跌期权的 *rho* 值，也适用于期货合约的欧式看涨期权和看跌期权的 *rho* 值，只需对 d_2 作适当的调整。

例 13.9

再考虑某个 4 个月期的股票指数的看跌期权。指数的现值为 305，执行价格是 300，红利率是每年 3%。无风险年利率是 8%，指数价格波动率为每年 25%。在本例中，$S=305$，$X=300$，$q=0.03$，$r=0.08$，$\sigma=0.25$，$T-t=0.3333$ 年。可求得期权的 *rho* 为：

$$-X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) = -42.57$$

这意味着无风险利率变化 1% 或 0.01(例如从 8% 到 9%)，期权价值减少 0.4257。

对外汇期权，由于存在两种利率，就可得到两个对应的 *rho* 值。与国内利率相对应的 *rho* 的公式如前所述；对应于国外利率的欧式外汇看涨期权的 *rho* 值为：

$$\text{rho} = -(T-t)e^{-r_f(T-t)}SN(d_1)$$

对欧式外汇看跌期权的 *rho* 值为：

$$\text{rho} = (T-t)e^{-r_f(T-t)}SN(-d_1)$$

13.11　实际中的期权组合套期保值

如果认为期权交易者为维持 *Delta* 中性、*Gamma* 中性和 *Vega* 中性等将连续调整他们的组合，这种印象是错误的。实际上，交易费用使得频繁的调整相当昂贵。期权交易者们更倾向于使用参数 *Delta*、*Gamma* 和 *Vega* 评估期权组合的风险，从而决定这种风险是否可以接受，而不是不加考虑地试图消除一切风险。

期权交易者倾向于用 *Delta*，*Gamma* 和 *Vega* 这些参数量化他们期权组合中潜在风险的不同方面。然后他们对股票价格和价格波动率未来运动的所有可能情况加以考虑。如果损失风险可以接受，则不必对组合进行调整；如果风险不能接受，则它们或者用标的资产或者在某个可交易组合中建立一合适的头寸位置。

13.12　有价证券组合的保险

通常一个持有高度分散化的有价证券组合的管理者更关心如何保证使他的有价证券组合的价值不低于某一确定的水平。其中一种方法就是：在持有多种股票组合的同时，持有某种股票指数的看跌期权。第十一章讨论这种战略。

我们来看这么一个例子，某基金管理者拥有 $ 30,000,000 的有价证券组合，该组合价值可由 *S&P*500 的值来反映。假设 *S&P*500 指数是 300 点，该基金管理者希望 6 个月后有价证券组

合不要低于$ 29,000,000。一个方法就是购买 1,000 份期限为 6 个月、执行价格为 290 点的 S&P500 指数看跌期权。如果指数下跌到低于 290 点,看跌期权具有实际价值,管理者在证券组合价值方面的损失将得到补偿。假设 6 个月末,指数下降到 270 点,他的有价证券组合的价值有可能跌到了$ 27,000,000。由于每份期权合同是指数的 100 倍,则看跌期权的总价值为$ 2,000,000。这就弥补了有价证券组合价值的损失,使总价值仍保持为$ 29,000,000。当然,保险不是免费的。在这个例子中,基金管理者要支付的看跌期权的费用为$ 1,000,000。

构造合成期权

有价证券组合管理者可选取的另一种方法就是构造合成看跌期权。它的具体操作就是持有一种标的资产(或该标的资产的期货合约)的头寸,该头寸的 *Delta* 等于所要保值的期权的 *Delta*。若要求更精确的话,下一步就是用可交易期权来匹配所要求保值期权的 *Gamma* 和 *Vega* 值。构造的合成期权头寸应与欲保值的期权头寸相反。这反映了如下简单的事实,即期权套期保值的过程就是同时产生数量相同、头寸方向相反的合成期权的过程。

对有价证券组合管理者来说,形成所要求的合成看跌期权比在市场上直接购买看跌期权更具吸引力,这里有两个原因。首先,期权市场并不总是具有足够容量吸收这些拥有大笔资金的投资者将进行的大笔交易;其次,基金管理者要求的执行价格和到期日通常与期权市场可交易合约的规定不相符。

他们可以通过股票本身或指数期货合约的交易构造合成期权。我们先来看仅由股票本身交易形成的看跌期权。再考虑前一个例子,基金管理者拥有$ 30,000,000 高度分散化的有价证券组合,他希望购买一个期限为 6 个月、执行价格为$ 29,000,000 的欧式看跌期权。回顾上面的公式,可得欧式股票指数看跌期权的

Delta 值为：

$$\Delta = e^{-q(T-t)}[N(d_1) - 1] \tag{13.5}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

在本例中，由于基金管理者的证券组合价值可由指数来反映，所以若把该有价证券组合看作单一衍生证券，则这个公式也是该证券组合的看跌期权的 *Delta* 值。这个 *Delta* 值为负值。相应的，为构造合成看跌期权，基金管理者必须确保其在任一给定时间卖出占原 $ 30,000,000 有价证券组合中比例为

$$e^{-q(T-t)}[1 - N(d_1)]$$

的那一部分份额，将所得资金投资于无风险资产。随着原证券组合的价值减小，看跌期权的 *Delta* 值变得更负，证券组合中卖出的份额必须增加；随着原证券组合的价值增加，看跌期权的 *Delta* 值变负减少，证券组合中卖出的份额必须减少（即还需购回原组合中的一部分）。

运用这种策略构造有价证券组合保险的实质就是：在任意给定时间，使得资金在保险了的股票有价证券组合和无风险资产之间进行分配。当股票组合的价值增加时，则出售无风险资产，增加股票组合的头寸；当股票组合的价值减小时，则减少股票组合头寸，购买无风险资产。基金管理者总是在市场下降后卖出，在市场上升后买入，因此就产生了保险的成本。

使用指数期货

利用指数期货构造有价证券保险比使用标的股票本身进行保险更受投资者欢迎。因为买卖指数期货的交易费用通常比直接买

卖标的股票的交易费用更便宜。在前面例子中，基金管理者可以保持$ 30,000,000 股票组合不动，卖出指数期货合约。从(13.2)和(13.5)公式可得，卖出的指数期货合约所对应的美元数额占有价证券组合价值的比例应为：

$$e^{-q(T-t)}e^{-(r-q)(T^*-t)}[1-N(d_1)]$$
$$=e^{q(T^*-T)}e^{-r(T^*-t)}[1-N(d_1)]$$

其中，T^*为期货合约的到期时间。若有价证券组合价值为指数的 K_1 倍，每个指数期货合约的价值为该指数的 K_2 倍。这意味着在任意时刻卖出的指数期货合约数量应为：

$$e^{q(T^*-T)}e^{-r(T^*-t)}[1-N(d_1)]\frac{K_1}{K_2}$$

例 13.10

在本节开始所给的例子中，假设市场的波动率为每年 25%，无风险利率为每年 9%，股票市场的红利率为每年 3%。在这种情况下：$S=300$，$X=290$，$r=0.09$，$q=0.03$，$\sigma=0.25$，$T-t=0.5$。所要求的期权的 *Delta* 值为：

$$e^{-q(T-t)}[N(d_1)-1]=-0.322$$

因此若有价证券组合的一部分用来构造期权，最初应售出原证券组合中的 32.2% 的价值。若用 9 个月期的 *S&P*500 指数期货合约，$T^*-T=0.25$，$T^*-t=0.75$，$K_1=100,000$，$K_2=500$，所以卖出的该期货合约的数量应为：

$$e^{q(T^*-T)}e^{-r(T^*-t)}[1-N(d_1)]\frac{K_1}{K_2}=61.6$$

在这种构造合成看跌期权来为证券组合进行保险的方法中，重要的一点就是基金管理者调整或再平衡有价证券组合头寸的频

率。若没有交易费用，最优的方法是连续调整。然而，当交易费用增加时，再调整的最优频率将减小。*Leland* 讨论了有关的问题。

到目前为止，我们一直假设有价证券组合价值与指数一一对应。正如第十一章所讨论的，套期保值操作过程经调整后也可以用来处理其它的情况。所使用的期权执行价格应为当有价证券组合价值到达其保险价值时的预计市场指数水平。所使用的指数期权数量等于 β 乘以有价证券组合 *beta* 为 1.0 时保值所要求的期权数量。

例 13.11

假设无风险利率为每年 5%，*S&P*500 指数为 500 点。某种有价证券组合的 β 值为 2.0，价值为 $10,000,000。假设 *S&P*500 指数的红利率为每年 3%，而该组合的红利率为每年 2%。有价证券组合管理者希望该组合价值在第二年不致于贬值到 $9,300,000 以下。若这一年末该组合的价值降到 $9,300,000，总收益率（考虑了 2% 的红利率之后）近似为每年 −5%。这将比无风险利率少 10%。在这种情况下，我们预期市场表现比无风险利率差 5%（即收益率为 0）。因此，我们预计 *S&P*500 将下降 3%，因为这种指数并不算入任何红利。我们得到合成看跌期权校正后的执行价格应为 485 点。所要求的看跌期权数量等于 β 倍的有价证券组合的价值再除以指数的价值，得到 40,000（即 400 个合约）。

为说明这个答案至少近似是正确的，假设有价证券组合的价值跌至 $8,300,000。考虑红利后，它的收益率约为每年 −15%，这个收益率约比无风险利率少 20%。而 *S&P*500 再加上其红利预计产生的收益率要比无风险利率低 10%。这就意味着指数将降低 8%，到 460 点。执行价格为 485 的 40,000 份看跌期权合约将支付 $1,000,000。

当 β 不为 1.0 时，基金管理者希望用部分证券组合来构造期权，该组合可被看作是单一衍生证券。作为一种近似，该组合的波动率等于市场指数波动率的 β 倍[11]。

1987 年 10 月 19 日和股票市场波动率

如果指数波动率变化迅速或者股票指数产生很大的跳跃，那么构造基于指数的合成看跌期权并不是很有效的方法。在 1987 年 10 月 19 日，星期一，道·琼斯工业平均指数下跌了约 500 点。那些通过购买可交易看跌期权来保险的证券组合管理者很好地躲过这次灾难，而选择构造合成看跌期权方法的那些管理者则发现他们无法足够快地卖出股票或指数期货以保护原头寸免遭损失。

我们已经提出过如下的问题：波动率是仅由新信息引起的呢？还是由交易本身引起的。诸如我们刚刚描述过的有价证券保险操作方法有可能增加波动率。当市场价格下跌时，将使得证券组合管理者要么卖出股票，要么卖出指数期货合约。而这可能加速市场价格的下跌。出售股票很可能会直接迫使指数进一步下降。出售指数期货合约有可能驱使指数期货价格下跌。根据指数套利机制（参见第三章），这将对股票产生出售压力，从而驱使市场指数也下降。同样，当市场价格上涨时，这些证券组合保险策略促使投资者或买入股票或买入期货合约，于是更加剧了市场价格上涨。

除了一些正式规范的一般性保险操作方法，我们发现许多投资者有意无意地实施着他们自己的有价证券组合的保险操作方法。例如，一个投资者可能情愿当市场上涨时进入市场，当市场下跌时出售，来限制他的损失风险。

无论正式或非正式的，有价证券组合保险措施是否影响市场波动率取决于市场容纳证券组合保险产生的交易的难易程度。若保险操作的交易仅是所有交易中很小的一部分，很可能就没有影响。但当保险操作的交易涉及很广泛范围的时候，就可能对市场产生不稳定的影响。

Brady 委员会的报告

Brady 委员会关于 1987 年 10 月 19 日股票市场崩溃的报告

为我们提供了一些当时有价证券组合的保险对市场影响有趣的内幕资料。*Brady* 委员会预计 1987 年 10 月份有 $ 600 亿到 $ 900 亿的股权资产实施了有价证券保险操作。从 1987 年 10 月 14 日(星期三)到 1987 年 10 月 16 日(星期五),市场价格下跌了约 10%,而主要的下跌发生在星期五下午。对应于已采取的有价证券保险策略,应该出售至少 $ 120 亿的股权资产或指数期货合约(注:为正确表达这些内容,10 月 19 日,星期一,当价值为 $ 210 亿的 6.04 亿股票在纽约股票交易所交易时,所有先前的记录都被打破。这天,交易了近 $ 200 亿的 *S&P*500 指数期货合约)。实际上,售出的金额不到 $ 40 亿,这意味着在紧随的下周证券组合的保值者将执行他们模型(译者注:即所谓的程序交易模型)指示的巨额出售指令。*Brady* 委员会估算 10 月 19 日(星期一),三个有价证券保险者卖出的指令就占纽约股票交易所总出售额的 10%,有价证券保险者在指数期货市场上出售的期货合约数量达到总出售额的 21.3%。看起来似乎是有价证券组合保险造成了对市场下跌的压力。重要的是,总体而言有价证券组合保险者仅仅执行了他们模型产生的所有交易指令的很小部分。当然,自 1987 年 10 月后,基于股票和期货合约动态交易的有价证券组合保险策略远不如以前那么流行了。

13.13　小　结

金融机构向他们的客户提供各种期权产品。这些期权经营与在交易所交易的标准化的期权产品不一致。因此金融机构面临对冲他们的风险的问题。裸期权策略和抵补期权策略可能使得他们的风险水平不可接受。有时可采用的一个策略是止损策略,即当期权是处于虚值期权状态时,持有裸期权头寸;一旦期权变动到处于实值状态时,就将裸期权头寸转变为抵补期权头寸状态。令人

奇怪的是，该策略运作的效果并不好。

期权的 *Delta* 值，Δ，定义为期权价格的变化与标的资产价格变化之比。*Delta* 对冲就是构造一个 *Delta* 值为 0 的头寸(有时也称为 *Delta* 中性套期保值头寸)。由于标的资产的 *Delta* 值为 1.0，对每一个欲保值的期权多头而言，进行 *Delta* 中性保值的一个方法就是持有 $-\Delta$ 个标的资产头寸。期权的 *Delta* 值随时间而变化。这意味着标的资产的头寸必须频繁进行调整。

一旦某个期权的头寸已经是 *Delta* 中性状态了，下一个步骤通常是看它的 *Gamma* 值。期权的 *Gamma* 定义为期权的 *Delta* 的变化与标的资产价格变化之比。它是衡量期权价格与标的资产价格之间关系的曲率。通过构造期权的 *Gamma* 中性头寸，可以减少这个曲率对 *Delta* 套期保值效果的影响。如果 Γ 是欲保值头寸的 *Gamma* 值，通过持有某个 *Gamma* 值为 $-\Gamma$ 的可交易期权的头寸，可以达到 *Gamma* 中性套期保值状态。

Delta 对冲和 *Gamma* 对冲两者都是假设标的资产的波动率为常数。实际上，波动率确实随时间而变化。期权或某期权组合的 *Vega* 定义为期权头寸价值变化与对应波动率变化之比。如果某个交易者希望对冲某个期权头寸以抵销波动率变化的影响，他或她可以构造一个 *Vega* 中性状态的头寸。正如构造 *Gamma* 中性状态的过程一样，持有某个可交易期权的抵销性的头寸就可获得 *Vega* 中性化头寸。如果交易者希望同时获得 *Gamma* 中性和 *Vega* 中性，通常需要两类可交易期权。

衡量期权头寸风险的另外两个参数是 *theta* 和 *rho*。*theta* 衡量当其它因素保持不变时，期权头寸价值变化与时间变化的比率。*rho* 衡量当其它因素保持不变时，期权头寸价值变化与短期利率变化之比。

为了对股权投资组合进行保险，有价证券组合管理者有时对构造合成的看跌期权感兴趣。他们或者交易证券组合本身，或者

交易该证券组合的指数期货合约，就能够做到这一点。交易证券组合本身就是将该组合在股权和无风险证券之间进行分配。当市场价格下降时，投资于无风险资产的比率就较高。当市场价格上升时，投资于股权的比率就较高。交易该证券组合的指数期货合约就是保持股权组合不变，同时出售指数期货合约。当市场价格下降时，出售指数期货合约的数量较多一些；当市场价格上升时，出售指数期货合约的数量就少一些。在正常的市场条件下，这个策略效果较好。然而，在 1987 年 10 月 19 日，星期一，当道·琼斯工业平均指数下降 500 多点时，该策略运作很糟糕。有价证券组合的保险者不能够很快地出售股票或指数期货合约以保护他们的头寸。

附录 13.A 台劳展开和对冲参数

衍生证券组合的管理者可以使用各种对冲的方法，这些方法可用短期内证券组合价值变化的台劳展开来说明。

如果标的资产的波动率设定为常数，证券组合的价值 Π 是标的资产价格 S 和时间 t 的函数。台劳展开给出：

$$\Delta\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial \Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S \partial t}\Delta S \Delta t + \cdots \qquad (13A.1)$$

这里 $\Delta\Pi$ 和 ΔS 是在小时间间隔 Δt 内 Π 和 S 的变化。*Delta* 对冲消掉了上式右边的第一项。第二项不是随机变量。当证券组合是 *Gamma* 和 *Delta* 中性时，第三项（是一阶 Δt）是 0。其他项都是 Δt 的高阶小量。

对 *Delta* 中性证券组合，方程（13A.1）右边的第一项为 0，所以：

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

当忽略更高阶的Δt时，这就是方程(13.3)。

当标的资产的波动率为变量时，Π是σ、S和t的函数。方程(13A.1)变为：

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}S^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2 + \cdots$$

这里$\Delta\sigma$是时间Δt内σ的变化。在这种情况下，*Delta*中性消掉了右边的第一项。证券组合的*Vega*中性消掉了第二项。第三项不是随机变量。证券组合的*Gamma*中性消掉了右边的第四项。其他项都相当小。

第十四章

数值方法

若衍生证券估值没有确切解析公式时，可用数值计算方法，在这一章中我们讨论可用于衍生证券估值的三种数值方法。第一种方法是蒙特卡罗模拟。当衍生证券的收益依赖于标的变量的历史数据或衍生证券具有多个标的变量时，可用蒙特卡罗方法对该衍生证券进行估值。后两种方法是树图方法和有限差分方法。与蒙特卡罗模拟不同的是，它们可以用来计算其持有者在到期前要做出提前执行决策或其它决策的衍生证券的价格。本章说明如何用上述各种方法计算 *Delta*，*Gamma* 和 *Vega* 等套期保值参数。本章还介绍了一些美式期权的近似估值公式。

到目前为止，我们一直把现在的时间表示为 t。在引入三种数值方法时，为了便于说明，我们将假设现在的时间为 0。

14.1 蒙特卡罗模拟

我们将用欧式衍生证券（*European - style derivative security*）一词来描述一种持有者在其有效期内不做任何决策的衍生证券，而美式衍生证券（*American - style derivative security*）一词则指有可能要做出提前执行或其它决策的衍生证券。考虑一种欧式衍

生证券，在 T 时刻的收益为 f_T。由公式(12.15)，其 0 时刻的价值为：

$$f = \hat{E}\ [f_T e^{-\bar{r}T}] \tag{14.1}$$

其中 $\hat{E}$ 代表风险中性世界中的期望，$\bar{r}$ 为 0 时刻到 T 时刻瞬态无风险利率的平均值。如果假设这个无风险利率已知，公式(14.1)简化成：

$$f = e^{-rT}\hat{E}(f_T) \tag{14.2}$$

其中 r 等于 T 时刻到期的零息票债券的收益率。

单个标的变量的情形

蒙特卡罗模拟是一种对满足(14.1)或(14.2)式的欧式衍生证券进行估值的方法。首先考虑只有一个标的随机变量，而且这个变量不是利率的情况，这种情况下可以用(14.2)式。用类似于 9.4 节中模拟股票价格的方法可以模拟风险中性世界中该变量的一种可能的路径。这样就可以计算出衍生证券的最终价值。这一最终价值可被看作是全部可能终值集合中的一个随机样本。用该变量的另一条路径可以获得另一个样本终值。更多的样本路径得出更多的样本终值。计算出大量的比如 10,000 个终值后，$\hat{E}(f_T)$ 就用它们的算术平均来估计。然后用(14.2)式就可计算出衍生证券的现值。单个终值的计算或单个终值的贴现计算将被称作一次模拟运算(*simulation run*)。因此上述模拟包含了 10,000 个模拟运算。

标的变量的样本路径必须符合该状态变量在风险世界中将遵循的随机过程。从 12.3 节可知，这意味着为了进行模拟，每个变量的比例飘移率必须减掉 $\lambda\sigma$，其中 λ 是该变量风险的市场价格，

而 σ 是变量的标准差。若变量为某种可交易证券的价格，这一调整的作用就是使飘移率等于无风险利率减去瞬态红利收益率。

如果只有唯一的变量而这个变量是短期无风险利率 r，或其它与 r 有关的变量，蒙特卡罗模拟方法与前述类似，只是每次模拟运算的贴现率不同。风险中性世界中 r 的路径将被模拟。对每次模拟运算都要计算衍生证券有效期内的 r 的平均值。在进行下一次模拟运算之前，衍生证券的终值必须用这个平均利率贴现并保存这个结果。在完成大量的模拟运算之后，就可算出经贴现的终值的算数平均值。根据(14.1)式，就得到了 f 的估计值。

为了更正规地描述只有一个标的变量的蒙特卡罗模拟，我们假设这个变量是 θ。定义 s 为 θ 的标准差，$\hat{m}$ 为 θ 在风险中性世界中的增长率。为了进行模拟，衍生证券的有效期被分成 N 个长度为 Δt 的小段，如同 9.4 节所讨论的，在风险中性世界中 θ 的过程的离散形式为：

$$\Delta\theta = \hat{m}\,\theta\Delta t + s\theta\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{14.3}$$

其中 $\Delta\theta$ 是在 Δt 时间内 θ 的变化，ϵ 是从标准正态分布[①]中抽取的一个随机样本。为进行一次模拟运算，必须从标准正态分布中抽取 N 个独立随机样本。当把这些样本带入(14.3)式，可算出 $0,\Delta t,2\Delta t,\cdots,T$ 时刻的 $\Delta\theta$ 值。这些计算提供了一条 θ 的模拟路径，因而可以计算出衍生证券的一个样本终值。

多个标的变量的情形

当存在多个变量时，每次模拟运算中对每个变量的路径都必须进行抽样。从样本路径进行的每次模拟运算可以得出衍生证券的终值。如果瞬态无风险利率 r 是这些变量的函数，则每次模拟运算必须计算出 r 的平均值 $\bar{r}$。在下次模拟运算开始之前把终

值用 r 贴现。需要再次强调的是，为了进行模拟，所有变量（包括 r）的随机过程必须是各变量在风险中性世界中所遵循的过程。

假设共有 n 个变量，$\theta_i(1\leqslant i\leqslant n)$。定义 s_i 为 θ_i 的标准差，$\hat{m}_i$ 为 θ_i 在风险中性世界中的期望增长率，ρ_{ik} 为 θ_i 和 θ_k 之间的瞬态相关系数。同在单变量情况下一样，衍生证券的有效期必须被分成 N 个长度为 Δt 的小段，则 θ_i 的过程的离散形式为：

$$\Delta\theta_i = \hat{m}_i\theta_i\Delta t + s_i\theta_i\epsilon_i\sqrt{\Delta t} \qquad (14.4)$$

其中 $\Delta\theta_i$ 是 Δt 时间内 θ_i 的的变化，ϵ_i 是标准正态分布的一个随机样本。ϵ_i 和 ϵ_k 的相关系数是 ρ_{ik}，$1\leqslant i,k\leqslant n$。一次模拟运算包括从多维标准正态分布中获得 N 个样本 $\epsilon_i(1\leqslant i\leqslant n)$。把这些样本值代入(14.4)式可以产生每个 θ_i 的模拟路径，并由此计算出衍生证券的一个样本值。

随机样本的产生

大多数程序语言都为抽取 0 到 1 之间的随机数编制了程序。用下式可以获得一个单变量标准正态分布的近似样本。

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \qquad (14.5)$$

其中 $R_i(1\leqslant i\leqslant 12)$ 是 0 到 1 之间的相互独立的随机数，ϵ 是从 $\Phi(0,1)$ 中获得 d 所要求的样本。这一近似方法可满足大多数要求。

如需从二维标准正态分布中抽取样本，则可用如下的方法。x_1 和 x_2 是用前述方法从单变量标准正态分布中抽取的独立样本。则所求样本 ϵ_1 和 ϵ_2 的计算如下：

$$\epsilon_1 = x_1$$

$$\epsilon_2 = \rho x_1 + x_2\sqrt{1-\rho^2}$$

其中 ρ 是二维分布中变量间的相关系数。

如果 n 个变量的正态分布中变量 i 和变量 j 之间的相关系数是 ρ_{ij}，则我们首先从单变量标准正态分布中抽取 n 个独立变量 x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$，所求样本为 $\epsilon_i(1\leqslant i\leqslant n)$，其中

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{k=i} a_{ik}x_k$$

为了使 ϵ_i 有正确的方差并使 ϵ_i 与 ϵ_j 之间有正确的相关系数$(1\leqslant j\leqslant i)$，我们必须有

$$\sum_k a_{ik}^2 = 1$$

和

$$\sum_k a_{ik}a_{jk} = \rho_{ij}$$

让第一个样本 ϵ_1 等于 x_1，利用这些公式，可以通过 ϵ_1 求得 ϵ_2，由 ϵ_2 和 ϵ_1 求得 ϵ_3，以此类推。

模拟运算的执行次数取决于所要求的精度。若 M 是独立运算的个数而 ω 是由模拟运算算出的衍生证券价值的标准差，则 f 估计值的标准误差是 $\omega/\sqrt{M}$。

减少变量的方法

如果不对抽样方法进行调整，则往往需要取很大的 M 值才能得到精度合理的 f 估计值。好在有两种减少变量的方法能够用来使所需的 M 值显著减少，它们是对偶变量技术和控制变量技术(*antithetic variate technique and control variate technique*)。

在对偶变量技术中，一次模拟运算包括计算衍生证券的两个值，第一个值 $f1$ 是用通常的方法算得的；第二个值 $f2$ 是通过改变所有标准正态分布样本的符号计算出的（如果 ϵ 是用来计算第一个值的样本，则 $-\epsilon$ 是用来计算第二个值的样本。）由模拟运算得出的衍生证券的估计值是这两个计算值的平均。这种方法很有效，因为当一个值高于真实值时，则另一个值必偏低，反之亦然。令 f 代表 f_1 和 f_2 的平均。

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

衍生证券的最终估计值是 $\bar{f}$ 的平均。如果 ω 是 $\bar{f}$ 的标准差，M 是模拟运算的次数（即，成对计算值的对数），估计值的标准误差还是以前的 $\omega/\sqrt{M}$。

控制变量技术适用于有两种相似衍生证券 A 和 B 的情况。A 证券是要求的证券；B 证券是与 A 证券相似且能得到解析解的证券。使用相同的随机数流和相同的 Δt 平行地进行两次模拟。第一次模拟是用来获得对 A 的价值的估计值 f_A^*；第二次模拟是用来获得对 B 的价值的估计值 f_B^*。用下式可以得到一个对 A 的价值的更好的估计值 f_A

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \tag{14.6}$$

其中 f_B 是已知的 B 的真实值。

应用

与其它方法相比，在有多个变量时蒙特卡罗模拟的运算是很有效率的。这是因为蒙特卡罗模拟运算的时间随变量个数的增加近似呈线性增长，而其它大多数方法随变量个数的增加计算时间呈指数增长。它还有一个优点就是给出了估计值的标准误差。蒙特卡罗方法的局限性是只能用于欧式衍生证券估值。但是这种方

法能适用于各种 m_i 和 s_i 的收益情况和函数形式复杂的情况。特别是当收益依赖于某个变量遵循的整个路径的函数而不是该变量终值时，该方法也适用。

蒙特卡罗模拟一般用于对标的股票的标准差为随机变量的期权进行分析。股票的价格和标准差的路径同时被模拟。任意时刻的标准差的值决定了被抽样的股票价格的概率分布。

套期保值参数可以用蒙特卡罗模拟来计算。假设我们对 f 随 q 的变化率感兴趣，其中 f 是衍生证券的价值而 q 是某个标的变量或参数的值。首先，按通常的蒙特卡罗模拟方法计算出衍生证券的估计值 f。然后让 q 值增加一个小量 Δq，并用计算 f 的相同随机数流计算出一个新的衍生证券值 f^*。于是得出套期保值参数的一个估计：

$$\frac{f^*-f}{\Delta q}$$

估计 f 和 f^* 时，时间段的个数 N 应该相同。

14.2　二叉树

在第十章中我们用了一个简单的二叉树模型来解释 *Black—scholes* 模型基本性质。在模型中假设在期权有效期末股票价格只有两种可能。显然这个模型不太现实，所以只用来进行说明。一个更现实的假设是股票价格的变动在很短的时间间隔 Δt 内是二值的。这一假设首先由 *Cox*，*Ross* 和 *Robinstein* 提出，并被广泛用于期权定价的数值计算中。

考虑一个不付红利股票期权的估值。首先我们把期权的有效期分为很多很小的时间间隔 Δt。假设在每一个时间段内股票价值从开始的 S 运动到两个新值 Su 和 Sd 中的一个。这一模型可

用图 14.1 说明。一般情况下 $u>1, d<1$。因此 S 到 Su 是价格"上升"运动，S 到 Sd 是价格"下降"运动。价格上升的概率假设是 p，下降的概率假设为 $1-p$。

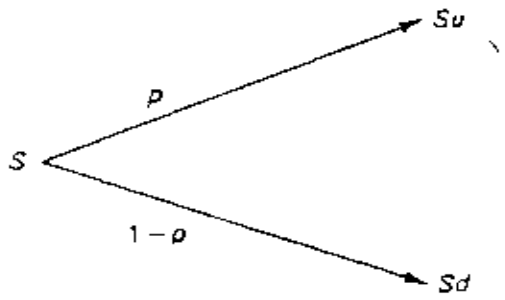


图 14.1 二叉树模型中 Δt 时间内股票价格的变动

风险中性定价

在第十章中我们介绍了所谓的风险中性定价原理。它是这样说的：任何依赖于股票价格的衍生证券可以在风险中性世界的假设基础上进行估值。它意味着为了计算期权的价值(或其它衍生证券的价值)，我们可以假设：

1. 所有可交易证券的期望收益都是无风险利率；

2. 未来现金流可以用其期望值按无风险利率贴现来计算。

在应用二叉树模型时，我们将利用风险中性估值原理并假设世界是风险中性的。

p，u 和 d 的确定

对应于时间间隔 Δt 内股票价格变化的均值和标准差，参数 p、u 和 d 必须给出相应的正确值。由于我们是处于风险中性的

世界中，所以股票的期望收益是无风险利率 r[2]。因此在时间间隔 Δt 段末的股票期望值为 $Se^{r\Delta t}$，其中 S 为该时间间隔段初始股票价格。因此：

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \tag{14.7}$$

或

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \tag{14.8}$$

回想在第十章中假设的股票价格模型，在一个小时间段 Δt 内股票价格变化的方差是 $S^2\sigma^2\Delta t$。由于变量 Q 的方差被定义为 $E(Q^2)-[E(Q)]^2$，其中 E 代表期望值，则

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2$$

或

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 \tag{14.9}$$

公式(14.8)和(14.9)给 p，u 和 d 提供了两个条件。第三个常用的条件是：

$$u = \frac{1}{d}$$

可以看出以上三个条件隐含着[3]：

$$p = \frac{a-d}{u-d} \tag{14.10}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{14.11}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{14.12}$$

其中

$$a = e^{r\Delta t} \tag{14.13}$$

假设 Δt 很小[4]。

股票价格树图

使用二叉树模型时的股票价格完整树图如图 14.2 所示。时间为 0 时，已知股票价格 S；时间为 Δt 时，股票价格有两种可能：Su 和 Sd；时间为 $2\Delta t$ 时，股票价格有三种可能：Su^2、Sud 和 Sd^2，以此类推。一般情况下，$i\Delta t$ 时刻，股票价格有 $i+1$ 种可能，它们是

$$Su^j d^{i-j} \qquad j = 0, 1, \ldots, i$$

注意在计算图 14.2 中树图的每个结点的股票价格时使用了 $u = 1/d$ 的关系。例如 $Sud = Su$。还要注意的是股票价格先上升后再下降与先下降后再上升得出的值是一样的，也就是树枝在结点上的重合。这样就大大减少了树图的结点个数。

通过树图倒推计算

期权的计算是从树图的末端（时刻 T）开始向后倒推进行的。T 时刻期权的价值已知。例如，一个看跌期权价值为 $max(X - S_T, 0)$，而一个看涨期权价值为 $max(S_T - X, 0)$，其中 S_T 是 T 时刻的股票价格，X 是执行价格。由于假设在风险中性世界中，$T - \Delta t$ 时刻的每个结点上的期权价值都可以用 T 时刻期权价值的期望值在 Δt 时间内用利率 r 贴现求得。同理，$T - 2\Delta t$ 时刻的每个结点的期权价值可用 $T - \Delta t$ 时刻的期望值在 Δt 时间内用利率 r 贴现求出，其他结点以此类推。如果期权是美式的，则须检查二叉树的每个结点，以确定提前执行是否比将期权再持有 Δt 时间更有利。最后，向后倒推通过所有的结点就可得到 0 时刻的期权值。

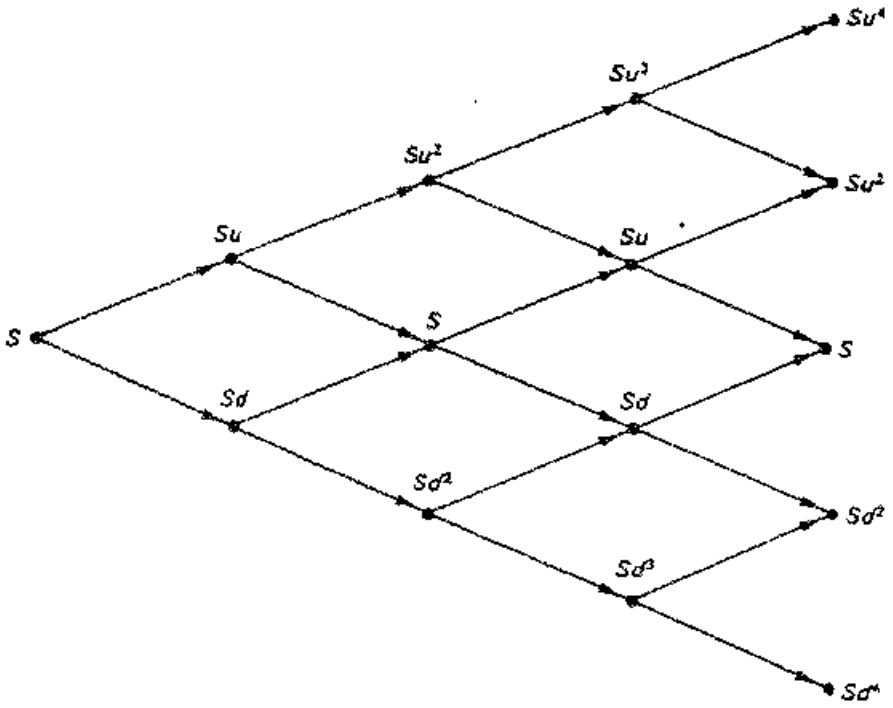


图 14.2　用于股票期权估值的树

例 14.1

考虑一个不付红利股票的 5 个月期美式看跌期权，股票价格为 $ 50，执行价格为 $ 50，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%。用我们常用的符号来表示就是 $S=50, X=50, r=0.10, \sigma=0.40, T=0.4167$。为构造一个二叉树，假如我们把期权的有效期分成五段每段长度 1 个月（=0.0833 年），则 $\Delta t=0.0833$。用公式(14.10)到公式(14.13)

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909$$

$$a = e^{r\Delta t} = 1.0084, \qquad p = \frac{a-d}{u-d} = 0.5076$$

$$1-p = 0.4924$$

图 14.3 表示二叉树。在每个结点上有两个数字。上面的数字一个表示该结点的股票价格，下面的数字表示该结点的期权值。上升的概率总是 0.5076；下降的概率总是 0.4924。

在 $i\Delta t$ 时刻计算出的第 $j(j=0,1,\ldots,i)$ 个结点的股票价格为 Su^jd^{i-j}。例如，A 结点($i=4, j=1$)的股票价格是 $50\times 1.1224\times 0.8909^3 = \$39.69$。最后面的结点的期权价格用 $max(X-S_T,0)$ 来计算。例如，在 G 结点的期权价格是 $50-35.36=14.64$。

从最后结点的期权价格可以计算出倒数第二个结点的期权的价格。首先，我们假设在这些结点期权没有执行。这意味着所计算的期权价格是 Δt 时间内期权价格期望值的现值。例如，E 结点期权价格的计算是：

$$(0.5076\times 0+0.4924\times 5.45)e^{-0.10\times 0.0833}=2.66$$

而 A 结点的计算则是

$$(0.5076\times 5.45+0.4924\times 14.64)e^{-0.10\times 0.0833}=9.90$$

然后，我们检查提前执行是否比等待更有利。在 E 结点，提前执行将使期权的值为 0，因为股票价格和执行价格都是 $\$50$。显然最好等一等。因此 E 结点上正确的期权值是 $\$2.66$。$A$ 结点则不然。期权如果执行，价值就是 $\$50.00-\$39.69$ 即 $\$10.31$，大于 $\$9.90$。如果到达 A 结点，期权就应执行，从而 A 结点上正确的期权值为 $\$10.31$。

前面结点的期权价格也用类似的方法计算。注意当期权是处于实值状态时提前执行不总是最好的。考虑结点 B。期权如果执行，它的价值是 $\$50.00-\$39.69$ 即 $\$10.31$。然而，如果继续持有，期权值为：

$$(0.5076\times 6.37+0.4924\times 14.64)e^{-0.10\times 0.0833}=10.35$$

因此在这个结点时期权不应执行，因此该结点正确的期权值为 $\$10.35$。

从树图上向后倒推，我们得到了初始结点上的期权值是 $\$4.48$。这就是期权现值估计值。实际中所使用的 Δt 会更小，结点数会更多。用非常小的 Δt 得出的真正的期权值是 $\$4.29$。

$\leqslant N, 0 \leqslant j \leqslant i$)时的期权价值。我们将把 f_{ij} 称为结点(i,j)的期权值。由于美式看跌期权在到期日的价值为 $max(X - S_T, 0)$，所以：

$$f_{Nj} = \max[X - Su^j d^{N-j}, 0] \quad j = 0, 1 \ldots, N$$

在 $i\Delta t$ 时刻从结点(i,j)向$(i+1)\Delta t$ 时刻的结点$(i+1, j+1)$移动的概率为 p，在 $i\Delta t$ 时刻从结点(i,j)向$(i+1)\Delta t$ 时刻的结点$(i+1, j)$移动的概率为$(1-p)$。假设不提前执行，风险中性估价公式给出：

$$f_{ij} = e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

其中 $0 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant j \leqslant i$。考虑提前执行时，式中的 $f_{i,j}$ 必须与看跌期权的内涵价值进行比较，因此我们得到：

$$f_{ij} = \max\{X - Su^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t}[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}$$

注意，因为计算是从 T 时刻倒推回来的，所以 $i\Delta t$ 时刻的期权价值不仅反映了在 $i\Delta t$ 时刻提前执行这种可能性对期权价值的影响，而且也反映了在后面的时间里提前执行对期权价值的影响。当 Δt 趋于 0 时，可以获得准确的美式看跌期权价值。实际中常用 $N = 30$，就可以得到合理的结果。

Delta 和其他对冲参数的估计

期权的 *Delta*，Δ，是期权价格随标的股票价格变化的变化率，换句话说，

$$\Delta = \frac{\Delta f}{\Delta S}$$

其它条件不变时，期权价格随时间的变化率。如果树从 0 时刻开始，则 0 时刻的 Θ 估计值为：

$$\Theta = \frac{f_{21} - f_{00}}{2\Delta t}$$

若树从 $-2\Delta t$ 时刻开始，可得 0 时刻 *Theta* 的对称估计值：

$$\Theta = \frac{f_{42} - f_{00}}{4\Delta t} \qquad (14.16)$$

为计算 *Vega*，可让标准差做微小的改变，即 $\Delta\sigma$，然后构造新的二叉树，得到的新期权值（Δt 应保持相等）。*Vega* 估计值为：

$$Vega = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

其中 f 和 f^* 分别是从最初的二叉树和新建的二叉树得出的期权值。*Rho* 可以类似计算。

例 14.2

考虑一个 3 个月期的不付红利股票的美式看跌期权，股票价格为 S 50，执行价格为 $ 50，无风险利率为每年 10%、波动率为每年 40%。在这种情况下，$S=50$，$X=50$，$r=0.10$，$\sigma=0.40$，$T=0.25$。这个期权与例 14.1 中的期权其实是一样的，但是它持续 3 个月期而不是 5 个月期。选择 Δt 等于一个月（$=0.0833$ 年），期权的估计值就是图 14.3 中 C 点的值，即 S 3.76。

对我们的新例子来说，图 14.3 是从 $-2\Delta t$ 时刻开始的。用(14.15)式就可以从 B 结点和 F 结点值得出 *Delta* 的估计值：

$$\frac{0.63 - 10.35}{62.99 - 39.69} = 0.42$$

用(14.16)式就可以从 B、C 和 F 结点的值得出期权的 *Gamma* 估计值：

$$\frac{[(0.63-3.76)/(62.99-50.00)]-[(3.76-10.35)/(50.00-39.69)]}{11.65}$$

用(14.10)式就可以从 D 结点和 E 结点的值得出 *Theta* 的估计值：

$$\frac{2.66-4.48}{0.333}=-5.5$$

这些当然只是粗略的估计。如果用更小的 Δt 来构造一个树，它们就会得到更准确的估计值。

14.3 指数期权、货币期权和期货期权的二叉树法

将计算不付红利股票期权价值的二叉树公式稍做修改，就可得到支付连续红利率为 q 的股票的美式看涨期权和看跌期权定价公式。

由于红利提供了 q 的收益，所以在风险中性世界中平均来说股票价格本身的收益率应为 $r-q$。因此(14.7)式变为：

$$Se^{(r-q)\Delta t}=pSu+(1-p)Sd$$

所以(14.8)变为：

$$e^{(r-q)\Delta t}=pu+(1-p)d$$

它表明公式(14.10)、(14.11)和(14.12)仍然是正确的，但

$$a=e^{(r-q)\Delta t} \tag{14.17}$$

因此，利用新的 a 值后，二叉树数值方法仍然能够象以前那样应用。

回想在第十一章中，为了进行期权估值，股票指数、外汇、期货合约可被看成支付连续红利的股票。对于股票指数，相应红利率

就是计算股指的股票组合的红利收益率；对于外汇来说，红利率是国外无风险利率；对于期货合约，红利率是国内无风险利率。因此，二叉树法就可以用来对股票指数、外汇和期货合同期权进行估值了。

例 14.3

考虑一个 4 个月期的指数期货的美式看涨期权，现在期货的价格是 300 点，执行价格是 300 点，无风险利率是每年 8%，指数的波动率为每年 40%。

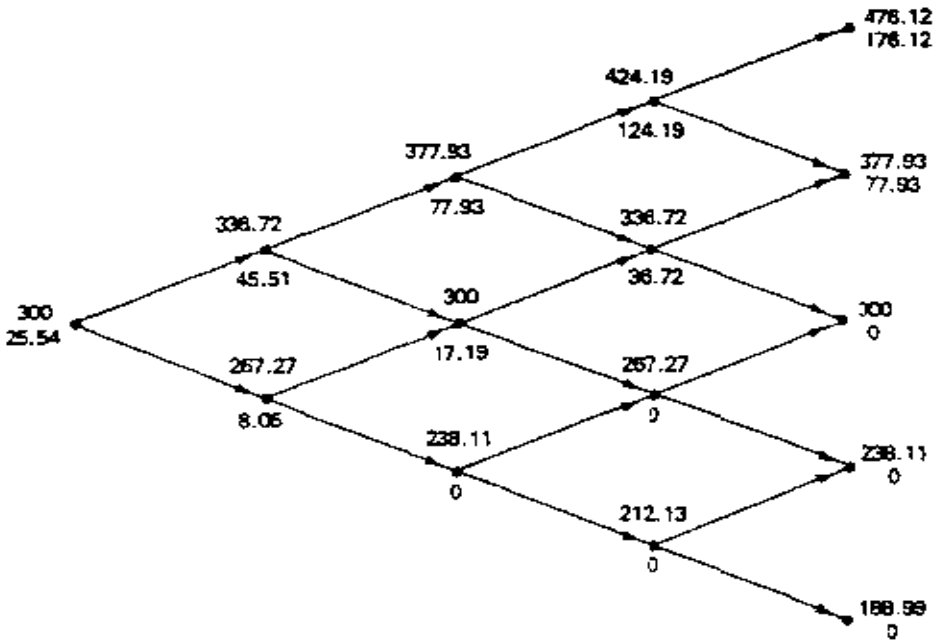


图 14.4 指数期货合约美式看涨期权的二叉树(例 14.3)

为了构造二叉树，我们把期权的有效期分成四段，每段一个月。这里 $F=300, X=300, r=0.08, \sigma=0.40, T=0.3333, \Delta t=0.0833$。由于期货合约可以看作是一个支付连续红利 r 的股票，因此(14.17)式中的 q 就应该等于 r。

这也就使得 $a=1$。构造二叉树所需的其他参数是：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224, \qquad d = \frac{1}{u} = 0.8909$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4713, \qquad 1-p = 0.5287$$

二叉树如图 14.4 所示(上面的数字是期货价格;下面的数字是期权价格)。期权的估计值为 25.54。

例 14.4

考虑一个一年期英镑美式看跌期权。现在的汇率是 $ 1.6100,执行价格是 $ 1.6000,美国的无风险利率是每年 8%,英镑的无风险利率是每年 10%,

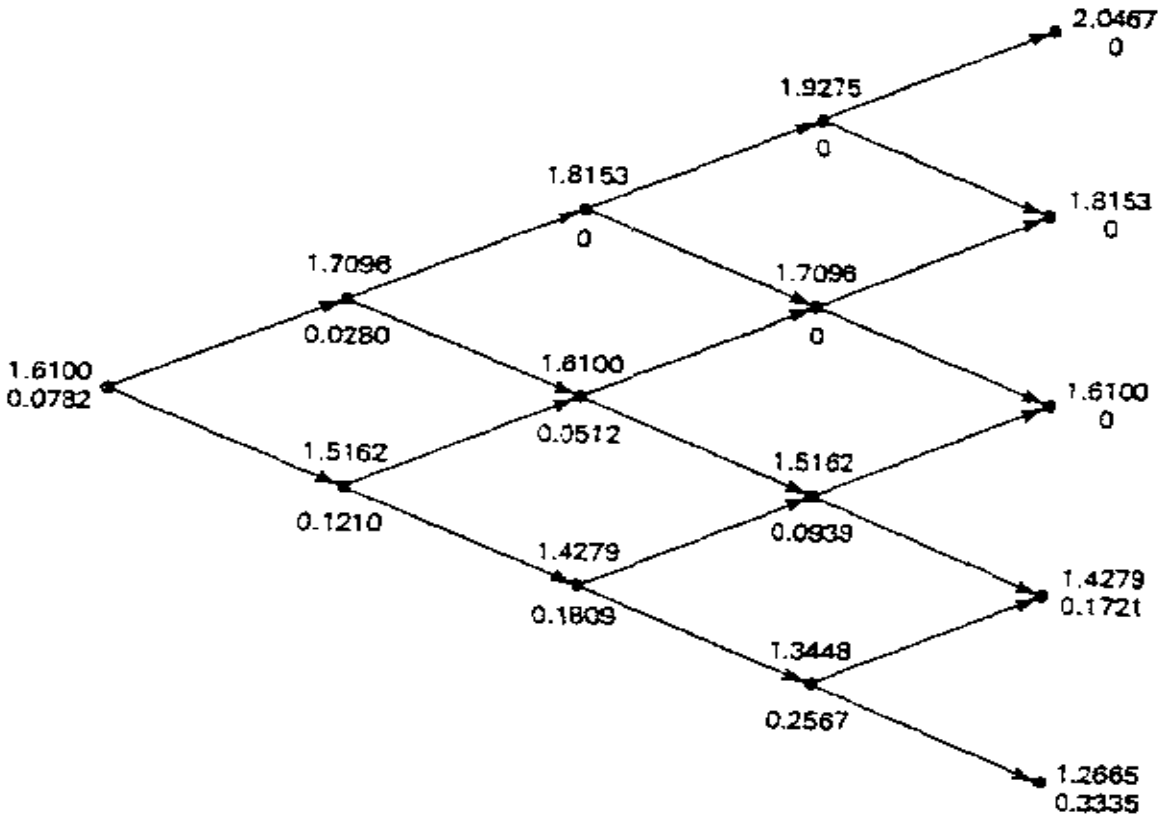


图 14.5　外汇美式看跌期权的二叉树(例 14.4)

英镑汇率的波动率为每年12%。这种情况下，$S=1.61$，$X=1.60$，$r=0.08$、$r_f=0.10$，$\sigma=0.12$，$T=1.0$。为了构造二叉树，我们把期权的有效期分成四段，每段三个月，所以 $\Delta t=0.25$。在这里，$q=r_f$，而且(14.17)式给出：

$$a = e^{(0.08-0.10)\times 0.25} = 0.9950$$

构造二叉树所需的其他参数是：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0618, \qquad d = \frac{1}{u} = 0.9418$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4433, \qquad 1-p = 0.5567$$

二叉树如图14.5所示(上面的数字是汇率；下面的数字是期权价格)。期权的估计值为$0.0782。

14.4 支付已知红利的股票期权的二叉树法

现在我们转向一个更棘手的问题，就是如何将二叉树模型应用于支付红利的股票。与第十章一样，为了便于讨论，“红利”一词指在除息日由于支付红利而导致的股票价格下降的减少量。

已知红利率

假设在未来某一确定时间将支付已知的红利率 δ，二叉树的形式如图14.6所示，分析方法与刚才类似。如果时刻 $i\Delta t$ 在除息日之前，则树上这些结点相应的股票价格为：

$$Su^j d^{i-j} \qquad j = 0,1,\ldots,i$$

其中 u 和 d 与(14.11)式和(14.12)式中的定义相同。如果时刻 $i\Delta t$ 在除息日之后，则树上这些结点相应的股票价格为：

$$S(1-\delta)u^j d^{i-j} \qquad j = 0,1,\ldots,i$$

对在期权有效期内有多个已知红利率的情况，可以进行同样处理。若 δ_i 为 0 时刻到 $i\Delta t$ 时刻之间所有除息日的总红利支付率，则 $i\Delta t$ 时刻结点的相应的股票价格为：

$$S(1-\delta_i)u^j d^{i-j}$$

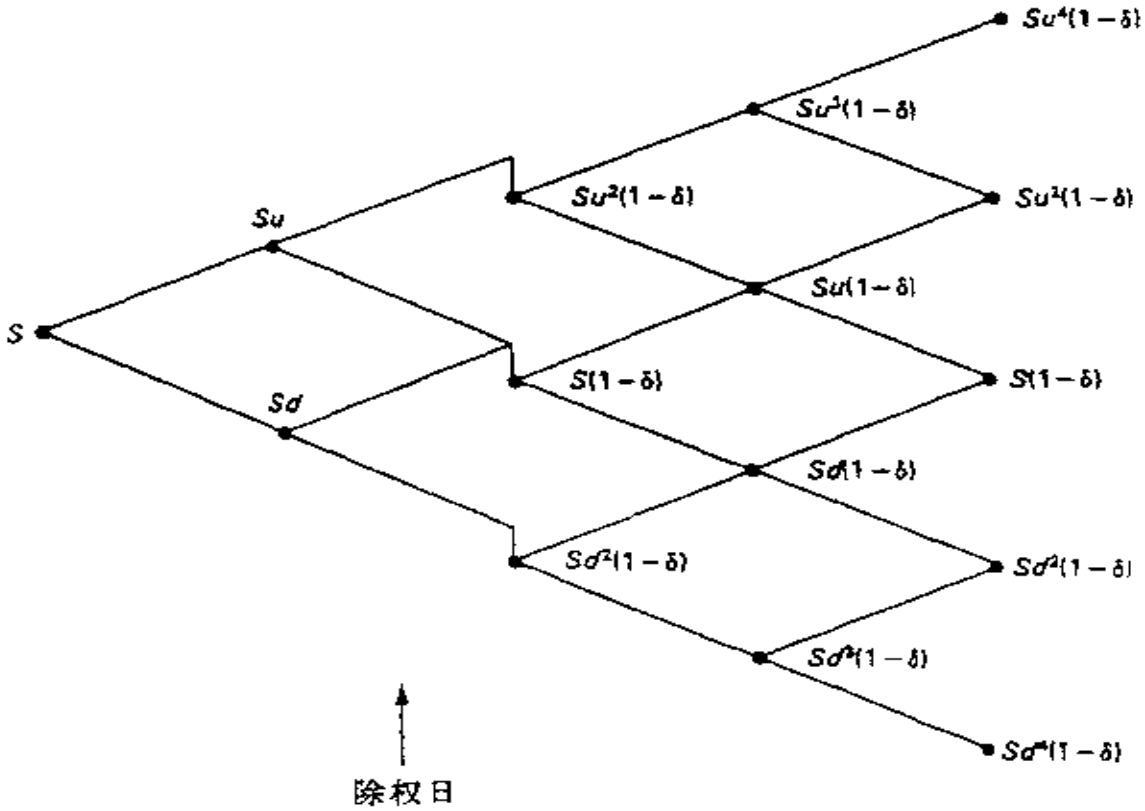


图 14.6　在一个特定时刻支付已知红利率的股票的二叉树

已知红利数额

在某些情况下，最现实的假设莫过于事先已知红利数额而非红利率。如果假设股票的标准差 σ 是常数，则二叉树的形式如图 14.7 所示。树枝不再重合，这意味着所要估算的结点的数量可能

变得很大，特别是如果支付多次红利的话。假如只有一次红利，除息日 τ 在 $k\Delta t$ 到 $(k+1)\Delta t$ 之间，而且红利数额为 D。当 $i \leqslant k$，二叉树的结点如图 14.2 所示。当 $i=k+1$ 时，$i\Delta t$ 时刻结点的相应的股票价格与原来一样，是

$$Su^j d^{i-j} - D \qquad j = 0,1,2,\ldots,i$$

当 $i=k+2$ 时，二叉树上结点的相应的股票价格为：

$$(Su^j d^{i-1-j} - D)u \qquad \text{和} \qquad (Su^j d^{i-1-j} - D)d$$

其中 $j=0,1,2\ldots,i-1$，因此将有 $2i$ 而不是 $i+1$ 个结点。在 $(k+m)\Delta t$ 时刻，将有 $m(k+1)$ 个而不是 $k+m+1$ 个结点。

这个问题可以象第十章中对欧式期权的分析那样来简化。假设股票价格由两部分组成：一部分是不确定的，而另一部分是期权有效期内所有未来红利的现值。跟从前一样，假设在期权有效期内只有一个除息日 τ，而且 $k\Delta t \leqslant \tau \leqslant (k+1)\Delta t$。$x$ 时刻不确定部分的价值 S^* 为：

$$S^*(x) = S(x) \qquad \text{当 } x > \tau$$

和

$$S^*(x) = S(x) - De^{-r(\tau - x)} \qquad \text{当 } x \leqslant \tau$$

其中 D 是红利。设 σ^* 为 S^* 的标准差，假设 σ^*（而不是 σ，一般来说，$\sigma^* > \sigma$）是常数。用 σ^* 代替(14.10)，(14.11)，(14.12)和(14.13)式中的 σ 可计算出参数 p、u 和 d，这样就可用通常的方法构造出模拟 S^* 的二叉树了。通过把未来红利（如果有的话）的现值加在每个结点的股票价格上，就会使原来的二叉树转化为另一个模拟 S 的二叉树。在 $i\Delta t$ 时刻，当 $i\Delta t < \tau$ 时，这个树上每个结点对应的股票价格为：

$$S^*(t)u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau - i\Delta t)} \qquad j = 0,1,\ldots,i$$

当 $i\Delta t > \tau$ 时，这个树上每个结点对应的股票价格为：

$$S^*(t)u^j d^{i-j} \qquad j = 0, 1, \ldots, i$$

这种方法用了一个关于股票波动率的十分合理的假设，就成功地恢复了树枝重合的状态，这样在 $i\Delta t$ 时刻就只有 $i+1$ 个结点了。这种方法可以直接了当地推广到处理多个红利的情况。

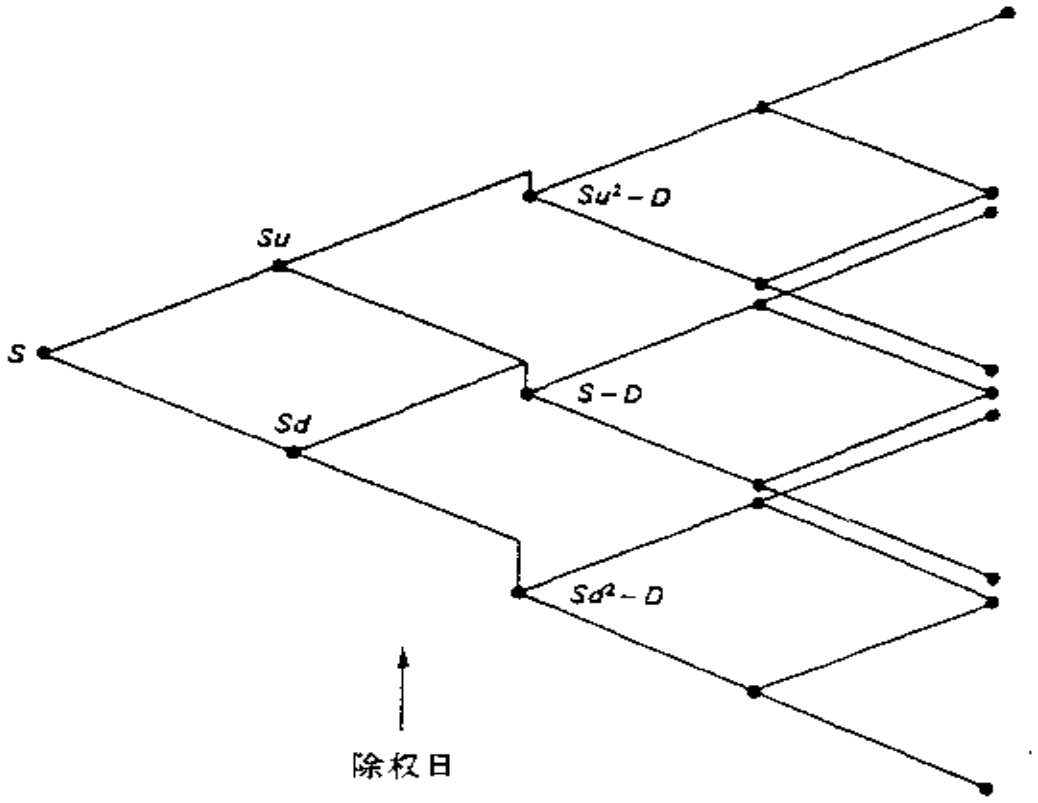


图 14.7　当假设已知红利数额并且假设标准差为常数时的二叉树

例 14.5

考虑一个有效期为 5 个月期的股票看跌期权，预计在期权有效期内该股票支付一次 $ 2.06 红利。初始的股票价格是 $ 52，执行价格是 $ 50，无风险利率为每年 10%，波动率为每年 40%，除息日是在三个半月的那天。

我们首先构造一个树来模拟 S^*，S^* 为股票价格减去期权有效期内未来红利的现值。首先，红利的现值是：

$$2.06e^{-0.2917\times 0.1} = 2.00$$

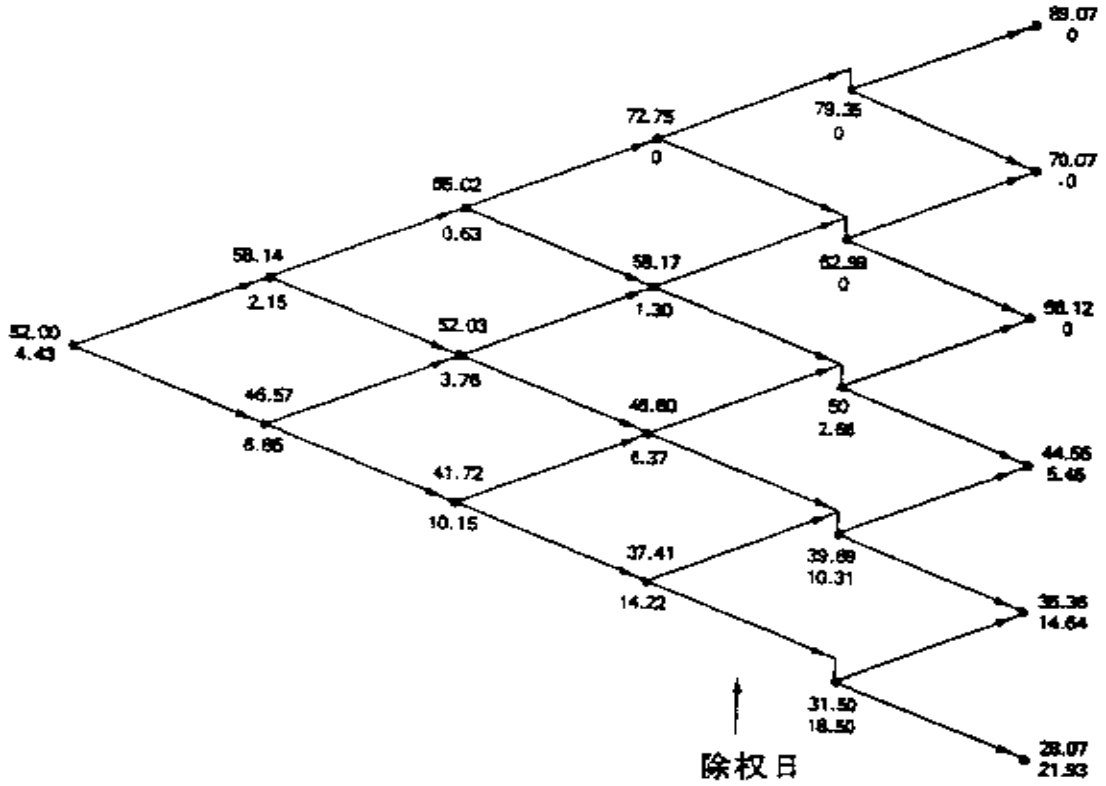


图 14.8 例 14.5 中的二叉树

因此 S^* 的初始值为 S 50.0。假设波动率为每年 40% 指的是 S^*，则图 14.3 给出了一个 S^* 的二叉树（S^* 的初始值和标准差与构成图 14.3 的股票价格是一样的）。给每个结点加上红利的现值就得到了一个如图 14.8 所示的 S 的二叉树模型。与在图 14.3 一样，在每个结点上价格上升的概率是 0.5076，下降的概率是 0.4924。按通常的方法通过二叉树向后倒推就可得到

期权的价格是$ 4.43。

14.5　基本二叉树方法的扩展

与蒙特卡罗模型不同的是，二叉树方法既可用于欧式衍生证券又能用于美式衍生证券。然而，这里所概述的方法只有在衍生证券的价值取决于标的变量的当前价值时才适用，当取于标的变量的历史值时，该方法就不适用了。

二叉树方法能用于许多标的变量的情况。由(14.10)，(14.11)和(14.12)式和

$$a = e^{m\Delta t}$$

可计算出参数 u、d、p，其中 m 是风险中性世界中变量的增长率。二叉树方法可以适应 m 有微小变化的情况。(14.10)，(14.11)和(14.12)式说明 u 和 d 不变而 p 为时间的函数时的情况。某个商品的 m 值可由 12.4 节中所述的方法求得。

当有不止一个标的变量时，也能使用二叉树方法。那时二叉树向多维展开。对每个结点的概率必须进行选择，以使每个变量在风险中性世界中具有正确的期望增长率和标准差，且使两个变量之间的相关系数是正确的。

当只有一个变量时，二叉树法可能不是最佳的数值处理方法。*Boyle* 认为当在每个时间间隔 Δt 内有三个可能的价格变动时，三叉树的运算效率将可能最佳。在第十五章中，我们将说明如何用三叉树来建立利率模型。

控制变量的技术

值得注意的是我们在第 14.2 节提到的控制变量技术可以与树图方法结合起来使用。这一观点是由 *Hull* 和 *White* 提出的。用同一个树图来对两个相似的衍生证券 A 和 B 进行估值。证券

A 是所考虑的待求的证券，证券 B 是一个已知其解析值的相似的证券。然后利用(14.6)式。对一个美式看跌期权进行估值的例子可以说明这种技术是适用的。可以选择相应的欧式看跌期权来作为证券 B。

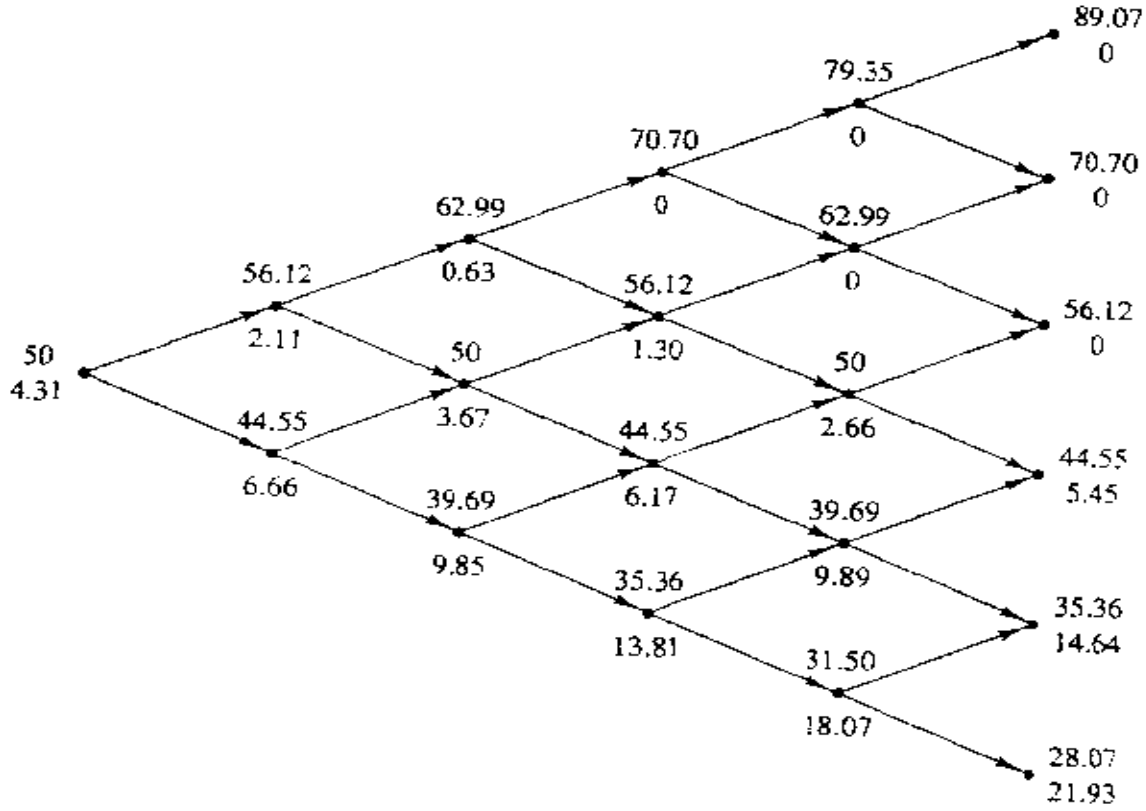


图 14.9　图 14.3 中期权改为欧式时的树结构。每个结点上，上面的数字是股票价格，下面的数字是期权价格

为了说明控制变量技术的使用方法，在假设期权是欧式期权的基础上图 14.9 估算了图 14.3 中期权的价值。所得价格为 $ 4.31。用 *Black – Scholes* 公式计算出真正的欧式期权价格是 $ 4.08。图 14.3 中美式期权的估计值是 $ 4.48。因此用控制变量技

术估计的美式期权价格为：

$$4.48 + 4.08 - 4.31 = 4.25$$

前面曾提到过，真正的美式期权价格是$4.29。因此，在本例中，控制变量方法比原来的估计值$4.48有了明显的改进。

衍生证券的 *Delta*、*Gamma* 和 *Theta* 的计算在14.4节的末尾和例14.2中已做过讨论。其他套期保值参数可以按如下方式求出：首先用通常的树图方法计算衍生证券的价格 f，然后把待求的参数改变一个很小的值 Δq，并用同一个树图来重新估算该衍生证券的价格。设该衍生证券的新价格为 f^*，所求的参数可以估计为：

$$\frac{f^* - f}{\Delta q}$$

14.6　避免负的概率

到现在为止所描述的方法在大多数情况下可以产生令人满意的树图。但是，当 σ 很小时，这些方法有时会使得两个概率中的一个要么很小，要么为负值。例如，如果 r 为每年12%，σ 为每年1%，$\Delta t = 0.1$。由(14.10)到(14.12)式得出：

$$a = e^{0.1\times 0.12} = 1.0121$$

$$u = e^{0.01\times\sqrt{0.1}} = 1.0032$$

$$d = \frac{1}{u} = 0.9968$$

$$p = \frac{1.0121 - 0.9968}{1.0032 - 0.9968} = 2.39$$

$$1 - p = -1.39$$

在这种情况下概率是没有意义的！

设 S 为期权标的资产的现价，F 为与期权合约同时到期的标的资产的期货价格。当用树图方法来模拟 F 时，本章前面所述的方法永远也不会产生负的概率(这是因为参数 a 总等于 1.0)。这指出了一条避免负概率问题的途径。不论期权是否依赖于 F，我们可以构造一个树图来模拟 F。在每个结点上，我们可以通过如下 F 公式来计算 S：

$$S = Fe^{-(r-q)(T-\tau)} \tag{14.18}$$

其中 τ 是结点所对应的时间，而 T 是期权合约和期货合约的到期日(参见(3.10)式)。

例 14.6

考虑一个一年期的加拿大元美式看涨期权。现汇汇率为 $0.7900，执行价格为 $0.8000，美国无风险利率为每年 6%，加拿大无风险利率为每年 10%，汇率的波动率为每年 4%。在这种情况下，$S=0.79$，$X=0.80$，$r=0.06$，$r_f=0.10$，$\sigma=0.04$，$T=1$。为了构造二叉树，我们把期权的有效期分成每 3 个月一期，也就是说 $\Delta t=0.25$。当用树图来模拟 1 年期合约的期货价格时：

$$a = 1$$

$$u = e^{0.04\times\sqrt{0.25}} = 1.0202$$

$$d = \frac{1}{u} = 0.9802$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4950$$

$$1-p = 0.5050$$

由(3.10)式可得期初的期货价格：

$$0.79e^{(0.06-0.10)\times 1} = 0.7590$$

代表期货价格的树图如图 14.10 所示。在每个结点上，中间的数字表示期货汇率，上面的数字表示现汇汇率(用(14.18)式计算)而下面的数字表示

期权价格。由树图得出的期权值为$ 0.0016。

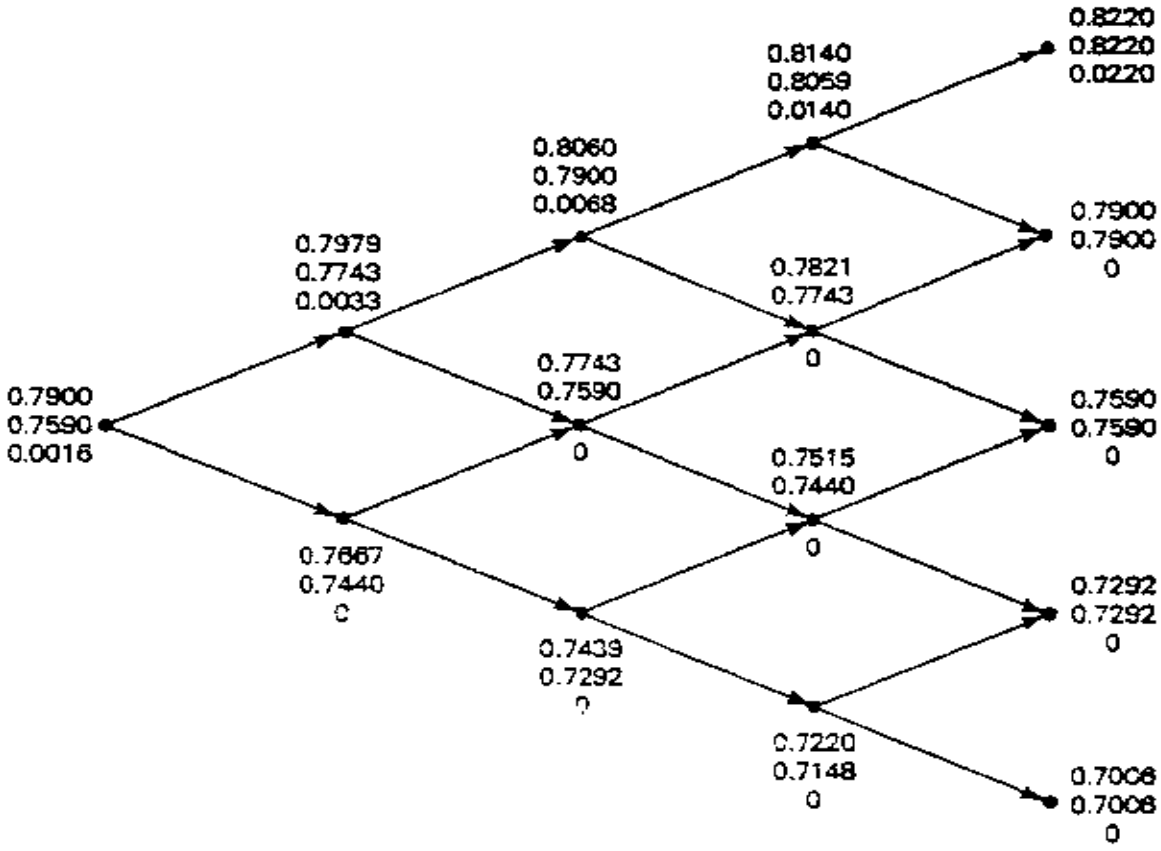


图 14.10　低波动率货币美式看涨期权的二叉树；在每个结点，最上面数字是即期汇率，中间数字是期货价格，下面数字是期权价格

14.7 有限差分方法

有限差分方法通过用数值方法求解衍生证券所满足的微分方程来为衍生证券估值。将微分方程转化为一系列的差分方程后，再用迭代法求解这些差分方程。

为了说明这种方法，我们考虑如何用它来估算一个不付红利股票的美式看跌期权。该期权必须满足的微分方程是：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \qquad (14.19)$$

把从现在(即 0 时刻)到期权到期日(即 T 时刻)分成有限个等间隔的不同的小时间段。我们假设 $\Delta t = T/N$，这样就总共有 $N+1$ 个时间段：

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T$$

同时选择有限个等间隔的不同的小股票价格段。我们设 S_{max} 为可达到的足够高的股票价格，当达到这一价格时，看跌期权实质上已没有价值了。我们定义 $\Delta S = S_{max}/M$ 并考虑 $M+1$ 个股票价格：

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \ldots, S_{max}$$

其中一个假定为现在的股票价格。

这一普通的方法可用图 14.11 来说明。图 14.11 构造了一个共有 $(M+1)(N+1)$ 个点的座标方格。座标上的点 (i, j) 对应时刻 $i\Delta t$ 和股票价格 $j\Delta S$。我们将用变量 f_{ij} 代表 (i, j) 点的期权价值。

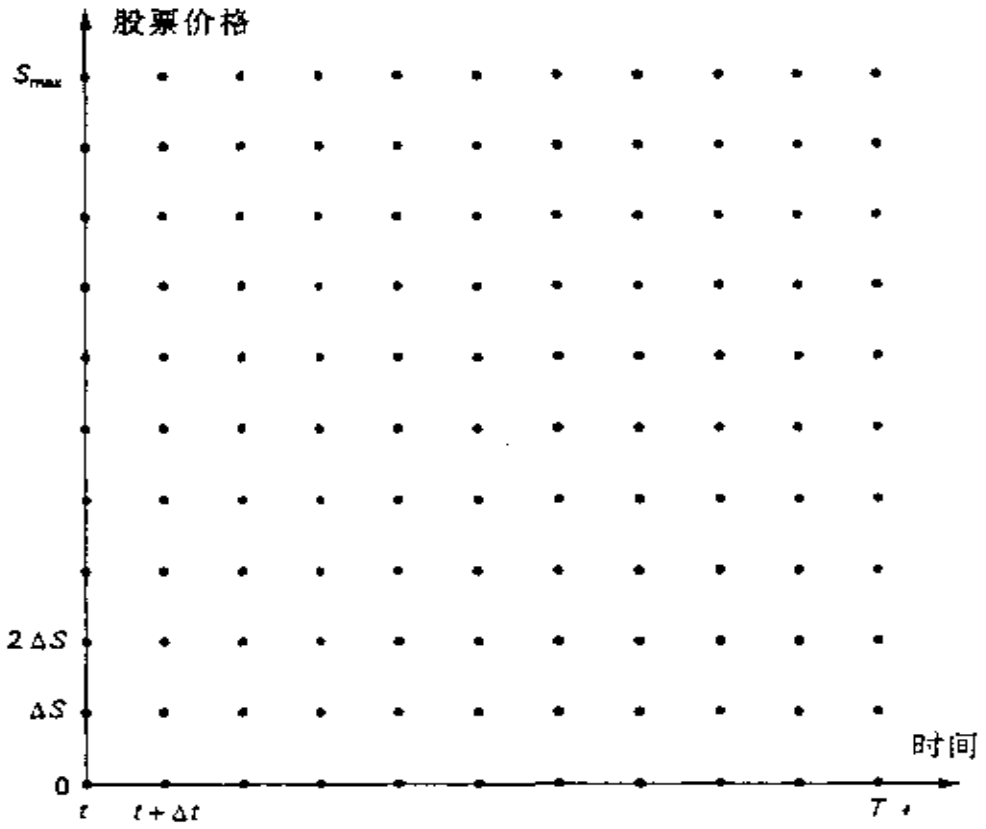


图 14.11　有限差分方法的座标方格

内含的有限差分方法

对于座标方格内部的点(i,j),$\partial f/\partial S$ 可以近似为:

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i,j+1}-f_{ij}}{\Delta S} \tag{14.20}$$

或者

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{ij}-f_{i,j-1}}{\Delta S} \tag{14.21}$$

(14.20)式是所谓的前向差分近似(*forward difference approximation*);(14.21)式是所谓的后向差分近似(*backward difference approximation*)。在内含有限差分方法(*implicit finite difference method*)中,我们用一个更加对称的近似方法,即两者的平均:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \tag{14.22}$$

对于$\partial f/\partial t$,我们将采用前向差分近似以使 $i\Delta t$ 时刻的值与 $(i+1)\Delta t$ 时刻的值相关联:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} \tag{14.23}$$

点(i,j)的$\partial f/\partial S$ 的后向有限差分近似可由(14.21)式给出。$(i,j+1)$点的后向差分近似为

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta S}$$

因此,(i,j)点的$\partial^2 f/\partial S^2$ 的后向有限差分近似为:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left(\frac{f_{i,j+1} - f_{ij}}{\Delta S} - \frac{f_{ij} - f_{i,j-1}}{\Delta S}\right)\Big/\Delta S$$

或

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}}{\Delta S^2} \tag{14.24}$$

把(14.22)、(14.23)和(14.24)式代入(14.19)式的微分方程中,并注意 $S = j\Delta t$ 就可得到:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{ij}}{\Delta t} + rj\Delta S\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} +$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{ij}}{\Delta S^2} = rf_{ij}$$

其中 $j = 1,2,\ldots,M-1$，$i = 0,1\ldots,N-1$。以上各项经过合并，我们得到：

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{ij} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \qquad (14.25)$$

其中

$$a_j = \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t$$

$$c_j = -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

现在我们可以运用美式看跌期权的边界条件。T 时刻看跌期权的价值为 $max[X - S_T, 0]$，其中 S_T 为 T 时刻的股票价格。因此：

$$f_{Nj} = \max[X - j\Delta S, 0] \qquad j = 0,1,\ldots,M \quad (14.26)$$

当股票价格为零时，看跌期权的价值是 X。因此：

$$f_{i0} = X \qquad i = 0,1,\ldots,N \qquad (14.27)$$

当股票价格趋于无穷时，看跌期权的价值趋于零。因此我们用近似值：

$$f_{iM} = 0 \qquad i = 0,1,\ldots,N \qquad (14.28)$$

(14.26)、(14.27)和(14.28)式定义了图 14.11 的座标方格中三个边界(即 $S = 0$，$S = S_{max}$ 和 $t = T$)的看跌期权值。还需用(14.25)式来求出座标方格左边界的 f 值。首先求解与 $T - \Delta t$ 时刻相对应的点。利用(14.25)式和 $i = N-1$ 可以给出 $M-1$ 个

同时成立的公式：

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{Nj} \qquad (14.29)$$

其中 $j=1,2\ldots,M-1$。这些方程中的右边值已由(14.26)式求出。此外，由(14.27)和(14.28)式，得：

$$f_{N-1,0} = X \qquad (14.30)$$

$$f_{N-1,M} = 0 \qquad (14.31)$$

因此，可以求解(14.29)式中 $M-1$ 个方程，求出 $M-1$ 个未知数：$f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \ldots, f_{N-1,M-1}$[⑤]。这一步完成之后，把每个 $f_{N-1,j}$ 的值与 $X-j\Delta S$ 进行比较。如果 $f_{N-1,j} < X-j\Delta S$，最好在 $T-\Delta t$ 时刻提前执行期权，这样就使 $f_{N-1,j}$ 等于 $X-j\Delta S$。与 $T-2\Delta t$ 对应的结点也按同样方式处理，并以此类推。最后就会得到 $f_{01}, f_{02}, f_{03}, \ldots, f_{0,M-1}$。在这些值中有一个就是我们要求出的期权价格。

控制变量技术可与有限差分方法联系起来使用。用同一个座标方格可以估算出某个期权的价值，该期权应类似于另一个可得到解析解的期权。然后再用(14.6)式。

例 14.7

表 14.1 表示了用上述内含有限差分方法求解例 14.1 中期权定价的结果。M、N 和 S 的值分别取 20,10 和 5。因此就把股票价格从 $0 到 $100 分成 $5 一个间隔段，把期权有效期分成半个月一个间隔段，由此可估算期权价格。由座标方格得出的期权价格为 $4.07。用同一个座标方格得出的相应欧式期权价格是 $3.91。用 *Black-Scholes* 公式得出真正的欧式期权价格是 $4.08。因此美式期权价格的控制变量方法估计值为：

$$4.07 + 4.08 - 3.91 = \$4.24$$

这显然很接近真实值 $4.29。

表 14.1 用内含有限差分方法估算例 14.1 中期权值的座标方格

Stock Price (dollars)	Time to Maturity (Months)										
	5	$4\frac{1}{2}$	4	$3\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.02	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
80	0.16	0.12	0.09	0.07	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00
75	0.27	0.22	0.17	0.13	0.09	0.06	0.03	0.02	0.01	0.00	0.00
70	0.47	0.39	0.32	0.25	0.18	0.13	0.08	0.04	0.02	0.00	0.00
65	0.82	0.71	0.60	0.49	0.38	0.28	0.19	0.11	0.05	0.02	0.00
60	1.42	1.27	1.11	0.95	0.78	0.62	0.45	0.30	0.16	0.05	0.00
55	2.43	2.24	2.05	1.83	1.61	1.36	1.09	0.81	0.51	0.22	0.00
50	4.07	3.88	3.67	3.45	3.19	2.91	2.57	2.17	1.66	0.99	0.00
45	6.58	6.44	6.29	6.13	5.96	5.77	5.57	5.36	5.17	5.02	5.00
40	10.15	10.10	10.05	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

外推的有限差分方法

内含的有限差分方法的优点在于它很有效。当 ΔS 和 Δt 趋于零时它总是收敛于微分方程的解[6]。内含有限差分方法的缺点之一是为了从 $f_{i+1,j}$ 的值计算出 $f_{i,j}$ 的值必须同时求解 $M-1$ 个方程。如果能够假设在座标方格上 (i,j) 点的 $\partial f/\partial S$ 值和 $\partial^2 f/\partial^2 S$ 值与 $(i+1,j)$ 点的值相同，方法就可以简化。于是(14.22)式和(14.24)式变成：

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{f_{i+1,j+1}-f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=\frac{f_{i+1,j+1}+f_{i+1,j-1}-2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

而(14.25)式变成了：

$$f_{ij}=a_j^* f_{i+1,j-1}+b_j^* f_{i+1,j}+c_j^* f_{i+1,j+1} \qquad (14.32)$$

其中

$$a_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(-\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t\right)$$

$$b_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}(1-\sigma^2 j^2\Delta t)$$

$$c_j^*=\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t\right)$$

这样就产生了所谓的外推的有限差分方法(*explicit finite difference method*)。图 14.12 表明了这两种方法的区别。内含方法得到(14.25)式，该式给出 $i\Delta t$ 时刻的三个不同的期权值(即 $f_{i,j-1}$、f_{ij} 和 $f_{i,j+1}$)和 $(i+1)\Delta t$ 时刻的一个期权值(即 $f_{i+1,j}$)之间的关系式。外推方法得到(14.32)式，该式给出 $i\Delta t$ 时刻的一个期权值(即 $f_{i,j}$)和 $(i+1)\Delta t$ 时刻的三个不同的期权值(即 $f_{i+1,j-1}$、$f_{i+1,j}$ 和 $f_{i+1,j+1}$)之间的关系式。

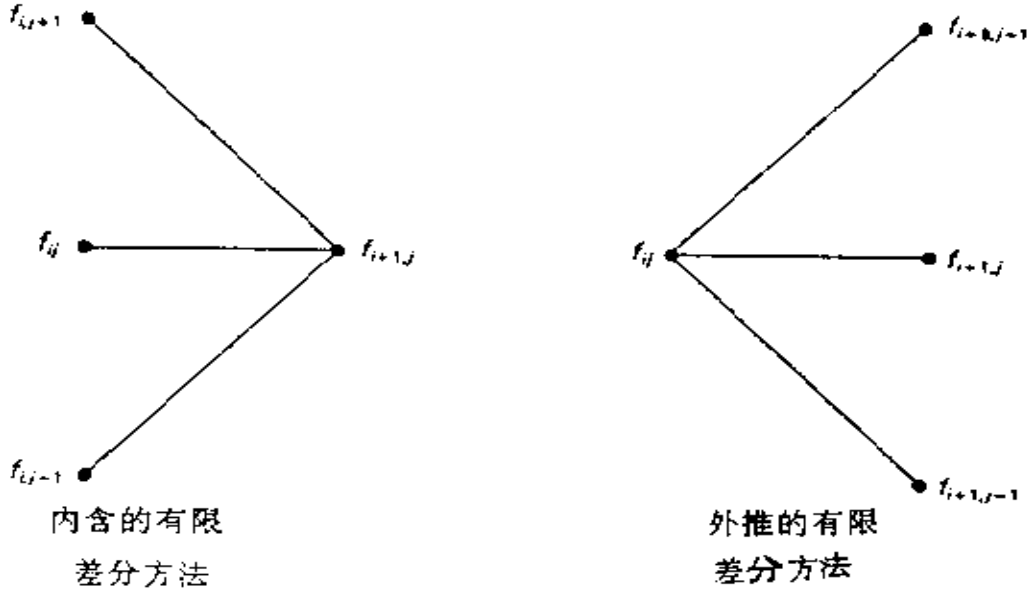


图 14.2　内含和外推有限差分方法的区别

例 14.8

表 14.2 表示了用外推的有限差分方法为例 14.1 中期权定价的结果。同在例 14.7 中一样，M、N 和 ΔS 的值分别取 20、10 和 5。由座标方格得出期权价格是 S 4.26[7]。

有限差分方法常常以 lnS 作为标的变量而不是以 S 作为标的变量[8]。那么座标方格估算的就是 lnS 的相等间隔值的衍生证券值，而不是 S 的相等间隔值时的衍生证券值。这样做的运算效率更高。同时，它的另一个优点是(14.29)式中的 a_j，b_j，c_j 和(14.32)式中的 a_j^*，b_j^*，c_j^* 都独立于 j。

与树图方法的关系

外推的有限差分方法与树图方法非常相似。在(14.32)式中 a_j^*，b_j^*，c_j^* 的表达式中，我们把以下项目解释为：

$-\frac{1}{2}\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$：$\Delta t$ 时刻股票价格从 $j\Delta S$ 下降到 $(j-1)\Delta S$ 的概率

$1-\sigma^2 j^2\Delta t$　Δt 时刻股票价格保持在 $j\Delta S$ 上不变的概率

$\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$：$\Delta t$ 时刻股票价格从 $j\Delta S$ 上升到 $(j+1)\Delta S$ 的概率

在图 14.13 中对这一解释进行了说明。这三个概率合起来为 1。它们给出了在 Δt 时刻股票价格的期望增长为 $rj\Delta S\Delta t=rS\Delta t$。这就是在风险中性世界中的期望增长值。当 Δt 很小时，它们还给出了 Δt 时刻股票价格变化的方差是 $\sigma^2 j^2\Delta S^2\Delta t=\sigma^2 S^2\Delta t$。这满足 S 所服从的随机过程。实际上(14.32)式是通过三叉树从 $(i+1)\Delta t$ 时刻向 $i\Delta t$ 时刻移动的。$i\Delta t$ 时刻的 f 值是由 $(i+1)\Delta t$ 时刻 f 在风险中性世界中的期望值以无风险利率贴现计算出的。

为了使外推的有限差分方法能更好地运用，三个“概率”：

$$-\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

$$1-\sigma^2 j^2\Delta t$$

$$\frac{1}{2}rj\Delta t+\frac{1}{2}\sigma^2 j^2\Delta t$$

必须都为正。在例 14.8 中，当 $j\geqslant 13$(即当 $S\geqslant 65$)时，$1-\sigma^2 j^2\Delta t$ 为负值。这解释了负的期权价格和在座标方格左上方的其它不一致。这个例子说明了外推的有限差分方法存在的主要问题：由于与树图有关的概率可能为负值，所以它的解有可能不收敛于微分方程的解。

表 14.2 用外推的有限差分方法为例 14.1 中期权定价的结果

Stock Price (dollars)	Time to Maturity (Months)										
	5	$4\frac{1}{2}$	4	$3\frac{1}{2}$	3	$2\frac{1}{2}$	2	$1\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
100	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
95	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
90	−0.11	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
85	0.28	−0.05	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
80	−0.13	0.20	0.00	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
75	0.46	0.06	0.20	0.04	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
70	0.32	0.46	0.23	0.25	0.10	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
65	0.91	0.68	0.63	0.44	0.37	0.21	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00
60	1.48	1.37	1.17	1.02	0.81	0.65	0.42	0.27	0.00	0.00	0.00
55	2.59	2.39	2.21	1.99	1.77	1.50	1.24	0.90	0.59	0.00	0.00
50	4.26	4.08	3.89	3.68	3.44	3.18	2.87	2.53	2.07	1.56	0.00
45	6.76	6.61	6.47	6.31	6.15	5.96	5.75	5.50	5.24	5.00	5.00
40	10.28	10.20	10.13	10.06	10.01	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00
35	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
30	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00	20.00
25	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00	25.00
20	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00	30.00
15	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00	35.00
10	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00	40.00
5	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00	45.00
0	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00

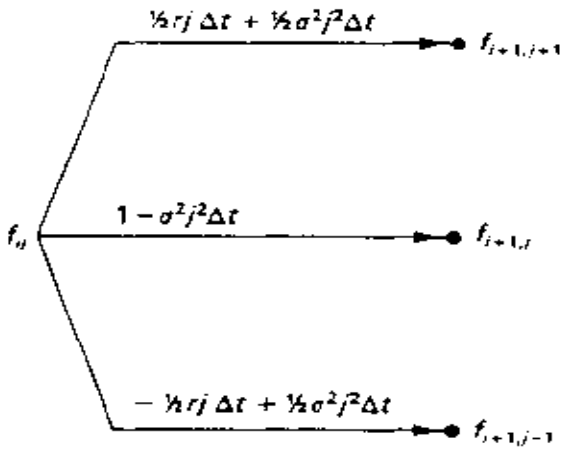


图 14.13　用三叉树来解释外推的有限差分方法

有限差分方法的应用

有限差分法可与树图方法一样解决相同类型的衍生证券定价问题。它们既能处理欧式又能处理美式衍生证券，但是当衍生证券收益取决于状态变量过去的历史时，却不能方便地使用这些方法。有限差分法可用于多个标的变量的情况，但代价是计算时间会大大增加。这时图 14.11 中的座标方格就变成多维的了。

Geske 和 *Shastri* 对有限差分方法和树图方法进行了仔细的比较。他们的结论是："计算少量期权价值的研究者可能更喜欢用二叉树方法，而从事大量期权价值计算的实际交易员通常发现有限差分方法更有效率。"

计算套期保值统计参数的方法与在树图方法中所用的计算是类似的。*Delta*、*Gamma* 和 *Theta* 可以直接用座标方格中计算出的 *fij* 求出。要计算 *Vega*，首先必须让标准差有一个很小的变化，

然后再用同一个座标方格重新计算衍生证券的价值。

14.8　期权定价的解析近似方法

除了这一章描述的数值方法，人们也提出了许多美式期权估值的解析近似方法。最著名的是由 *Macmillan* 最初提出，并由 *Barone－Adesi* 和 *Whaley* 扩展的二次方程近似方法。它可用于股票、股票指数、外汇、期货合约的美式看涨期权和看跌期权的估值。它可以估计欧式期权价格和美式期权价格之间的差值 v。由于欧式期权和美式期权满足同样的微分方程，v 也必须满足这个微分方程。*Macmillan*、*Barone－Adesi* 和 *Whaley* 证明：经过某种近似处理，微分方程可用标准方法进行求解。附录 14*A* 较详细讨论这个方法的细节。

14.9　小　结

在这一章，我们讨论了当不存在解析解时，用三种不同的数值计算方法为衍生证券估值定价。包括蒙特卡罗模拟方法、二叉树方法和有限差分方法。

蒙特卡罗模拟方法利用随机数对许多不同的路径进行取样，在风险中性世界中标的证券的变量遵循这些轨迹。每个路径都可计算出盈亏，并将这个盈亏按无风险利率进行贴现。贴现后的盈亏算术平均值是证券价值的估计值。

二叉树方法假设在每个小的时间间隔 Δt 内，股票价格或者按比例 u 上升，或者按比例 d 下降。u、d 的大小和相应的概率经过仔细选择后，可使股票价格的变化在风险中性世界中具有正确的均值和标准差。从二叉树的末端开始倒推可计算出期权的价格。对美式期权而言，在某个节点的价值是如下两个值之中的较

大者：一个是它立即执行时的价值；另一个是继续持有 Δt 时间的贴现期望值。

有限差分方法将标的变量的微分方程转换成差分方程来求解。类似二叉树方法，计算是从期权有效期最后时刻开始，倒推回期权有效期的初始时刻。内含的有限差分方法比外推的有限差分方法更复杂，但优点是使用者不必为保证收敛性而进行任何特定的事先假设。

在实际中方法的选择取决于被估值的衍生证券的特性以及所要求的精度。蒙特卡罗模拟从证券有效期的开始到结束一直都在运作，只适用于欧式期权，但能处理许多盈亏状态图很复杂的情况。随着标的资产数量增加，这个方法相对而言效率提高。二叉树方法和有限差分方法，计算都是从期权有效期最后时刻开始，倒推回期权有效期的初始时刻，美式和欧式衍生证券都可进行计算。然而，当盈亏状态依赖于状态变量的过去历史以及它们的当前值时，应用这些方法有很大的困难。并且，当包括三个或更多变量时，计算量相当大。作为数值计算方法的一种替代方法，人们也提出了期权估值的许多解析近似解方法。最著名的是由 *Macmillan* 最初提出，并由 *Barone－Adesi* 和 *Whaley* 扩展的方法。附录 14A 描述这个方法。

附录 14A：*MACMILLAN*，*BARONE－ADESI* 和 *WHALEY* 的美式期权价格的解析近似方法

考虑一个以红利率 q 支付连续红利的股票期权。我们将用 v 代表欧式期权价格和美式期权价格之差。由于欧式期权和美式期权的都同样满足 *Black－Scholes* 微分方程，所以 v 也应该满足方程。因此：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(r-q)S\frac{\partial v}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}=rv$$

为方便起见，我们定义：

$$\tau = T - t$$

$$h(\tau) = 1 - e^{-r\tau}$$

$$\alpha = \frac{2r}{\sigma^2}$$

$$\beta = \frac{2(r-q)}{\sigma^2}$$

在不失一般性条件下，我们还可以写成

$$v = h(\tau)g(S,h)$$

通过适当的代换和变量变形，得出：

$$S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h}g - (1-h)\alpha\frac{\partial g}{\partial h} = 0$$

所用的近似方法就是假设上式左边最后一项为零，所以：

$$S^2\frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S\frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h}g = 0 \qquad (14A.1)$$

忽略的那一项一般很小。当 τ 很大时，$1-h$ 接近于零；当 τ 很小时，$\partial g/\partial h$ 接近于零。

跟往常一样，美式看涨期权和看跌期权的价格分别用 $C(S)$ 和 $P(S)$ 代表，其中 S 是股票价格，相应的欧式看涨期权和看跌期权价格将分别用 $c(S)$ 和 $p(S)$ 代表。(14A.1)式可用标准方法来求解。加上边界条件后，得到：

$$C(S) = \begin{cases} c(S) + A_2\left(\dfrac{S}{S^*}\right)^{\gamma 2} & \text{当 } S < S^* \\ S - X & \text{当 } S \geqslant S^* \end{cases}$$

变量 S^* 是股票价格的临界点，当股票价格超过它时，期权应被执行。它可通过迭代求解下面公式来进行估计：

$$S^* - X = c(S^*) + \{1 - e^{-q(T-t)}N[d_1(S^*)]\}\frac{S^*}{\gamma_2}$$

对于看跌期权估值公式为：

$$P(S) = \begin{cases} p(S) + A_1\left(\frac{S}{S^{**}}\right)^{\gamma_1} & \text{当 } S > S^{**} \\ X - S & \text{当 } S \leqslant S^{**} \end{cases}$$

变量 S^{**} 是股票价格的临界点，当股票价格低于它时，期权应被执行。它可通过迭代求解下面公式来进行估计：

$$X - S^{**} = p(S^{**}) - \{1 - e^{-q(T-t)}N[-d_1(S^{**})]\}\frac{S^{**}}{\gamma 1}$$

这里曾用到的其他变量是：

$$\gamma_1 = \left[-(\beta - 1) - \sqrt{(\beta - 1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}\right]\Big/2$$

$$\gamma_2 = \left[-(\beta - 1) + \sqrt{(\beta - 1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}\right]\Big/2$$

$$A_1 = -\left(\frac{S^{**}}{\gamma 1}\right)\{1 - e^{-q(T-t)}N[-d_1(S^{**})]\}$$

$$A_2 = \left(\frac{S^*}{\gamma_2}\right)\{1 - e^{-q(T-t)}N[d_1(S^*)]\}$$

$$d_1(S) = \frac{\ln(S/X) + (r - q + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

如在第十一和第十二章中所指出的那样，股票指数、外汇和期货合约期权可被看成是连续支付固定红利率的股票期权。因此二次方程近似方法可以很容易地用于所有这些类型的期权。

第十五章

利率衍生证券

利率衍生证券是盈亏在一定程度上取决于利率水平的证券。近年来利率衍生证券已变得越来越流行。本章从描述在柜台交易和在交易所交易的各种不同产品开始。然后转入对估值问题的讨论。用到的模型可分为三类。第一类是 *Black - Scholes* 模型的扩展。第二类是一直为研究者所偏爱的均衡模型。第三类是非套利模型，设计该模型方式是：这些模型正好与建立模型时市场上观察到的利率期限结构相一致。

15.1 交易所内的债券期权

最流行的在交易所内交易的利率期权是长期国债期货期权、中期国债期货期权和欧洲美元期货期权。第十一章中的表 11.4 显示了 1992 年 2 月 3 日这些衍生证券的收盘价。这些价格是以标的债券本金的百分比的形式报出的。对于欧洲美元期货期权，报价保留两位小数点，一张期权合约交割一百万美元面值的期货合约。对于长期国债期货期权和中期国债期货期权，报价是按一个百分点的 1/64 的倍数报出，一张期权合约交割十万美元面值的期货合约。因此，表 11.4 中给出了当执行价格为 95.75(意味着每个期权合约价值 $ 1,400)时，*IMM* 九月份欧洲美元期货看跌

期权价格为债券本金的 0.14 个百分点。它还给出了当执行价格为 96(意味着每个合约价值 $ 4,093.75)时,九月长期国债期货看涨期权价格是债券本金的 $4\frac{6}{64}$ 个百分点。

当利率上升时,债券价格下降;当利率下降时,债券价格上升。认为短期利率将会上升的投资者可以通过购买欧洲美元期货的看跌期权来进行投机,而认为利率将会下降的投资者可以通过购买欧洲美元期货的看涨期权来进行投机。认为长期利率将会上升的投资者可以通过购买中期国债或长期国债的看跌期权来投机,而认为利率将会下降的投资者可以通过购买这些证券的看涨期权来投机。

假设现在是八月份而且在 *CBOT* 中交易的十二月份长期国债合约的期货价格是 96-09(或 96 9/32 = 96.28125)。长期政府债券的收益率大约是每年 8.4%。预期这个收益率到十二月份将会下降的投资者可以选择购买执行价格为 98 的十二月份的看涨期权。假设这些看涨期权的价格是 1-04(或本金的 $1\frac{4}{64} = 1.0625\%$)。如果长期利率下降到每年 8%,长期国债的期货价格将上升到 100-00,而且投资者每 $ 100 债券期货将获得:

$$100.00 - 98.00 - 1.0625 = 0.9375$$

的净利润。由于每个期权合约买卖的标的证券的面值是 $ 100,000,所以投资者购买的每张期权合约将获得 $ 937.50 的利润。

15.2 嵌入债券的期权

有些债券本身就包含了看涨期权和看跌期权。例如,一个可赎回债券包含了允许发债公司在未来某一时间以预先确定价格购回债券的条款。这种债券的持有者出售给发行者一个看涨期权。这个看涨期权的价值体现在债券的收益率上,因此附有购回条款

的债券给投资者提供了一个比投资于没有购回条款的债券更高的收益率。一个可退还债券包括允许持有者要求在未来某一时间以预定价格提前收回现金的条款。这种债券的持有者不但购买了债券而且还购买了债券的看跌期权。由于看跌期权增加了债券持有者的价值,附有退还条款的债券提供的收益率比没有退还条款的债券的收益率低。

其他许多证券都有嵌入债券的期权。例如,附有提前以固定利率取款特权的存款可以看做是附有退还特性的债券。附有提前以固定利率付款特权的贷款可以看做是有购回特性的债券。另外,银行或金融机构所做的抵押协议是看跌期权。例如,考虑如下情况:银行向客户报出五年期抵押的年利率为 12% 的报价,并声明下 2 个月这个利率报价一直有效。客户实际上取得了在下 2 个月内随时向金融机构按面值出售息票 12% 的五年期债券的权利。

15.3　有抵押的证券

有一类利率期权是包含在所谓的有抵押的证券(*mortgage - backed security*,*MBS*)的证券上的。这种证券近年来变得非常流行。它是在金融机构决定向其客户出售部分住房抵押证券组合时产生的。把被出售的抵押合并起来,投资者就可通过购买其中一些份额单位来从抵押组合中得到利益。这些份额单位就是有抵押的证券。通常为这些份额单位建立二级市场以使投资者能够根据意愿将它们出售给其他投资者。拥有代表某个组合的 $X\%$ 的份额单位的投资者有权得到本金和从抵押组合获得的利息现金流的 $X\%$。

组合中的抵押通常被保险以使投资者没有违约的损失。这使得 *MBS* 好像一个常规的固定收入证券。但它具有一个很重要的并使它复杂化的特性。*MBS* 组合中的抵押具有某种提前付款特

权。这意味着 *MBS* 的持有者给予抵押基金的借入者一系列的利率期权[①]。一般来说,投资者对 *MBS* 比其他固定收入证券要求更高的利率以补偿这些提前付款期权。

15.4 互换期权

互换期权或互换的期权是关于利率互换的期权,它是另一种越来越流行的利率期权。它们给予持有者一个在未来某个时间进行某个确定的利率互换的权力(当然持有者不是必须执行这个权力)。许多向其公司客户提供利率互换合约的大型金融机构也准备向其客户出售或购买互换期权。

为了说明互换期权是如何使用的,考虑如下例子:某公司已知在将来 6 个月内要签署一个 5 年期浮动利率贷款协议,它希望将浮动利息支付方式换成固定利息支付方式以使该贷款转化为固定利率贷款(参见第五章中关于如何使用互换的讨论)。支付一定的代价后,该公司可以获得一项互换期权,同时取得把支付浮动利息换成支付某个确定的固定利息的权利,比如换成 6 个月后开始每年 12% 的 5 年期贷款。如果 6 个月后发现常规的 5 年期互换的固定利率小于每年 12%,则公司将不执行互换期权而选择按通常的方式进行一项互换协议。但是若结果是利率大于每年 12%,公司将选择执行互换期权,并以比市场上获得互换更有利的条件取得一项互换。

互换期权给诸如刚才考虑的公司类似的那些公司提供了一个不同于远期互换(有时叫作延迟互换)的另一种方法。远期互换不必事先支付成本但不利之处在于要承担履行某个互换协议的义务。而互换期权可使公司在利率向有利方向变动时获益而在利率向不利方向变动时受到保护。互换期权与远期互换的区别类似于外汇期权和外汇的远期合约的区别。

与债券期权的关系

回想在第五章里，利率互换可以被看作是把固定利率债券换成浮动利率债券的协议。在互换的开始，浮动利率债券的价值总是等于互换的本金的金额。因此，一个互换期权可以看作是一个把固定利率债券换成互换的本金的期权。如果一个互换期权给予它的持有者支付固定利息和收取浮动利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的固定利率债券的看跌期权。如果一个互换期权给予它的持有者支付浮动利息和收取固定利息的权利，它就是一个执行价格等于本金的固定利率债券的看涨期权。

15.5　利率上限

金融机构提供的另一类型柜台交易利率期权是利率上限。利率上限是为了保证浮动利率贷款的利息率不超过某一利率水平而设计的。这个利率水平被称为上限利率(*caps rate*)。当贷款的利率上限与贷款本身都是由同一家金融机构提供的，基于该上限的期权的成本常常被合并在应付的利率内。当它们由不同的金融机构提供时，为获得利率上限，很可能会要求事先支付承诺费。

图 15.1 说明了一个利率上限的运作过程。利率上限确保在任何给定时刻所支付的贷款利率是市场当前利率与上限利率中的较小者。假如一个本金为一千万美元的贷款利率每 3 个月按 3 个月期 *LIBOR* 重新设定一次，而一家金融机构提供了一项每年 10% 的利率上限。为了履行利率上限协议规定的义务，该金融机构在每个季末必须向那个借款人支付(一百万美元为单位)：

$$0.25 \times 10 \times \max(R - 0.1, 0)$$

其中 R 是每季度开始时的 3 个月期 *LIBOR* 利率。例如，当

季度开始时的 3 个月期 *LIBOR* 利率是每年 11% 时，金融机构在季末必须支付 $0.25\times10,000,000\times0.01=\$25,000$。当 *LIBOR* 利率是每年 9% 时，金融机构不必做任何支付。表达式 $max(R-0.1,0)$ 是基于 R 的看涨期权所得的回报。因此可把利率上限看成是一个基于 R 的看涨期权的组合，这些期权在以后每 3 个月收取一次回报。包含有利率上限的单个期权有时被称做附利率上限（*caplets*）。

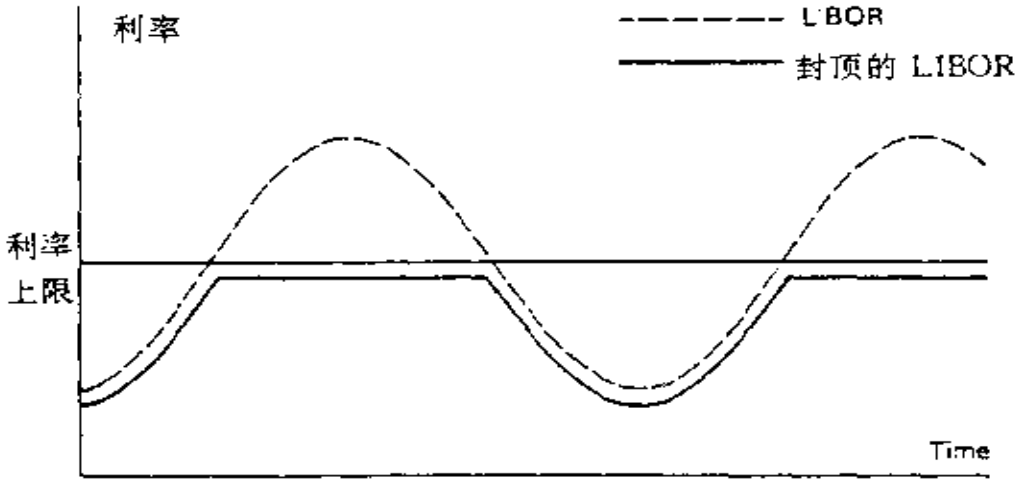


图 15.1 有利率上限的浮动利率贷款的借款方的实际利率

一般而言，若利率上限为 R_X，本金为 L，从利率上限有效期开始在 $\tau,2\tau,\ldots n\tau$ 时刻支付利息，则利率上限的出售方在 $(k+1)$ 时刻须支付的金额为：

$$\tau L\max(R_k-R_X,0) \qquad (15.1)$$

其中 Rk 是 $k\tau$ 时刻将被利率上限限制住了的利率值。设 F_k

为$k\tau$和$(k+1)\tau$之间的远期利率值，而利率R_X、R_X和F_k都用τ的复利频率来表示。作为近似，我们可以用F_k作为$k\tau$和$(k+1)\tau$之间的贴现率，这样就使(15.1)式中在$(k+1)\tau$时刻的支付额等于$k\tau$时刻的支付额：

$$\frac{\tau L}{1+\tau F_k}\max(R_k - R_X, 0) \tag{15.2}$$

这样做的好处在于我们能够把每个附利率上限看成一个基于τ期间利率的欧式看涨期权，该期权是在期权到期日取得回报，而不是在下一期取得回报。每个期权的本金是$\tau L/(1+\tau F_k)$。

利率上限估值的简易模型

(15.2)式导出了一个常用的估值模型。在$k\tau$时刻，$F_k = R_k$，因此我们可以把与$k\tau$到$(k+1)\tau$期间相对应的附利率上限看作是一个基于F_k而不是基于R_k的欧式看涨期权。若我们假设远期利率F_k有固定的标准差σ_F，在11.4节中介绍的*Black*模型给出该期权的价格为：

$$\frac{\tau L}{1+\tau F_k}e^{-rk\tau}[F_k N(d_1) - R_X N(d_2)] \tag{15.3}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_X) + \sigma_F^2 k\tau/2}{\sigma_F\sqrt{k\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_X) - \sigma_F^2 k\tau/2}{\sigma_F\sqrt{k\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{k\tau}$$

其中r是在$k\tau$时刻到期的某个金融工具的无风险利率。如果r被定义为在$(k+1)\tau$时刻到期的某个金融工具的无风险利率，与(15.3)式等价的附利率上限估值的表达式为：

$$\tau L e^{-r(k+1)\tau}[F_k N(d_1) - R_X N(d_2)] \tag{15.3}$$

例 15.1

考虑一个贷款金额为 $ 10,000，一年后开始的，把上限利率限制在年利率 8%（每季计复利一次）的 3 个月期贷款合约。这可以作为利率上限的一个组成部分。假设一年后开始的 3 个月期远期利率是每年 7%（每季计复利一次）；现在的 1 年期年利率为 6.5%（每季计复利一次）；而且 90 天期的远期利率的年标准差是 12%。在(15.3)式中，$Fk = 0.07$，$\tau = 0.25$，$L = 10,000$，$R_X = 0.08$，$r = 0.065$，$\sigma = 0.20$，$k\tau = 1.0$。

$$\frac{\tau L}{1 + \tau F_k} = \frac{0.25 \times 10,000}{1 + 0.25 \times 0.07} = 2,457$$

由于

$$d_1 = \frac{\ln 0.875 + 0.02}{0.20} = -0.5677$$

$$d_2 = d_1 - 0.20 = -0.7677$$

所以利率上限的价格是：

$$2457e^{-0.065}[0.07N(-0.5677) - 0.08N(-0.7677)] = 5.19$$

或 $ 5.19。

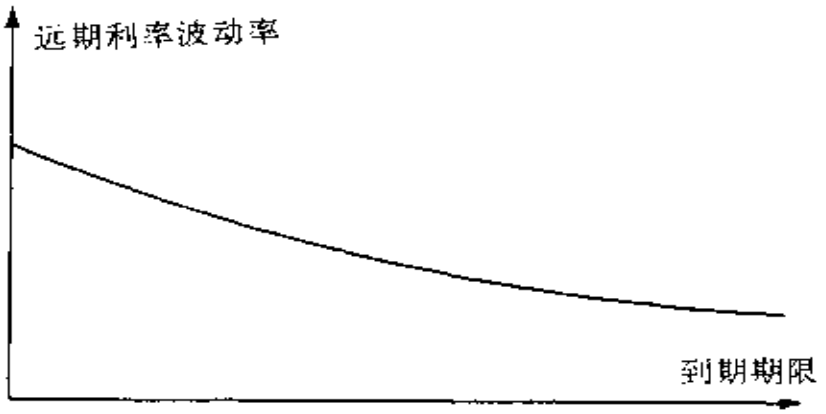


图 15.2 应用 *Black* 模型时远期利率波动率随附利率上限期权到期期限的变化

Black 的模型假设σ_F为常量。这个假设最好的情形也不过是对现实的一种粗略近似。当远期合约的到期日还有很长时间时，F_k对当前利率的变动相对不敏感而且标准差很小。但是随着距到期日时间的缩短，*Fk* 受当前利率水平变化的影响更显著而且波动率也增大。图 15.2 显示出对应的波动率σ_F随所考虑的期权到期期限变化的一般情形。当 *Black* 的模型被用于对利率上限估值时，还会因为利率处理上的不一致而受到指责。用于贴现的利率 r 被假定是固定不变的，而远期利率 *Fk* 被假定为是随机的。

实际上，有时采用以下办法克服 *Black* 模型的弱点。首先，利用模型通过可交易的欧洲美元期货期权来计算远期利率隐含的标准差。然后再把这些隐含的波动率用于估算基于利率上限的期权的价值。以接近 3 个月到期期限的欧洲美元期货期权价格所隐含的波动率为基础可以估算 3 个月期的期权价值；以接近 6 个月到期的欧洲美元期货期权价格所隐含的波动率为基础可以估算 6 个月期的期权价值；以此类推。通过两次使用模型（先计算交易所内交易的期权的隐含波动率，再用这个来自于交易所内交易期权的隐含波动率来计算柜台交易的期权的价格）来降低因为使用不够完美的模型造成的误差，同时确保所计算的期权价格与交易所交易的期权的价格有较合理的一致性。到期期限不同的欧洲美元期货期权的市场价格所隐含的利率波动率定期地由交易商报出或由投资机构向外公布。由于大多数利率上限存续的时间超过了可交易的欧洲美元期权最长的到期期限，从可交易的欧洲美元期权观察到的波动率和到期期限之间的关系必须适当地以外推法求得。

将上述刚刚讨论过的方法应用于 *Black* 模型的交易商将会根据所考虑的附利率期权的情形而改变标准差σ_F。这个标准差被称做远期的远期标准差（*forward forward volatility*）。另一个可以选择的方法是对所有包括任何特殊的利率上限的附利率期权都使用相同的标准差，但按利率上限有效期限的不同来改变这个标

准差。这种标准差则被称做远期标准差(*forward volatility*)。

一个利率上限作为债券期权的某个组合

对利率上限更准确形容是可看作一个基于贴现债券的看跌期权组合。(15.1)式中在$(k+1)\tau$时刻的收益等于k_τ时刻的:

$$\frac{\tau L}{1+\tau R_k}(R_k - R_X, 0)$$

经过代数变换它减化为:

$$\max\left[L - \frac{L(1+R_X\tau)}{1+\tau R_k}, 0\right] \tag{15.4}$$

表达式

$$\frac{L(1+R_X\tau)}{1+\tau R_k}$$

是一个在$(k+1)\tau$时刻收益为$L(1+R_X\tau)$的贴现债券在$k\tau$时刻的价值。因此(15.4)式中的表达式就是一个到期期限为$k\tau$的基于在$(k+1)\tau$时刻到期的贴现债券的看跌期权的收益,该贴现债券的面值为$L(1+R_X\tau)$,看跌期权的执行价格为L。这就证明了利率上限是一个基于贴现债券的欧式看跌期权组合的观点。

利率下限和利率双限

利率下限和利率双限(有时叫作地板-顶板协议)的定义与利率上限相似。利率下限(*floor*)对应支付的利率设置了一个下限。利率双限(*collar*)对将要支付的利率既规定了上限又规定了下限。类似于利率上限的讨论,一个利率下限是一个基于利率的看跌期权的组合或是一个基于贴现债券的看涨期权的组合。它可以用类似于利率上限的方法进行估值。利率下限的出售方通常是浮动利率资金的借款方。一个利率双限是由一个利率上限的多头和一个利率下限的空头组合而成的。在构造利率双限时,通常使得利率

上限的价格等与利率下限的价格，于是利率双限的净成本为零。

15.6　债券期权估值的简单方法

我们现在转入债券期权的估值。最简单的模型是第十章中所描述的 *Black - Scholes* 模型。定义：

B：债券现价

T：期权到期日

σ：债券价格的标准差

X：期权的执行价格

R：应用于在 T 时刻到期的无风险投资的当前利率[②]

在零息票债券的情况下，*Black - Scholes* 模型给出在 t 时刻的欧式看涨期权和看跌期权的值 c 和 p 为：

$$c = BN(d_1) - e^{-R(T-t)}XN(d_2) \tag{15.5}$$

和

$$p = e^{-R(T-t)}XN(-d_2) - BN(-d_1) \tag{15.6}$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln(B/X) + (R + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(B/X) + (R - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

一个类似于第七章的讨论表明无息票债券的美式看涨期权永远不应该提前执行而可以按欧式期权来看待。

如果在期权的有效期内肯定要支付息票利息，则利息可以被当作股票的红利来处理(参见 10.14 节)。在使用(15.5)和(15.6)式前要先从 B 中减去息票的现值。标准差参数(必须是债券价格

减掉这些息票现值后的标准差。

当债券付息时，精确地处理期权就十分重要了。如果在执行期权时执行价格是债券转换的现金数额，(15.5)和(15.6)式中 X 就应该等于这个执行价格。若执行价格是执行期权时对应的价格(正如在交易所交易的债券期权那样)，(15.5)和(15.6)式中 X 就应该等于执行价格加上期权到期日的累计利息。

例 15.2

考虑一个基于 9.75 年期限债券的 10 个月期的欧式看涨期权，债券面值为 $1,000。假设现在债券的价格为 $960，执行价格为 $1,000，10 个月期的无风险利率为每年 10%，债券价格的年标准差为 9%。债券息票年利率为 10%，每半年付息一次，预计在 3 个月后和 9 个月后支付 $50 的利息。3 个月期和 9 个月期的无风险利率分别是每年 9.0% 和 9.5%。所付利息的现值为：

$$50e^{-0.25\times 0.09} + 50e^{-0.75\times 0.095} = 95.45$$

或 $95.45。

(a)如果执行价格是执行期权时购买债券所付现金价格，(15.5)式中的参数为 $B = 960 - 95.45 = 864.55$，$X = 1000$，$R = 0.1$，$\sigma = 0.09$，$T - t = 0.8333$。看涨期权的价格为 $9.49。

(b)如果执行价格是执行期权时购买债券的报价，X 必须再加一个月的累计利息。这使得 X 的值变为：

$$1000 + 50 \times 0.16667 = 1008.33$$

(15.5)式中的其他参数值不变(即 $B = 864.55$，$R = 0.1$，$\sigma = 0.09$，$T - t = 0.8333$)。看涨期权的价格为 $7.97。

债券价格用于 *Black – Scholes* 模型时存在的问题

刚刚所描述的 *Black – Scholes* 模型假设债券价格的标准差是常数。实际上，债券价格的标准差依赖于到期时间的长短。到期

日时间越长，债券价格的标准差越大。*Schaefer* 和 *Schwartz* 认为债券价格的标准差近似与其久期成正比。这意味着久期为 10 年的债券的标准差是久期为 5 年的债券的标准差的两倍，并以此类推。这个观点似乎已得到实证研究的合理的支持。

当期权的有效期限比标的债券的有效期限短（如同大多数交易所交易的债券期权的情况那样），这时可以假设债券的标准差在期权有效期内为常数。然后久期理论可以做为近似来使用。例如，假设我们希望估算一个 3 个月期限的基于久期为 4 年的债券的期权价值和一个 1 个月期限的基于久期为 8 年的债券的期权价值。当对第一个期权进行估值时，在 *Black – Scholes* 模型所用的标准差应该约为对第二个期权进行估值所用的标准差的一半。

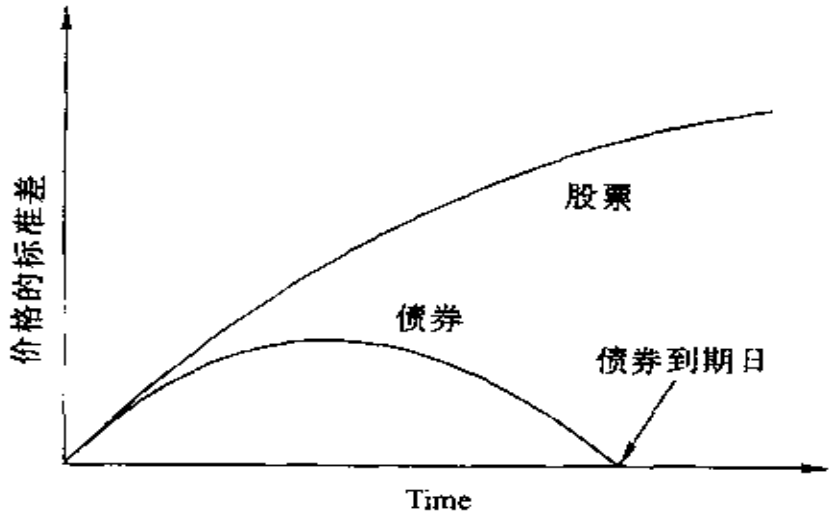


图 15.3　未来债券价格和未来股票价格的标准差

对于期限较长的期权，债券的标准差在期权有效期内为常数的假设不再合理了。一个自然的建议是使债券的价格标准差在期权有效期内正比于债券的平均久期。但是这种方法高估了长期期

权的价值因为它忽视了债券价格行为的一个重要方面。这就是在到期时债券价格必须等于其面值。这有时被称作收敛于面值现象(*pull - to - par phenomenon*)。图 15.3 通过显示债券和股票未来价格的标准差随着我们的观察期限的延长而变化的情况来说明这一现象。股票价格变得更加不确定,但债券价格的不确定性先上升后下降。

使用远期债券价格

当期权的有效期与其标的债券的有效期相比显得很重要时,对欧式期权进行估值的方法之一是认为该期权是按期权执行时交割债券的远期价格卖出的。这个价格是在期权到期日和债券有到期日之间延续的债券的远期价格。当期权到期时,远期债券价格等于标的债券的价格——这意味着所考虑的远期债券期权与所要估值的现货债券期权是一样的。这种方法使得在第 11.4 节中讨论的 *Black* 模型可以使用了。用于远期债券价格的正确的标准差将取决于期权到期日和债券到期日之间的时间长短。它还将取决于期权本身的有效期限。期权持续的有效期限越长,标准差越小。估值公式是:

$$c = e^{-R(T-t)}[FN(d_1) - XN(d_2)] \qquad (15.7)$$

和

$$p = e^{-R(T-t)}[XN(-d_2) - FN(-d_1)] \qquad (15.8)$$

其中:

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - \sigma^2(T-t)/2}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

F 是远期债券价格,σ 为它的标准差,其他变量的定义与前面--

样。

远期债券价格可用(3.7)式计算：

$$F = (B - I)e^{R(T-t)}$$

其中 I 等于期权有效期内息票利息的现值。把 F 代入(15.7)和(15.8)式后表明远期债券方法与刚才提到的 *Black - Scholes* 方法没有实质上的区别。因此与 *Black - Scholes* 方法一样，远期债券方法也存在着模型中没有考虑收敛于面值的缺陷。对这两种方法都有利的一点是它们得出了债券期权价格满足看涨期权－看跌期权之间平价关系的结果：

$$c + Xe^{-r(T-t)} = p + Fe^{-r(T-t)} \qquad (15.9)$$

例 15.3

考虑一个 3 年期欧式看涨期权，该期权的标的资产是某个面值为 $ 100，息票利率为每年 10% 的 5 年期债券。我们假设若期权执行就将被交割的远期债券的价格为 $ 95。我们还假设执行价格是 $ 98，3 年期无风险利率为每年 11%，远期债券价格的年标准差为 2.5%。这意味着 $F=95, X=98, R=0.11, \sigma=0.025, T=3.0$。(15.7)式给出的期权价格为 $ 0.42。

构造远期债券收益率模型

为了克服债券价格模型中收敛于面值问题，一个尝试方法是把债券期权看作是一个收益率期权。我们定义：如果债券价格等于执行价格，则执行收益率 Y_X 等于在期权到期日该债券的连续复利收益率。根据 4.5 节的(4.8)式，在期权到期日债券价格 B_T 和其收益率 Y_T 之间的关系近似为：

$$\frac{B_T - X}{X} = -D(Y_T - Y_X)$$

其中 D 是在期权到期日时的债券的久期。使用这个公式得：

$$B_T - X = DX(Y_X - Y_T)$$

一个看涨期权的收益可被记作：

$$\max[DX(Y_X - Y_T), 0]$$

而一个债券看跌期权的收益可被记作：

$$\max[DX(Y_T - Y_X), 0]$$

这些方程式把一个基于债券价格的看涨期权转换成了一个基于债券收益率的看跌期权，并且把一个基于债券价格的看跌期权转换成了一个基于债券收益率的看涨期权。如果假设远期债券收益率的标准差为常数，*Black* 模型就能用来对该期权进行估值。

这种方法虽然简单，但有一个缺点。正如在 4.5 节中所解释的那样，债券的久期衡量的只是收益率有很小的变化时债券价格对债券收益率的敏感性。因此刚才给出的以收益率表示的收益表达式只是一个近似。与此缺点有关的一个问题是用这个方法得出的期权价格并不满足看涨期权－看跌期权之间的平价关系。

债券远期收益率作为期权标的资产的假设吸引了许多专业人士。为了克服刚才提到的缺点，一些专业人士用数值处理方法来把收益率对数正态分布转换成价格分布。分布的中心经过选择以便它能代表债券价格在风险中性世界中的可能变动情况。这样就得到了期权价格的数值解。

15.7 简单模型的局限性

到现在为止所给出的利率期权定价模型还是 *Black* 和 *Black* － *Scholes* 模型的翻版。它们已经提供了估算利率上限和欧式债券期权的办法，但是它们的不利之处是针对不同的交易采用的标准差一般来说也不同。很难找到一个办法使一个期权所用的标准差与另一个期权所用的标准差联系起来。这些模型的另一个更严

重的缺陷是它们只能用于欧式期权。美式债券期权和其它类型的利率衍生证券不能进行估值。

模型不能用于美式期权的原因如下：如果我们正在估算一个欧式债券期权，我们只是对未来一个时刻（期权的到期日）的债券价格的标准差感兴趣。股票总会有某些波动，这种波动使股票在这个时刻与债券有相同的标准差。一旦这个波动率被识别出来，我们就可以把债券期权看作好象是股票期权一样并使用 *Black - Scholes* 模型。如果我们有兴趣对美式债券期权进行估值，这个方法就会失效，因为提前执行的可能性意味着我们在期权有效期内的所有时候都必须说明债券价格的不确定性，而不仅仅只在期末。如图 15.3 所示，债券价格的不确定性变化情况与股票价格有很大的不同。

收益率曲线模型

一个用于利率衍生证券估值的更复杂的方法包括构造一个所谓的收益率曲线模型或期限结构模型（*yield curve model or term structure model*）。这个模型描述了收益率曲线随时间的可能行为。收益率曲线模型比用于描述股票价格或外汇汇率的变动的模型更复杂。这是因为它们关注的是整个曲线上的变动——而不是随某个单一变量的变化。期限结构上的每个利率随着时间的推移而变化。另外，曲线本身的形状也会改变。

15.8　研究人员构造期限结构所采用的传统方法

研究人员构造期限结构所采用的传统方法包括从风险中性世界中一个短期利率 r 的可能的随机过程开始，探索该过程对债券价格和期权价格的含义。值得强调的是这个过程不是 r 在现实世界中所遵循的过程。如在第十二章中所讨论的，债券价格、期权

价格和其他衍生证券的价格只依赖于在一个风险中性世界中 r 所遵循的过程。

在研究者建立的许多模型中都假设只有一个标的随机变量(或要素),因此 r 的风险中性过程的形式是:

$$dr = m(r)dt + s(r)dz \tag{15.10}$$

假设瞬态漂移率 m 和瞬态标准差 s 是 r 的函数,但它们独立于时间。只有单个因素的假设不象它首次出现时那样严格。正象有时推测的那样,以上假设并不意味着期限结构总具有同样的形状。在单因素模型中也会出现相当多的期限结构形式。单因素模型的基本含义是所有利率在任意短时间间隔内按相同的方向变动;它并不意味着所有利率以相同的幅度变动。

根据第十二章的分析,利率衍生证券的价值为:

$$\hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}f_T\right] \tag{15.11}$$

其中 $\bar{r}$ 是 r 在 t 到 T 时间间隔内 r 的平均值,$\hat{E}$ 代表无风险中性世界的期望值。

设 $P(t,T)$ 为 t 时刻贴现债券的价格,该债券在 T 时刻支付 \$ 1。由(15.11)得:

$$P(t,T) = \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right] \tag{15.12}$$

若 $R(t,T)$ 为 t 时刻在 $T-t$ 期间内的连续复利率,

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{15.13}$$

所以

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T) \tag{15.14}$$

而且由(15.12)式得:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln\hat{E}\left[e^{-\bar{r}(T-t)}\right] \tag{15.15}$$

从(15.10)式中 r 的风险中性过程,运用这一公式可获得利率期限结构。

函数 $m(r)$和 $s(r)$一般包括多个参数。实际上必须用图 15.4 中说明的试错法来选择这些参数以使由模型计算出的债券的价值和期权的价值尽可能地与市场上所观察到的值相接近。它的步骤与从期权价格中计算隐含波动率的方法相似。唯一的区别是要对不只一个参数进行估计。

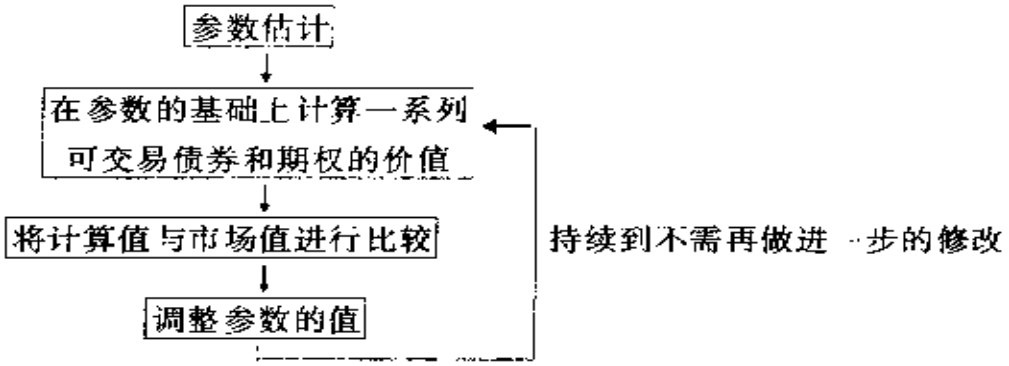


图 15.4　在利率模型中估计参数的步骤

15.9　*Rendleman* 和 *Bartter* 模型

Rendleman 和 *Bartter* 对(15.10)式中的 $m(r)$和 $s(r)$做了非常简单的假设。他们假设 $m(r)=Mr$,$s(r)=Sr$,其中 M 和 S 是常数。这意味着 r 服从几何布朗运动。它在风险中性世界中有固定的期望增长率 M 和固定的标准差 S。它可以用一个类似于第十四章中使用的股票的二叉树来构造模型。参数 u,d 和 p 的选择如下:

$$u = e^{S\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-S\sqrt{\Delta t}}$$

$$p = \frac{a - d}{u - d}$$

其中

$$a = e^{M\Delta t}$$

为了说明这种方法，假设 $\Delta t = 1$ 年，$M = 0.05$，$S = 0.15$，而且我们希望构造一个 5 年期的利率模型。由此得出 $u = 1.1618$，$d = 0.8607$，$a = 1.0513$，$p = 0.6329$。因为树图中的时间步长为 1 年，我们定义短期利率 r 为 1 年期利率。如果 r 的初始值为每年 10%，得到的树图如图 15.5 所示。必须强调的是树图所表现的利率变动是在风险中性世界中而不是在真实世界中的利率变动。在这一点上它与第十四章中的股票价格的树图是类似的。

假设我们希望估算一个 4 年期的债券美式看涨期权，该债券 5 年后到期，每年末支付的息票率为 8%，面值是 $ 1,000。假设期权的执行价格为 $ 1,000。分析的第一步是计算树图中每个结点的债券价格。在 5 年末债券价值为 $ 1,000。前一时刻的债券价值可通过从树图中倒推来求得。设 $r_{ij} = ru^j d^{i-j}$，P_{ij} 为 $t + i\Delta t$ 时刻利率为 r_{ij} 时的债券价值。因此：

$$P_{ij} = e^{-r_{ij}\Delta t}[pP_{i+1,j+1} + (1 - p)P_{i+1,j} + c] \tag{15.16}$$

其中 c 是每年末支付的利息。图 15.6 显示了这些计算的结果。

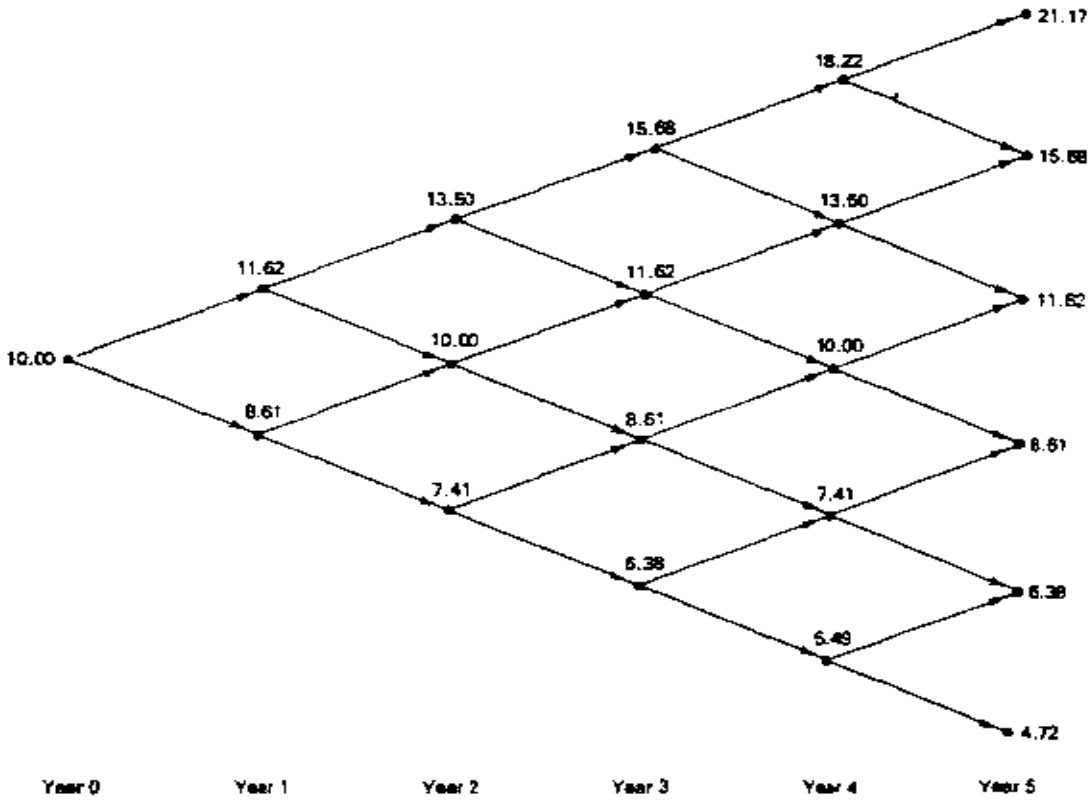


图 15.5　使用 *Rendleman* 和 *Bartter* 模型时在风险中性世界中利率变动的二叉树图

下一个步骤是用树图来计算期权的价格。如果 f_{ij} 代表 $t + i\Delta t$ 时刻当利率为 r_{ij} 时的期权值，

$$f_{4j} = \max[P_{4j} - 1000, 0]$$

而当 $i<4$ 时，

$$f_{ij} = \max[P_{ij} - 1000, e^{-r_{ij}\Delta t}(pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j})]$$

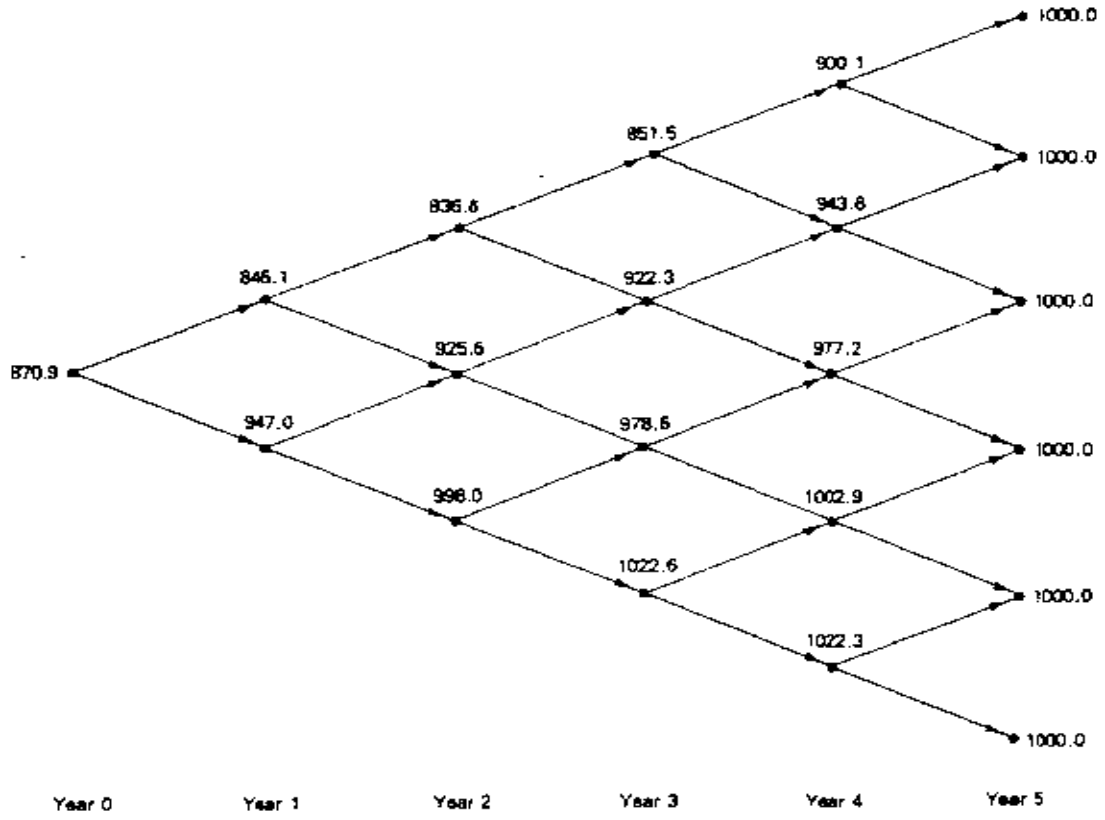


图 15.6 *Rendleman* **和** *Bartter* **模型中的债券价值**

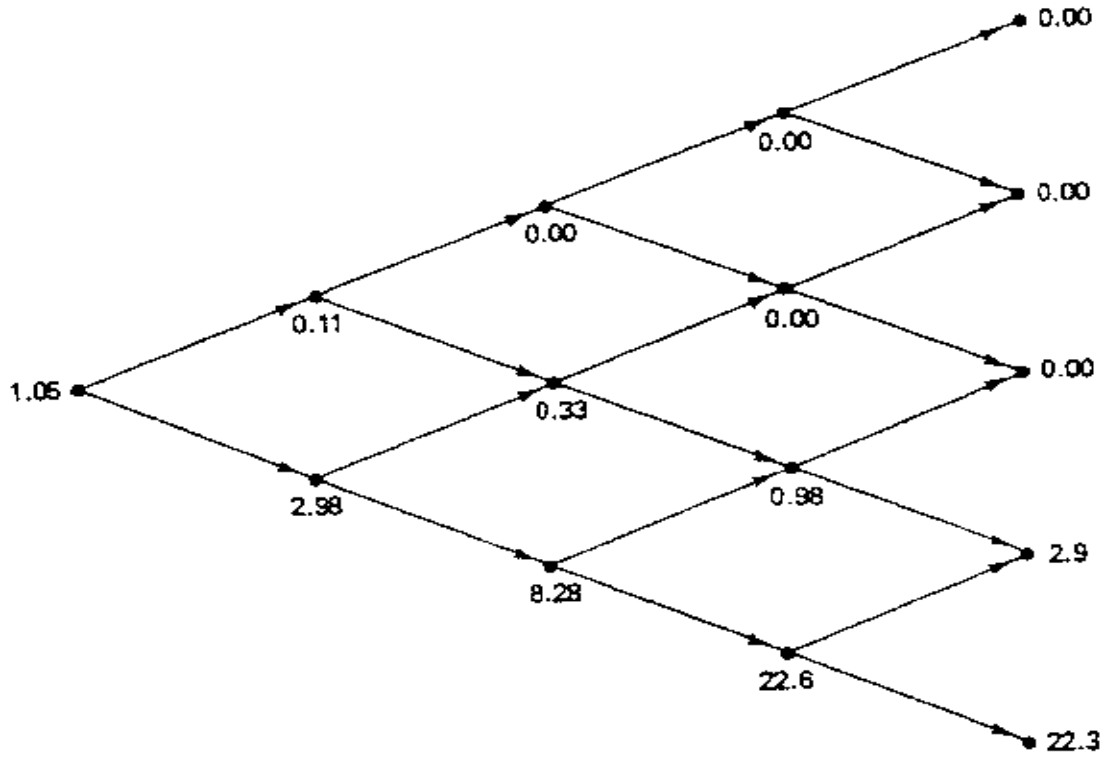


图 15.7　使用 *Rendleman* 和 *Bartter* 树来确定债券看涨期权的价值

计算结果如图 15.7 所示。期权的价值是$ 1.05。

注意从利率树图上往回倒推的方法与在股票树图上往回倒推的方法相似。主要的区别是在利率树图上，在结点与结点之间所用的贴现利率互不相同。

15.10　均值回复

Rendleman 和 *Bartter* 假设短期利率的行为与股票价格相

似。但利率和股票价格之间的一个重要差别是随时间的推移利率呈现出向某个长期平均水平收敛的趋势。这个现象被称做均值回复(*mean reversion*),而 *Rendleman* 和 *Bartter* 模型并没有刻画出这个特点。当 r 较高时,均值回复会使 r 具有负的漂移率;当 r 较低时,均值回复会使 r 具有正的漂移率。均值回复可用图 15.8 来说明。

有些强有力经济学观点支持均值回复。当利率较高时,经济发展会放慢,因此借款人对资金的需求就会减少。结果导致利率下降。当利率较低时,则借款人会对资金有很高的需求。结果导致利率上升。

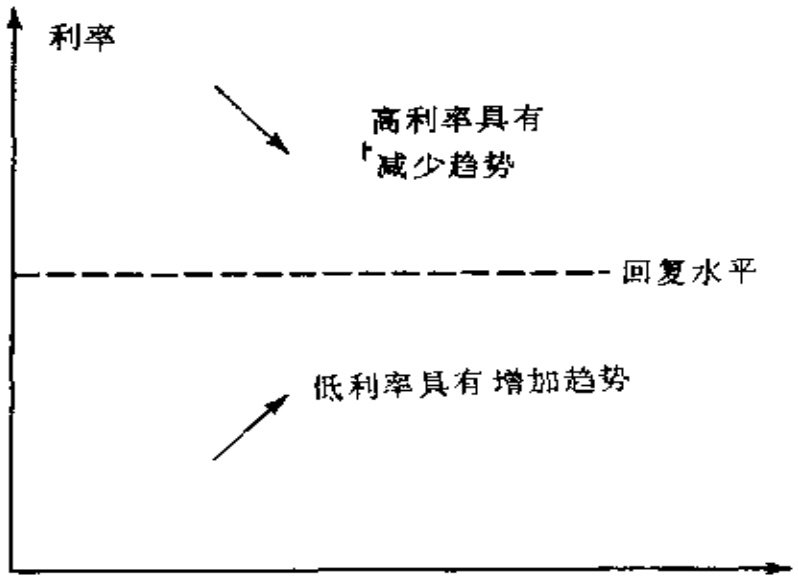


图 15.8 均值回复

均值回复的影响之一是使利率的波动成为到期期限的减函数。10 年即期利率比 5 年即期利率的波动率低,5 年即期利率比 1 年即期利率的波动率低,以此类推。

远期利率的波动率随着远期合约到期期限的延长而下降的事

实就可说明均值回复是合理的。在3个月后开始的3个月期的远期利率的波动率大于2年后开始的3个月期的远期利率的波动率;同样,2年后开始的3个月期的远期利率的波动率大于5年后开始的3个月期的远期利率的波动率;以此类推。最后,均值回复对债券价格的波动也有一定影响。可以说明当存在均值回复时,波动率和贴现债券到期期限之间的关系曲线如图15.9所示。这与前面提出的债券价格波动率正比于久期的假设不符。

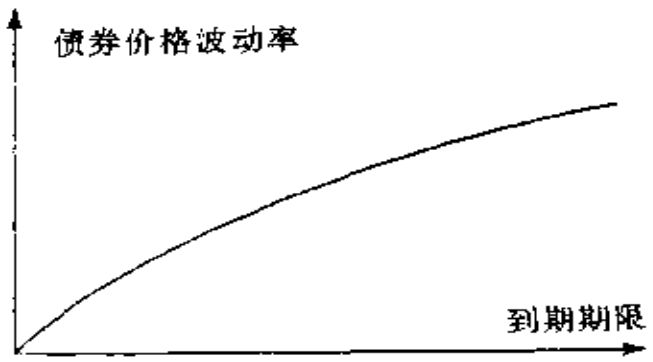


图15.9　当存在均值回复时波动率和贴现债券到期期限之间的关系

15.11　*Vasicek* 模型

Vasicek 曾经提出过一个模型,该模型假设当 a,b 和 σ 为常数时,(15.10)式中的 $m(r)=a(b-r)$ 和 $S(r)=\sigma$。这个模型考虑了均值回复。短期利率 r 的风险中性过程是:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz \qquad (15.17)$$

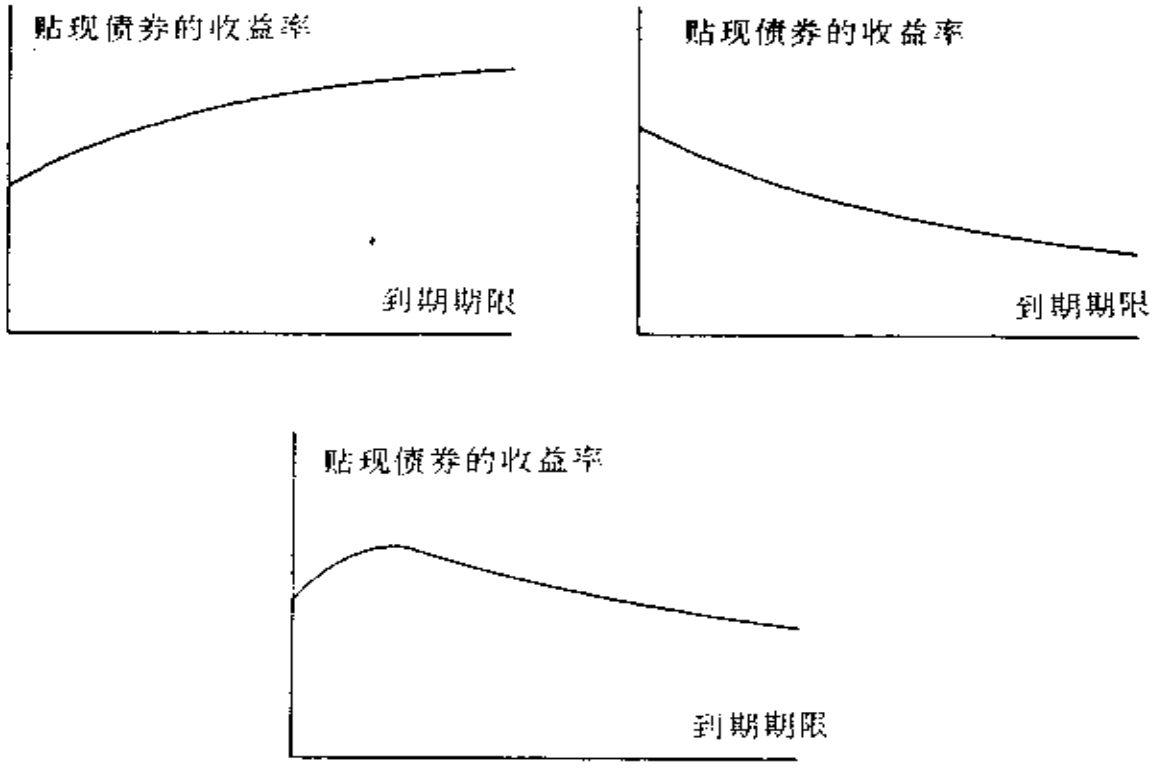


图 15.10 运用 *Vasicek* 模型时期限结构的可能形状

短期利率以速率 a 被拉向 b 水平。在这个"拉"项上还加上了一个正态分布随机项 σdz。

Vasicek 解方程(15.12)来获得下面的到期时支付 $\$1$ 的贴现债券价格的包含 r 的解析表达式：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r} \tag{15.18}$$

其中，当 $a \neq 0$ 时

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \tag{15.19}$$

和

$$A(t,T) = \exp\left[\frac{(B(t,T) - T + t)(a^2b - \sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a}\right] \tag{15.20}$$

当 $a=0$ 时，$B(t,T)=T-t$，$A(r,T)=exp[\sigma^2(T-t)^3/6]$

只要选择出 a，b 和 σ，整个期限结构就可以用(15.14)式被表示为 r 的函数。它的形状可以上倾，下倾或稍稍隆起(参见图 15.10)。

贴现债券欧式期权的估值

Jamshidian 曾指出贴现债券的期权价格可由 *Vasicek* 模型求出。设某个贴现债券面值为 $1 到期日为 s，在 t 时刻基于该贴现债券的 T 时刻到期的欧式看涨期权的价格为：

$$P(t,s)N(h) - XP(t,T)N(h - \sigma_P) \tag{15.21}$$

其中

$$h = \frac{1}{\sigma_P}\ln\frac{P(t,s)}{P(t,T)X} + \frac{\sigma_P}{2}$$

$$\sigma_P = v(t,T)B(T,s)$$

$$v(t,T)^2 = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2a(T-t)})}{2a}$$

而 X 是执行价格。基于该债券的欧式看跌期权的价格为：

$$XP(t,T)N(-h + \sigma_P) - P(t,s)N(-h) \tag{15.22}$$

当 $a=0$，$v(t,T)=\sigma\sqrt{T-t}$，$\sigma_P=\sigma(s-T)\sqrt{T-t}$ 时。

附息票债券欧式期权的估值：(*JAMSHIDIAN* 方法)

在同一篇文章中，*Jamshidian* 指出附息票债券期权的价格可

从象 *Vasicek* 这样只有一个随机变量的模型中的贴现债券期权的价格中求得。考虑一个执行价格为 X、到期日为 T 的附息票债券的欧式看涨期权。假设债券在期权到期后总共提供 n 次现金流。令第 i 次现金流为 Ci 并在 Si 时刻发生($1 \leqslant i \leqslant n; s_i > T$)。定义:

r^*:使得附息票债券价格等于执行价格的 T 时刻的 r 值

X_i:当 $r = r^*$ 时在 s_i 时刻支付 $\$1$ 的贴现债券在 T 时刻的值

当已知债券价格的解析式是 r 的函数(与在 *Vasicek* 模型中一样),r^* 可用试错法求得。

该期权的损益状态是:

$$\max\left[0, \sum_{i=1}^{n} c_i P(T, s_i) - X\right]$$

因为只有一个随机变量,所以所有债券的价格都是 r 的减函数。这意味着当且仅当 $r < r^*$ 时,附息票债券在 T 时刻的价格大于 X,因此应该执行。此外,当且仅当 $r < r^*$ 时,构成附息票债券的在 s_i 时刻到期的贴现债券在 T 时刻的值大于 $c_i X_i$。如果真是这样的话,期权的收益为:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \max[0, P(r, T, s_i) - X_i]$$

这说明附息票债券期权是 n 个基于贴现债券期权的总和。这一结论可同样用于附息票债券的欧式看跌期权。

例 15.4

假设在 *Vasicek* 模型中 $a = 0.1, b = 0.1, \lambda = 0.02$。考虑一个基于 5 年后到期的执行价格为 $\$98$ 的 3 年期欧式看跌期权。假设该债券的面值为 $\$100$ 而且每 6 个月支付 $\$5$ 的利息。在第 3 年末该债券可被看作是四个贴现债券的总和。若在第 3 年末的短期利率是 r,由(15.18)式得出的债券价

值为：

$$5A(3,3.5)e^{-B(3,3.5)r} + 5A(3,4)e^{-B(3,4)r} + 5A(3,4.5)e^{-B(3,4.5)r} + 105A(3,5)e^{-B(3,5)r}$$

使用(15.19)和(15.20)式中的表达式 $A(t,T)$和 $B(t,T)$，上式变成：

$$5 \times 0.9988e^{-0.4877r} + 5 \times 0.9952e^{0.9516r} + 5 \times 0.9895e^{-1.3929r} + 105 \times 0.9819e^{-1.8127r}$$

为了应用 *Jamshidian* 方法，我们必须找出 r^*，即使得债券价格等于执行价格 98 的 r 值。用试错法得出 $r^* = 0.10952$。当 r 为这个值时，构成附息票债券的四个贴现债券的值分别是 4.734，4.484，4.248 和 84.535。因此附息票债券的期权是四个贴现债券的期权值的总和：

1. 一个基于 3.5 年期面值为 5 的贴现债券的 3 年期期权，执行价格为 4.734。

2. 一个基于 4 年期面值为 5 的贴现债券的 3 年期期权，执行价格为 4.484。

3. 一个基于 4.5 年期面值为 5 的贴现债券的 3 年期期权，执行价格为 4.248。

4. 一个基于 5 年期面值为 105 的贴现债券的 3 年期期权，执行价格为 84.535。

利用(15.22)式并假设 r 的初始值为 10%，这些期权的价格分别为 0.0125，0.0228，0.0314 和 0.8085。因此要求的期权价格是 $0.8752。

三叉树的使用

Hull 和 *White* 曾说明如何将三叉树用于对 *Vasicek* 模型中的美式债券期权和其他利率或有负债进行估值。

树中零时刻的 r 值是期初短期利率 r_0。其他结点上的所考虑 r 值的形式为 $r_0 + k\Delta r$，其中 k 为正整数或负整数。Δr 与时间步长 Δt 之间的关系是：

$$\Delta r = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

构造三叉树时必须使在每个时间隔(t 内 r 的变化有正确的均值和标准差。三叉树在以下三个方面比第十四章中考虑的二叉树更复杂:

1. 从每个结点发出三个分枝而不是两个
2. 在树不同部分上这些分枝的概率不同
3. 分枝的变化模式在结点和结点之间很可能会发生变化

几种分枝的变化模式用图 15.11 来说明。图 15.11(a)是正常分枝变化模式。r 变化的几种可能是:上升 Δr,保持不变,下降 Δr。当 r 较高时,有时需用图 15.11(c)中的分枝变化模式。r 变化的几种可能是:保持不变,下降 Δr,下降 $2\Delta r$。当 r 较低时,有时需用图 15.11(b)中的分枝变化模式。r 变化的几种可能是:上升 $2\Delta r$,上升 Δr,保持不变。在三叉树的应用中偶尔也用到的其他分枝变化模式如图 15.11(d)和 15.11(e)所示。

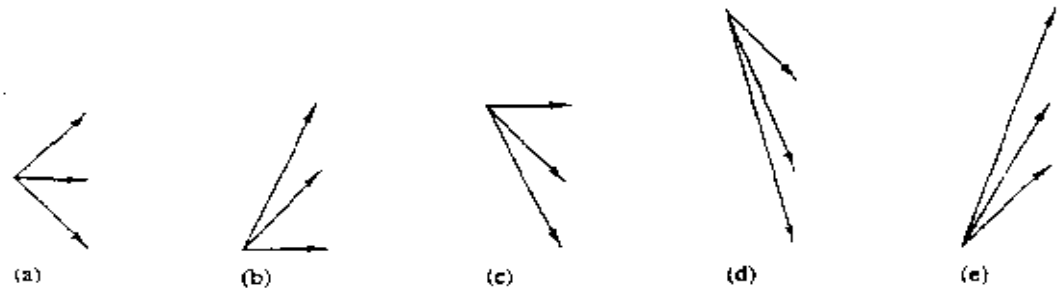


图 15.11 三叉树中几种分枝变化模式

考虑在 $i\Delta t$ 时刻当 $r = r_0 + j\Delta t$ 时的结点。为了选择一个分枝变化模式,我们首先计算在 $(i+1)\Delta t$ 时刻 r 的期望值,假定我

们从此结点开始。然后我们选择能使 $r_0 + k\Delta r$ 尽可能地接近 r 的期望值的 k 值，并画出树图，这样在 $(i-1)\Delta t$ 时刻可能达到的三个 r 值是 $r_0 + (k-1)\Delta r$，$r_0 + k\Delta r$ 和 $r_0 + (k-1)\Delta r$。如果 r 的漂移率在 Δt 时刻使 r 的预期变化在 $-\Delta r/2$ 与 $+\Delta r/2$ 之间，就用图 15.11(a)中的正常分枝变化模式；如果预期变化在 $\Delta r/2$ 与 $3\Delta r/2$ 之间，就用图 15.11(b)中的分枝变化模式，以此类推。

树上每个结点的债券价格的解析值已知。当将要对一个债券美式期权进行估值时，树图只需要延伸到该期权的有效期为止(而不是象在 *Rendleman* 和 *Bartter* 模型中那样到债券的有效期末)。

一点说明

为了说明如何构造一个树图，假设 $a = 0.2$，$b = 0.125$，$\sigma = 0.01$ 以使

$$dr = 0.2(0.125 - r)dt + 0.01dz$$

而且我们希望构造一个 $\Delta t = 0.25$ 年的树图。我们假设 r 的初始值 r_0 是 0.05。

在这种情况下，$\Delta r = 0.01\sqrt{3 \times 0.25} = 0.0087$。图 15.12 显示了前三个时间段构造的树图。在初始结点 A，$r = 0.05$。在下一个时间间隔 Δt 内的 r 的预期变化为：

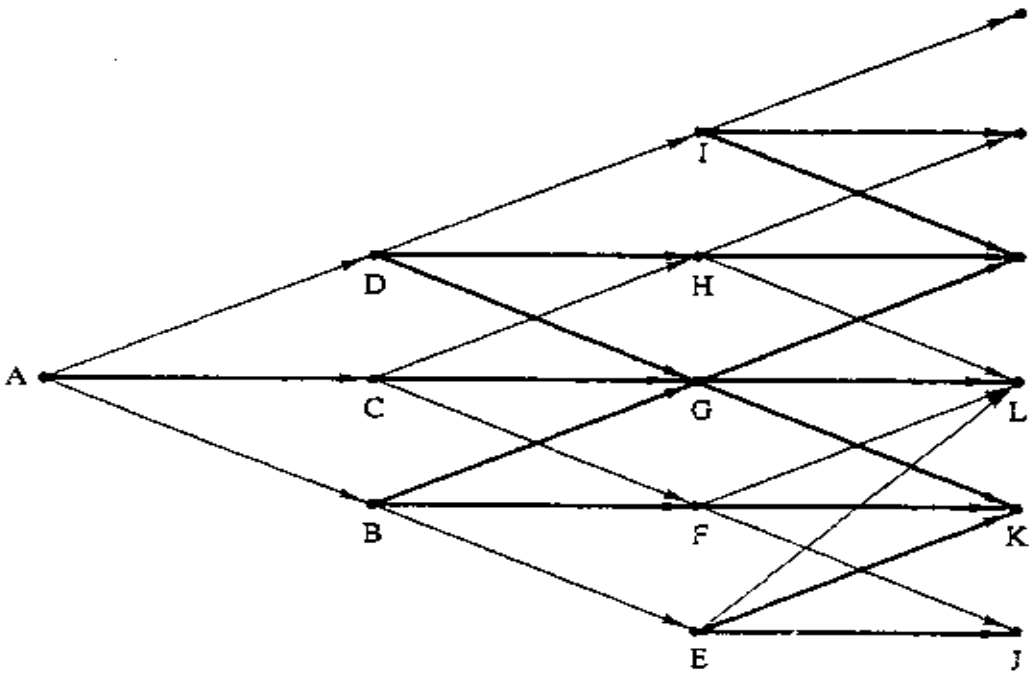
$$a(b - r)\Delta t = 0.00375$$

标准差为 $0.01\sqrt{0.25} = 0.005$。因为，预期变化是在 $-\Delta r/2$ 与 $+\Delta r/2$ 之间，所以选用正常分枝变化模式，而且在 Δt 时刻 r 值的三个可能的变化是 -0.0087，0 和 $+0.0087$。给树枝选择概率以便为 r 的这些变化给出正确的均值和标准差。设 p_u，p_m 和 p_d 分别为与上，中，下枝对应的概率。它们必须满足：

$$p_d + p_m + p_u = 1$$

$$0.0087p_u - 0.0087p_d = 0.00375$$
$$0.0087^2 p_u + (-0.0087)^2 p_d = 0.005^2 + 0.00375^2$$

这些公式的解是 $p_d = 0.043$, $p_m = 0.483$, $p_u = 0.474$。其他所有结点的概率也同样计算。



节点	A	B	C	D	E	F	G	H	I
r%	5.00	4.13	5.00	5.87	3.26	4.13	5.00	5.87	5.74
p_u	0.474	0.521	0.474	0.428	0.039	0.521	0.474	0.428	0.385
p_m	0.483	0.439	0.483	0.525	0.453	0.439	0.483	0.525	0.561
p_d	0.043	0.040	0.043	0.047	0.508	0.040	0.043	0.047	0.054

图 15.12 *Vasicek* 模型的三叉树图

在结点 E 分枝变化模式被证明是非标准化的。该结点 r 值是 0.0326 而在下一个时间间隔 Δt 内的 r 预期变化是：

$$a(b-r)\Delta t = 0.00462$$

正如在其他结点一样，r 变化的标准差是 0.005，由于期望的变化值在 $\Delta r/2$ 与 $3r/2$ 之间，在这个结点所用的分枝变化模式如图 15.11(b)所示。下一个时间间隔 Δt 内 r 值的三个可能变化是 0，+0.0087，+0.0174。概率 p_u，p_m 和 p_d 必须满足公式：

$$p_d + p_m + p_u = 1$$

$$0.0174p_u + 0.0087p_m = 0.00462$$

$$0.0174^2 p_u + 0.0087^2 p_m = 0.005^2 + 0.00462^2$$

解是 $p_u = 0.039$，$p_m = 0.453$，$p_d = 0.508$。

从树尾向回倒推

一旦树图已构造好，利用(15.18)式就可计算出每个结点上所有债券的价格。从树尾向回倒推的方法与在 *Rendleman* 和 *Bartter* 模型中二叉树所用的方法相似。不同之处是每个结点被贴现的期望值必须是用三个可能树枝计算出来的而不是两个。当我们从树向回倒推时，我们假设一个结点上的利率适用于以后时间段的整个期间。这样，若 f_G，f_H 和 f_I 分别是结点 G，H 和 I 的衍生证券的价值，假设不提前执行，则结点 D 的价值为：

$$e^{-0.0587\times 0.25}[0.428f_I + 0.525f_H + 0.047f_G]$$

假设不提前执行，使用相似的符号，结点 E 的值为：

$$e^{-0.0326\times 0.25}[0.039f_L + 0.453f_K + 0.508f_J]$$

象在二叉树中那样必须检查提前执行是否有可能。

15.12 *Cox*, *Ingersoll* 和 *Ross* 模型

Vasicek 模型的一个理论缺陷是利率可能变为负。*Cox*, *Ingersoll* 和 *Ross* 曾提出了一个能克服这个问题的另一个模型。他们模型中的风险中性过程是：

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

这与 *Vasicek* 有同样的均值回复漂移，但随机项的标准差正比于$\sqrt{r}$。这意味着其标准差随着短期利率的上升而上升。

Cox, *Ingersoll* 和 *Ross* 在他们的模型中指出债券价格与在 *Vasicek* 模型中的一般形式相同：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$

但 $B(t,T)$和 $A(t,T)$函数不同：

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

和

$$A(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}\right]^{2ab/\sigma^2}$$

其中 $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$。象在 *Vasicek* 模型中一样，上倾、下倾和稍稍隆起的收益率曲线都有可能。

Cox, *Ingersoll* 和 *Ross* 提供了贴现债券欧式看涨期权和看跌期权的公式。这些公式包括对不居中的 χ 平方分布的积分。对附息票债券欧式期权可以用在 *Vasicek* 模型中所描述的类似方式使用 *Jamshidian* 方法进行估值。用在欧式期权中所描述的三叉树方法可以对美式期权进行估值。窍门是用树构造 $x = 2\sqrt{r}$ 而不是

r 本身的模型。根据 *Ito* 引理，x 所服从的过程是：

$$dx = \left[\frac{a(b-x^2)}{x} - \frac{\sigma^2}{4x}\right]dt + \sigma dz$$

在树的每个结点上，通过变量逆变换计算出 $r=(x/2)^2$。这种方法在当 $4ab>\sigma^2$ 时才有效，这是为了使 x 接近于零时 x 的漂移率为正。

15.13　两因素模型

上述模型假设整个期限结构依赖于单个随机变量或因素。许多研究者曾对两因素模型性质进行研究。例如，*Brennan* 和 *Schwartz* 曾建立了一个当短期利率返回长期利率，而长期利率服从随机过程的模型。长期利率选用永久性统一公债的收益率作代表。因为统一公债的收益率是该债券价格的倒数，所以模型中的两个变量可以被看作是短期利率 r 和统一公债的价格。统一公债是一种可交易证券的情况使分析得以简化，因为我们知道它在风险中性世界中的漂移率必然等于无风险利率减去该债券的收益率。

另一个两因素模型是由 *Longstaff* 和 *Schwartz* 提出的。作者从经济的一般均衡模型开始并推导出一个有随机标准差的期限结构。可以证明模型用解析法很容易实施。

15.14　无套利模型

在前几节中提出的期限结构模型的缺点是它们不能自动地适合今天的期限结构。通过用图 15.4 中说明的方法来明智地选择参数，对实际中遇到的许多种期限结构，它们可以提供一个近似拟

合。但是这种拟合通常并不精确而且在一些情况下存在显著的误差。大多数交易商认为它不能令人满意。当模型不能对标的资产做出正确的定价时他们有理由说他们对衍生证券的定价失去信心。标的资产价格 1% 的误差会导致期权价格 50% 的误差。

在本节中,我们提供一些所谓的无风险套利模型(*no - arbitrage model*)的一般性的理论背景材料。设计的这些模型能够很精确地与今天的期限结构相符。我们将假设期限结构只依赖于一个因素,但结果可以扩展到适合多种因素的情况。

我们将采用以下符号:

$P(t,T)$:t 时刻一个本金 \$ 1 在 T 时刻到期的贴现债券的价格

$v(t,T)$:$P(t,T)$的标准差

$f(t,T_1,T_2)$:在 t 时刻观测到的从 T_1 时刻到 T_2 时刻期间内的远期利率

$F(t,T)$:在 t 时刻观测到的 T 时刻到期合约的瞬态远期利率

$r(t)$:在 t 时刻的短期无风险利率

$dz(t)$:驱使期限结构变动的维纳过程

变量 $F(t,T)$是 Δt 趋于零时 $f(t,T,T+\Delta t)$的极限。

贴现债券价格和远期利率的过程

我们从 $P(t,T)$的风险中性过程开始:

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + v(t,T)P(t,T)dz(t) \tag{15.23}$$

这个公式反映了一个事实:因为贴现债券是不提供收入的可交易证券,在风险中性世界中其预望回报必须是 $r(t)$。标准差 $v(t,T)$在模型的一般形式中可以是过去和现在的 P 的任何性质

很好的函数，但是，因为债券的标准差在到期时趋于零，我们必须有[③]。

$$v(t,t) = 0$$

远期利率 $f(t,T_1,T_2)$ 与贴现债券价格的关系如下：

$$f(t,T_1,T_2) = \frac{\ln[P(t,T_1)] - \ln[P(t,T_2)]}{T_2 - T_1} \quad (15.24)$$

由(15.23)式

$$d\ln[P(t,T_1)] = \left[r(t) - \frac{v(t,T_1)^2}{2}\right]dt + v(t,T_1)dz(t)$$

和

$$d\ln[P(t,T_2)] = \left[r(t) - \frac{v(t,T_2)^2}{2}\right]dt + v(t,T_2)dz(t)$$

因此

$$df(t,T_1,T_2) = \frac{v(t,T_2)^2 - v(t,T_1)^2}{2(T_2 - T_1)}dt + \frac{v(t,T_1) - v(t,T_2)}{T_2 - T_1}dz(t) \quad (15.25)$$

(15.25)式说明 f 的风险中性过程仅仅依赖于 v 的过程。只有 v 本身的过程依赖于 r 和 p 这些变量时，f 才依赖于 r 和 P 的过程。

当我们令(15.26)式中的 $T_1 = T$ 和 $T_2 = T + \Delta T$ 并且对 ΔT 趋于零取极限，$f(t,T_1,T_2)$ 变成了 $F(t,T)$，$dz(t)$ 的系数变成了 $v_T(t,T)$，而且 dt 的系数变成了：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial[v(t,T)^2]}{\partial T} = v(t,T)v_T(t,T)$$

其中 ∂ 表示偏微分。接下来是：

$$dF(t,T) = v(t,T)v_T(t,T)dt - v_T(t,T)dz(t)$$

因为我们可以在不失一般性的改变 $dz(t)$ 的符号，我们能写成：

$$dF(t,T) = v(t,T)v_T(t,T)dt + v_T(t,T)dz(t) \tag{15.26}$$

只要对所有的 t 和 T 指定 $v(t,T)$，就可以知道 $F(t,T)$ 的风险中性过程了。因此 $v(t,T)$ 的过程就足以定义一个单因素利率模型了。

(15.26)式说明在漂移率和瞬态远期利率的标准差之间存在着联系。*Heath*，*Jarrow* 和 *Morton* 首先指出了这一点。把 $v(t,T)$ 从 $\tau=t$ 和 $\tau=T$ 之间进行积分，我们得到：

$$v(t,T) - v(t,t) = \int_t^T v_T(t,\tau)d\tau$$

因为 $v(t,t)=0$，上式变成：

$$v(t,T) = \int_t^T v_T(t,\tau)d\tau$$

如果 $m(t,T)$ 和 $s(t,T)$ 是 $F(t,T)$ 的瞬态漂移率和标准差，由(15.26)式得：

$$m(t,T) = s(t,T)\int_t^T s(t,\tau)d\tau \tag{15.27}$$

当存在不只一个因素时，相似的结论仍成立。

短期利率的过程

我们现在转入由债券价格的标准差和初始期限结构推导 r

(t)的风险中性过程。因为：

$$F(t,t) = F(0,t) + \int_0^t dF(\tau,t)$$

而且 $r(t)=F(t,T)$，由(15.26)式得出[①]

$$r(t) = F(0,t) + \int_0^t v(\tau,t)v_t(\tau,t)d\tau + \int_0^t v_t(\tau,t)dz(\tau) \tag{15.28}$$

对 t 求导并利用 $v(t,t)=0$ 的结论

$$dr(t) = F_t(0,t)dt + \left\{\int_0^t [v(\tau,t)v_{tt}(\tau,t) + v_t(\tau,t)^2]d\tau\right\}dt + \left\{\int_0^t v_{tt}(\tau,t)dz(\tau)\right\}dt + [v_t(\tau,t)|_{\tau=t}]dz(t) \tag{15.29}$$

对(15.29)中右边的各项进行考查是很有意义的。第一项和第四项比较简单和直接了当。第一项表示 r 的漂移率的组成之一是初始远期利率曲线的斜率。第四项说明 r 的瞬态标准差是 $v_t(\tau_t,t)|_{\tau=t}$。第二项和第三项较复杂，特别是当 v 是随机变量时。第二项依赖于 v 的历史，因为它包括当 $\tau<t$ 时的 $v(\tau,t)$。第三项依赖于 v 和 dz 的历史。因此这两项容易使 r 的过程变为非马尔科夫过程。

15.15　*Heath*，*Jarrow* 和 *Morton* 方法

Heath，*Jarrow* 和 *Morton*（*HJM*）方法就是指明在所有未来时刻所有远期利率的瞬态标准差。这有时也称之为标准差结构（*volatility structure*）。然后用(15.27)式来计算每个瞬态远期利率的漂移率并且构造一个用于描述远期利率期限结构演变过程的二叉树。

不幸的是，一般来说 *HJM* 树不重合，也就是说当先上升后下降所得出的期限结构与先下降后上升所得出的期限结构不同。图 15.13 说明了一个单因素和三个时间步长的典型 *HJM* 树图。一般来说，n 个步长以后，就会有 $2n$ 个结点。这就严重地限制了能够使用的时间步长的个数而且使计算极其缓慢。

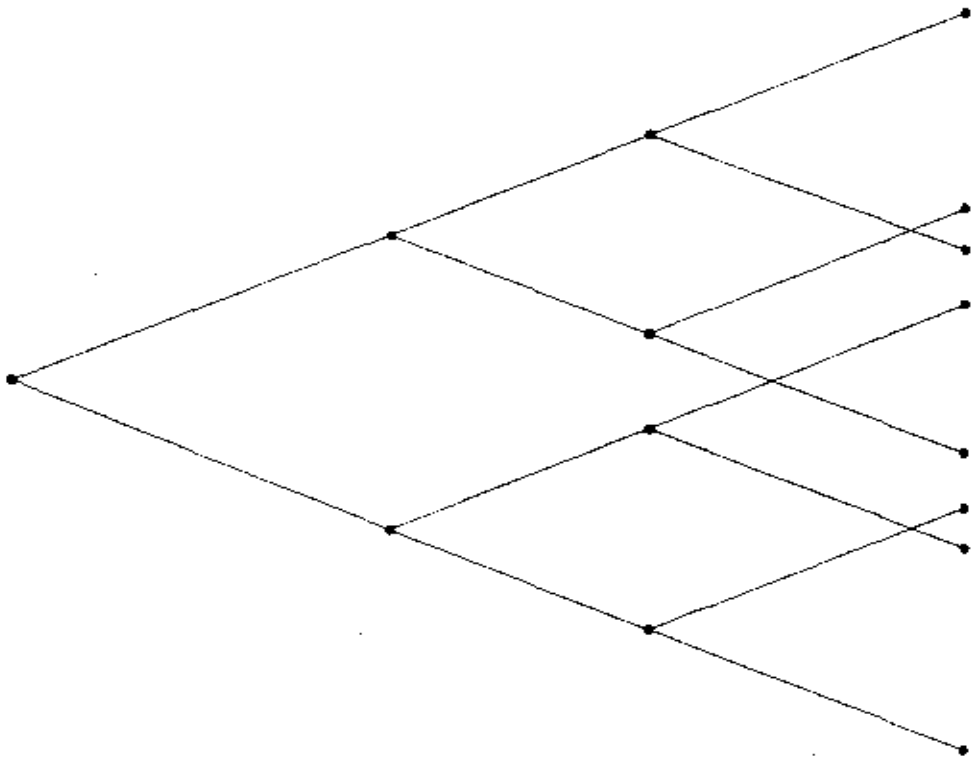


图 15.13　一个不重合的树

因为必须对短期利率的行为有一个完整的认识才足以确定初始的期限结构以及它是如何演变的，所以我们能够把 *HJM* 树图看作是一个短期利率的树图。我们在前一节中对短期利率 r 的过程的讨论解释了为什么 *HJM* 树图未必重合。在一般的 *HJM* 模型中，r 的过程是非马尔科夫过程。为了知道 r 在未来短时期内随机行为，我们不仅需要知道期初的 r 值而且还必须知道在达

到该值的过程中所经过的路径[17]。

可以相当简单地与一般 *HJM* 模型联系起来使用的数值方法是蒙特卡罗模拟方法。它可以用来检验不同的标准差结构对欧式期权价格的影响。不幸的是，蒙特卡罗模拟方法不能对美式期权进行定价。

模型的马尔科夫形式

短期利率的马尔科夫模型可用重合的树来表示，该模型的优点是它使用的计算时间大少于非马尔科夫模型计算时间。实际情况是，试图在一般 *HJM* 模型中找到 r 是马尔科夫的特例是很有意义的。注意当我们建立非套利模型时，我们不能把 r 的过程简写成(15.10)式中那个过程的样子。这是因为不能确保模型会符合初始期限结构。

这说明在构造 r 的模型和构造债券价格或瞬态远期模型之间存在重要的差别。当我们构造债券价格或瞬态远期模型时，变量的初始值保证我们符合初始期限结构，但我们难以搞清 r 的过程是否是马尔科夫过程。当我们直接构造 r 的模型时，我们立即知道该过程是马尔科夫过程，但变量的初值只保证我们符合期限结构尾端的一个很短的时期。

我们现在对短期利率的两个非套利马尔科夫模型进行稍微详细一些的检验。

15.16　*Ho* 和 *Lee* 模型

Ho 和 *Lee* 在 1986 年的论文中首先提出了期限结构的非套利模型。他们提出了二叉树形式的模型，模型有两个参数，一个是与标准差有关，另一个与风险的市场价格有关。模型的连续时间极限被表示为：

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz$$

其中短期利率的瞬态标准差 σ 是常数，而 $\theta(t)$ 是为了保证模型适合初始期限结构而选择的时间的函数。$\theta(t)$ 的公式是：

$$\theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$$

有趣的是 *Ho* 和 *Lee* 的模型中与风险的市场价格有关的参数是一个多余的变量。这类似于风险偏好与股票期权定价无关的情形。

在 *Ho* 和 *Lee* 模型中，贴现债券和贴现债券的欧式期权可以求出解析式。用短期利率表示的 t 时刻的贴现债券价格的表达式是：

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-r(T-t)}$$

其中：

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - (T-t)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 t(T-t)^2$$

贴现债券欧式看涨期权和看跌期权的价格由(15.21)和(15.22)式给出，其中：

$$\sigma_P = \sigma(s-T)\sqrt{T-t}$$

附息票债券的欧期权可通过把它们分解成贴现债券欧式期权组合方法来用进行估值，所用的方法就是在 15.11 节中所述的由 *Jamshidian* 建议的方法。美式期权可通过画一个树图来进行估值，树的画法既可以用 *Ho* 和 *Lee* 所述的方法也可以用本章后面将要描述三叉树法。

Ho 和 *Lee* 模型的优点是它是解析的马尔科夫可扩展模型。它的应用简便而且能精确地符合当前的利率期限结构。模型的缺

点之一是在选择标准差结构时给予使用者的灵活性太小。所有即期和远期利率都具有相同的瞬态标准差 σ。模型的另一个有关的缺点是它不具有均值回复性。这意味着在每个特定时点上不论利率多么高或多么低，利率在下一个短时间内移动的平均方向总是一样的。

15.17　*Hull* 和 *White* 模型

在 1990 年发表的一篇论文中，*Hull* 和 *White* 探讨了 *Vasicek* 和 *Cox*，*Ingersoll* 和 *Ross* 模型的扩展情况，并提供了一个精确地符合初始期限结构的模型。*Vasicek* 模型的一个扩展形式是：

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz \qquad (15.30)$$

其中 a 和 σ 是常数。我们将把它称做 *Hull* - *White* 模型。与 *Ho* 和 *Lee* 模型一样，*Hull* 和 *White* 模型的特点是以速率 a 向均值回复。另外，*Hull* 和 *White* 模型与 *Vasicek* 模型类似，它们的返回程度依赖于时间。*Ho* 和 *Lee* 模型是 $a = 0$ 时 *Hull* - *White* 模型的特例。

这个模型具有与 *Ho* 和 *Lee* 模型一样具有同样程度的解析扩展性。在 t 时刻债券的价格可以确定为短期利率的解析函数。

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$

其中：

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

和

$$\ln A(t,T) = \ln \frac{P(0,T)}{P(0,t)} - B(t,T)\frac{\partial \ln P(0,t)}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{4a^3}\sigma^2(e^{-aT}-e^{-at})^2(e^{2at}-1)$$

贴现债券的欧式期权价格公式与 *Vasicek* 模型在(15.21)和(15.22)式中给出的定价公式一样。附息票债券的欧式期权可以用 15.11 节中所述的 *Jamshidian* 方法分解成贴现债券的期权来进行估值。

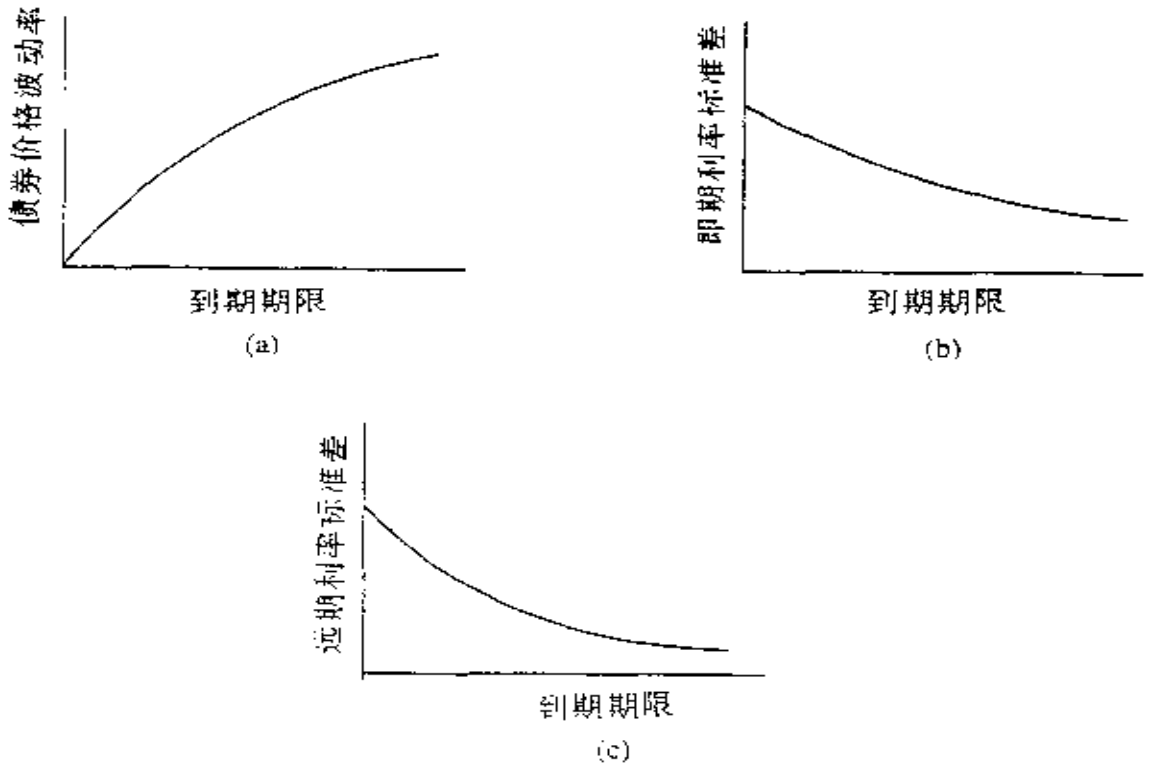


图 15.14 *Hull − White* 模型中标准差结构图

在 *Hull − White* 模型中的标准差结构由σ 和a 共同决定。这个模型可以用比 *Ho* 和 *Lee* 模型范围更大的标准差结构来表示。T 时刻到期的债券在 t 时刻的标准差是：

$$\frac{\sigma}{a}[1-e^{-a(T-t)}]$$

T 时刻到期的零息票利率在 t 时刻的瞬态标准差是：

$$\frac{\sigma}{a(T-t)}[1-e^{a(T-t)}]$$

T 时刻到期的瞬态远期利率的瞬态标准差是 $\sigma e^{-a(T-t)}$。这些函数如图 15.14 所示。参数 σ 决定短期利率的瞬态标准差。返回率参数 a 决定图 15.14(a)中的曲度以及图 15.14(b)和图 15.14(c)中标准差随到期日而下降的速率。a 越高，曲度越大，下降得越快。当 $a=0$ 时，贴现债券价格的波动率是到期日的线性函数，即期和远期利率的瞬态标准差都是常数。

使用三叉树

在 *Hull* 和 *White* 模型中三叉树可以用来对美式期权和其他更复杂的衍生证券进行估值。在 *Hull* 和 *White* 的论文中有详细地解释。树图的几何形状类似于第 15.11 节中 *Vasicek* 模型所用的树图的几何形状。但是二者之间有一个重要的差别。当应用 *Vasicek* 模型时，r 的过程已知而且对树的选择是尽可能地与这个过程相匹配。现在却有一个未知函数 $\theta(t)$，为了使所有贴现债券能正确地定价，用于构造树图过程的目的之一就是确定 $\theta(t)$。

树图上的短期利率 r 被定义为在 Δt 时刻到期的贴现债券的连续复利收益率。树图上 r 的值被分成相等的小段，并对一些 Δr 用 $r_0+j\Delta r$ 来表示，其中 r_0 是 r 的现值，j 是正整数或负整数。树图所考虑的时间价值也被分成相等的小段，并对一些 Δt 用 $i\Delta t$ 表示，其中 i 是非负整数。变量 Δr 和 Δt 的关系用 $\Delta r=\sigma\sqrt{3\Delta t}$ 表示。

为了方便起见，当 $t = i\Delta t$ 和 $r = r_0 + j\Delta r (i \geqslant 2)$ 时树图上结点将记作 (i,j) 结点。我们用以下符号：

$R(i)$：$i\Delta t$ 时刻到期的贴现债券在零时刻的收益

r_j：$r_0 + j\Delta r$

$\mu_{i,j}$：结点 (i,j) 上 r 的漂移率

我们假设树图已构造到 $n\Delta t$ 时刻 $(n \geqslant 0)$ 而且符合 $R(i)$，然后我们说明如何把树图向前扩展一步。因为假设在 $i\Delta t$ 时刻利率 r 被用于 $i\Delta t$ 和 $(i+1)\Delta t$ 期间，构造到 $n\Delta t$ 时刻的树图反映了 $i \leqslant n+1$ 时的 $R(i)$ 的值。在构造构成 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 期间的树图分枝时，我们必须选择能够使树图符合 $R(n+2)$ 的 $\theta(n\Delta t)$ 值。这样做所用的公式是：

$$\theta(n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}(n+2)R(n+2) + \frac{\sigma^2\Delta t}{2} + \frac{1}{\Delta t^2}\ln\sum_j Q(n,j)e^{-2r_j\Delta t + \sigma r_j \Delta t^2} \tag{15.31}$$

其中 $Q(i,j)$ 是某个证券的值，若该证券到达结点 (i,j) 就支付 $\$1$，否则为零。随着树图的构造，用下面的公式就可计算 $Q(i,j)$ 的值：

$$Q(i,j) = \sum_{j^*} Q(i-1,j^*)q(j^*,j)e^{-r_{j^*}\Delta t} \tag{15.32}$$

其中 $q(j^*,j)$ 是从结点 $(i-1,j^*)$ 到结点 (i,j) 移动的概率（对任意给定的 j^*，除了 j 的三个值以外，其他的概率值都是零）。

一旦 $\theta(n\Delta t)$ 已被确定，在 $n\Delta t$ 的结点上 r 的漂移率 $\mu_{n,j}$ 可用下式计算：

$$\mu_{n,j} = \theta(n\Delta t) - a(r_0 + j\Delta r) \tag{15.33}$$

然后选择出从 $n\Delta t$ 时刻结点出发的树枝以及与其相联系的概率，使它们符合 $\mu_{n,j}$ 和 σ，其方式类似于 15.11 节中所述的 *Vasicek* 模型所用方式。

例 15.5

图 15.15 说明当 $a=0.1$，$\sigma=0.014$，$\Delta t=1$ 时，用(15.30)式中的 *Hull－White* 模型构造的树图。假设期限结构是上倾的，且贴现债券第 1、2、3、4、5 年的收益率分别是 10%，10.5%，11.0%，11.25% 和 11.5%。

构造树图的第一步是计算 $\theta(0)$。因为 $Q(0,0)=1$，$r_0=0.1$，而 $R(2)=0.105$，(15.31)式给出的 $\theta(0)=0.0201$。由(15.33)式计算出在结点(0,0)r 的漂移率是 0.0101。因此从结点(0,0)所能到达的结点上的 r 的均值和标准差是 0.0101 和 0.014。这使得图 15.15 中的头三个树枝的概率分别是 0.045，0.493 和 0.462。(15.32)式得出 $Q(1,-1)$，$Q(1,0)$ 和 $Q(1,1)$ 分别是 0.041，0.446 和 0.418。这就完成了第一步的计算。现在再次使用(15.31)式计算 $\theta(\Delta t)$ 为 0.0213。这导出了图 15.15 中下第二步相对应树枝的概率；以此类推。为了计算准确，应该使用计算机，因为在小数点后 3 或 4 位的四舍五入会使误差很快累积起来。

其他马尔科夫模型

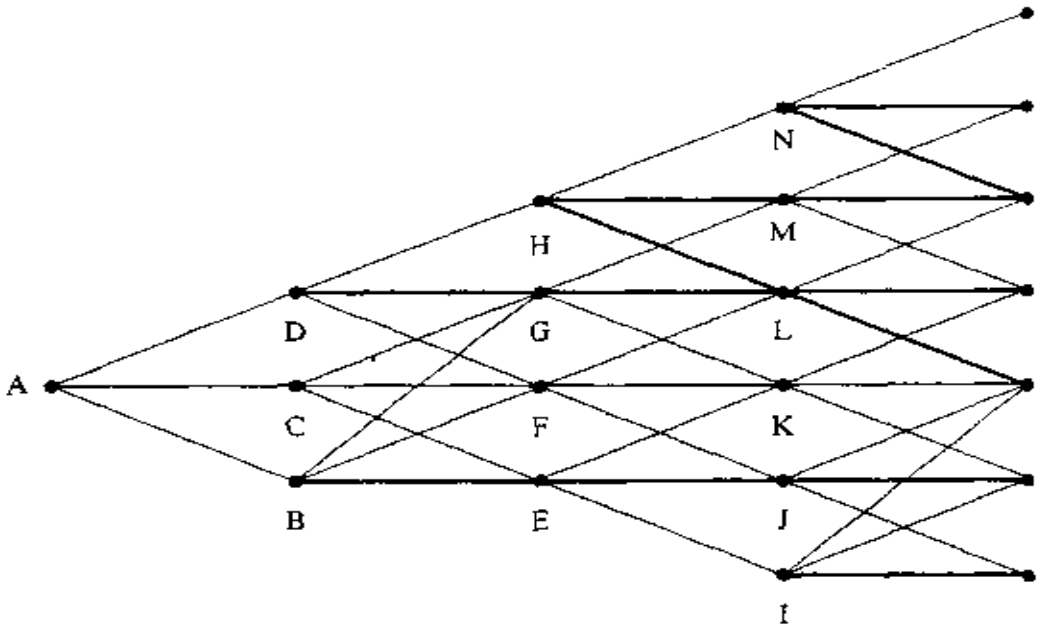
刚才所述的树方法可以用来构造符合初始期限结构的其他单因素期限结构马尔科夫模型。例如考虑如下模型：

$$d\ln r = [\theta(t) - a\ln r]dt + \sigma dz \qquad (15.34)$$

这与 *Black*，*Derman* 和 *Toy*，*Black* 和 *Karasinski* 提出的模型类似。对 $\ln r$ 而非 r 构造一个三叉树。在每一步中，$\theta(t)$ 的选择必须使树图能正确地为贴现债券定价。*Hull* 和 *White* 解释了必须遵循的步骤。

Hull－White 模型与其他方法相比优点是它的解析扩展性。债券价格和欧式期权价可得出解析解。相反，诸如(15.34)式中的

其他模型不易求出解析式。这意味着 r 的树图必须构造到标的资产有效期末－而不是只到期权的有效期末。这在计算上是很耗时间的。



漂移率和概率表

节点	A	B	C	D	E	F	G
Rate	10.00	7.58	10.00	12.42	7.58	10.00	12.42
p_1	0.456	0.044	0.512	0.420	0.288	0.223	0.167
p_2	0.498	0.482	0.446	0.530	0.626	0.656	0.667
p_3	0.046	0.474	0.042	0.050	0.086	0.121	0.166

节点	H	I	J	K	L	M	N
Rate	14.85	5.15	7.58	10.00	12.42	14.85	17.27
p_1	0.122	0.042	0.453	0.368	0.292	0.226	0.170
p_2	0.657	0.424	0.501	0.572	0.624	0.655	0.667
p_3	0.221	0.534	0.046	0.060	0.084	0.119	0.163

图 15.15 *Hull－White* 模型树图

15.18　套期保值

对利率衍生证券组合的套期保值参数的计算一般比对依赖于股票或货币的衍生证券组合的参数计算的误差更大一些。操作者常常选择把收益率曲线分成几段。他们在一段上做平移同时保持收益率曲线的其余部分不变，并观察对他们组合价值的影响。一个完美的套期保值的组合对任何一段上的变化都不会过份地敏感。如果套期保值参数显示出不能接受的头寸暴露，就必须进行交易以减少暴露。

这种方法与金融机构在管理其资产和负债时常用的 *GAP* 管理是相对应的。注意在我们使用的任何一个 r 的模型中，期限结构只能按某种方式演化。理想主义者可能会主张我们应该只对这些特别的变动进行套期保值而不应对所有可能的变动进行套期保值。但是实际上，即使上述方法在某些方面与所用模型不相符时也常被采用上述方法。就这一点来看，我们可以与 *Black – Scholes* 模型进行类比。当为权益期权定价时，分析者常常假设标准差为常数，但当进行套期保值时，他们承认模型不完美因而用计算 *vega* 方法来对标准差的变化进行套期保值。

15.19　小　结

利率期权在实际中以多种不同的方式出现。例如，长期国债期货期权，中期国债期货期权和欧洲美元期货期权在交易所内的交易非常活跃。许多可交易债券包括期权的特性。由金融机构提供的贷款和存款工具常常隐含着期权。抵押证券包含着嵌入利率期权。互换期权和利率上限在柜台交易中非常活跃。

利率期权比股票期权、货币期权、指数期权和大多数期货期权

更难估值。这部分是由于我们要处理整个期限结构－而不是单个变量。它还有部分原因是由于利率的行为相对更复杂。例如，利率表现出一种所谓的均值回复的现象。这意味着它们的漂移率总有把它们拉向某个中间值的趋势。附加在均值回复上的还有标准差。

假设利率上限每个要素是一个远期利率期权并使用 *Black* 模型，就可经常对利率上限进行估值。在模型中所用的适当的远期利率标准差随远期合约到期日的延长趋于下降。

假设债券价格或债券收益率在期权到期日是对数正态分布的，就可经常对欧式债券期权进行估值。这种方法不能扩展到美式债券期权和其他利率衍生证券，因为在期权有效期内债券价格的不确定性模式所具有的特点不能用 *Black－Scholes* 模型很好地表示。为了解决这个问题，需要一个收益率曲线模型。

提出的许多收益率曲线模型都有与模型建立时刻的利率期限结构不符的缺点。于是 *Ho* 和 *Lee*；*Heath*，*Jarrow* 和 *Morton*；*Hull* 和 *White* 以及其他人提出构造收益率曲线模型的方法，这些方法自动符合初始收益率曲线。*Heath*，*Jarrow* 和 *Morton* 模型的优点是能在所有时候符合所有远期利率标准差，但是这个优点的取得付出了很高的成本。短期利率 r 的过程一般来说是非马尔科夫过程。这意味着 r 的树图不重合，甚至在单因素的情况下，在第 n 步时会有 $2n$ 个结点。这使模型在计算上速度很慢。为了解决这一问题曾提出了许多非套利的马尔科夫模型。其中有 *Ho* 和 *Lee* 模型；*Hull－White* 模型；*Black*，*Derman* 和 *Toy* 模型；以及 *Black* 和 *Karasinski* 模型。*Ho* 和 *Lee* 模型的优点是它在解析上容易实施。其缺点是它隐含着在所有时候所有利率都是相等的变量的假设。*Hull* 和 *White* 模型是 *Ho* 和 *Lee* 模型的另一种形式，它包括均值回复。在保持了 *Ho* 和 *Lee* 模型解析上容易求解的同时，允许对波动性环境进行更充分的描述。*Black*，*Derman* 和 *Toy*

模型和*Black* 和*Karasinski* 模型避免了负利率的可能，但在解析上不容易求解。

第十六章

新型期权

比标准欧式或美式看涨期权和看跌期权盈亏状态更复杂的衍生证券有时称为新型期权(*exotic options*)。大多数新型期权在场外交易。它们是由金融机构设计以满足市场特殊需求的产品。有时候它们被附加在所发行的债券中以增加对市场的吸引力。有些金融机构十分积极地促销新型期权,他们几乎对客户提议的任何交易都准备好报价。本章中,我们将介绍市场中现有各种类型的新型期权,并阐述一至二种新型估值技术。

除非另行说明,这里我们考虑支付连续红利率为 q 的股票期权。如第十一章所述,我们设定货币期权的 q 值为外汇无风险利率;设定期货期权的 q 值为国内无风险利率。第十二章的论证表明我们可以设定商品期权的 q 值等于便利收益减去存储成本;类似的,当我们考虑的期货合约到期日越来越长时,我们可以设定 $r-q$ 等于期货价格增长率。

16.1 新型期权的类别

在 1991 和 1992 年《风险》杂志中刊登的一系列优秀文章中,*Mark Rubinstein* 将新型权分为多种类型。这一节中的分类与他的分类相似。

打包期权

打包期权(*packages*)是由标准欧式看涨期权、标准欧式看跌期权、远期合约、现金及标的资产本身构成的组合[①]。我们在第八章中讨论过多种类型的打包期权:牛市价差、熊市价差、蝶式价差期权、跨式期权、宽跨式期权等。

金融机构经常喜欢设计某个打包期权使它具有零初始成本。这种产品与远期合约或掉期的相似之处是它亦能导致正的或负的收益,零成本打包期权的一个例子是范围远期合约(*range forward contract*),这在第一章中已经提到了。它由一个远期多头与一个看跌期权多头和一个看涨期权空头构成(参见图16.1)。选

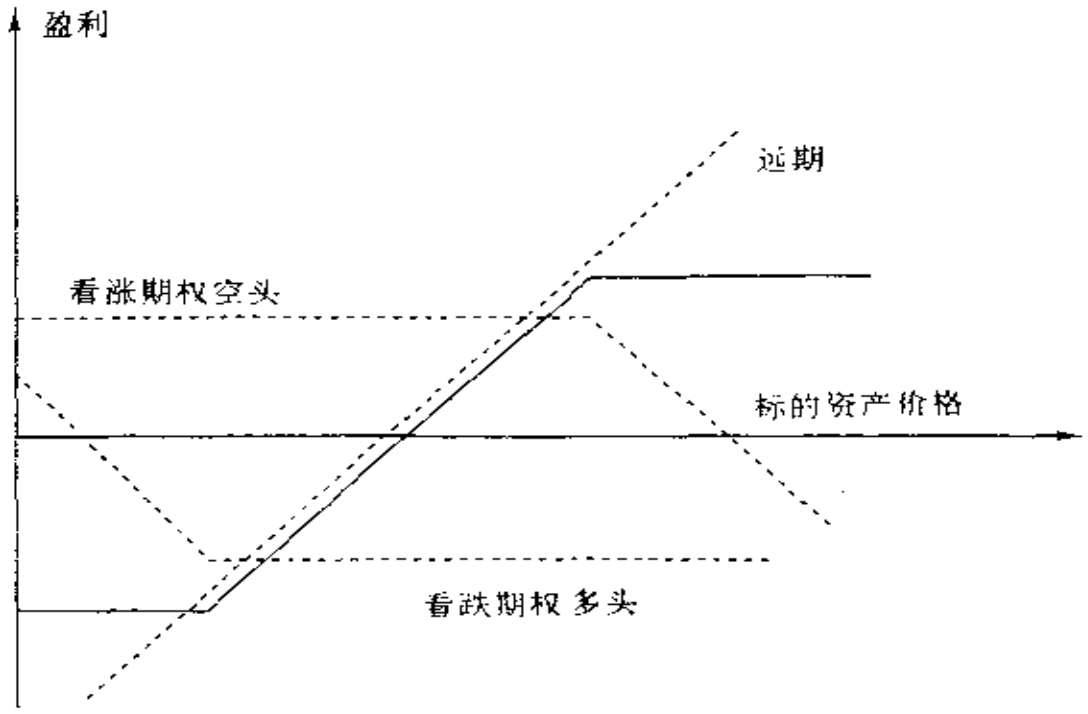


图 16.1　范围远期合约的构造

择执行价格使看涨期权价值等于看跌期权价值。由于远期合约的价值为零,整个打包的价值也就为零。一个范围远期合约拥有与牛市价差期权相似的盈亏状态,第八章中已讨论过了。

通过拖延至到期日才支付期权费用,正规的期权可以转换为零成本产品。若成交时刻支付的期权成本为 c,那么 $A = ce^{r(T-t)}$ 就是期权到期支付时成本。于是盈亏状态为 $max(S-X)-A$ 或 $max(S-X-A,-A)$。当执行价格 X 等于远期价格时,延迟支付期权又可称为不完全远期、波士顿期权、可选出口的远期和可撤销远期。

非标准美式期权

在标准美式期权的有效期内任何时间均可行使期权且执行价格总是相同的。而实际中,交易的美式期权不一定总是具有这些标准特征。

有一种非标准美式期权称为 *Bermudan* 期权。在这种期权中提前行使只限于期权有效期内特定日期。例如美式互期期权就只能在指定日才能行使。

其它类型的非标准美式期权有时出现在公司发行的认股权证中。在这种情况下,提前执行只能在部分时间进行,而不是任何时间都可以。有时执行价格随着时间段而增长。例如,5 年期的认股权证,执行价格在头两年里可能是 $30,而在后两年中为 $32,在最后一年为 $33。

远期开始期权

远期开始期权是现在支付期权费但在未来某时刻开始的期权。它们有时用来对雇员实施奖励。通常选择合适的期权条款以使该期权在启动时刻处于平价状态。

考虑一种远期开始看涨期权,在 t_1 时刻该期权开始处于平价

状态，到期日为 t_2，其标是资产为不付红利股票。假设当前时刻为 t，当前股票价格为 S，t_1 时刻的股票价格为 S_1。为了对该期权进行估值，我们从 *Black－Scholes* 公式中得知处于平价状态的看涨期权与股价成正比。因此 t_1 时刻的远期开始期权价值为 cS_1/S，c 是持续时间为 t_2-t_1 的处于平价状态期权的当前价值。使用风险中性评估法，当前远期开始期权价值为：

$$e^{-r(t_1-t)}\hat{E}\left[c\frac{S_1}{S}\right]$$

其中，$\hat{E}$代表风险中性世界中期望值。因为 c 和 S 已知，且 $\hat{E}[S_1]=Se^{r(t_1-t)}$，则远期开始期权价值为 c。换句话说，远期开始期权的价值与相同有效期的处于平价状态的常规期权完全相同。

若预期股票将以 q 的红利率支付红利，则 $\hat{E}[S_1]=Se^{(r-q)(t_1-t)}$，且上述分析表明，远期开始期权的价值为 $ce^{-q(t_1-t)}$。

复合期权

复合期权是期权的期权。复合期权主要有四种类型：看涨期权的看涨期权，看涨期权的看跌期权，看跌期权的看涨期权，看跌期权的看跌期权。复合期权有两个执行价格和两个到期日。例如，考虑如下看涨期权的看涨期权情形，在第一个执行日 T_1，复合期权的持有人必须付清第一笔执行价格 X_1，并获得一个看涨期权。该看涨期权给予持有人以第二个执行价格 X_2 在第二个执行日 T_2 购买标的资产的权利。只有当第二个到期日的期权价值大于第一个执行价格时，复合期权可在第一个执行日行使期权。

当通常的几何布朗运动假设成立时，欧式复合期权可以用二维正态分布的积分解析形式来估值。所用符号如前所述，零时刻

欧式看涨期权的看涨期权价值为：

$$Se^{-qT_2}M(a_1,b_1;\sqrt{T_1/T_2}) - X_2e^{-rT_2}M(a_2,b_2;\sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}X_1N(a_2)$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln(S/S^*) + (r - q + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}; \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S/X_2) + (r - q + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}; \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}$$

M 为累计二维正态分布的函数；S^* 为 T_1 时刻期权价格等于 X_1 时的股票价格。如果 T_1 时刻的实际股票价格大于 S^*，则第一个期权将被行使；若它不大于 S^*，则期权无效。

运用类似的符号，欧式看涨期权的看跌期权价值为：

$$X_2e^{-rT_2}M(-a_2,b_2;-\sqrt{T_1/T_2}) - Se^{-qT_2}M(-a_1,b_1;-\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}X_1N(-a_2)$$

欧式看跌期权的看涨期权价值为：

$$X_2e^{-rT_2}M(-a_2,-b_2;\sqrt{T_1/T_2}) - Se^{-qT_2}M(-a_1,-b_1;\sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1}X_1N(-a_2)$$

欧式看跌期权的看跌期权价值为：

$$Se^{-qT_2}M(a_1,-b_1;-\sqrt{T_1/T_2}) - X_2e^{-rT_2}M(a_2,-b_2;-\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1}X_1N(a_2)$$

计算 M 的过程列在附录 10B 中。

任选期权

任选期权（*as you like it*）具有如下的特征：即经过一段指定时

期后，持有人能选择期权或者是看涨期权或者是看跌期权。假设做出选择的时刻为 t_1，此时任选期权的价值为：

$$\max(c, p)$$

其中 c 为期权的标的看涨期权价值，而 p 为期权的标的看跌期权价值。

如果任选期权的两个标的期权都是欧式的且具有相同执行价格，则可运用看跌期权—看涨期权之间的平价关系来获得估值公式。假定 S_1 为 t_1 时刻的股票价格，X 为执行价格，t_2 为期权到期日，r 为无风险利率。则看跌期权—看涨期权之间的平价关系式意味着：

$$\begin{aligned}\max(c, p) &= \max(c, c + Xe^{-r(t_2-t_1)} - S_1e^{-q(t_2-t_1)}) \\ &= c + e^{q(t_2-t_1)}\max(0, Xe^{-(r-q)(t_2-t_1)} - S_1)\end{aligned}$$

这表明任选期权是一种打包期权，它由以下两部分构成：

1. 一份执行价格为 X，到期日为 t_2 的看涨期权；以及

2. $e^{-q(t_2-t_1)}$ 份执行价格为 $Xe^{-(r-q)(t_2-t_1)}$，到期日为 t_1 的看跌期权这样一来它就可以估值了。

更复杂的任选期权可以允许看涨期权和看跌期权的执行价格与到期日不同。如果这样的话，它们就不再是打包期权了，但是具有复合期权类似的特征。

障碍期权

障碍期权（*barrier option*）的收益依赖于标的资产的价格在一段特定时期内是否达到了一个特定水平。在第十一章中我们曾遇到过一种特殊类型的障碍期权：在 *CBOT* 交易的 *CAPS*（封顶期权）。这些期权的设计目的是使收益不能超过 $ 30。一份封顶看

涨期权在指数收盘价超过执行价格 $ 30 时会自动执行。一份封顶看跌期权在指数收盘价低于执行价格 $ 30 时会自动执行。与 *CBOT* 交易的品种相类似的封顶欧式和美式期权通常是在场外市场进行交易。

另一种类型的障碍期权是敲出期权(*knockout option*)。它的其他方面与常规期权相同,但是当标的资产价格达到一个特定障碍 H 时,该期权作废。在敲出看涨期权情况下,障碍一般低于执行价格($H<X$),该期权有时称为下降敲出期权(*down - and - out*),在敲出看跌期权情况下,$H>X$ 且期权有时称为上升敲出期权(*up - and - out*)。而下降敲入期权(*down - and - in*)是指当标的资产价格碰到 H($H<X$)时才可以存在的看涨期权。类似的,上升敲入期权(*up - and - in*)是指当标的资产价格碰到 H($H>X$)时才可以存在的看跌期权。

当通常的几何布朗运动假设成立时,零时刻欧式下降敲入看涨期权的价值为:

$$Se^{-qT}(H/S)^{2\lambda}N(y) - Xe^{-rT}(H/S)^{2\lambda-2}N(y-\sigma\sqrt{T})$$

且欧式上升敲入看跌期权的价值为:

$$Xe^{-rT}(H/S)^{2\lambda-2}N(-y+\sigma\sqrt{T}) - Se^{-qT}(H/S)^{2\lambda}N(-y)$$

其中

$$\lambda = \frac{r - r_f + \sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(SX)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

一份常规的看涨期权是由一份相应的下降敲出和一份下降敲入期权构成的。因此一份欧式下降敲出看涨期权的价格等于一份常规欧式看涨期权减去相应的下降敲入看涨期权的价格。类似地,欧式上升敲入看跌期权的价格等于常规欧式看跌期权价格减

去相应上升敲入看跌期权的价格。

可转换债券中通常包含了一种障碍期权。这是因为其中通常包含有一项条款，该条款允许发行公司赎回债券，因此当股票价格跨过了某个限价时就强迫转换。

关于障碍期权的一个重要问题是：检验是否达到障碍时观测资产价格 S 的频率。上面给出的解析公式假设 S 为连续观测值。合约中经常声明 S 是每天观测值，例如，在 $S\&P$ 封顶期权中，S 是每天交易收盘时的观测值。

两值期权

两值期权（*binary option*）是具有不连续收益的期权。一个简单的例子是现金或无价值看涨期权（*cash or nothing call*）。它在到期日股票价格低于执行价格时一文不值，而当股票价格超过执行价格时支付一个固定数额 Q。在风险中性世界中，股票价格到期时超过执行价格的概率为 $N(d_2)$。那么现金或无价值看涨期权的价值就是 $Qe^{-r(T-t)}N(d_2)$。

另一种两值期权是资产或无价值看涨期权（*asset or nothing call*）。若标的股票价格在到期时低于执行价格则期权一文不值，若标的股票价格到期时超过执行价格，则支付等于股票价格本身的款额。资产或无价值看涨期权的价值为 $SN(d_1)$。一个常规期权等价于一个资产或无价值看涨期权多头头寸和现金支付等于执行价格时一个现金或无价值看涨期权空头头寸的组合。

回望期权

回望期权（*lookback options*）的收益依赖于期权有效期内标的资产的最大或最小价格。若 S_1 为曾达到过最小价格，S_2 为曾达到过最大价格，S_T 为到期时的最终价格，则回望看涨期权的收益是：

$$\max(0, S_T - S_1)$$

或简化为 $S_T - S_1$。回望看跌期权的收益为：

$$\max(0, S_2 - S_T)$$

或简化为 $S_2 - S_T$。

欧式回望期权的定价公式已经推导出来了。零时刻的欧式回望看涨期权的价值为：

$$Se^{-qT}N(a_1) - Se^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-a_1) - S_{\min}e^{-rT}\left[N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_1}N(-a_3)\right]$$

其中 $S_{\min}$ 为截止到现在的最小值且

$$a_1 = \frac{\ln(S/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1 = -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S/S_{\min})}{\sigma^2}$$

欧式回望看跌期权的价值是：

$$S_{\max}e^{-rT}\left[N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)}e^{Y_2}N(-b_3)\right] + Se^{-qT}\frac{\sigma^2}{2(r-q)}N(-b_2) - Se^{-qT}N(b_2)$$

其中 $S_{\max}$ 为截止到现在的最大值且

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max}/S) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{max}/S) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{max}/S)}{\sigma^2}$$

回望看涨期权实际上是持有者能在期权有效期内以最低价格购买标的资产。同样的，回望看跌期权是持有者能在期权有效期内以最高价格出售标的资产。回望期权中的标的资产通常是商品。就像障碍期权那样，回望期权对用以计算最大或最小资产价格值的观测频率敏感。以上公式假设资产价格是连续观测的。

亚式期权

亚式期权(*Asian options*)的收益依赖于标的资产有效期至少某一段时间内的平均价格。平均价格看涨期权(*average price call*)的收益是 $max(0, S_{ave} - X)$，平均价格看跌期权(*average price put*)的收益为 $max(0, X - S_{ave})$，其中 S_{ave} 是按预定平均时期计算的标的资产的平均价值。平均价格期权比常规期权便宜并有说法认为它比常规期权更适合公司财务主管的某些需求。假设一家美国公司的财务主管期望在明年内平稳地收到来自德国子公司的一份1亿德国马克的现金流。他可能对一种能保证该年内平均汇率高于某一水平的期权感兴趣。平均价格看跌期权能比常规看跌期权更好地满足这一要求。

另一种类型的亚式期权是平均执行价格期权(*average strike options*)。平均执行价格看涨期权(*average strike call*)收益为 $max(0, S - S_{ave})$，而平均执行价格看跌期权(*average strike put*)收益为 $max(0, S_{ave} - S)$。平均执行期权可以保证在一段时间内频繁交易资产所支付的平均购买价格低于最终价格。另外，它能保证在一段时间内频繁交易资产所收取的平均销售价格高于最终

价格。

若假定标的资产价格 S 服从对数正态分布，且 S_{ave} 是 S 的几何平均值，就可获得欧式平均价格期权的定价解析公式。这是因为一系列对数正态分布的变量的几何平均值仍为对数正态分布。在风险中性世界中，一定时期的几何平均数的概率分布等同于该时期末某个股票的概率分布，此股票的预期增长率为 $(r-q-\sigma^2/6)/2$ 且标准差为 $\sigma/\sqrt{3}$。那么几何平均价格期权就可按一种常规期权来处理，其标准差为 $\sigma/\sqrt{3}$ 且红利率等于：

$$r-\frac{1}{2}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(r+q+\frac{\sigma^2}{6}\right)$$

更普遍的情况是亚式期权定义为算术平均值，然而没有解析定价公式。这是因为一系列对数正态分布的算术平均值分布没有可解析处理的特性。然而，对算术平均期权的定价我们有一种近似的解析方法。它包括精确地计算算术平均的概率分布的头两项，然后再假定算术平均的分布是具有相同头两项的对数正态分布。

定义：

$$M_1=\frac{e^{(r-q)T}-1}{(r-q)T}$$

以及

$$M_2=\frac{2e^{[2(r-q)-\sigma^2]T}}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)T^2}+\frac{2}{(r-q)T^2}\left[\frac{1}{2(r-q)+\sigma^2}-\frac{e^{(r-q)T}}{r-q+\sigma^2}\right]$$

在时期 T 内在零时刻开始观察算术平均的第一和第二项是 SM_1 和 S^2M_2。由公式(10.8)及(10.9)得知，如果我们进行对数

正态近似计算，我们应当把平均价格期权看作具有红利率 q_A 和标准差 σ_A 的常规期权，其中：

$$e^{(r-q_A)T} = M_1; \qquad e^{[2(r-q_A)+\sigma_A^2]T} = M_2$$

由这两个公式可解出：

$$q_A = r - \frac{\ln M_1}{T}; \qquad \sigma_A^2 = \frac{\ln M_2}{T} - 2(r - q_A)$$

资产交换期权

资产交换期权（*options to exchange one asset for another*）包括多种内容。从美国投资者的观点来看，使用瑞士法朗购买德国马克的期权是把一种外币资产交换成为另一种外币资产的期权。股票投标是将一种股票交换另一种股票的期权。

Marhrabe 率先给出了放弃价值 S_1 的资产而换回价值 S_2 的资产的欧式期权的定价公式。假设 S_1 和 S_2 都遵循几何布朗运动，具有标准差 σ_1 和 σ_2。更进一步假设 S_1 和 S_2 之间的瞬态相关系数为 ρ，且 S_1 和 S_2 提供的收益率为 q_1 和 q_2。该期权的定价为：

$$S_2 e^{-q_2(T-t)} N(d_1) - S_1 e^{-q_1(T-t)} N(d_2)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\log(S_2/S_1) + (q_1 - q_2 + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

且

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}$$

有意思的是这些公式是独立于无风险利率 r 的。这是因为

当 r 上升时，风险中性世界中的两种资产价格增长率都上升了，但这被贴现率的上升抵消了。变量 σ 是 S_2/S_1 的标准差。与第十一章比较后可以看出这种期权的价格与 S_1 份基于价值为 S_2/S_1 的资产的欧式看涨期权相同，其执行价格为 1，无风险利率为 q_1，资产红利率为 q_2。*Mark Rubinstein* 说明同类美式期权在进行估价时可表示出类似的性质。它可视为 S_1 份美式期权，该美式期权以 1 美元的执行价格购买价值 S_2/S_1 的资产，无风险利率为 q_1，资产红利率为 q_2。这一期权可以如十四章所述使用二叉树来估值。

值得注意的是：获得两个资产中较好或较差资产的期权可以看作是由两个资产之一的某个头寸加上将其交换为另一个资产的期权所组成：

$$\min(S_1, S_2) = S_2 - \max(S_2 - S_1, 0)$$
$$\max(S_1, S_2) = S_1 + \max(S_2 - S_1, 0)$$

含几种资产的期权

有时市场上交易含两种或更多风险资产的期权。一个例子是第四章中提到的在 *CBOT* 交易的债券期货合约。允许空头方在交割时可以选择大量不同的债券。另一个例子则是来源于一些在常规期权定价中考虑信用状况所用的模型。这种期权的定价不仅要依靠期权所出售的标的资产的价值，而且要看期权出售方其他资产的价值。

大多数包含几种标的资产的期权不能解析定价。而基于最大或最小两种资产的欧式期权是个例外。*Stulz* 已提供了对这种特殊情况包含有二维正态分布积分的定价公式。

16.2　基本定价工具

在第十四章中，我们介绍了许多衍生证券定价的数值方法。我们现在要讨论的是怎样运用其中的一些方法来处理新型期权。

蒙特卡罗模拟

对回望期权和亚式期权等不可能得出解析解的期权来说，自然会用到蒙特卡罗模拟这个工具。这是因为期权到期时得到的收益依赖于标的资产价格变动的整个轨迹。基本步骤在第十四章中已讲过了。我们模拟风险中性世界中标的资产价格变动的不同路径。期权价值估值是收益的平均值以无风险利率从到期日贴现回起始日的价值。为了使上面的方法在计算上可行，重要的一点是把它与对偶变量和可能的控制变化方法结合起来使用。

在平均价格与平均执行价格欧式期权中，当平均值是算术平均时，用作控制可变期权的正常期权是相应的几何平均期权，因为在这种情况下才存在有解析公式。步骤如下：

1. 使用蒙特卡罗模拟来估算算术平均期权和相应几何平均期权的价值(使用对偶变量技术并在获得每个估值时使用相同的随机数。)

2. 计算几何平均期权模拟价格和它的解析价格之间的差异。

3. 修正算术平均价格期权的价格估计值，即在其模拟估计值上加上解析几何平均价格超过几何平均期权模拟估计值的差额。

这是又一种解决本章中早些时候提到的求解亚式期权的解析近似方法。

树图方法

二叉树或三叉树可以直接用来给所有 16.1 中讨论的期权定

价，除了亚式期权、回望期权以及含几种风险资产的期权以外。期权的特性决定了我们沿树图滚动倒推的规则。例如，在敲出期权中的规则与常规期权无异，但是当标的资产的价格低于敲出界线时期权的价值设为零；在 *Bermudan* 期权中，当 t 到 $t+$ 时间间隔内包括一个允许提前行使的日子时，我们只在 t 时刻测试是否提前执行，如此等等。任选期权的标的期权为美式期权时，情况就较为复杂，当沿树图滚动倒推时，我们必须同时估价一份看涨期权和一份看跌期权的价值。对于对应做出选择的日期的结点，证券的价值设为等于看涨期权与看跌期权中价值较大的一个。于是我们按通常方式从这些结点滚动倒推返回当前状态。

障碍期权的精确估值要求比正常期权估值更多的时间间隔步骤，这是因为了解障碍界线是否达到的精确度很重要。通常期权的条款如下：双方只是在每个交易日的收盘（而不是交易日整天）检验是否达到障碍界线。树图的计算应反映这种情况。

16.3 美式路径依赖型期权

收益依赖于标的资产移动路径和当前价值的美式期权对于分析家而言是一种真正的挑战。我们不能用蒙特卡罗模拟，因为当模拟运算到达一定程度时我们没有办法判断提前行使是否最佳。同样的，我们也不能使用通常的树图方法来分析，因为一个结点上的收益不仅仅依赖于结点上标的资产的价格。

假设美式期权的收益依赖于一个函数 F，F 是标的资产遵循的路径函数。进一步假设画出树图后，$t+\Delta t$ 时刻的 F 值可从 t 时刻的 F 值及标的资产在 $t+\Delta t$ 时刻的价值计算得出。一种定价方式是用通常的方法画出标的资产树图，并追踪每个结点上所有可有发生的不同 F 值。相对于每个不同的 F 值是该证券的不同价值。

为了说明这一方法，我们假设自己有兴趣对基于无红利支付股票的美式回望看跌期权进行估价。若在 τ 时刻执行看跌期权，且报偿额为在时刻 0 与 τ 之间最高股价超过当前股价的数额。我们假设初始股价为 $ 50，则股价标准差为每年 40%，无风险利率为每年 10%，期权的总有效期为 3 个月。我们考虑一种三个时间步长的树图。使用第十四章中的符号，即 $S=50$，$\sigma=0.4$，$r=0.10$，$\Delta t=0.08333$，$u=1.1224$，$d=0.8909$，$a=1.0084$，且 $p=0.5076$，从而得出图 16.2 所示树图。（建立该树图的参数与例 14.1 中所构造树图的参数相同。）每个结点上面的数字是股价，每个结点中间一层的数字表示了通向该结点的路径中可能得到的最

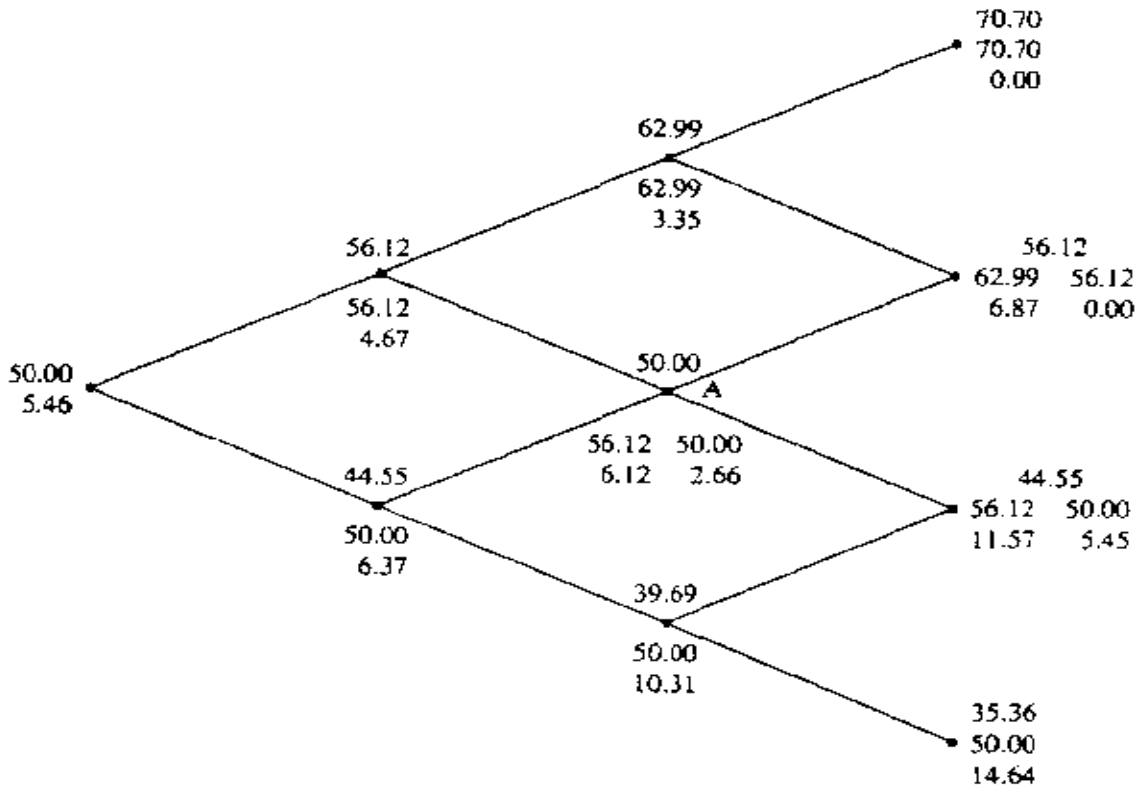


图 16.2　美式回望期权定价的树图

大股票价格。最下面一层的数字显示了对应于每种可能的最大股价的衍生证券的价值。

树图最后一排结点上衍生证券的价值是由股票价格的最大值减去实际股票价格计算得到的。为说明滚动倒推的流程，假设我们在 A 结点处的股价为 $50。到目前为止的最高股价为 $56.12 或 $50。考虑第一种股票价格为 $50 的情况。若向上移动，则最高股价为 $56.12 且衍生证券的价值为 0。若向下移动，则最大股票价格停留在 $50 且衍生证券的价值变为 $5.45。假定无提前执行，目前最高股价为 $50 的衍生证券在 A 处的价值为：

$$(0 \times 0.5076 + 5.45 \times 0.4924)e^{-0.1\times0.08333} = 2.66$$

显然在这种情况下在 A 结点行使期权是不合算的，因为执行期权的收益为零。对于结点 A 处最高股价为 $56.12 这种情况可以进行类似的计算，从而得到无提前执行的衍生证券在结点 A 处的价值为：

$$(0 \times 0.5076 + 11.57 \times 0.4092)e^{0.10\times0.08333} = 5.65$$

在这种情况下，提前行使是最佳方案，因为它可以获得 $6.12 的价值，这是最佳策略。按这种方法沿树图滚动倒推可以得出衍生证券的价值为 $5.46。

在这个例子中，每个结点所考虑的 F 值是零时刻与结点之间可得到的最大股票价格。通过 n 次步长运算，结点处不同的可能最大值的总数目一般少于 $n+1$ 个。当 n 很大时，这种方法的计算就是可行的。与此相反，考虑使用这种方法来对基于算术平均的美式期权定价的可能性，当我们沿树前进时，存在于每个结点上的不同算术平均值的数目按指数速度增加了，从而使任何大小的树图的计算都不可行。它可以应用于基于几何平均的美式期权，

因为 n 次步长以后的几何平均值的数目是可以控制的($<n^3/6$)。于是 *Ritchken*、*Sankarasubramanian* 和 *Vijh* 认为基于几何平均的美式期权可以定价，只要假设基于算术平均的美式和欧式期权之间的差异与基于几何平均的美式与欧式期权之间的差异相同。他们对基于算术平均的美式期权的定价为：

$$C_{ea} + C_{ag} - C_{eg}$$

其中 C_{ea}是基于算术平均的欧式期权的价值，C_{ag}是基于几何平均的美式期权的价值，而 C_{eg}是基于几何平均的欧式期权的价值。C_{ag}可通过上面谈到的树图技术来求出，C_{ea}和 C_{eg}可使用本章中前面提到的蒙特卡罗模拟或解析近似计算方法来求出。*Hull* 和 *White* 还提出了另一种方法，它是图 16.2 方法的扩展。

16.4　基于两个相关资产的期权

另一项棘手的数值问题是给基于两种或更多资产的美式期权进行定价。一种处理这类问题的通常作法是 *Hull* 和 *White* 提出来的。他们的方法包括定义新的不相关变量。考虑两种资产，S_1 和 S_2，在风险中性世界中存在以下过程：

$$dS_1 = rS_1dt + \sigma_1 S_1 dz_1$$
$$dS_2 = rS_2dt + \sigma_2 S_2 dz_2$$

其中在维纳过程中 dz_1 和 dz_2 的瞬间相关系数为 ρ。这意味着：

$$d\ln S_1 = (r - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dz_1$$
$$d\ln S_2 = (r - \sigma_2^2/2)dt + \sigma_2 dz_2$$

我们定义两种新的不相关变量：

$$x_1 = \sigma_2 \ln S_1 + \sigma_1 \ln S_2$$
$$x_2 = \sigma_2 \ln S_1 - \sigma_1 \ln S_2$$

这些变量遵循如下过程：

$$dx_1 = [\sigma_2(r - \sigma_1^2/2) + \sigma_1(r - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1+\rho)}dz_A$$

$$dx_2 = [\sigma_2(r - \sigma_1^2/2) - \sigma_1(r - \sigma_2^2/2)]dt + \sigma_1\sigma_2\sqrt{2(1-\rho)}dz_B$$

其中 dz_A 和 dz_B 是不相关的维纳过程。这两个变量可以使用两个单独的二叉树图来建模，二叉树图中，在 Δt 时间内，x_i 的上升 h_i 的概率为 p_i，下降 h_i 的概率为 $1-p_i$。选择合适的变量 h_i 与 p_i 使得树图对 x_1 和 x_2 分布前两项给出正确的定价。由于变量是不相关的，这两个二叉树可以合并为一个三叉树图，在时间 Δt 内，x_1 和 x_2 移动的概率为：

p_1p_2：	x_1 增加了 h_1 并且 x_2 增加了 h_2
$p_1(1-p_2)$：	x_1 增加了 h_1 并且 x_2 减少了 h_2
$(1-p_1)p_2$：	x_1 减少了 h_1 并且 x_2 增加了 h_2
$(1-p_1)(1-p_2)$：	x_1 减少了 h_1 并且 x_2 减少了 h_2

在该树图的每一个结点上，S_1 和 S_2 可以使用以下的互逆关系式从 x_1 和 x_2 计算得出：

$$S_1 = \exp\left[\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right]$$

$$S_2 = \exp\left[\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_1}\right]$$

我们从三个方向沿树图滚动倒推，可以求出衍生证券的价格。

16.5 套期保值讨论

在交易新型期权之前，对金融机构而言，重要的是不仅评估它的定价过程，而且应明确在对它进行套期保值时可能遇到的困难。

某些新型期权利用标的资产比利用相应的大众化期权更容易进行套期保值。例如一份平均价格期权，其平均时期是期权的整个生命期，标的资产是股票价格。随着时间流逝，我们观察了越来越多的构成最终平均价格的股价，而收益就建立这个最终平均价格上。这意味着随着时间的增长，我们获得收益的不确定性降低了。因此，该期权变得越来越容易对冲了。在最后几天里，该期权的 *delta* 值通常接近于零，因为最后几天的价格移动对收益的影响微乎其微。

在某些特定情况下，障碍期权比常规期权更难以对冲。考虑一个敲出货币看涨期权，其汇率高出障碍 0.0005。若遇到了该障碍，则期权一文不值。若没有碰到该阻碍，则期权将十分值钱。该期权的 *delta* 值不连续，因此套期保值很困难。

16.6　小　结

新型期权是其支配收益的规律比标准期权更加复杂的一类期权。我们已讨论了 11 种不同类型的新型期权：打包期权、非标准美式期权、远期开始期权、复合期权、任选期权、障碍期权、两值期权、回望期权、亚式期权、资产交换期权以及包含几种资产的期权。将我们已开发出来的欧式和美式看涨期权和看跌期权的定价方法直接扩展，我们可以对其中有些期权进行定价。还有一些可以进行解析定价，但需采用比常规欧式看涨期权和看跌期权复杂得多的公式来运算。还有一些使用特殊数值方法。

收益依赖于标的资产的整个移动路径以及标的资产最终价值的美式期权对于分析家而言是一种特殊的挑战。若收益依赖于一种标的资产运行路径的特殊函数，并且在树图中每个结点上这个函数不同值的数目不会增长过快，就有可能采纳第十四章中描述的二叉树法来处理这个问题。美式回望期权和基于某个资产的几

何平均价格的美式期权可以采用这种方式来定价。

对依赖于两种相关资产价格的期权的一种简易定价方法是采用转换策略并创造两个不相关的初始变量。这两个变量可分别用二叉树来建模。然后将这两个二叉树合并为一个三叉树。在该树图的每个结点上,转换的倒数给出了资产价格。

一些新型期权比起对应的常规期权来说易于对冲;而另一些就难得多。一般来说,亚式期权易于对冲,因为越接近到期日,期权的收益就越确定。障碍期权就更难以对冲了,因为它的 *delta* 值可能是不连续的。

第十七章

Black－Scholes 期权定价的几种方法

本章中我们将考虑一些变形方法，这些方法都是假设股票价格的运动为几何布朗运动。当波动率和利率为时间的已知函数时，对 Black－Scholes 模型必须进行必要的调整，我们就从这种调整入手，然后进一步考虑其它各种模型。这些模型包括：标的变量遵循一种跳跃过程而不是连续变化过程的模型；波动率变化是随机的模型。在实际情况中，当股票价格变化与这些模型中的某一种相对应时，使用 Black－Scholes 公式将会产生定价偏差，我们就讨论所观测到的这个定价偏差。这一章简要地总结归纳了某些有关期权定价的经验检验研究，并扼要讨论了操作者使用 Black－Scholes 模型时允许出现的误差。为了便于描述，本章中涉及的大多数结论是关于不支付红利股票期权的定价，但许多关于定价偏差的讨论同样可以用于股票指数期权、货币期权和期货期权。

17.1 利率和波动率变化已知的修正

当无风险利率为时间的已知函数时，为欧式股票看涨期权和看跌期权进行定价的 Black－Scholes 公式应该修正，其方法就是

用期权剩余有效期内平均瞬态无风险利率来替代 r。类似地，当波动率是时间的已知函数时，Black－Scholes 公式应该用期权剩余有效期内方差的平均值替代方差，σ^2 进行修正。

这些结论都可用风险中性定价方法推导出来。在某些情况下这些结论很有用。若股票的波动率预期在期权有效期内稳定地从20%上升到30%（也许即将到来的总统选举引起了这种不确定性），在对期权定价时，则适当的波动率就大约为25%（注：设定 σ^2 等于期权有效期内的平均方差与设定 σ 等于该期间的平均波动率并不相同。在这个例子中，如果波动率线性地从每年20%增加到每年30%，σ 的正确的值应该是每年25.17%）。同样的，若利率期限结构表明在期权有效期内利率有可能会改变，在选择 r 时就应当考虑这一点。通常设定 r 等于一种与期权同时到期的无风险证券的利率，而不是当前瞬间利率。

17.2 Merton 随机利率模型

Merton 考虑了利率是随机变量时的期权定价模型。定义 B(t)为与期权同时到期且到期时支付给持有人 $1 的贴现债券的价值。Merton 假设 B 遵循以下过程：

$$\frac{dB}{B} = \mu_B dt + \sigma_B dz_B$$

变量 μ_B 是债券价格的增长率，它是随机变量；σ_B 是 B 的波动率，它假定为时间的已知函数；dz_B 是维纳过程。这一模型与十五章中的 Vasicek、Ho－Lee 和 Hull－White 利率模型是一致的。Merton 得出的欧式看涨期权与看跌期权的价格如下：

$$c = SN(d_1) - BXN(d_2)$$

$$p = BXN(-d_2) - SN(-d_1)$$

这里

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) - \ln B + (\bar{\sigma}^2/2)(T-t)}{\bar{\sigma}\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \bar{\sigma}\sqrt{T-t}$$

$$\bar{\sigma}^2(T-t) = \int_t^T (\sigma^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma\sigma_B)dt \qquad (17.1)$$

参数 σ 是股票的波动率且 ρ 为股票价格与债券价格之间的瞬间相关系数。

变量 B(t)为：

$$B(t) = e^{-R(T-t)}$$

其中 R 为 T 时刻到期的无风险债券的利率。如果：

1. 瞬时利率 r 由利率 R 取代，此利率为与期权同时到期的无风险债券的利率。

2. 股票价格波动率 σ 被 $\bar{\sigma}$ 所取代[参见公式(17.1)]。则 Merton 模型与 Black－Scholes 模型是一样的。

Merton 的模型支持使用 R，而不是 Black－Scholes 模型中的 r。在大多数可交易的期权中 $\bar{\sigma}$ 接近于 σ[①]。因此波动率的调整对于期权价格几乎没有影响[②]。

Merton 模型存在一个理论缺陷。它要求贴现债券的波动率为时间的已知函数。在许多有关利率的模型中(例如第十五章中的 Cox、Ingersoll 和 Ross 模型)，债券价格的波动率是债券价格本身和时间的二元函数。

17.3 偏差的定价

欧式股票期权定价的关键因素是最终股票价格分布。到目前

为止我们一直假设它是对数正态分布的。在这一节中我们考虑偏离对数正态分布的影响。通常采用的方法与 Jarrow 和 Rudd 所使用的方法类似。

图 17.1 表示了四种分布状态，其中，真实的最终分布可以不同于对数正态分布，但股票价格收益的均值和标准差相同。在图 17.1(a)中，两条拖尾曲线都比对数正态分布的要窄；在图 17.1(d)中，两条拖尾曲线都比对数正态分布要宽；在图17.1(b)与

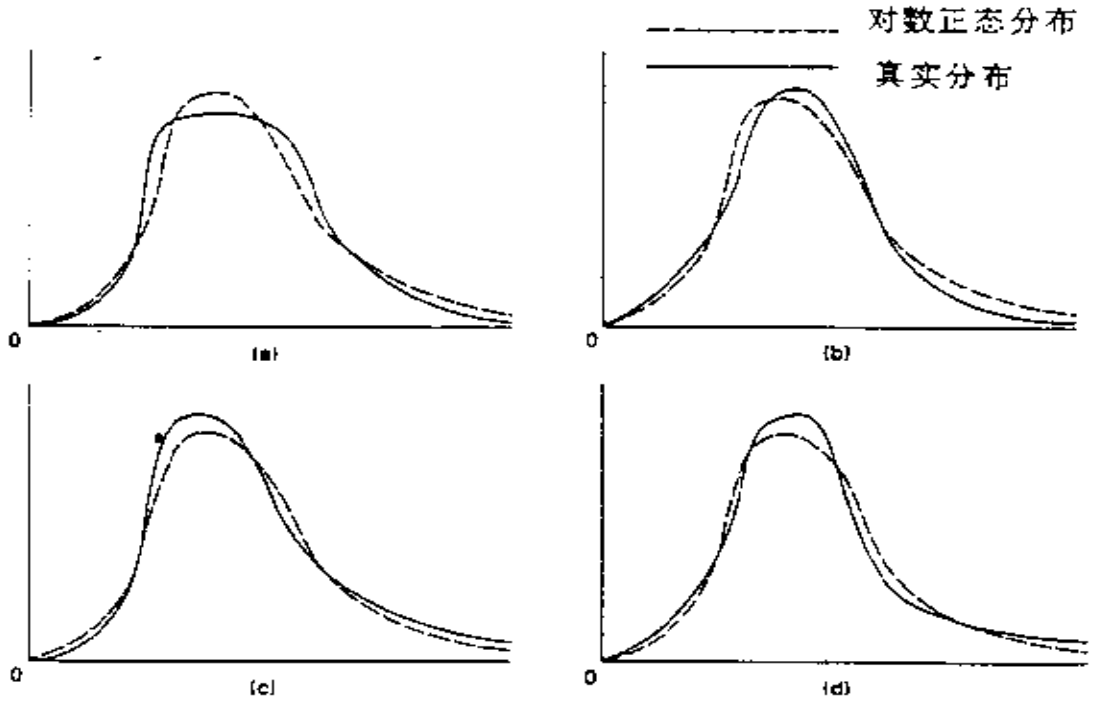


图 17.1 几种到期时股票价格分布图虚线是对数正态分布；实线是其实分布

17.1(c)中，一条拖尾曲线比对数正态分布要窄而另一条拖尾曲线要比对数正态分布宽一些。

如果在这四种情况下用 Black－Scholes 模型进行期权定价，我们必须考虑可能出现的偏差。首先考虑某个处于较大深度的虚值状态的看涨期权。只有在股票价格有大幅度上升时它才有可能变为正值。那么它的价值仅仅依赖于最终股票价格分布的右半部拖尾曲线。这条拖尾曲线越宽，该期权的价值就越高。因此，Black－Scholes 模型将会低估图 17.1(c)和(d)中处于虚值状态的看涨期权的价格，且高估图 17.1(a)和 17.1(b)中处于虚值状态的看涨期权的价格。考虑另一种处于较大深度虚值状态的看跌期权。只有当股票价格大幅度下跌时它才有可能变为正值。那么它的价值仅仅依赖于最终股票价格分布的左半部拖尾曲线。这条拖尾曲线越宽，该期权价值就越高。因此，Black－Scholes 模型将会低估图 17.1(b)和(d)中处于虚值状态的看跌期权的价格，且高估图 17.1(a)和 17.1(c)中处于虚值状态的看跌期权的价格。

为了获得处于实值状态的期权定价的偏差，我们利用看跌期权与看涨期权之间的平价关系式。按照通常用到的符号含义，看跌期权与看涨期权之间的平价关系式(参见 7.6 节)为：

$$p + S = c + Xe^{-r(T-t)}$$

这一关系独立于最终股票价格分布的形状。若价格为 c 的欧式看涨期权是处于虚值状态，则相应的价格为 p 的欧式看跌期权是处于实值状态，反之亦然。因此，处于实值状态的欧式看跌期权与处于虚值状态的欧式看涨期权具有相同的定价偏差。类似地，处于实值状态的欧式看涨期权与处于虚值状态的欧式看跌期权有着相同的定价偏差。这些偏差归纳在表 17.1 中。

表 17.1 图 17.1 中几种不同股票价格分布的相应偏差

分布	特性	偏差
图 17.1(a)	两条拖尾都窄	Black－Scholes 高估虚值与实值看涨期权和看跌期权的价格。
图 17.1(b)	左边拖尾宽，右边拖尾窄	Black－Scholes 高估虚值看涨期权与实值看跌期权的价格，低估虚值看跌期权与实值看涨期权的价格。
图 17.1(c)	左边拖尾窄，右边拖尾宽	Black－Scholes 高估虚值看跌期权与实值看涨期权的价格，低估实值看跌期权与虚值看涨期权的价格。
图 17.1(d)	两条拖尾都宽	Black－Scholes 低估虚值与实值看涨期权和看跌期权的价格

17.4 几个模型

在这一节中我们讨论与 Black－Scholes 模型有关的几种方法，并解释它们怎样导致了上一节中提到的偏差。

随机的波动率

当实际操作者在运用 Black－Scholes 定价公式为期权定价时，他们经常改变波动率。因此很自然的，人们就尝试开发允许股票价格波动率为随机数的模型。Hull 和 White 考虑了这一问题。他们指出，当波动率与股票价格不相关时，欧式期权的价格是 Black－Scholes 价格在期权有效期内平均方差率分布上的积分值。于是欧式看涨期权价格为：

$$\int c(\bar{V})g(\bar{V})d\bar{V}$$

其中 $\bar{V}$ 是方差率 σ^2 的平均值，c 为以 $\bar{V}$ 的函数表示的 Black－Scholes 价格；g 为 $\bar{V}$ 的概率密度函数。他们指出 Black－Scholes 公式高估了处于平价或接近平价状态的期权的价格，且低估了处于深度实值状态或处于深度虚值状态的期权的价格。

在股票价格与波动率瞬时相关的情况下，Hull 与 White 指出如何运用蒙特卡罗模拟方法或一系列扩展方法来得出期权价格。当相关系数为正时，情形如图 17.1(c)所示。Black－Scholes 模型趋向于低估处于虚值状态的看涨期权的价格和高估处于虚值状态的看跌期权的价格。原因如下：当股票价格上升时，波动率趋向于上升。这意味着很高的股票价格比在几何布朗运动中更容易出现。当股票价格下降时，波动率趋向于下降。这意味着极低的股票价格出现的次数比在几何布朗运动中出现的次数要少。

当相关系数为负时，情形如图 17.1(b)所示。Black－Scholes 趋向于高估处于虚值状态的看涨期权的价格和低估处于虚值状态的看跌期权的价格。这是因为，当股价上升时，波动率趋向于下降，使很高的股票价格难以达到；而当股价下降时，波动率趋向于上升，使极低的股票价格更易达到。

对于持有期小于一年的期权，由随机波动率引起的期权定价偏差从绝对值上看是非常小的。对于处于深度虚值状态的期权而言，用百分比来衡量时，该偏差可能相当大。当期权有效期增加时，偏差增大了。

复合期权模型

一家举债公司的权益可以看作为基于该公司价值的看涨期权。为了认清这一点，假设公司的价值为 V 且流通债券的面值为 A。进一步假设所有债务在 T^* 这个单一时刻同时到期。若在 T^* 时刻 $V<A$，则此时的权益价值为零，因为所有公司资产都付给了债券持有人。若在 T^* 时刻 $V>A$，则此时权益价值为 $V-A$。于

是权益相当于基于 V 的欧式看涨期权，其到期日为 T^* 且执行价格为 A。

在 T^* 时刻之前到期的基于该公司股票的期权可看作是基于 V 的期权的期权或是一种复合期权模型（参见第十六章）。Geske 分析了这一模型。基于股票期权价值的状态变量是公司价值 V，而不是股票价格 S。Geske 假定 V 的波动率 σ_V 不变且债务数额 A 也不变。S 的波动率与 V 负相关。当 V 下降时，杠杆率上升且 S 的波动率上升。当 V 增加时，杠杆率下降且 S 的波动率下降。从有关随机波动率的讨论中可以看出，这意味着定价偏差与图 17.1(b)的情况相符。与 Black－Scholes 模型相仿，复合期权模型高估了处于虚值状态看涨期权的价格和处于实值状态的看跌期权的价格，也低估了处于实值状态看涨期权的价格和处于虚值状态看跌期权的价格。

在 Geske 的模型中，Black－Scholes 公式中的 S 成为 V 的函数：

$$S = VN(d_1) - Ae^{-r(T^*-t)}N(d_2) \qquad (17.2)$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln(V/A) + (r + \sigma_V^2/2)(T^* - t)}{\sigma_V\sqrt{T^* - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T^* - t}$$

使用复合期权模型给欧式看涨期权定价的公式在附录 17A 中给出。它比 Black－Scholes 公式复杂，因为它需要知道关于债券面值和到期的条件。

转移扩散模型

Rubinstein 提出了所谓的转移扩散模型（displaced diffusion

model)的股票期权定价理论。这一模型中,假设公司持有两类资产:波动率为常数的风险资产;收益为 r 的无风险资产。此外还假设有一个固定数量的无违约风险的债券。若 α 是公司总资产中风险资产的起始份额,β 是起始债务与权益的比率,模型中一个关键参数 a 定义为:

$$a = \alpha(1 + \beta)$$

若 a>1,则转移扩散模型中的债务数量超过了无风险资产数量。在债务中减去无风险资产后,该模型变得与复合期权模型很相似,且产生对应于图 17.1(b)情形的偏差。与复合模型不同的是,转移扩散模型没有考虑债务违约的可能性。在资产价值小于债务面值的情况下,该模型假定权益的价值为负。

若 a<1,则债务数量小于无风险资产的数量。于是该模型的特性明显地与复合期权的特性大不相同。从无风险资产中减去债务后,我们发现:

$$S = S_A + S_B$$

其中 S 为股票价格,S_A 为风险资产的价值,S_B 为无风险净资产的价值。当 S_A 迅速增加时,S 增加且 S 的波动率也增加。这是因为风险资产在 S 中的比例份额更大了。同样,当 S_A 迅速下降时,S 与 S 的波动率也下降。它遵循着波动率与股票价格正相关的原则。从有关随机波动率的讨论中可以知道,这意味着对应图 17.1(c)情形的偏差。

使用转移扩散模型定价欧式看涨期权的公式在附录 17A 中给出。我们将回忆起在支付已知红利的期权定价中,我们假定股票价格能够分割为用来支付红利的无风险部分与具有稳定波动率的风险部分。这是拥有零债务的转移扩散模型的特例。

波动率的弹性为常数模型

波动率的弹性为常数模型(constant elasticity of variance model)是 Cox 与 Ross 提出的。在这一模型中,对满足 $0 \leqslant \alpha < 1$ 的 α 而言,股票价格波动率为 $\sigma S^{-\alpha}$③,因此当股价上升时波动率下降。

波动率的弹性为常数模型的基本原理是所有公司都存在与经营业绩无关的固定成本。当股票价格下降时,我们可以设想公司的经营业绩下降,且固定成本具有增加波动率的效果。当股票价格上升时,相反的情况发生了,固定成本具有减小波动率的效果。一种类型的固定成本是由财务杠杆引起的。一般来说,波动率的弹性为常数模型与复合期权模型相似。一般的波动率的弹性为常数模型的期权定价公式是相当复杂的,在本书中不再重复。由于波动率与股票价格负相关,第 17.3 节中的论述表明其定价偏差符合图 17.1(b)的情形。

当 $\alpha = 1$,股票价格的波动率与股票价格成反比。这是波动率的弹性为常数模型的简化情况,即所谓的绝对扩散模型(absolute diffusion model)。绝对扩散模型为欧式看涨期权定价的公式列在附录 17A 中。该模型很容易使用。不幸的是,该模型的缺点是允许股票价格为负值。

纯粹跳跃模型

以上三节中的模型所包括的股票价格是连续变动的。现在我们来考虑一种股票价格遵循跳跃过程的模型。该模型首先由 Cox 和 Ross 提出,在 Cox、Ross 和 Rubinstein 后来的论文中有详细的描述。这一模型如图 17.2 所示。在每一微小时间间隔 Δt 中,股票价格从 S 变为 S_u 的概率为 $\lambda \Delta t$,且从 S 变为 $Se^{-\omega \Delta t}$ 的概率为 $1 - \lambda \Delta t$。大多数时间内,股票价格以速率 ω 下降。然而,偶而它也以当前股价的 $u - 1$ 倍跳跃。

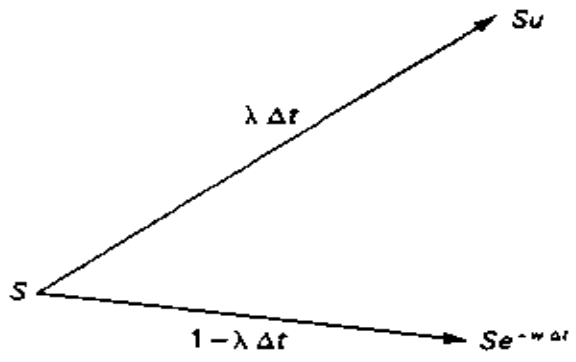


图 17.2 在纯粹跳跃模型中的股票价格

当 $\Delta t \to 0$ 的极限情况下，跳跃以频率 λ 按泊松过程(Poisson process)进行。最终股票价格分布为对数泊松分布，且看涨期权的价格在附录 17A 中给出。很容易看出纯粹跳跃模型导致了图 17.1(c)中的情形。还存在争论的一点是，模型中的跳跃只能为正的假设是不现实的。

跳跃扩散模型

Merton 提出了一种模型，在股票价格几何布朗运动之上加了各种跳跃。定义：

μ：股票预期回报

λ：跳跃发生频率

κ：平均跳跃幅度占股票价格上升幅度的比率

跳跃幅度的比例假定从该模型的概率分布中抽取。由跳跃带来的平均增长率为 $\lambda\kappa$。这意味着几何布朗运动提供的预期增长

率为 $\mu-\lambda\kappa$[④]

Merton 所作出的关键假设是股票收益的跳跃成分代表了非系统性风险(即经济学中没有进行定价的风险)[⑤]。这意味着 Black－Scholes 形式的证券组合,消除了几何布朗运动带来的不确定性后,应获得无风险利率。这引出了附录 17A 中的定价公式。

正如人们预期的那样,跳跃过程导致了比连续过程更宽的拖尾曲线。在 Merton 的模型中,跳跃可正亦可负。因此这一模型导致了图 17.1(d)的情形。当它们是处于深度实值状态或是处于深度虚值状态时,Black－Scholes 公式低估了看涨期权和看跌期权的价格。

17.5 定价偏差的回顾

表 17.2 总结了以上几节中得出的结论。除了按最终股票价格分布归类以外,当到期时间增加时,各种模型也可以按定价偏差是上升还是下降来分类。随到期期限增加,随机波动率引起的偏差占期权价格的比例也上升。理由不难理解。随着我们考虑的期期限增加,股票价格分布标准偏差的波动率影响增大,同样,随着我们考虑的期期限增加,由于波动率的不确定性引起的分布扭曲进一步变大了。由于类似的原因,随着到期期限的增加,复合期权模型中的偏差就更加显著了。

当期权离到期日的时间很短时,跳跃情形发生了变化,即跳跃产生的效果不是按比例增长了。当我们对未来看得足够远时(期限足够长时),跳跃趋向于平均化(averaged out)以致于跳跃产生的股价分布几乎与连续变化产生的股票价格分布没有差别了。

表 17.2 按最终股标价格分布形状对各种模型进行分类

图 17.1(b)	图 17.1(c)	图 17.1(d)
复合期权模型	a<1 时的转移扩散模型	跳跃扩散模型
a>1 时的转移扩散模型	纯粹跳跃模型	当股票价格与波动率为零相关时的随机波动率模型
波动率的弹性为常数的模型	当股票价格与波动率为正相关时的随机波动率模型	
当股票价格与波动率为负相关时的随机波动率模型		

17.6 实证研究

在运用实证研究来测试 Black－Scholes 模型和其它期权定价模型时出现了一系列问题。第一个问题是:关于期权如何定价的任何统计假设必须是反映如下两个条件的一种联合假设:(1)期权定价公式是正确的;且(2)市场是有效的。如果拒绝这些假设,情况将会变为:条件(1)不真实;条件(2)不真实;或条件(1)和条件(2)都不真实。第二个问题是股票价格波动率是一个不可观察的变量。一种方法是从股票价格的历史数据估计其波动率。另一种方法是按某些方式使用隐含波动率。研究者遇到的第三个问题是确认股票价格与期权价格的数据是同时的。例如,若期权交易范围小,则将期权收盘价格与股票收盘价格进行相应的比较就行不通。这是因为期权收盘价格可能是对应于下午 1:00 时的交易价格,而股票收盘价格是对应于下午 4:00 时的交易价格。

Black 与 Scholes 以及 Galai 已对购买被市场低估(相对于理论价格而言)的期权和出售被市场高估(相对于理论价格而言)的期权是否可能获得高于无风险利率的回报进行了测试。假定可以按如 13.5 节中所述的通常价差交易标的股票,并使得某个无风险的 delta 中性的有价证券组合在任何时间得以维持。Black 和 Scholes 选用了柜台交易(OTC)的期权市场的数据,其中期权不受红利分配的影响。Galai 使用了芝加哥期权交易所(CBOE)的数据,其中期权是受到现金红利分配的影响。Galai 使用了 10.14 节所述的 Black 近似方法,将预期红利影响并入期权价格中。两种研究都表明,在无交易成本时,通过购买低估期权和出售高估期权可以获得明显高于无风险利率的回报。有可能这些超额回报都落入了做市商(market maker)手中,一旦考虑交易成本,超额回报就消失了。

许多研究者没有对股票价格遵循的过程进行假设,他们对套利策略能否在期权市场中赚取无风险收益进行了测试。Garman 提供了一套非常有效的计算程序,该程序可以发现在给定情况下的套利机会。Klemkosky 与 Resnick 测试了公式(7.9)中的关系是否总是成立。人们经常引用他们的研究结论,他们得出的结论是运用这个关系可以获得少量的套利利润,其主要原因是市场高估美式看涨期权价格。

Chiras 与 Manaster 采用 CBOE 的数据进行了一项研究,它将一个时点上股票期权的加权隐含波动率与从历史数据计算得出的波动率进行了比较。他们发现在期权有效期内前者预测股票价格波动率的效果更好。这一研究也被其他研究者使用其他数据重复过,且通常都获得了相似的结论。我们可以得出结论,期权交易者在判断未来波动率时不仅仅只使用了历史数据。Chiras 和 Manaster 还观测了购买低隐含波动率的期权和出售高隐含波动率的期权是否会赚取超过平均水平的回报。这种策略显示了每月 10% 的利润。Chiras 和 Manaster 的研究为 Black－Scholes 模型提

供了良好的支持，同时也表明 CBOE 在某些方面是非常有效的。

MacBeth 和 Merville 用一种不同的方法测试了 Black－Scholes 模型。他们观察了同一时间基于同种股票的不同看涨期权，比较了这些期权价格的隐含波动率。入选的股票是 AT&T、Avon、Kodak、Exxon、IBM 和 Xerox，所考虑的时间期限在 1976 年。他们发现隐含波动率对于实值期权来说相对高一些，而对于虚值期权来说相对低一些。相对高的隐含波动率表示相对高的期权价格，相对低的隐含波动率表示相对低的期权价格。因此，若假定 Black－Scholes 模型的平价期权价格是正确的，则可以得出 Black－Scholes 模型高估了处于虚值状态的看涨期权的价格且低估了处于实值状态的看涨期权的价格。当期权有效期限增加且期权处于实值状态或处于虚值状态的程度上升时，这种效果就更加明显了。MacBeth 和 Merville 的结论与 $a>1$ 时转移扩散模型、复合期权模型、绝对扩散模型和当股票价格与波动率为负相关时的随机波动率模型是一致的。

Rubinstein 进行了一项类似于 MacBeth 和 Merville 的研究，但使用了更广泛的数据集合和不同的时间期限。他观察了 1976 年 8 月 23 日至 1978 年 8 月 31 日 CBOT 中 30 种最活跃的期权的所有交易，并特别考虑了加入红利与提前执行的影响。Rubinstein 将一对对看涨期权的隐含波动率进行对比，每一对看涨期权中或者是执行价格不同，或者是到期时间不同。他发现他所研究的时期可以很容易的分为两个子阶段：1976 年 8 月 23 日至 1977 年 10 月 21 日，1977 年 10 月 22 日至 1978 年 8 月 31 日。在第一个阶段，他的结论与 MacBeth 和 Merville 是一致的。然而在第二个阶段，产生了与 MacBeth 和 Merville 相反的结论：即处于虚值状态的期权的隐含波动率相对高一些，而处于实值状态的期权的隐含波动率相对低一些。从整个时期来看，Rubinstein 发现对处于虚值状态的期权而言，到期期限短的期权的隐含波动率明显高于到期

期限长的期权的隐含波动率。这些结论结论对处于平价状态的期权和处于实值状态的期权来说就不那么明显了。

似乎没有一种单独的 Black－Scholes 修正模型可以完美地解释 Rubinstein 的两个时期。实际上，很难设想有一种模型可以解释第一阶段与第二阶段之间已观测到的偏差变化。可能宏观经济变量对期权价格的影响方式还未被完全理解。目前，还没有任何真正强有力的证据认为本章前面所介绍的任何模型应优先于 Black－Scholes 模型来使用。

许多作者研究了基于资产而不是基于股票的期权定价。例如，Shastri 和 Tandon，以及 Bodurtha 和 Courtadon 都检验了货币期权的市场价格；Shastri 和 Tandon 在另一篇文章中已检验了期货期权的市场价格；Chance 已检验了指数期权的市场价格。这些作者发现 Black－Scholes 模型及它的扩展对某些期权的估价是错误的。似乎有证据表明货币运动遵循跳跃过程。然而，在大多数情况下，当考虑交易成本和买卖价差时，错误的定价不足以为投资者提供盈利机会。Shastri 和 Tandon 在两篇论文中指出，即使是对做市商而言，在确认盈利机会与实际采取行动之间还有一段时间延迟。这种延迟，即使只针对下一次交易，也足以丧失盈利机会。

在一项有趣的研究中，Lauterbach 和 Schultz 调查了认股权证的定价。他们发现偏差与图 17.1(b)的情形一致。$\alpha=0.5$ 的波动率的弹性为常数模型比 Black－Scholes 模型更符合有关的数据。从表 17.2 中我们看到，Lauterbach 和 Schultz 的结论与复合期权定价模型、$a>1$ 时的转移扩散模型、当股票价格与利率为负相关时的随机波动率模型也是一致的。他们的结论在 10 年的时间期限内都是有效的。

17.7 在实际中如何利用这些模型

使用 Black－Scholes 模型的操作者认识到该模型还不够完美。一种普通的方法是建立一个波动率的矩阵，其中一个坐标是执行价格，另一个坐标是距离到期日的时间。对于交易活跃的期权而言，波动率隐含在市场价格中。这就确定了矩阵中某些点，矩阵中的其余的点可以用内插方法来确定。

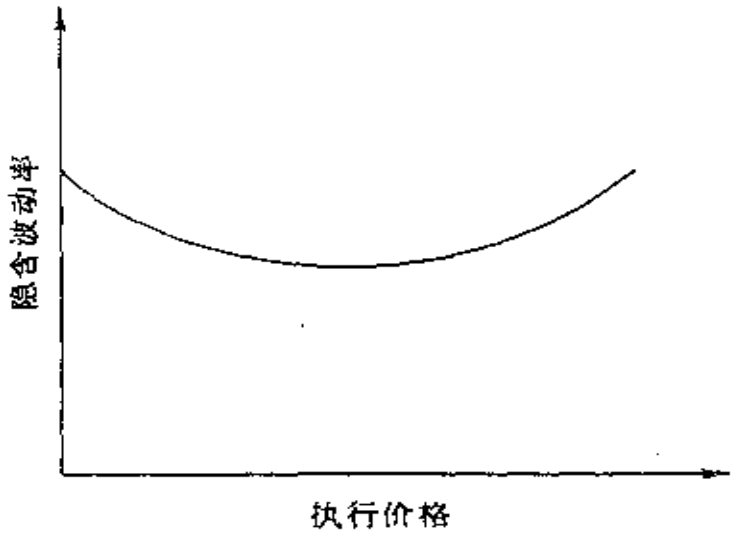


图 17.3 波动率的微笑

当矩阵显示出操作者观测到符合图 17.1(d)的偏差时，操作者有时把它称为波动率的微笑(volatility smile)现象。这种称呼的原因可以很清楚地从图 17.3 中得出，该图中表示了隐含波动率与执行价格的关系。

如果操作者准备对每种交易使用一种不同的波动率，所使用的定价模型的重要性何在呢？有说法认为，模型只是用以理解波

动率环境以及给流动性差的证券定出与交易活跃证券一致的市场价格的一种简单工具。如果操作者停止使用 Black－Scholes 模型且转换到使用波动率的弹性为常数的模型，波动率的矩阵将会改变，微笑形状也就改变了——但是市场报价将不会明显地改变。

17.8 小 结

Black－Scholes 模型和它的扩展假定股票价格在任何给定的未来时间的概率分布是对数正态分布。如果这一假设不正确，那么模型给出的价格就可能存在偏差。若真实分布的右侧拖尾比对数正态分布的右侧拖尾要宽，Black－Scholes 模型将趋向于低估处于虚值状态的看涨期权和处于实值状态的看跌期权的价格。若真实分布的左侧拖尾比对数正态分布的左侧拖尾要宽，则 Black－Scholes 模型趋向于低估处于虚值状态的看跌期权和处于实值状态的看涨期权的价格。当两侧的拖尾都比对数正态分布两侧拖尾窄时，就会出现相反的偏差。

存在许多 Black－Scholes 的修正模型。这些模型中，有的模型假设股票价格未来波动率是不确定的，有的模型假设公司权益为基于该公司资产的期权，也有的模型假设股票价格经历的是偶尔跳动而不是连续变动。这些模型可以按它们引起的偏差分类。有意思的是由跳跃引起的偏差在期权有效期增长时明显减弱了，而其它方式引起的偏差在期权有效期增长时明显增强了。

总之，已开展的经验研究支持了 Black－Scholes 模型。它是一个经得起时间考验的模型。我们已经观测到了市场价格与 Black－Scholes 价格之间的差异，然而，这些差异与交易成本相比较时通常是微小的。

附录 17A:几个模型的定价公式

在这个附录中,我们给出本章所考虑模型的欧式看涨期权的定价公式,仅供参考。欧式看跌期权价格可利用看跌期权与看涨期权之间的平价关系从看涨期权价格中求得。

复合期权模型

基于无红利支付股票的欧式看涨期权的价值为:

$$c = VM\left(a_1, b_1; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Ae^{-r\tau_2}M\left(a_2, b_2; \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\right) - Xe^{-r\tau_1}N(a_2)$$

其中

$$a_1 = \frac{\ln(V/V^*) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_1}{\sigma_V\sqrt{\tau_1}}$$

$$b_1 = \frac{\ln(V/A) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\tau_2}{\sigma_V\sqrt{\tau_2}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma_V\sqrt{\tau_1}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma_V\sqrt{\tau_2}$$

$$\tau_1 = T - t$$

$$\tau_2 = T^* - t$$

函数 M(a,b;ρ)是第一个变量小于 a,第二个变量小于 b,而变量之间相关系数为 ρ 的标准二维正态分布的累计概率。在附录 10B 中给出了数值计算该值的流程。变量 V^* 是在 T 时刻 S=X 时 V 的值,用数值计算方法可从(17.2)式计算得到该值。其他符

号的定义如 17.4 节。

转移扩散模型

利用转移扩散模型得到基于股票的欧式看涨期权的价格如下：

$$c = aSN(d_1) - (X - bS)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln[aS/(X - bS)] + (r - \sigma_R^2/2)(T - t)}{\sigma_R\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_R\sqrt{T - t}$$

$$a = \alpha(1 + \beta)$$

$$b = (1 - a)e^{r(T-t)}$$

在这个公式中，α 是风险资产占总资产的初始比例，β 是初始债务与股权的比率，σ_R 是风险资产的波动率。如果存在已知红利，这些红利按无风险利率计复利到 T 时刻的值应从 b 中扣除。

绝对扩散模型

利用绝对扩散模型得出的基于股票的欧式看涨期权价格为：

$$c = (S - Xe^{-r(T-t)})N(y_1) + (S - Xe^{-r(T-t)})N(y_2) + v[n(y_1) - n(y_2)]$$

其中

$$v = \sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2r(T-t)}}{2r}}$$

$$y_1 = \frac{S - Xe^{-r(T-t)}}{v}$$

$$y_2 = \frac{-S - Xe^{-r(T-t)}}{v}$$

$$n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}$$

纯粹跳跃模型

利用纯粹跳跃模型可以得到欧式看涨期权的价格为：

$$c = S\Psi(x;y) - Xe^{-r(T-t)}\Psi\left(x, \frac{y}{u}\right)$$

其中

$$\Psi(\alpha;\beta) = \sum_{i=\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\beta}\beta^i}{i!}$$

$$y = \frac{(r+w)(T-t)u}{u-1}$$

并且 x 是最小的非负整数，x 大于

$$\frac{\ln(X/S) + w(T-t)}{\ln u}$$

跳跃扩散模型

当按比例跳跃幅度的对数值是正态分布时，就可获得最简单形式的 Merton 跳跃扩散模型。假设正态分布标准差是 δ，于是欧式看涨期权价格为：

$$c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau}(\lambda'\tau)^n}{n!} f_n$$

其中 $\tau = T - t$ 和 $\lambda' = \lambda(1+k)$。变量 f_n 是 Black－Scholes 期权价格，而瞬态方差率为：

$$\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}$$

且无风险利率为：

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau}$$

其中 $\gamma = \ln(1 + k)$

第十八章

信用风险

当为某个衍生证券定价时，习惯于假设没有违约风险。对交易所内交易的期权，这个假设是很合理的，因为大多数交易所都很成功地组织了交易并确保这些合约能够执行。不幸的是，在 *OTC* 市场无违约的假设就不成立。近年来，这个市场日益重要起来。处理违约风险问题成为银行和银行监管者的重要活动。

银行监管者主要关心的是保证银行的资本反映了它所承担的风险。他们采用的传统方法是对诸如股权/总资产这些资产负债比率规定最低标准。近年来，由于并不出现在资产负债表中的诸如互换和期权这样的衍生证券占总风险的一个相当大的比重，传统的方法就不适用了。国际清算银行 *BIS* 提出了一个新规则，该规则已获得世界上各国中央银行广泛接受。在该规则中，每个资产负债表表内和表外的项目都指定了一个反映信用风险的权重，并对银行资本与总风险加权资产的比率设定了最低的标准。

除了保证他们满足新的资本充足要求外，金融机构面临着为反映信贷风险而调整资产负债表外项目价格的难题。他们必须保证他们的买卖价差应该大到足以补偿可能的违约。许多金融机构倾向于把信用风险分成可接受的和不可接受的两类，然后以大体相同的方式为所有的可接受的信用风险进行定价。当量化信用风

险影响的方法被广泛接受时，这有可能有所变化。

这一章讨论信用风险对衍生证券定价的影响并提供一些涉及 *BIS* 规则要求的细节。

18.1 资产暴露的性质

对在衍生证券方面产生信用损失的金融机构而言，如下两个条件必须满足：

1. 对方一定违约；并且

2. 对金融机构而言，合约的无违约价值必须为正值。

由于对持有者而言期权总是一项资产，而对出售者而言期权总是一项债务，当我们考虑期权的信用损失的可能性时，第二个条件是否满足是很明显的事情。第二个条件与互换和远期合约这样的合约有关，因为对金融机构来说互换和远期合约既可能是资产也可能是负债。当合约对对方而言有正的价值对金融机构而言有

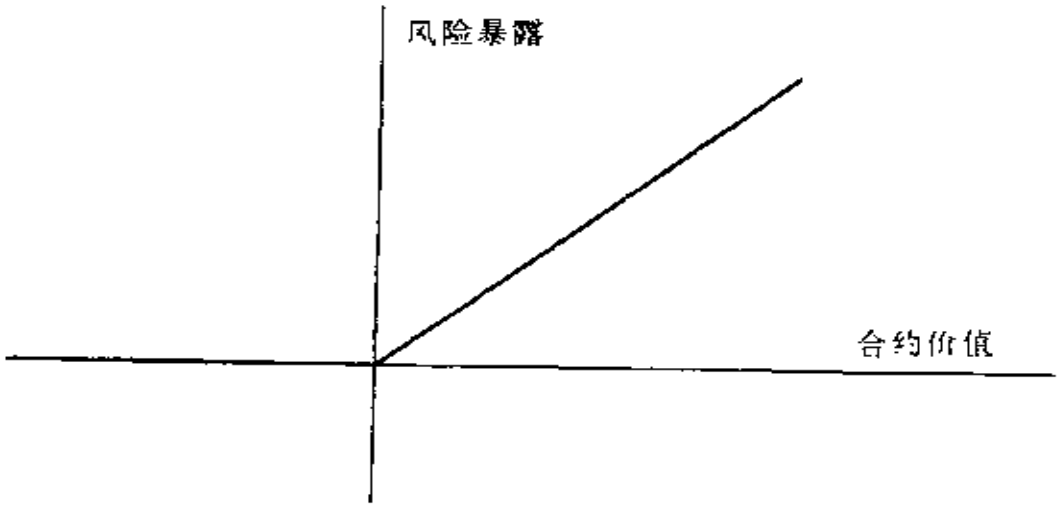


图 18.1 风险作为合约价值的函数

负的价值时，如果对方处于财务困境，只能合理假设该合约将出售给另一方或由清算者接管，此时，金融机构的头寸没有实质的变化。另一方面，当合约对对方而言有负的价值对金融机构而言有正的价值时，如果对方处于财务困境，金融机构有可能损失它在该合约中的正的价值。图 18.1 表示了这种情况。金融机构在任何给定时候的可能损失(即风险)是该合约价值的期权式函数。用代数表达该风险是：

$$\max(V,0)$$

其中 V 是合约对金融机构的无违约价值。

独立性假设

当可能违约时，对金融机构而言，两组变量影响了衍生证券的价值：

1. 在无违约世界中影响衍生证券价值的变量，和

2. 影响对方发生违约可能性和影响金融机构在违约事件中收回比例的变量。

Hull 和 *White* 按照这两组变量检验了定价期权的一般模型。这一章的结论主要是基于他们的分析。

最一般的情况下的模型很繁琐并要求全面描述这两组变量之间的关系。一个在相当程度上可简化分析的假设是情况 1 的变量独立于情况 2 的变量。除非特殊说明，本章的下一部分，我们都使用这个假设。我们将这个假设称为独立性假设(*independence assumption*)。

独立性假设是否符合现实呢？基本上，该假设要求所考虑的合约价值对对方到期时支付债务的能力影响很小。这意味着合约必须是对方资产负债组合中的很小的一个部分，或者是合约的风险必须完全由对方对冲了。实际上通常假设引起违约的变量与影

响衍生证券无违约价值的变量之间不相关。

当对方是规模庞大的金融机构时，独立性假设是合理的。一个典型 *OTC* 衍生证券的标的变量是利率、汇率、股票价格和商品价格。大多数的规模庞大的金融机构都具有复杂的系统以确保它们不要过度暴露于这些变量的任何的价值波动之中。如果它们处于财务困境，这种困境可能是来源于它们在第三世界的债务暴露、不动产暴露或受世界经济的某些其它方面影响的暴露。市场变量，特别是利率，确实影响世界经济的某些特殊部门的业绩。但是在金融机构引起某个问题到经历由此产生的任何严重困难之间，通常要经历一段较长时间。当金融机构发生违约时，几乎可认为该违约与市场变量的价值没有什么关系（一个例子也许有助于说明这一点。八十年代初期的高利率使许多部门面临困难，但对金融机构并没有造成严重的困难，不过几年后，当利率更低时却有困难了）。

当对方是一个企业时，独立性假设的合理性有可能依赖于特殊的环境。如果公司的财产与商品的价格密切相关并且衍生证券也是依商品的价格而定的，该假设是有疑问的。对一个常规的利率互换，有可能是十分合理的。

可以证明，独立性假设为估计信用风险的影响提供一个好的坚实的起点，也提供了一种基本方法将信用风险融入金融机构所使用的复杂的系统中。在假设是明显不合适的情况下，交易者通过判断可向上或向下调整信用风险的评估。

相等信用等级债券

在违约事件中如果衍生证券和债券得到风险暴露的补偿比例是相同的话，*Hull* 和 *White* 定义该债券的信用等级与衍生证券相同。他们假设收益率是已知的，或可通过信用等级与衍生证券相同的许多证券估算出来。事实上，分析中一个必要的准备工作是

构造不同信用等级债券的零息票收益率曲线。

有时认为公司债券的收益不仅仅反映了利率期限结构和违约风险。例如，*Altman* 的研究表明公司债券收益减去国库券收益后的净收益大于对它们违约经历的调整。这也许是因为市场无效率性、无流动性或其它某些因素（在我们因信用风险而调整衍生证券价格的方法中，我们没有想到反映这些因素）。为了克服这个问题，我们可以在名义债券价格基础之上进行分析，而不用市场中的债券价格，该名义债券价格是利用类似于对方信用等级的债券的实际违约经历计算出来的。

18.2　确定资产的合约

在这一节，我们考虑信用风险对合约（该合约对金融机构而言总是资产）价值的影响。为简单起见，我们假设所考虑的合约是期权多头，但是我们能够将这个结论推广到其它确定资产的合约，这些资产既可以是资产负债表内的也可以是资产负债表外的。我们将用"有违约风险"这个词描述这个期权或具有违约风险的其它证券。

欧式期权的准则

首先考虑欧式期权，定义：

f：有违约风险的欧式期权的价格

f^*：类似无违约期权的价格

B：期权出售者发行的到期日与期权相同，违约的信用等级也与期权相同的零息票债券的价格。

B^*：类似无风险债券的价格

定价准则如下：

$$f = f^* \frac{B}{B^*}$$

如果 y 和 y^* 分别是 B 和 B^* 的收益率，这可简化为：

$$f = f^* e^{-(y-y^*)(T-t)}$$

这里 T 是期权到期日。从期权出售者发行的债券收益率或从类似于期权出售者信用风险的公司发行的债券收益率中估计收益率 y。

作为定价准则的例子，考虑一个 2 年期 *OTC* 期权，无违约的价值为 $3。假设期权出售者发行的违约信用等级等于期权的 2 年期的债券收益超过类似国库券 150 个基点。违约风险将使期权的价格减小到

$$3e^{-0.015\times 2} = 2.911$$

或大约 3%。

对信用风险的这种简单调整适用于所有的在一个特殊时间点给出盈利的欧式衍生证券。因此，在我们的例子中，违约风险减少了任何衍生证券的价格，其幅度是 2 年内约 3%。

该准则的几种解释

调整准则的一种解释是当我们贴现衍生证券的盈利时，应该利用"有风险"的贴现率 y 而不是无风险的贴现率 y^*。这里必须注意，无风险利率进入 *Black – Scholes* 定价计算公式只有如下两种方式：它用于定义在风险中性世界中标的资产的期望收益率和用于贴现期望盈利。贴现时，我们可以用有风险利率替代无风险利率，但是当决定风险中性世界中期望收益率时，我们不能作这种替换。

调整准则的另一种解释如下。定义：

$\omega^*(t,\tau)$：在 t 时刻看到的 τ 时刻的瞬时远期利率，从无风险收益曲线中求出。

$\omega(t,\tau)$：在 t 时刻看到的 τ 时刻的瞬时远期利率，从与期权具有相同违约风险的债券的风险收益曲线中求出。

$\alpha(t,\tau)$：远期利率的差，$\omega(t,\tau)-\omega^*(t,\tau)$

有违约风险欧式期权等价于一个类似的无违约风险期权，有违约风险期权持有者所要求支付的数量是 $\alpha(t,\tau)$ 乘以 τ 时刻无违约风险期权的价值。因此远期利率差值是将来违约预期成本的一个重要指标。

美式期权

违约风险对美式期权的影响比对欧式期权影响更复杂。这是因为期权持有者提前执行的决定可能受到期权有效期内有关期权出售者财务状况新信息的影响。下面的例子也许有助于说明这一点。假设 X 银行出售了一个一年期无红利支付股票的看涨期权给 Y 银行，在随后的六个月中，X 银行遭受一系列众所周知的大额贷款损失。一般情况下，看涨期权不会提早执行。但是，如果在六个月末该期权正好是处于实值状态，Y 银行这时也许选择执行期权而不是等待并承受在期权到期前 X 银行被清算的风险。

违约风险对美式期权价格相应的影响小于对类似的欧式期权价格的影响。这是因为提早执行缩短了美式期权的寿命，或许会减小违约损失。另一个一般的结论是遭受违约风险的美式期权总是比类似的无违约风险的期权早执行。有趣的是，诸如无红利支付股票的看涨期权在无违约风险世界中决不会提早执行，但是在存在违约风险时有可能提早执行。当独立性假设成立时，按通常方式运用二叉树方式可以获得有违约风险美式期权价值的下限，但 τ 时刻的贴现率增加了 $\alpha(t,\tau)$。

18.3 可能是资产或负债的合约

分析诸如互换这种既可能变为资产也可能变为负债的合约比分析前面章节的合约更复杂。监管当局对互换使用的一个通常办法是将互换的平均期望暴露与本金等于互换的贷款的平均期望暴露进行比较。如果互换的平均期望暴露是贷款的平均期望暴露的5%，这表示金融机构应该要求该互换获得的盈利大约要比贷款给同样对方所获盈利多5%。

利用蒙特卡罗模拟可计算有效期内互换平均期望暴露。首先，考虑金融机构接受固定利率支付浮动利率的利率互换。将来某时刻的暴露等于

$$\max(B_{\text{固定}} - B_{\text{浮动}}, 0)$$

这里 $B_{\text{固定}}$ 是互换中固定利率债券的价格，$B_{\text{浮动}}$ 是互换中浮动利率债券的价格。由于 $B_{\text{浮动}}$ 相对而言是常数，上式类似于固定利率债券看涨期权的损益状态。其次，考虑金融机构收取本币利息和本金支付外币利息和本金的货币互换。将来某时刻的暴露等于

$$\max(B_D - B_F S, 0)$$

或

$$B_F \max\left[\frac{B_D}{B_F} - S, 0\right] \tag{18.1}$$

这里 B_F 是互换中外币债券的价格，B_D 是互换中本币债券的价格。如果假设利率为常数，B_D 和 B_F 相对而言是常数，上式类似于外币看跌期权的损益状态。

图18.2将一个配对的利率互换的期望暴露与一个配对的货

币互换的期望暴露进行了比较。利率互换的期望暴露开始为0，随后增加，然后有减少到0。相反，货币互换的期望暴露随时间的推移稳定地增加。

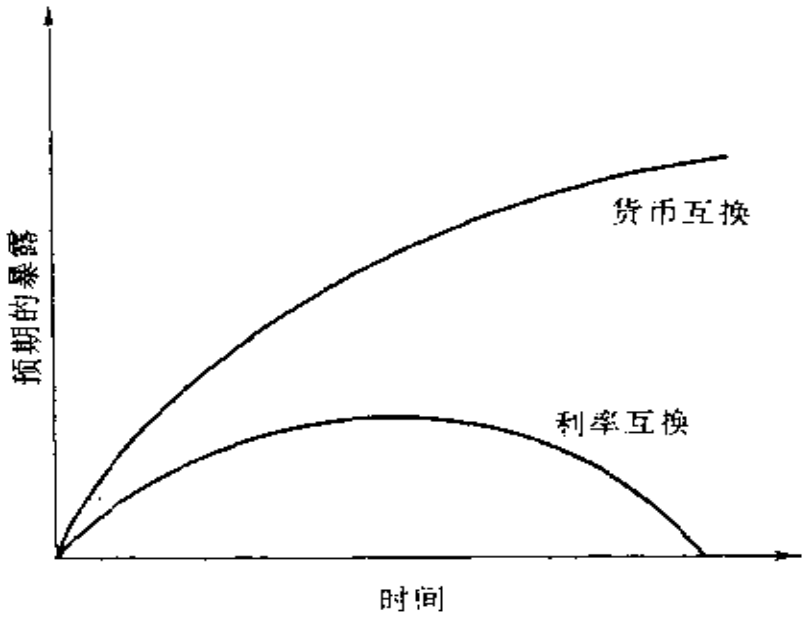


图 18.2　利率互换和货币互换的期望暴露

一个更精确方法

利用合约有效期内平均期望暴露估计一个合约的信用风险存在一些理论问题。首先，我们难以知道是应该估计风险中性世界中的暴露呢还是估计现实世界中的暴露。一个风险中性世界是容易些，但可以证明现实世界更切合实际。我们也难以知道是应该简单平均这些暴露呢还是以某种方式加权平均这些暴露。可以证明，后来的暴露应该给予较大的权重，因为随时间推移，公司财富减少，可能发生违约[①]。

解决量化违约风险影响问题的更精确的方法可通过扩展先前

部分的结论而得到。*Hull* 和 *White* 证明，当独立性假设成立时（这里我们一直假设对手可能违约，但从衍生证券定价的角度看公司并不违约），

$$f^* - f = \int_t^T v(\tau) e^{-(y_\tau - y_\tau^*)(\tau - t)} \alpha(t, \tau) d\tau \qquad (18.2)$$

其中

$$v(\tau) = \hat{E}\left[e^{-\bar{r}(\tau - t)} \max(f_\tau^*, 0)\right]$$

y_τ 和 y_τ^* 分别是在 τ 时刻到期的有违约风险和无风险债券的收益率，$\bar{r}$ 是 t 和 τ 之间的平均利率，f_τ^* 是 τ 时刻该债券的无违约风险的价值。$v(\tau)$是 τ 时刻偿清该暴露的现值。

利用蒙特卡罗模拟或前面讨论过的其它衍生证券定价方法可计算出函数 $v(\tau)$。利用数值积分从(18.2)式可计算出 $f^* - f$ 的值。

一个例子

考虑一个固定利率对固定利率货币互换，将以英镑无风险利率计算的英镑利息转换成以美元无风险利率计算的美元利息。在互换结束时本金也要换回。假设互换细节如下：

互换的有效期：5 年

支付的频率：每年

英镑本金：10000 万英镑

美元本金：10000 万美元

期初汇率：1.0000

美元无风险利率：每年 5%（假设为常数）

英镑无风险利率：每年 10%（假设为常数）

汇率的波动率：15%

我们设由对方发行的 1 年、2 年、3 年、4 年和 5 年期零息票债

券收益率分别超过对应的无风险利率 25,50,75,85 和 95 个基本点。

当该公司接收本币并支付外币时,(18.2)表明违约成本是 73 万美元;当该公司接收外币并支付本币时,违约成本是 13 万美元[②]。这一对互换价值的信用风险的影响总和是 73 + 13 = 86 万美元。因此金融机构应该要求价差的现值至少为 86 万美元。利用每年 5% 贴现率,五年内每年收取 19.8 万美元的现值为 86 万美元。由于本金是 10000 万美元,这表示在这一对互换中,总价差至少为 19.8 个基本点。

违约风险对利率互换的影响一般来说比对货币互换的影响小得多。利用类似于以上货币互换的数据,一对利率互换所要求的总价差只有 2 到 3 个基本点。

18.4 国际清算银行的资本充足要求

监管当局要求满足如下的 *BIS* 资本充足要求:

$$\frac{\text{第一类资本}}{\text{经风险调整的暴露}} > 4\%$$

$$\frac{\text{第一类 + 第二类资本}}{\text{经风险调整的暴露}} > 8\%$$

第一类资本是不包括商誉的股东的股权。第二类资本由次等债务、贷款准备金和其它类型的长期资本组成。

经风险调整的暴露等于风险调整的资产负债表内暴露和风险调整的资产负债表外暴露之和。风险调整的资产负债表内暴露等于每项资产如下值的和:

$$\text{本金} \times \text{风险权重}$$

商业贷款的风险权重是 1.0,其它类型资产的风险权重小于

1.0。例如,住宅抵押贷款风险权重为 0.5;国库券风险权重为 0;对其它银行贷款的风险权重为 0.2 等等。考虑某个银行有如下资产负债表内资产:

商业贷款 $ 1000 万

住宅抵押贷款 $ 3000 万

经风险调整的暴露是 $1000+0.5\times3000=\$2500$ 万。支撑这些资本的第一类资本(股权)应该是 $0.04\times2500=\$100$ 万。此外,第一类加上第二类资本必须大于 $0.08\times2500=\$200$ 万。

对资产负债表外合约有各种规则。考虑利率互换。第一步是计算

当前暴露 + 附加因子

当前暴露是互换当前价值与 0 之间的较大值(参见表 18.1)。作为名义本金的百分比的附加因子可由表 18.1 计算出来。当前暴露+附加因子之和乘以对方的风险权重得到经风险调整的暴露。为计算目的,合作的对方给出了 0.5 而不是 1.0 的风险权重。作为一个例子,考虑一个与对方进行了 3 年期的利率互换,当前值为 $ 10,000,名义本金是 $ 100 万。附加因子是 $ 5,000。计算的经风险调整的暴露为 $15,000\times0.5=\$7,500$。如果是与银行(风险权重为 0.2)进行的互换,经风险调整的暴露将是 $15,000\times0.2=\$3,000$。

当签订一个互换和其它衍生证券协议时,虽然合约签订时刻的资本充足要求很重要,但仅有该时刻的资产充足要求还不够。我们必须计算衍生证券有效期内期望资本充足要求的平均值。许多金融机构利用蒙特卡罗模拟方法决定他们的衍生证券的资本充足要求如何随时间变化。

表 18.1 名义本金的百分比加上当前暴露以获得互换的资本充足要求

剩余到期期限	利率合约	单个货币浮动/浮动互换	汇率合约
<1 yr	*nil*	*nil*	1.0%
>1 yr	0.5%	*nil*	5.0%

内部资本分配

BIS 资本充足要求并没有区分不同的公司对象。对待具有 *AAA* 评级的对手与对待 *BBB* 评级的对手一样。为了供内部使用，一些金融机构开发了更复杂的资本分配方法。一定量的资本分配给了与金融机构进行的每个交易，并根据交易者使用资本的收益情况对交易者进行评估。这种方式的优点是可鼓励交易者在报价时考虑信用风险。内部分配资本方式之一是使交易者负责与 $f^* - f$ 成比例的资本。应该选择常数比例系数以便分配的总资本等于或大于 *BIS* 的资本充足要求。

净额化

估计信用风险时一个有争议的问题是所谓净额化(*netting*)。大多数互换合约规定如果对方在一份合约上违约，则认为在所有合约上违约。在计算暴露和资本充足要求时，银行认为如果如下两个互换是同一个对手，一个具有负值的互换应该可以用具有正值的互换相抵消。考虑一个银行与某个对手进行的所有互换，没有净额化处理时该银行在将来某时刻的暴露是一系列期权的组合的损益；进行净额化处理时该银行在将来某时刻的暴露则是证券组合的某个期权损益。后者决不会大于前者，通常比前者小得多。

18.5 减少违约风险

如果金融机构不愿意接收合约中的违约风险，它可建议对方

提供附属担保抵押。所要求担保抵押的数量随金融机构暴露的变化而变化。这种安排类似于交易所内期货合约交易的安排(参见第二章),事实上,具有消除所有信用风险的效果。

有时可设计某个合约减少违约风险。例如,金融机构希望从某个具有低信用风险的对手中购买一个期权,它也许坚持一个零成本组合,该组合包含以后支付的期权费(参见第十六章)。

在衍生证券市场 *AAA* 等级公司处于有利的谈判地位。为了交易衍生证券,本身没有 *AAA* 等级的某些金融机构建立具有 *AAA* 等级的子公司。母公司为子公司担保,但子公司不为母公司担保。

18.6 小 结

随着 *OTC* 市场交易量的日益增长,评估违约风险对衍生证券价格的影响变得很重要。这一章列举了一些可能的方法。我们假设涉及违约的变量独立于决定无违约风险证券价值的变量,将违约对衍生证券的影响与违约对债券的影响相比较,可得到有用的分析结果。例如,在合约是明确资产的情况下,考虑信用风险时,就是增加贴现时的贴现率。

世界各国银行的资本充足率按国际清算银行的建议来确定。在建议中,资产负债表内表外的每个项目都指定了一个权重以反映相应的信用风险。这个权重取决于合约的性质和交易的对手。规定了资本与风险加权暴露之比的最低线。

第十九章

关键概念的回顾

虽然这本书大部分内容集中在期权上，读者现在应该认识到在分析所有衍生证券过程中，确有几个很重要的关键概念。在最后一章我们回顾这些概念。

19.1 无风险的套期保值

衍生证券的定价包括从可交易证券中构造无风险套期保值的内容。一个无风险的套期保值必须完全独立于任何随机变量。如果两个可交易证券的价格依赖于某一个基本的随机变量，就有可能建立起一个无风险的套期保值头寸，该头寸由这两个证券构成。更一般的，如果 $N+1$ 个可交易证券价格依赖于 N 个基本随机变量，就有可能建立起一个套期保值头寸，该头寸由这 $N+1$ 个可交易证券构成，并独立于所有 N 个随机变量，因此该头寸是无风险的。

一个无风险套期保值一定获得无风险利率。运用这个事实可以获得衍生证券必须满足的微分方程。当某个衍生证券包含的所有随机变量是可交易证券的价格时，将这些证券与衍生证券组合在一起可以构造无风险的套期保值头寸。当某些或所有的标的状态变量不是可交易证券的价格时，无风险套期保值头寸必须由几

个不同的衍生证券来组成。

由无风险套期保值推导出来的微分方程没有唯一解，认识这一点很重要。确实，任何证券（该证券依所考虑的随机变量而定）必须满足同样的微分方程。得到的特殊证券是由边界条件的性质决定的。

根据建立的无风险套期保值是处于永久无风险状态还是瞬时无风险状态，可将衍生证券进行分类。对基于一个可交易证券的远期合约而言，该远期合约和标的证券一起可组成永久的无风险套期保值。在期权和更复杂衍生证券情况下，所建立的套期保值只是处于瞬时无风险状态。为维持这个无风险状态，必须连续进行调整平衡。有趣的是，在本书中，期货合约介于远期合约和期权之间。期货合约和其标的证券之间构造的套期保值头寸不是永久无风险的，但它只需每天调整平衡一次就可维持无风险状态。

19.2 可交易证券和其它标的变量

在衍生证券定价论述中，将大量投资者仅只为投资目而持有任何资产定义为可交易证券。根据这个定义，白银是可交易证券，而黄铜不是。只依赖于可交易证券价格的衍生证券和依赖于其它变量值的衍生证券之间有很重要的差别。当一个标的变量是某个可交易证券时，期权的价格是独立于标的变量的期望漂移率和它的风险的市场价格。当标的变量不是可交易证券，它们的参数就变得很重要。产生这个差别的原因是只有可交易证券能够用于构造无风险套期保值组合。

19.3 风险中性化定价

风险中性定价结论是很简单的，但它是分析衍生证券许多问

题的核心。如果衍生证券只依赖于可交易证券的价格，该衍生证券价格的微分方程就不包含受风险偏好影响的参数。在一个所有投资者是风险中性的世界里，衍生证券的价格一定与在现实世界里它的价格相同。为了给衍生证券定价，因此允许假设所有投资者是风险中性的。

这个假设相当程度上简化了分析过程。在风险中性世界中，任何可交易证券的期望收益率是无风险利率。更进一步，任何衍生证券的现值是它的盈亏以无风险利率贴现到现在的值。应该强调的是，风险中性化假设并比意味着衍生证券只能在风险中性的世界中进行定价。在风险中性世界中衍生证券的价值等于投资者厌恶风险世界中衍生证券的价值。

结论是当衍生证券的某些或所有标的变量不是可交易证券的价格时，可使用风险中性定价方法的一个扩展方法。仍然允许假设世界是风险中性的。然而，在分析时，每个变量的期望增长率必须减去它的风险的市场价格乘以它的波动率的值。如果变量刚好是可交易证券的价格，这个调整使漂移率变化到变量的期望收益率是无风险利率的水平。

19.4　结束语

我希望这本书已经引起读者对衍生证券的兴趣。为写这本书，我将自己对该领域的理解进行了安排，我确实发现这是有益的。

为分析衍生证券将来还需要把握什么呢？回答诸如所有的重要发现都已经完成了这样的问题是要冒风险的。对分析衍生证券而言，我并不认为这是真的。金融机构和学者每年都在进行大量的理论和实证研究。新衍生证券正以激动人心的步伐不断开发出来。毫不疑问，重要的新思想和新成果将继续出现。

附表：当 $x \leqslant 0$ 时 $N(x)$表

这个表表示了当 $x \leqslant 0$ 时 $N(x)$的值。使用这张表时可与内插法结合起来使用。例如：

$$\begin{aligned} N(-0.1234) &= N(-0.12) - 0.34[N(-0.12) - N(-0.13)] \\ &= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) \\ &= 0.4509 \end{aligned}$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−3.0	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
−3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
−4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

附表：当 $x \geqslant 0$ 时 $N(x)$表

这个表表示了当 $x \geqslant 0$ 时 $N(x)$的值。使用这张表时可与内插法结合起来使用。例如：

$$\begin{aligned} N(0.6278) &= N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)] \\ &= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) \\ &= 0.7350 \end{aligned}$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9792	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

世界交易所名称

世界各地交易期货和期权的主要交易所及1990年7月至8月间每天交易合约的平均数

芝加哥交易所	*CBOT*	609,139
芝加哥期权交易所	*CBOE*	523,098
芝加哥商业交易所	*CME*	403,455
圣保罗商业和期货交易所	*BOVESPA*	196,364
纽约商业交易所	*NYMEX*	175,069
美国股票交易所	*AMEX*	169,822
伦敦国际金融期货交易所	*LIFFE*	139,538
法国国际商品交易所	*MATIF*	114,599
东京国际金融期货交易所	*TIFFE*	91,837
费城股票交易所	*PHLX*	89,540
Osaka 证券交易所	*OSA*	85,641
纽约商品交易所	*COMEX*	82,469
太平洋股票交易所	*PSE*	57,025
咖啡、糖和可可交易所	*CSCE*	53,205
伦敦金属交易所	*LME*	49,593
悉尼期货交易所	*SFE*	46,950
欧洲期权交易所	*EOE*	42,979
澳大利亚股票交易所(悉尼)	*AUS*	41,870
瑞士期权和金融期货交易所	*SOFFEX*	35,438
伦敦期权交易市场	*LTOM*	33,018
圣保罗商业和期货交易所	*BM&F*	31,714
Stockholm 期权交易所	*OM*	29,425
德国 *Termin* 交易所	*DTB*	26,810
国际石油交易所	*IPE*	24,095
新加坡商业交易所	*SIMEX*	21,543
伦敦期货和期权交易所	*FOX*	19,257
Marche 期权交易所(巴黎)	*MONEP*	18,478
Rio Janeiro 股票交易所	*BVRJ*	14,147
纽约股票交易所	*NYSE*	12,587
东京股票交易所	*TSE*	9,137
纽约棉花交易所	*NYCE*	9,021
纽约期货交易所	*NYFE*	6,681
蒙特利尔交易所	*ME*	5,639
Winnipeg 商品交易所	*WCE*	4,848
金融工具交易所	*FINEX*	3,713
Finnish 期权交易所	*FOM*	3,070

资料来源:欧洲期权交易所月刊,1990年9月

各种符号的总结

以下给出本书中经常使用的主要符号的说明，本书中出现次数较少的一些符号也许没有列在下面，但在首次使用时，都会给出符号的定义。

a：二叉树模型中 Δt 时间内标的变量在风险中性世界中的增长率。例如当标的变量是不付红利股票时，$a=e^{r\Delta t}$；当标的变量是货币时，$a=e^{(r-r_f)\Delta t}$；等等。在第九章和第十章中，a 定义为一般维纳过程中的漂移率。在第十五章中，a 是利率过程中的均值回复率。

A：债券的本金数额。

b：在第九章中，b^2 是在一般维纳过程的变化率。在第十五章中，b 是利率过程中的均值回复水平。

B：债券的价格。

c：欧式看涨期权的价格。

c_i：某个债券的第 i 次支付的现金。

C：美式看涨期权的价格。

d_1, d_2：期权等价公式中的参数。参见方程(10.27)和(11.3)式。

d：在二叉树模型中的下跌比率。若 $d=0.9$，则如果下降的话，变量的值将运动到先前值的 90%。

D：在第七章和第八章中，D 是股票红利的现值。在第十章中，D 是现金红利，D_i 是第 i 个现金红利支付额。在第四章和第十五章中，D 表示久期。

$E(\cdot)$：变量的期望值。

$\hat{E}(\cdot)$：在无风险世界中变量的期望值。

f：衍生证券的价值。符号 f_i 是第 i 个衍生证券的价值。符

号 f_T 是时刻 T 衍生证券的价值。符号 f_{ij} 是二叉树模型中衍生证券在 $i\Delta t$ 时刻的第 j 个价格。

F：远期价格或期货价格。符号 F_T 在 T 时刻的远期价格或期货价格。在附录 3A 中，F_i 是在第 i 天末的期货价格。

G：在附录 3A 中，G_i 表示在第 i 天末的远期价格。在第十章中，G 也用来表示某个随机变量的套利函数。

h：对冲比率。

H_A：*Delta* 对冲中资产的头寸。

H_F：*Delta* 对冲中远期或期货合约的头寸。

I：某个证券收入的现值。

K：远期合约中的交割价格。

L：在利率上限合约中的本金数额。

m：随机变量 θ 的期望增长率。符号 m_i 是 θ_i 的期望增长率。$\hat{m}$ 是 θ 在风险中性世界中期望增长率；等等。在第十五章中，m 是 r 的期望增长率。

$M(x,y,\rho)$：在二维正态分布中，当变量之间的相关系数为 ρ 时，第一个变量小于 x，第二个变量小于 y 的累计概率。

$N(x)$：标准正态分布中变量小于 x 的累计概率。标准正态分布是均值为零，标准差为 1.0 的正态分布。因此，$N(0)=0.5$。

p：主要用于两个方面：(1)欧式看跌期权的价值(参见第十章)；(2)在二叉树模型中向上运动的概率(参见第十四章)。

P：美式看跌期权的价值。$P(t,T)$ 也作为到期时刻为 T 的贴现债券在 t 时刻的价格。

q：红利收益率。

Q：在第五章表示利率互换中的名义本金。

r：无风险利率。注意：在第三、第四、第七、第八章中 r 是时刻 t 和时刻 T 之间的无风险利率。在本书的其他地方，它可以看作是瞬态(即非常短的时间段)无风险利率。

r_f：国外瞬态无风险利率。

$\bar{r}$：衍生证券有效期内平均瞬态无风险利率。

r^*：时刻 t 和时刻 T^* 之间的无风险利率。

$\hat{r}$：时刻 t 和时刻 T^* 之间的远期利率。

R_k：在时刻 $k\tau$ 和时刻 $(k+1)\tau$ 之间基于 $LIBOR$ 贷款的利率(参见第十五章)。

R_X：在利率上限协议中上限利率。$R(t,T)$：时刻 T 到期的投资，在时刻 t 的无风险利率。

$\hat{R}(t,T,T^*)$：t 时刻期限在 T 和 T^* 之间的远期利率。

s：θ 的波动率。

s_i：θ_i 的波动率。

S：衍生证券的标的资产价格。在本书的不同部分，S 用来指货币价格、股票价格、股票指数价格和商品价格。

S_T：在 T 时刻 S 的价格。

t：当前时刻。

T：衍生证券到期时刻。

T^*：期货合约的到期时刻或衍生证券的标的债券的到期时刻。

u：在二叉树模型中价格上升的比率。例如，$u=1.2$ 表示当上升时变量增加 20%。符号 u 也用来表示每单位时间存储成本与资产价格的比率。

U：存储成本的现值。

v：波动性。

V：互换的价值。

w_i：持有的第 i 个证券的数量。

w_T：持有的可交易证券的数量。

X：期权的执行价格。

y：便利收益。也用于表示债券的收益。

z：遵循维纳过程的变量。

β：*Beta* 值。当用组合证券(或单个股票)的收益与市场收益一起在坐标上描点时，所得曲线的斜率就是 *Beta* 值。

Γ：衍生证券或衍生证券组合的 *Gamma*。

Δ：衍生证券或衍生证券组合的 *Delta*。

Δ_x：表示任何变量 x 的微小变化。

$\in$：标准正态分布的随机样本。

η：股票的连续复利收益。

θ：基于某个衍生证券的随机变量；θ_i 是基于某个衍生证券的第 i 个随机变量。

Θ：衍生证券或衍生证券组合的 *Theta* 值。

λ：风险的市场价格；λ_i 是变量 i 的风险的市场价格。

Λ：衍生证券或衍生证券组合的 *Vega*值。

μ：资产价格的期望增长率(对不付红利股票，μ 是期望收益率)。

μ_F：F 的期望增长。

Π：证券组合的价值。

ρ：相关系数；ρ_{ij} 是 θ_i 和 θ_j 之间的相关系数。

σ：资产的变动率。在第二章中，σ_S 和 σ_F 是标准方差。

σ_F：F 的波动率，变异性，方差。

$\varphi(m, s)$：均值为 m，标准方差为 s 的正态分布。

注 释

第一章

①在第三章中我们解释交割价格是如何求出的。

②正如我们将在第三章所见的，期货价格有时与标的资产的价格相关，在这里是，标的资产是黄金。

③注意美式和欧式这两个词并不表示期权或交易所的地理位置。在北美交易所某些交易的期权是欧式的。

④实际上，当投机者进入远期市场时，金融机构也许会要求投机者事先存入一些资金。这些资金一般都支付利息，通常占合约标的资产价值的一个相当小的比率。只是起担保作用，保证投机者履行合约。

第二章

①这是通常的定义。然而有时也使用如下的定义：基差＝期货价格－现货价格，特别是当期货合约是金融资产时。

②例如，航空公司有时利用 *NYMEX* 热油期货合约对冲航空燃料的价格风险。

第三章

①在这一章前半部分所举例子中的某些合约(如基于不付红利股票的远期合约)实际中不一定存在，但这些例子对启发我们的思路很有用。

第四章

①牛顿数值计算方法可以求解 $f(x)=0$ 形式的方程。它先从猜测 $x=x_0$ 这个解开始，利用公式 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$，它可以得到一系列的更好的估计值的解 $x=x_1, x=x_2, x=x_3, \cdots$，通常 $x2$ 就已经非常接近真实解

了。

②有意思的是，当报出诸如短期国债这样的货币市场工具的收益时，所使用的计复利的频率通常等于该工具的有效期。这意味着不同期限的货币市场工具的收益不能直接进行比较。

③以这种方式报出短期国债期货的理由是可保证买价低于卖价。

④如果 y 按年复利计息，方程(4.11)变为：

$$N^* = [SD_S(1 + y_F)]/[FD_F(1 + y_S)]$$

这里 y_S 和 y_F 是在 S 和 F 基础上的收益率。除非 $y_S = y_F$ 时，这个式子与方程(4.11)并不一样。这种差别的原因是：当收益率是连续复利计息时 $\Delta y_S = \Delta y_F$ 的假设与当收益率是一年计一次复利计息时 $\Delta y_S = \Delta y_F$ 的假设并不一样。

第五章

①比较优势是引入利率互换的一种好方式，但正如我们这一章下面讨论的，表面的比较优势也许产生很大的错觉。

②注意 B 公司在浮动利率市场的比较优势并不意味着 B 公司在这个市场上比 A 公司付得少。它意味着在这个市场 B 公司所付的利率超过 A 公司所付利息的额外部分较少。正如一位学生所说："A 在固定利率市场付得更少，B 在浮动利率市场付得少得多"。

③在互换的早期，高达 100 个点的买卖价差也很普遍。到八十年代后期，利率互换的买卖价差已收窄到小于 10 个点。

④在本章早些时候计算的一些数值并不完全精确，因为它们并没有考虑固定利率报价方式与浮动利率报价方式之间的差别。例如，在图 5.4 的互换中，我们认为 A 公司最终的借款利率为 $LIBOR + 0.1\%$ $p.a.$。超过 $LIBOR$ 的 0.1% $p.a.$ 的加息率是两个固定利率之间的差值，很可能是在 365 天基础上按半年复利报出的。考虑到与 $LIBOR$ 的可比性，我们将它转换为以 360 天为基础，于是由 A 公司所付利率为：

$$LIBOR + 0.1 \times \frac{360}{365} = LIBOR + 0.0986\%\ p.a.$$

第七章

①作为一个替代策略，投资者可以持有期权并卖空股票，这将锁定超过 $ 10 的利润。

第九章

①在决定 *IBM* 股票价格遵循的随机过程特性时，*IBM* 股票价格历史数据的统计特性(例如波动率)也许有用。过去股票价格遵循的特殊路径是不相关的。

②这个结果基于以下正态分布的一个著名性质。如果一个变量 Y 等于 N 个独立正态分布变量 $X_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 的总和，Y 本身是正态分布的。Y 的均值等于 X_i 的均值之和，Y 的方差等于 X_i 的方差之和。

③更精确地说，μ 取决于投资者不能通过分散化消除的那部分风险。

④为了说明这些 u、d 和 p 具有合适的特性，注意 Δt 时刻股票价格的期望值为

$$pSu + (1-p)Sd = Se^{\mu\Delta t}$$

在 Δt 时刻股票价格的方差为：

$$pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - (Se^{\mu\Delta t})^2$$

这等于：

$$S^2[e^{\mu\Delta t}(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}) - 1 - e^{2\mu\Delta t}]$$

展开 e^x 为如下形式 $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \cdots$，当忽略 Δt_2 以及更高阶项时，股票价格的方差是 $S^2\sigma^2\Delta t$。

第十章

①区分连续复利收益率 η 和无复利的年收益率是很重要的，后者为

$$\frac{1}{T-t}\left(\frac{S_T - S}{S}\right)$$

并总是等于 η。

②有些读者也许认为这个结论等价如下表述：如果一系列数值不是都相等的话，那么这些数值的算术平均总是大于它们的几何平均。

③如果 g 是(10.26)式给出的风险中性世界中的 S_T 的概率密度函数，

式(10.25)变为

$$c = e^{-r(T-t)}\int_X^{\infty}(S_T - X)g(S_T)dS_T$$

令 $S_T = e^w$，并做替换，将上式转换成一个包含正态分布而不是对数正态分布的积分。

④这个方法只是用于说明求解，在实际中经常使用诸如牛顿数值计算方法。

⑤事实上，这是有疑问的。通常是在交易所闭市时发布重要消息。

⑥理论上，这个波动率并不完全等于整个股票价格遵循随机过程的波动率。有风险部分的波动率近似等于整个股票价格波动率乘以 $S/(S-V)$，这里 V 是红利的现值。实际上，常常假设这两个波动率是相等的。

第十一章

①由于这个假设与和股票价格与加权平均股票价格遵循几何布朗运动的假设不一致，因此存在一些理论问题。然而实际上，这种不一致并不真的很重要。单个股票和股票指数都不精确地遵循几何布朗运动，但这个假设是一个方便的近似。

②11.1 节我们已经讨论过，在风险中性世界中，以 q 支付连续红利率的股票价格的期望增长率等于 $r-q$，因此，在风险中性世界中期货价格的预期增长率应该为零。这正如我们所期望的。签署期货合约不需要成本。因此风险中性世界中期货合约持有者的预期收益率必须为零。

第十二章

①当 σ 为负值时，我们将 dz 设为 $dz' = -dz$，可以变换一般的维纳过程，于是 f 的过程为：

$$df = \mu f dt + (-\sigma) f dz'$$

②为说明这个论点，假设 θ_i 实际上是新奥尔良中部的气温。θ_i 遵循的过程很清楚不依赖于人们的风险偏好。

③正如 12.2 节讨论的，λ_i 可以为负值，所以在风险中性世界中，增长率更高。

④注意如果汇率 $Q(t)$ 定义为每日元的美元数，那么 ρ 的符号将是相反的，方程(12.11)将是

$$F = S(t)e^{(r_f - q - \rho\sigma_S\sigma_Q)(T-t)}$$

⑤这并不是约束条件。通过将红利重新投资于原证券，我们从付红利证券中总可以得到不付红利的证券）

第十三章

①在第十章已经说明期望收益率与期权的价格并不相关。然而，在考虑某个特殊对冲计划的效果时，期望收益率还有一定的意义。

②更准确地说，假设使用合适的经风险调整的贴现率，这两种方法期望成本的现值为 $240,000。

③所使用的精确的对冲规则如下：如果在时间间隔段 Δt 股票价格从低于 X 上升到高于 X，则在该时间间隔段的末尾购买。如果在时间间隔段 Δt 股票价格从高于 X 下降到低于 X，则在该时间间隔段的末尾出售。否则，不采取行动。

④更精确的定义是，$\Delta = \partial f/\partial S$，这里 f 是衍生证券的价格，S 是标的资产的价格。

⑤更精确地说，$\Theta = \partial \Pi/\partial t$，这里 Π 是有价证券的组合价值。

⑥有如下两个例外：处于实值状态的不付红利股票的欧式看跌期权或处于实值状态的附带有很高利率的外汇的欧式看涨期权。

⑦更精确的定义是：

$$\Gamma = \partial^2 \Pi/\partial S^2$$

这里 Π 为该证券组合的价值。

⑧图 13.8 假设 Θ 与 Γ 的符号相反。通常是这样，但也有例外。在 13.8 节中我们将说明对 *Delta* 中性的套期保值：

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

⑨更精确的定义是：$A=\partial\Pi/\partial\sigma$，这里$\Pi$是证券组合的价值。有时 *Vega* 也称作为 *Lambda*、*Kappa* 或 *Sigma*。

⑩更精确的定义是：$rho=\partial\Pi/\partial r$，这里$\Pi$是证券组合的价值。

⑪如果 *beta* 的值是在一个非常小的时间间隔内的收益率的基础上计算的话，这种近似是正确的。相反，如果 *beta* 的值是在所构造期权有效期长度的时间间隔内的收益率的基础上计算的话，例 13.11 中的讨论则是正确的。

第十四章

①当 θ 遵循几何布朗运动时，假设 $(\theta+\Delta\theta)/\theta$ 是对数正态分布则更为精确。利用 10.2 节中的结论，可知方程(14.3)变为：

$$\theta+\Delta\theta=\theta\exp\left[\left(m-\frac{s^2}{2}\right)\Delta t+s\in\sqrt{\Delta t}\right]$$

②实际中，通常选取 r 为常数，并使 r 等于与期权到期日相同的零息票债券的收益率。

③参见第九章

④大多数情况下，这个近似是合理的。然而，这些 p、u 和 d 的值只在 $\Delta t\to 0$ 的极限时是正确的。求解如下方程会更精确：

$$pu+(1-p)d=a$$

$$pu^2+(1-p)d^2=b^2$$

$$u=\frac{1}{d}$$

这里 a 和 b 是在风险中性世界中 $S(t+\Delta t)/S(t)$ 的对数正态分布的均值和方差。因此：

$$u=\frac{(a^2+b^2+1)+\sqrt{(a^2+b^2+1)^2-4a^2}}{2a}$$

$$p=\frac{a-d}{u-d}$$

从方程(10.8)和(10.9)，

$$a=e^{r\Delta t}$$

$$b^2=a^2(e^{\sigma^2\Delta t}-1)$$

。

⑤这并不包括求一个矩阵的逆矩阵，(14.29)中的第一个方程可用 $f_{N\ 1,1}$来表示 $f_{N-1,2}$；第二个方程可用 $f_{N-1,1}$表示 $f_{N-1,3}$；等等。最后一个等式给出 $f_{N-1,1}$的值，而这个值可用来求出其他的 $f_{N-1,j}$。

⑥有限差分方法的一个有用的规则是当 ΔS 和 Δt 趋于零时，ΔS 应该与 $\sqrt{\Delta t}$ 成比例)

⑦稍后我们解释在坐标方格左手边顶部的负数值和其他不一致的部分。

⑧如果 $X = \ln S$，(14.19)式变为：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} = rf$$

第十五章

①这些期权在某种程度上不是纯粹的利率期权，纯粹利率期权是否执行更大程度上是依赖于利率水平。例如，当利率相当高时，某个家庭也许提前支付抵押，也许就是单纯地因为这个房屋具有吸引力，而不是因为它能以更便宜价格再融资。

②正如第十章所提到的，当应用 *Black - Scholes* 模型和其他模型时，选取的无风险利率期限都对应于期权有效期限。

③$v(t,t)=0$ 等价于假设在所有时刻所有贴现债券具有有限漂移率，这是因为，如果债券的波动率在到期时并不减少到零，就需要一个无限漂移率以确保在到期时债券的价格等于它的面值。

④有些读者也许不熟悉(15.28)和(15.29)式中的随机算子。为解释它的意义，我们将积分符号替代成求和符号，并将微分符号 d 用 Δ 来表示，例如，

$$\int_0^t v(\tau,t)v_t(\tau,t) \text{ 变成 } \sum_{i=1}^{n} v(i\Delta t,t)v_t(i\Delta t,t)\Delta t$$

，其中 $\Delta t = t/n$。

⑤这并不会使得市场变得无效率，因为 r 不是可交易证券的价格。

第十六章

①在打包期权所列一系列证券中，我们可以忽略标准的欧式看跌期权。因为看跌期权与看涨期权之间的平价关系表明，从标准欧式看涨期权、现金和标的资产中总可以推导出标准欧式看跌期权。类似地，我们可以忽略远期合约，因为它们可以从标的资产头寸中推导出来。

第十七章

①这是因为 σ_B 总是远小于 σ。对一年期的股票期权，σ_B 的较大的初值将是每年 2%，在期权有效期内这个值将减少到 0。而 σ 的典型值大约是 30%。

②股票价格和证券价格通常是正相关，所以 $\rho>0$。如果 $\sigma_B<2\rho\sigma$，则从方程(17.1)可得 $\sigma<\sigma$。因此波动率调整的效果减少了该期权的价格。

③该模型股票价格更正式的表达式为：

$$dS = \mu S dt - \sigma S^{1-\alpha} dz$$

④该模型更正式的表达式是：

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

这里 dz 是维纳过程，dq 是产生跳跃的泊松过程，σ 是几何布朗运动的波动率。假设 dz 和 d_q 过程是相互独立的。

⑤这个假设是很重要的，因为它说明在跳跃大小是系统性的情况下，我们不能运用风险中性定价过程。

第十八章

①图 18.2 说明一对货币互换的暴露随时间的增加而增加，而一对利率互换的暴露开始是增加，然后是减少。如果按照后来暴露权重更大的安排，相对于利率互换的暴露而言，货币互换的暴露增加了。

②当金融机构收取低利率货币支付高利率货币时，金融机构的信用风险更大。这是因为低利率货币预期会随时间推移而升值。

第十六章

①在打包期权所列一系列证券中，我们可以忽略标准的欧式看跌期权。因为看跌期权与看涨期权之间的平价关系表明，从标准欧式看涨期权、现金和标的资产中总可以推导出标准欧式看跌期权。类似地，我们可以忽略远期合约，因为它们可以从标的资产头寸中推导出来。

第十七章

①这是因为 σ_B 总是远小于 σ。对一年期的股票期权，σ_B 的较大的初值将是每年 2%，在期权有效期内这个值将减少到 0。而 σ 的典型值大约是 30%。

②股票价格和证券价格通常是正相关，所以 $\rho>0$。如果 $\sigma_B<2\rho\sigma$，则从方程(17.1)可得 $\sigma<\sigma$。因此波动率调整的效果减少了该期权的价格。

③该模型股票价格更正式的表达式为：

$$dS = \mu S dt - \sigma S^{1-\alpha} dz$$

④该模型更正式的表达式是：

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

这里 dz 是维纳过程，dq 是产生跳跃的泊松过程，σ 是几何布朗运动的波动率。假设 dz 和 d_q 过程是相互独立的。

⑤这个假设是很重要的，因为它说明在跳跃大小是系统性的情况下，我们不能运用风险中性定价过程。

第十八章

①图 18.2 说明一对货币互换的暴露随时间的增加而增加，而一对利率互换的暴露开始是增加，然后是减少。如果按照后来暴露权重更大的安排，相对于利率互换的暴露而言，货币互换的暴露增加了。

②当金融机构收取低利率货币支付高利率货币时，金融机构的信用风险更大。这是因为低利率货币预期会随时间推移而升值。

第十六章

①在打包期权所列一系列证券中，我们可以忽略标准的欧式看跌期权。因为看跌期权与看涨期权之间的平价关系表明，从标准欧式看涨期权、现金和标的资产中总可以推导出标准欧式看跌期权。类似地，我们可以忽略远期合约，因为它们可以从标的资产头寸中推导出来。

第十七章

①这是因为 σ_B 总是远小于 σ。对一年期的股票期权，σ_B 的较大的初值将是每年 2%，在期权有效期内这个值将减少到 0。而 σ 的典型值大约是 30%。

②股票价格和证券价格通常是正相关，所以 $\rho>0$。如果 $\sigma_B<2\rho\sigma$，则从方程(17.1)可得 $\sigma<\sigma$。因此波动率调整的效果减少了该期权的价格。

③该模型股票价格更正式的表达式为：

$$dS = \mu S dt - \sigma S^{1-\alpha} dz$$

④该模型更正式的表达式是：

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

这里 dz 是维纳过程，dq 是产生跳跃的泊松过程，σ 是几何布朗运动的波动率。假设 dz 和 d_q 过程是相互独立的。

⑤这个假设是很重要的，因为它说明在跳跃大小是系统性的情况下，我们不能运用风险中性定价过程。

第十八章

①图 18.2 说明一对货币互换的暴露随时间的增加而增加，而一对利率互换的暴露开始是增加，然后是减少。如果按照后来暴露权重更大的安排，相对于利率互换的暴露而言，货币互换的暴露增加了。

②当金融机构收取低利率货币支付高利率货币时，金融机构的信用风险更大。这是因为低利率货币预期会随时间推移而升值。

第十六章

①在打包期权所列一系列证券中，我们可以忽略标准的欧式看跌期权。因为看跌期权与看涨期权之间的平价关系表明，从标准欧式看涨期权、现金和标的资产中总可以推导出标准欧式看跌期权。类似地，我们可以忽略远期合约，因为它们可以从标的资产头寸中推导出来。

第十七章

①这是因为 σ_B 总是远小于 σ。对一年期的股票期权，σ_B 的较大的初值将是每年 2%，在期权有效期内这个值将减少到 0。而 σ 的典型值大约是 30%。

②股票价格和证券价格通常是正相关，所以 $\rho>0$。如果 $\sigma_B<2\rho\sigma$，则从方程(17.1)可得 $\sigma<\sigma$。因此波动率调整的效果减少了该期权的价格。

③该模型股票价格更正式的表达式为：

$$dS = \mu S dt - \sigma S^{1-\alpha} dz$$

④该模型更正式的表达式是：

$$\frac{dS}{S} = (\mu - \lambda k)dt + \sigma dz + dq$$

这里 dz 是维纳过程，dq 是产生跳跃的泊松过程，σ 是几何布朗运动的波动率。假设 dz 和 d_q 过程是相互独立的。

⑤这个假设是很重要的，因为它说明在跳跃大小是系统性的情况下，我们不能运用风险中性定价过程。

第十八章

①图 18.2 说明一对货币互换的暴露随时间的增加而增加，而一对利率互换的暴露开始是增加，然后是减少。如果按照后来暴露权重更大的安排，相对于利率互换的暴露而言，货币互换的暴露增加了。

②当金融机构收取低利率货币支付高利率货币时，金融机构的信用风险更大。这是因为低利率货币预期会随时间推移而升值。