1983年诺贝尔物理学奖获得者

S. CHANDRASEKHAR 著作选译

THE MATHEMATICAL THEORY OF BLACK HOLES

钱德拉塞卡

黑洞的数学理论

S. 钱德拉塞卡 著 卢炬甫 译

高等教育出版社





1983年诺贝尔物理学奖获得者

S. CHANDRASEKHAR 著作选译

THE MATHEMATICAL THEORY OF BLACK HOLES

HEIDONG DE SHUXUE LILUN

黑洞的数学理论

S. 钱德拉塞卡 著 卢炬甫 译

高等教育出版社·北京

图字：01-2014-0387 号

Copyright ©Oxford University Press, Inc., 1992

The Mathematical Theory of Black Holes, New Edition was originally published in English in 1998. This translation is published by Higher Education Press Limited Company by arrangement with Oxford University Press.

本书的英文原版 *The Mathematical Theory of Black Holes, New Edition* 于 1998 年出版。本翻译版由牛津大学出版社授权高等教育出版社有限公司出版。

图书在版编目（CIP）数据

黑洞的数学理论 /（美）苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡著；卢炬甫译 . -- 北京 : 高等教育出版社，2018. 4
书名原文：The Mathematical Theory of Black Holes
ISBN 978-7-04-049097-8

Ⅰ. ①黑… Ⅱ. ①苏… ②卢… Ⅲ. ①数学理论 - 研究 - 美国 Ⅳ. ① O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 313194 号

策划编辑	王 超	责任编辑	王 超	封面设计	王 洋	版式设计	张 杰
插图绘制	杜晓丹	责任校对	刘丽娴	责任印制	赵义民		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京盛通印刷股份有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	40.5		
字 数	740 千字	版 次	2018 年 4 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印 次	2018 年 4 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	129.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 49097-00

致读者

首先, 我的担忧; 接着, 我的敬礼; 最后, 我的致辞. 我的担忧是怕您会不满意; 我的敬礼是向您应尽之仪; 我的致辞是要请求您的谅解. 如果您现在就期待我讲得好, 那可就难为我了; 因为我所讲的, 都是我心所造; 恐怕讲出来后会使自己没趣. 言归正传, 我就冒一次险吧.

—— 莎士比亚《亨利四世·下部》

目录　目录已做得足够详细, 从中能够看出全书所涉及的题材及其编排. 每一章的开头一节都给出展望, 而结尾一节则常常是一个回顾.

排列　节的编号按连续顺序贯穿全书, 图和表的编号也是如此. 方程式则是在同一章里编号, 除非加注了该式原属的章的序号.

符号　一个符号的含义在全书里严格保持一致是不可能做到的, 因为可用的字母供不应求. 另外, 也受限于不宜随意地使用符号, 那会把方程或公式弄得面目全非、意义混淆. 于是只好采取折中办法. 那些容易从上下文识别的符号保持其含义上的一贯性; 而其它许多符号的含义则是可变的. 如有不明之处, 重看该章 (甚至该节) 的开头, 一般都能解决.

文献注释　不论源于何处, 作者已经从头写出了 (或者研究出了) 全部题材 (包括数学上的进展), 因此就没有严格地查找原始文献. 每一章结尾的文献注释只是给出作者信息的出处.

本书表达的是作者在自己能力限度内所作的观察.

致谢

在我关于黑洞数学理论的工作中, 与一些同事的交往使我大为受益. 我特别感激的是:

弗雷德曼 (John L. Friedman), 他的关键性判断、有洞察力的评论和不断的鼓励, 还有涉及第 10 章 (§102) 和第 11 章 (§114) 的帮助;

德特维勒 (Steven Detweiler), 他在几项研究 (已写入本书) 中的积极合作, 他在需要阐明和需要计算的两类事务中常备不懈的作用, 表 Ⅳ、Ⅵ、Ⅸ、X、XI, 以及附录里的表格都是他的贡献;

Garret Toomey, 他在有关史瓦西 (Schwarzschild)、雷斯纳 – 诺兹特朗 (Reissner-Nordström)、克尔 (Kerr) 时空短程线的章节中的协助, 还有他提供的第 3、5、7 章中的漂亮插图;

Robert Wald、Robert Geroch 和 James Hartle, 他们审阅了许多内容.

我对山托珀罗斯 (Basilis Xanthopoulos) 的感激, 则更难以恰当地表达. 他愉快地承担了通读不同阶段书稿的艰难工作, 并且检查了数学推导. 他的帮助还远不止于此: 他还在第 4 (§25)、5 (§42)、6 (§57)、7 (§60)、11 章 (§109) 中作出了原创性贡献, 他的关键性判断也总是非常宝贵.

我还要感谢 Mavis Takeuchi-Lozano 小姐在准备书稿到付印的全过程中给予的协助.

本书的写作 (时间为 1980 年 3 月至 1982 年 1 月) 部分地由自然科学基金准予芝加哥大学的 PHY–78–24275 号项目资助. 而且在 1980 年 3—6 月的三个月里, 我还得到哈佛学院天文台天体物理中心史密松研究所 (华盛顿特区) 的董事研究员基金资助.

最后, 我感谢 Clarendon 出版社对本书 (如我以前的两本书一样) 印刷出版所做的出色工作, 他们的工作一贯如此.

序言

自然界的黑洞是宇宙中最完美的宏观物体, 构成它们的唯一基础是我们的时间和空间概念. 由于描述它们的是广义相对论提供的唯一的一族解, 它们又是最简单的物体.

描述黑洞周围时空的唯一的两参量解族是克尔 (Roy Patrick Kerr) 于 1963 年 7 月发现的克尔族. 这两个参量是黑洞的质量和黑洞的角动量. 零角动量的静态解由史瓦西 (Karl Schwarzschild) 于 1915 年 12 月得到. 所以对自然界黑洞的研究也就是对这些解的研究. 本书正是致力于这一研究.



罗伊 · 帕特里克 · 克尔 (Roy Patrick Kerr 1934—)



卡尔 · 史瓦西 (Karl Schwarzschild 1873—1916)

目录

序言 i

第一章 数学准备 1

1. 引言 1

2. 微分几何基础 1

(*a*) 正切矢量 2

(*b*) 一次型 (或余切矢量, 或协变矢量) 4

(*c*) 张量和张量积 6

3. 型的微积分 9

(*a*) 外部微分 10

(*b*) 李括号和李微分 12

4. 协变微分 15

(*a*) 平行位移和短程线 18

5. 曲率型和嘉当结构方程 19

(*a*) 扭率为零时的循环恒等式和比安基恒等式 24

6. 度规和由之导出的联络; 黎曼几何和爱因斯坦场方程 26

(*a*) 由度规导出的联络 27

(*b*) 克里斯托费尔联络对于黎曼和里奇张量的一些推论 29

(*c*) 爱因斯坦张量 30

(*d*) 外尔张量 31

(*e*) 作为四维流型的时空; 标记问题和爱因斯坦场方程 31

7. 四次形式 33

(*a*) 四次表示 33

(*b*) 方向导数和里奇旋转系数 35

(*c*) 转换关系和结构常数 37

(*d*) 里奇和比安基恒等式 37

(e) 四次形式的推广 · · · · · 38
8. 纽曼 – 彭罗斯形式 · · · · · 39
(a) 零基和自旋系数 · · · · · 39
(b) 外尔、里奇、黎曼张量的表示 · · · · · 40
(c) 转换关系和结构常数 · · · · · 43
(d) 里奇恒等式和消元关系 · · · · · 44
(e) 比安基恒等式 · · · · · 46
(f) 麦克斯韦方程 · · · · · 49
(g) 四次变换 · · · · · 51
9. 光学标量, 彼得罗夫分类, 哥尔德伯 – 萨赫定理 · · · · · 54
(a) 光学标量 · · · · · 55
(b) 彼得罗夫分类 · · · · · 57
(c) 哥尔德伯 – 萨赫定理 · · · · · 60
文献注释 · · · · · 62

第二章 充分广义的时空 · · · · · 65
10. 引言 · · · · · 65
11. 定常态轴对称时空和惯性系的拖曳 · · · · · 65
(a) 惯性系的拖曳 · · · · · 68
12. 所需广义的时空 · · · · · 69
13. 结构方程和黎曼张量的分量 · · · · · 72
14. 四次标架和旋转系数 · · · · · 80
15. 麦克斯韦方程 · · · · · 82
文献注释 · · · · · 83

第三章 史瓦西时空 · · · · · 85
16. 引言 · · · · · 85
17. 史瓦西度规 · · · · · 85
(a) 方程的解 · · · · · 88
(b) 克鲁斯卡尔坐标 · · · · · 90
(c) 变换到史瓦西坐标 · · · · · 92
18. 史瓦西度规的另一种导出 · · · · · 93
19. 史瓦西时空的短程线: 类时短程线 · · · · · 95
(a) 径向短程线 · · · · · 97
(b) 束缚轨道 ($E^2 < 1$) · · · · · 99
(i) 第一类轨道 · · · · · 101
(α) $e = 0$ 情形 · · · · · 104

(β) $2\mu(3+e)=1$ 情形 · · · · · 105
(γ) 后牛顿近似 · · · · · 106
(ii) 第二类轨道 · · · · · 106
(α) $e=0$ 情形 · · · · · 107
(β) $2\mu(3+e)=1$ 情形 · · · · · 108
(iii) 虚偏心率轨道 · · · · · 109
(c) 开放轨道 $(E^2>1)$ · · · · · 111
(i) 第一和第二类轨道 · · · · · 111
(ii) 虚偏心率轨道 · · · · · 119
20. 史瓦西时空的短程线: 零短程线 · · · · · 121
(a) 径向短程线 · · · · · 121
(b) 临界轨道 · · · · · 123
(i) 回避锥 · · · · · 125
(c) 第一类短程线 · · · · · 128
(i) $P\to 3M$ 和 $P/3M\gg 1$ 时 φ_∞ 的渐近行为 · · · · · 130
(d) 第二类短程线 · · · · · 131
(e) 虚偏心率和碰撞参量小于 $(3\sqrt{3})M$ 的轨道 · · · · · 131
21. 史瓦西时空的纽曼－彭罗斯形式描述 · · · · · 132
文献注释 · · · · · 134
第四章　史瓦西黑洞的扰动 · · · · · 136
22. 引言 · · · · · 136
23. 非定常态、轴对称时空的里奇和爱因斯坦张量 · · · · · 136
24. 度规扰动 · · · · · 139
(a) 轴向扰动 · · · · · 139
(b) 极向扰动 · · · · · 142
(i) 方程组简化为单个一维波动方程 · · · · · 145
(ii) 解的完成 · · · · · 147
25. 关于与线性微分方程组可简化性相联系的特殊积分的定理 · · · · 148
(a) 方程组 (52)—(54) 的特定解 · · · · · 153
26. $V^{(+)}$ 与 $V^{(-)}$ 之间和 $Z^{(+)}$ 与 $Z^{(-)}$ 之间的关系 · · · · · 155
27. 反射和透射问题 · · · · · 158
(a) 轴向和极向扰动的反射和透射系数的相等性 · · · · · 159
28. 一维势散射理论要点和两个势产生相同透射振幅的必要条件 · · 161
(a) 约斯特函数及其满足的积分方程 · · · · · 163
(b) $\lg T(\sigma)$ 展开为 σ^{-1} 的幂级数和不同的势产生相同透
射振幅的条件 · · · · · 165

(c) 对应于势 $V^{(\pm)} = \pm\beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f$ 的积分等式等级性的直接验证 · · · · · 168
29. 通过纽曼–彭罗斯形式处理的扰动 · · · · · 168
(a) 已经线性化的方程及其简化 · · · · · 170
(b) 方程组 (237)—(242) 解的完成和影子规范 · · · · · 174
30. 变换理论 · · · · · 176
(a) $f = 1$ 和 $\beta =$ 常数的变换存在的条件; 双重变换 · · · · · 179
(b) 支配 F 的方程的验证以及 κ 和 β^2 的值 · · · · · 181
31. 借助于度规扰动对 Ψ_0 的直接计算 · · · · · 182
(a) Ψ_0 的轴向部分 · · · · · 183
(b) Ψ_0 的极向部分 · · · · · 185
32. 理论的物理含义 · · · · · 186
(a) 散射矩阵幺正性的应用 · · · · · 189
33. 对扰动理论的一些观察 · · · · · 190
34. 史瓦西黑洞的稳定性 · · · · · 192
35. 史瓦西黑洞的准正则模式 · · · · · 193
文献注释 · · · · · 194
第五章 雷斯纳 – 诺兹特朗解 · · · · · 197
36. 引言 · · · · · 197
37. 雷斯纳 – 诺兹特朗解 · · · · · 197
(a) 麦克斯韦方程的解 · · · · · 198
(b) 爱因斯坦方程的解 · · · · · 198
38. 时空的性质 · · · · · 201
39. 雷斯纳 – 诺兹特朗度规的另一种导出 · · · · · 205
40. 雷斯纳 – 诺兹特朗时空的短程线 · · · · · 206
(a) 零短程线 · · · · · 207
(b) 类时短程线 · · · · · 209
(c) 带电粒子的运动 · · · · · 214
41. 雷斯纳 – 诺兹特朗时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述 · · · · · 215
42. 雷斯纳 – 诺兹特朗解的度规扰动 · · · · · 216
(a) 线性化的麦克斯韦方程 · · · · · 216
(b) 里奇张量的扰动 · · · · · 218
(c) 轴向扰动 · · · · · 218
(d) 极向扰动 · · · · · 221
(i) 解的完成 · · · · · 225

43. $V_i^{(+)}$ 与 $V_i^{(-)}$ 之间和 $Z_i^{(+)}$ 与 $Z_i^{(-)}$ 之间的关系 · · · · · 225
44. 通过纽曼 – 彭罗斯形式处理的扰动 · · · · · 227
(*a*) 已经线性化的麦克斯韦方程 · · · · · 227
(*b*) "影子" 规范 · · · · · 229
(*c*) 基本方程 · · · · · 230
(*d*) 变量的分离和方程的解耦及简化 · · · · · 231
45. 变换理论 · · · · · 234
(*a*) 双重变换的可接受性 · · · · · 235
(*b*) $Y_{\pm i}$ 和 $X_{\pm j}$ 的渐近行为 · · · · · 237
46. 借助于度规扰动对外尔和麦克斯韦标量的直接计算 · · · · · 238
(*a*) 麦克斯韦标量 ϕ_0 和 ϕ_2 · · · · · 240
47. 反射和透射问题; 散射矩阵 · · · · · 242
(*a*) 麦克斯韦场的能量 – 动量张量和电磁能量流 · · · · · 245
(*b*) 散射矩阵 · · · · · 246
48. 雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的准正则模式 · · · · · 248
49. 关于雷斯纳 – 诺兹特朗时空稳定性的考虑 · · · · · 249
50. 对静态黑洞解的一些综合观察 · · · · · 256
文献注释 · · · · · 257

第六章 克尔度规 · · · · · 260
51. 引言 · · · · · 260
52. 支配定常态轴对称真空时空的方程 · · · · · 260
(*a*) 共轭度规 · · · · · 264
(*b*) 帕帕培特罗变换 · · · · · 264
53. 规范的选择和方程向标准形式的简化 · · · · · 265
(*a*) 支配 X 和 Y 的方程的一些性质 · · · · · 269
(*b*) 方程的替代形式 · · · · · 269
(*c*) 恩斯特方程 · · · · · 271
54. 克尔度规的推导 · · · · · 273
(*a*) 黎曼张量的四次分量 · · · · · 276
55. 克尔度规的唯一性; 罗宾逊和卡特的定理 · · · · · 278
56. 克尔时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述 · · · · · 285
57. 度规的克尔 – 席尔德形式 · · · · · 288
(*a*) 将克尔度规表示为克尔 – 席尔德形式 · · · · · 292
58. 克尔时空的性质 · · · · · 294
(*a*) 能层 · · · · · 301

文献注释 · · ·

第八章　克尔几何中的电磁波 · · · · · **364**
67. 引言 · · · · · 364
68. 定义和引理 · · · · · 365
69. 麦克斯韦方程: 简化和可分离性 · · · · · 366
(*a*) 对 Φ_0 和 Φ_2 的方程的简化和可分离性 · · · · · 367
70. 楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式 · · · · · 368
71. 解的完成 · · · · · 374
(*a*) 对 ϕ_1 的解 · · · · · 375
(*b*) 等式 (80) 的验证 · · · · · 376
(*c*) 对矢量势的解 · · · · · 377
72. 楚科尔斯基方程到标准形式的变换 · · · · · 379
(*a*) $r_*(r)$ 关系 · · · · · 381
73. 一般变换理论和向一维波动方程的简化 · · · · · 382
74. 入射电磁波的势垒 · · · · · 385
(*a*) $Z^{(+\sigma^+)}$ 与 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的区别 · · · · · 387
(*b*) 解的渐近行为 · · · · · 389
75. 反射和透射问题 · · · · · 391
(*a*) $\sigma^+ > \sigma_c^+(= -a/m)$ 和 $\alpha^2 > 0$ 的情形 · · · · · 391
(*b*) $\sigma_s^+ < \sigma^+ < \sigma_c^+$ 情形 · · · · · 392
(*c*) $0 \leqslant \sigma^+ < \sigma_s^+$ 情形 · · · · · 393
76. 进一步放大和物理解释 · · · · · 397
(*a*) 幺正性的应用 · · · · · 400
(*b*) 无穷远处和事件视界上辐射流的直接计算 · · · · · 401
(*c*) 进一步放大 · · · · · 405
77. 对理论的一些综合观察 · · · · · 406
文献注释 · · · · · 408

第九章　克尔黑洞的引力扰动 · · · · · **410**
78. 引言 · · · · · 410
79. 支配外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 的方程的简化和解耦 · · · · · 411
80. 规范的选择和自旋系数 κ、σ、λ、ν 的解 · · · · · 414
(*a*) 影子规范 · · · · · 414
81. 楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式 · · · · · 416
(*a*) 有用公式汇集 · · · · · 421
(*b*) 括号标记 · · · · · 422

82. 度规扰动; 问题的表述 · · ·

99. 克尔黑洞的准正则模式 · · · · · 500
100. 最后的观察 · · · · · 501
文献注释 · · · · · 501

第十章　克尔几何中自旋为 1/2 的粒子 · · · · · 503
101. 引言 · · · · · 503
102. 旋量分析和纽曼 – 彭罗斯形式的旋量基 · · · · · 503
(*a*) 用旋量表示矢量和张量 · · · · · 507
(*b*) 彭罗斯用 "旗" 作为旋量 ξ^A 的图画表示 · · · · · 509
(*c*) 并矢形式 · · · · · 510
(*d*) 旋量场的协变导数和自旋系数 · · · · · 512
103. 纽曼 – 彭罗斯形式的狄拉克方程 · · · · · 515
104. 克尔几何中的狄拉克方程及其分离 · · · · · 517
105. 克尔几何中的中微子波 · · · · · 519
(*a*) 对 $\sigma > \sigma_s(= -am/2Mr_+)$ 的反射和透射问题 · · · · · 521
(*b*) 超辐射的缺失 $(0 < \sigma < \sigma_s)$ · · · · · 523
106. 守恒流和狄拉克方程向一维波动方程形式的简化 · · · · · 524
(*a*) 狄拉克方程简化为一维波动方程形式 · · · · · 525
(*b*) 狄拉克方程在平直空间椭球坐标系中的分离形式 · · · · · 527
107. 反射和透射问题 · · · · · 528
(*a*) 朗斯基行列式 $[Z_\pm, Z_\pm^*]$ 对 r 的范围 $r_+ < r < \infty$ 的守恒性 · · · · · 529
(*b*) 穿过事件视界能流的正值性 · · · · · 530
(*c*) 超辐射缺失的量子起因 · · · · · 532
文献注释 · · · · · 532

第十一章　其它解; 其它方法 · · · · · 535
108. 引言 · · · · · 535
109. 支配定常态轴对称时空的爱因斯坦 – 麦克斯韦方程 · · · · · 535
(*a*) 规范的选择和方程简化为标准形式 · · · · · 538
(*b*) 方程的进一步变换 · · · · · 539
(*c*) 恩斯特方程 · · · · · 540
(*d*) 恩斯特方程的变换性质 · · · · · 542
(*e*) 共轭运算 · · · · · 543
110. 克尔 – 纽曼解: 推导和纽曼 – 彭罗斯形式描述 · · · · · 544
(*a*) 纽曼 – 彭罗斯形式的克尔 – 纽曼时空描述 · · · · · 550

111. 支配克尔－纽曼时空的耦合电磁－引力扰动的方程 · · · · · · · 551
112. 表示静态黑洞的解 · · · · · · ·

第一章

数学准备

1. 引言 [3]

本章讲述的解析方法是本书许多后继内容的基础. 这些方法是嘉当的微分型微积分、四次形式和纽曼 – 彭罗斯形式. 虽然这些题材本身都不是新的, 却从未被连贯地全部集中在一起; 这里的讲述也是为使本书尽可能地自含. 但是, §2—§6 对微分几何基础的介绍并不是要取代别处已有的标准版本, 这里的介绍只限于导致嘉当结构方程的最直接的要点.

2. 微分几何基础

微分几何处理的是*流形*. 流形实质上是其局域为欧几里得的空间, 这句话的确切含义如下.

n 维欧式空间 $\mathbb{R}_n$ 是所有 n 元组 $(x^1, \cdots, x^n)(-\infty < x^i < +\infty)$ 的集, 开放集和闭合集 (或邻域) 如通常方式定义. 流形 M 局域地与欧氏空间一致, 意思是 M 是覆盖的邻域 (即邻域的联合) $\mathscr{U}_\alpha$, 而且对每个 $\mathscr{U}_\alpha$ 都有一个相联系的一对一映射 ϕ_α, 将每个点 $p \in \mathscr{U}_\alpha$ 成像为具有坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的 $\mathbb{R}_n$ ($\mathscr{U}_\alpha$ 被 ϕ_α 成像于其上) 的一个开放邻域里的一个点. 更进一步, 如果 M 的两个邻域 $\mathscr{U}_\alpha$ 和 $\mathscr{V}_\alpha$ 相交叉而有着共同的点 (即 $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{V}_\alpha \neq 0$), 而且如果 ϕ_α 和 ψ_α 是到 $\mathbb{R}_n$ 中邻域的相关联的映射, 而映射 $\phi_\alpha \circ \psi_\alpha^{-1}$ 将坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的一个点 $\psi_\alpha(p)(p \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{V}_\alpha)$ 成像为, 比如说, 坐标为 $(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)$ 的点 $\phi_\alpha(p)$, 则作为 M 的定义的一部分, 还要求 $x^i(i = 1, \cdots, n)$ 是 $(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)$ 的*平滑函数*. (平滑函数是所有阶的偏导数都连续的函数.)

两个流形 M 和 N 的笛卡儿积 $M \times N$ 首先是有序的点对 (p, q), 其中 $p \in M, q \in N$; 更进一步, 如果 $\mathscr{U}_\alpha$ 和 $\mathscr{V}_\alpha$ 是 M 和 N 里的邻域, ϕ_α 和 ψ_β 是相

关联的映射, $\phi_\alpha(p)=(x^1,\cdots,x^n),\psi_\beta(q)=(y^1,\cdots,y^m)$ (m 与 n 无须相等), 则映射

$$(\phi_\alpha\times\psi_\beta)(p,q)=(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^m)$$

[4] 足够完成 $M\times N$ 作为 $(m+n)$ 维流形的定义.

现在考虑 M 上的一个由映射 f 定义的函数 $f:M\to\mathbb{R}^1$. 假定将 $\mathbb{R}^n$ 里的点 $(x^1,\cdots,x^n)$ 成像到实数 $\mathbb{R}^1$ 上的联合映射 $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ 是坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$ 的平滑函数. 在 M 上由映射

$$\lambda:\mathbb{R}^1 \text{ 内的区间 } I(a<t<b)\to\lambda(t)=p\in M$$

定义一条平滑曲线 λ, 则有

$$(\phi_\alpha\circ\lambda)(t)=[x^1(t),\cdots,x^n(t)]; \tag{1}$$

并要求 $x^i(t)(i=1,\cdots,n)$ 是 t 的平滑函数. 最后注意, 在流形上定义的函数 f 能够用来定义曲线 λ 上的函数 $f\circ\lambda$. 借助于映射 $\phi_\alpha\circ\lambda$ 能导致考虑函数 $f(\lambda(t))=f(x^1(t),\cdots,x^n(t))$, 其中 $(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ 是映射 ϕ_α 产生的 $p=\lambda(t)$ 的坐标.

(a) 正切矢量

用刚给出的 M 上曲线 λ 上 $f(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ 的定义, 考虑

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\lambda(t)}\bigg|_{t=t_0}=\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{it}\frac{1}{\varepsilon}\{f(\lambda(t_0+\varepsilon))-f(\lambda(t_0))\}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x^j(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t_0}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{\lambda(t_0)}=\left(\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_{t_0}, \tag{2}$$

其中的最后一步采用了重复指标求和. (这个求和惯例将贯穿全书.)

现已清楚, 考虑通过给定点 p 的各条曲线 λ, 就能够定义一个由坐标导数 $\partial/\partial x^j$ 的线性组合组成的线性矢量空间 (在 p 上), 其形式为

$$\boldsymbol{X}=X^j\frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{3}$$

其中 X^j 是任何一组 n 个数. 这些正切矢量的产生是由于考虑由

$$x^j(t)=x^j(p)+X^jt\quad(j=1,\cdots,n) \tag{4}$$

定义的曲线 λ, 其中 t 是在某个小区间里, $-\varepsilon<t<+\varepsilon$.

p 点上的正切矢量组成了一个在 $\mathbb{R}^1$ 之上的由坐标导数构建的线性矢量空间, 这是由于线性矢量空间的要求, 即

$$(\alpha \boldsymbol{X} + \beta \boldsymbol{Y})f = \alpha(\boldsymbol{X}f) + \beta(\boldsymbol{Y}f), \tag{5}$$

对所有矢量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$、数 α 和 β、函数 f 都满足. 而且, 矢量 $(\partial/\partial x^j)_p$ 是线性 [5]
独立的; 否则就会存在不全为零的数 $X^j(j = 1, \cdots, n)$, 以致 $\boldsymbol{X} = X^j \partial/\partial x^j$ 应用于任何平滑函数时全为零; 但 $\boldsymbol{X}$ 应用于坐标函数 $x^k(k = 1, \cdots, n)$ 将导致对所有 k 都有 $\boldsymbol{X}^k = 0$; 而这是自相矛盾的.

最后, 由

$$\boldsymbol{X}f = X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^j f_{,j} \tag{6}$$

对每个平滑函数 f 定义的 $\boldsymbol{X}$, 在作用于函数的积时, 显然满足莱布尼兹 (Leibnitz) 定则, 即有

$$\boldsymbol{X}(fg)|_{\lambda(t)} = (f\boldsymbol{X}g + g\boldsymbol{X}f)|_{\lambda(t)}. \tag{7}$$

正切矢量实际上可以被看作方向导数. (方程 (6) 已经引入了标记对于 x^j 的导数的符号, 即下标的逗号后面跟着指标 j.)

一个 n 维流形 M 在 p 点上的正切矢量 (也被称为逆变矢量) 的空间, 记为 $T_p(M)$ 或简单地 T_p, 是一个 n 维矢量空间. 这个可以被形象化为 p 点上所有 "方向" 集合的空间, 被称为 p 点上的正切空间.

可以选择任何其它的 n 维线性独立矢量, 比如说 $\boldsymbol{e}_a(a = 1, \cdots, n)$, 来代替由局域坐标确定的基. 于是就必定存在形式为

$$\boldsymbol{e}_a = \Phi_a{}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{8}$$

的线性关系, 其中由 $\Phi_a{}^k$ 构成的矩阵的行列式必定是非零的. 然后给出逆关系

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \Phi^b{}_j \boldsymbol{e}_b, \tag{9}$$

其中 $[\Phi^b{}_j]$ 是矩阵 $[\Phi_a{}^k]$ 的逆:

$$\Phi_a{}^k \Phi^a{}_j = \delta^k{}_j \text{ 和 } \Phi_a{}^k \Phi^b{}_k = \delta_a{}^b. \tag{10}$$

对任何给定的基 $(\boldsymbol{e}_j)$, 都能把 p 点上的任何正切矢量表示为

$$\boldsymbol{X} = X^j \boldsymbol{e}_j, \tag{11}$$

其中 X^j 是 $\boldsymbol{X}$ 对于基 $(\boldsymbol{e}_j)$ 的分量.

(*b*) 一次型 (或余切矢量, 或协变矢量)

p 点上的一次型 $\boldsymbol{\omega}$ 是正切空间 T_p 到实数上的线性映射, 即

$$\boldsymbol{\omega} : T_p \to \mathbb{R}^1. \tag{12}$$

[6] 换句话说, 给定 p 点上的任何正切矢量 $\boldsymbol{X}$, 一次型 $\boldsymbol{\omega}$ 有唯一地与之相联的数 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X})$, 也被写为

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle. \tag{13}$$

映射所要求的线性由下列关系表示:

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \alpha \boldsymbol{X} + \beta \boldsymbol{Y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} \rangle, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是任何两个正切矢量, α 和 β 是任何两个实数. 进一步由实数和型的和来定义型的乘法, 规则是, 对任何 $\boldsymbol{X} \in T_p$ 和任何实数 α, 有

$$(\alpha \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{X}) = \alpha \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle \text{ 和 } (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle + \langle \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{X} \rangle, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\pi}$ 是两个一次型. 按照这些规则, 一次型构成一个矢量空间, 记为 ${T^*}_p$; 它也被称为 p 点上的余切空间或者正切空间的双. 一次型因此也被称为余切矢量 (或协变矢量).

现在来证实, 与 T_p 的基 $(\boldsymbol{e}_j)$ 相关联的 ${T^*}_p$ 的基是由一次型 $(\boldsymbol{e}^i)(i = 1, \cdots, n)$ 提供, 它把任何正切矢量 $\boldsymbol{X} = X^j \boldsymbol{e}_j$ 映射成其分量, 即有

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{X}) = \langle \boldsymbol{e}^i, X^j \boldsymbol{e}_j \rangle = X^i \quad (i = 1, \cdots, n). \tag{16}$$

由上式最后一步可看出

$$\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}_j) = \langle \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta^i{}_j. \tag{17}$$

任意一次型 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为 $\boldsymbol{e}^i$ 的线性组合, 是由注意到

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \boldsymbol{\omega}, X^i \boldsymbol{e}_i \rangle = X^i \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}_i \rangle \tag{18}$$

而得出. 现在令

$$\omega_i = \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{e}_i \rangle = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{e}_i) \tag{19}$$

为 $\boldsymbol{\omega}$ 映射 p 点上正切空间 T_p 的基矢 $(\boldsymbol{e}_i)$ 而成的数, 可写出

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} \rangle &= \omega_i X^i = \omega_i \langle \boldsymbol{e}^i, X^j \boldsymbol{e}_j \rangle \\ &= \langle \omega_i \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{X} \rangle. \end{aligned} \tag{20}$$

由于上式中最后一步对任何 $\boldsymbol{X} \in T_p$ 都适用, 于是有

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \boldsymbol{e}^i; \tag{21}$$

这正是所需要的 $\boldsymbol{\omega}$ 作为 $\boldsymbol{e}^i$ 的线性组合的表示. 矢量 $\boldsymbol{e}^i$ 的线性独立性由其定义是显然的. 基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}^i)$ 被称是为 p 点上的正切和余切空间提供了双基.

如果代替双基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}^j)$ 而必须选择不同的基, [7]

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \Phi_{i'}{}^{j} \boldsymbol{e}_j \text{ 和 } \boldsymbol{e}^{j'} = \Phi^{j'}{}_{j} \boldsymbol{e}^j, \tag{22}$$

它们是由 $\Phi_{i'}{}^{j}$ 和 $\Phi^{j'}{}_{j}$ 所表示的非奇异线性变换得到的, 那么新基 $(\boldsymbol{e}_{i'})$ 和 $(\boldsymbol{e}^{j'})$ 持续成双的条件要求

$$\begin{aligned} \delta^{j'}{}_{i'} = \langle \boldsymbol{e}^{j'}, \boldsymbol{e}_{i'} \rangle &= \Phi^{j'}{}_{j} \Phi_{i'}{}^{k} \langle \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{e}_k \rangle \\ &= \Phi^{j'}{}_{j} \Phi_{i'}{}^{k} \delta^{j}{}_{k} = \Phi^{j'}{}_{j} \Phi^{j}{}_{i'}; \end{aligned} \tag{23}$$

也就是说, 矩阵 $[\Phi_{i'}{}^{i}]$ 和 $[\Phi^{j'}{}_{j}]$ 相互为逆矩阵.

最后注意到, 如果从一个局域坐标集 (x^i) 变到另一个集 $(x^{i'})$, 那么 $\Phi_{i'}{}^{i}$ 和 $\Phi^{j'}{}_{j}$ 的对应表示是

$$\Phi_{i'}{}^{i} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)_p \text{ 和 } \Phi^{j'}{}_{j} = \left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \right)_p. \tag{24}$$

与流形上的任何函数 f 相联系, 可以对任何矢量 $\boldsymbol{X} \in T_p$ 通过要求

$$\mathrm{d}f(\boldsymbol{X}) = \langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X} f \tag{25}$$

来定义一个一次型 $\mathrm{d}f$. 在一个局域坐标基里,

$$\boldsymbol{X} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}; \tag{26}$$

并且由定义,

$$\langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X} \rangle = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i f_{,i}; \tag{27}$$

特别地, 有

$$\left\langle \mathrm{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \delta^j{}_i. \tag{28}$$

因此, 一次型 $(\mathrm{d}x^j)$ 提供的余切矢量的局域坐标基是正切矢量 $(\partial_j = \partial/\partial x^j)$ 为正切空间提供的局域坐标基的双. 基 (∂_j) 和 $(\mathrm{d}x^j)$ 有时被认为是正切和余切空间的典则基.

注意, 如果

$$\mathrm{d}f = \alpha_j \mathrm{d}x^j, \tag{29}$$

于是由

$$\begin{aligned} X^i f_{,i} &= \langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X} \rangle = \langle \alpha_j \mathrm{d}x^j, X^i \partial_i \rangle \\ &= \alpha_j X^i \langle \mathrm{d}x^j, \partial_i \rangle = \alpha_i X^i, \end{aligned} \tag{30}$$

有

$$\alpha_i = f_{,i} \text{ 和 } \mathrm{d}f = f_{,i}\mathrm{d}x^i; \tag{31}$$

上面最后一个等式是与通常赋予 $\mathrm{d}f$ 的意义一致的.

[8] (*c*) **张量和张量积**

令

$$\Pi^s{}_r = \underbrace{T^*{}_p \times T^*{}_p \times \cdots \times T^*{}_p}_{r \text{ 个因子}} \times \underbrace{T_p \times T_p \times \cdots \times T_p}_{s \text{ 个因子}} \tag{32}$$

表示一个流形的某一点 p 上 r 个余切空间和 s 个正切空间的笛卡儿积, 也就是 r 个一次型和 s 个正切矢量的有序集空间: $(\omega^1, \cdots, \omega^r, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_s)$. 考虑流形 $\Pi^s{}_r$ 到实数的多重线性映射 T:

$$\boldsymbol{T} : \Pi^s{}_r \to \mathbb{R}^1. \tag{33}$$

的确, 映射提供的是 r 个一次型和 s 个正切矢量的任何给定有序集与一个实数的关联 (以某种唯一的方式):

$$\boldsymbol{T}(\omega^1, \cdots, \omega^r, X_1, \cdots, X_s) = \text{一个实数}. \tag{34}$$

映射为多重线性的条件要求, 对所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ 和 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T_p$, 并且对所有其它型和矢量的类似替代, 有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_s) \\ &= \alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_s) + \beta\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_s). \end{aligned} \tag{35}$$

一个这样定义的多重线性映射被称为一个 (r, s) 类型的张量. 给定 (r, s) 类型张量的线性组合的定义规则是, 对所有 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{\omega}^i \in T^*{}_p$, 和 $\boldsymbol{X}_j \in T_p (i = 1, \cdots, r; j = 1, \cdots, s)$, 有

$$\begin{aligned} &(\alpha\boldsymbol{T} + \beta\boldsymbol{S})(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_s) \\ &= \alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_s) + \beta\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\omega}^1, \cdots, \boldsymbol{\omega}^r, \boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_s). \end{aligned} \tag{36}$$

通过这些规则, 给定的 (r,s) 类型张量构成一个 n^{r+s} 维矢量空间. 这样的张量空间被称为张量积空间, 记为

$$T^r{}_s(p) = \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{r\text{ 个因子}} \otimes \underbrace{T^*{}_p \otimes \cdots \otimes T^*{}_p}_{s\text{ 个因子}}. \tag{37}$$

现在来证实, 类型 (r,s) 的张量集的基由 n^{r+s} 个特别映射提供,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s) \\ &= \boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}(\omega^1{}_{k_1}\boldsymbol{e}^{k_1},\cdots,\omega^r{}_{k_r}\boldsymbol{e}^{k_r},X_1{}^{l_1}\boldsymbol{e}_{l_1},\cdots,X_s{}^{l_s}\boldsymbol{e}_{l_s}) \\ &= \omega^1{}_{i_1}\cdots\omega^r{}_{i_r}\boldsymbol{X}_1{}^{j_1}\cdots\boldsymbol{X}_s{}^{j_s}. \end{aligned} \tag{38}$$

这些映射对每个宗量都清楚地是线性的, 并且是 (r,s) 类型的张量. 定义这些 [9]
映射的一个等价方式是

$$\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{e}^{k_1},\cdots,\boldsymbol{e}^{k_r},\boldsymbol{e}_{l_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{l_s}) = \delta^{k_1}{}_{i_1}\delta^{k_2}{}_{i_2}\cdots\delta^{k_r}{}_{i_r}\delta^{j_1}{}_{l_1}\cdots\delta^{j_s}{}_{l_s}. \tag{39}$$

任何 (r,s) 类型的张量都能被表示为映射 (39) 的线性组合, 得出这一点是因为注意到

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s) \\ &= \boldsymbol{T}(\omega^1{}_{i_1}\boldsymbol{e}^{i_1},\cdots,\omega_{i_r}{}^{i_r}\boldsymbol{e}^{i_r},X_1{}^{j_1}\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,X_s{}^{j_s}\boldsymbol{e}_{j_s}) \\ &= \omega^1{}_{i_1}\cdots\omega^r{}_{i_r}X_1{}^{j_1}\cdots X_s{}^{j_s}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}^{i_r},\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_s}), \end{aligned} \tag{40}$$

并令

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}^{i_r},\boldsymbol{e}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{j_s}) = T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}; \tag{41}$$

于是能得出 (见方程 (38))

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}; \tag{42}$$

这就是所要求的 $\boldsymbol{T}$ 作为映射 (39) 的线性组合的表示. 映射 (39) 显然是线性独立的, 因此它们提供了 (r,s) 类型张量的基. 这些基元 $\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}$ 的数量是 n^{r+s} (这是 $T^r{}_s$ 的维度).

展开式 (42) 中的系数 $T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 被称为 $\boldsymbol{T}$ 相对于所选基的分量.

一般用

$$\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s} = \boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s} \tag{43}$$

来表示 T_p 和 $T^*{}_p$ 的双基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}^j)$ 的张量积. 用此表示, r 个正切矢量和 s 个一次型的张量积

$$\boldsymbol{Y}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{Y}_r\otimes\boldsymbol{\Omega}^1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{\Omega}^s \tag{44}$$

是 $T^r{}_s$ 的那个将 $(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)$ 映射到数

$$\langle\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{Y}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_r\rangle\langle\boldsymbol{\Omega}^1,\boldsymbol{X}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\Omega}^s,\boldsymbol{X}_s\rangle \tag{45}$$

的成分. 特别地,

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s})(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)\\ &=\langle\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{e}_{i_1}\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{e}_{i_r}\rangle\langle\boldsymbol{e}^{j_1},\boldsymbol{X}_1\rangle\cdots\langle\boldsymbol{e}^{j_s},\boldsymbol{X}_s\rangle\\ &=\omega^1{}_{i_1}\cdots\omega^r{}_{i_r}X_1{}^{j_1}\cdots X_s{}^{j_s}=\boldsymbol{e}_{i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s);\end{aligned} \tag{46}$$

这证明了上述表示的正确性.

如果代替双基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}^j)$ 而选择双基 $(\boldsymbol{e}_{i'})$ 和 $(\boldsymbol{e}^{j'})$, 于是由方程 (22) 可得, $\boldsymbol{T}$ 相对于新基

$$\boldsymbol{e}_{i'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i'_r}\otimes\boldsymbol{e}^{j'_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j'_s}$$

的分量由

[10]

$$T^{i'_1\cdots i'_r}{}_{j'_1\cdots j'_s}=\Phi^{i'_1}{}_{i_1}\cdots\Phi^{i'_r}{}_{i_r}\Phi_{j'_1}{}^{j_1}\cdots\Phi_{j'_s}{}^{j_s}T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \tag{47}$$

给出.

分量为 $T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}$ 的 (r,s) 类型张量对于所选逆变指标 i_p 和所选协变指标 j_q 的收缩, 被定义为下列的 $(r-1,s-1)$ 类型张量:

$$\begin{aligned}&T^{i_1\cdots i_{p-1}ki_{p+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{q-1}kj_{q+1}\cdots j_s}\boldsymbol{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_{p-1}}\otimes\boldsymbol{e}_{i_{p+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{i_r}\\ &\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_{q-1}}\otimes\boldsymbol{e}^{j_{q+1}}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s},\end{aligned} \tag{48}$$

其中如标记所示, 须对 (i_p 逆变指标和 j_q 协变指标中) k 的所有值求和. 借助于方程 (23) 和 (47) 容易验证, 收缩过程对选择的基是独立的.

如果对 T_p 中所有的 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 都有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\quad\text{或}\quad\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}), \tag{49}$$

这个 (0, 2) 类型张量就被称为对称或反对称的. 用分量语言, 在任意基里, 对称或反对称是指

$$T_{ij}=T_{ji}\quad\text{或}\ T_{ij}=-T_{jiI}. \tag{50}$$

更一般地, 如果对所有 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 都有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^i,\cdots,\boldsymbol{\omega}^j,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)\\ &=\pm\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^j,\cdots,\boldsymbol{\omega}^i,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s),\end{aligned} \tag{51}$$

这个 (r,s) 类型张量就被成为对协变指标 i 和 j 是对称或反对称的. 对选择的逆变指标的对称或反对称可以类似地定义.

3. 型的微积分

$(0,s)$ 类型张量的特别重要的一类是完全反对称张量类, 即对每对宗量都是反对称的协变张量, 也就是对所有 i、j 指标对和所有 $\boldsymbol{X}$ 都有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_i,\cdots,\boldsymbol{X}_j,\cdots,\boldsymbol{X}_s)=-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_j,\cdots,\boldsymbol{X}_i,\cdots,\boldsymbol{X}_s). \tag{52}$$

这类张量能由 $(0,s)$ 类型的一般张量 $\boldsymbol{T}$ 构造出来, 方法是使用交替算符 A, 其作用是给出下列线性组合,

$$A\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)=\frac{1}{s!}\sum_{j_1,\cdots,j_s}\operatorname{sgn}(j_1,\cdots,j_s)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{X}_{j_s}), \tag{53}$$

其中的求和是覆盖 s 个整数 $(1,\cdots,s)$ 的所有 $s!$ 个排列, $\operatorname{sgn}(j_1,\cdots,j_s)=\pm1$ [11]
是按照 $(j_1,\cdots,j_s)$ 是 $(1,\cdots,s)$ 的偶数或奇数排列; 方程 (53) 应是对每个 $(X_1,\cdots,X_s)$ 适用.

显然, 如果 $\boldsymbol{T}$ 已经是完全反对称的, A 的作用就简单地是再造 $\boldsymbol{T}$. 还有, 如果 $s>n$ (矢量空间的维度), A 对 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_s)$ 的作用是将它简化到零; 换句话说, 对 $s>n$ 不可能有完全反对称的 $(0,s)$ 类型张量.

完全反对称的 $(0,s)$ 类型张量被称为 s 次型. 由于它们在其任何两个宗量重合时必定为零, 因此 s 次型构成一个维度为 $n!/s!(n-s)!$ 的矢量空间. 这个空间记为 ${\Lambda^s T^*}_p$.

如果 $T_{j_1\cdots j_s}$ 是 $(0,s)$ 类型张量相对于基

$$\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s}$$

的分量, 而且如果该张量确是完全反对称的, 那么它的 $n!/s!(n-s)!$ 个各不相同的分量可以通过以严格地由大到小次序的方式排列其指标来区分:

$$T_{j_1\cdots j_s}\quad\text{其中}\quad j_1>j_2>\cdots>j_s. \tag{54}$$

而 ${\Lambda^s T^*}_p$ 的基可以通过把交替算符 A 作用于张量积的基元得到:

$$A(\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_s}).$$

产生的基元以下列方式写为 e^j 的外部积或楔形积:

$$\boldsymbol{e}^{j_1}\wedge\boldsymbol{e}^{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{j_s}\quad(j_1>j_2>\cdots>j_s). \tag{55}$$

于是一般的 s 次型可写为

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Omega}_{j_1\cdots j_s}\boldsymbol{e}^{j_1}\wedge\boldsymbol{e}^{j_2}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{j_s}\quad(j_1>j_2>\cdots>j_s), \tag{56}$$

其中的求和现在只覆盖严格由大到小的序列.

由于一对指标的互换是等价于楔形积中对应元的互换, 因而楔形积中元的互换必定伴随有符号的改变, 即有

$$\boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^k = -\boldsymbol{e}^k \wedge \boldsymbol{e}^j. \tag{57}$$

在局域坐标基里, s 次型的表示是

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_{j_1 \cdots j_s} \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_s}. \tag{58}$$

给定任一 p 次型 $\boldsymbol{\Omega}^1$ 和 q 次型 $\boldsymbol{\Omega}^2$, 它们的楔形 (或外部) 积可由下列规则构成,

$$\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 = A(\boldsymbol{\Omega}^1 \otimes \boldsymbol{\Omega}^2), \tag{59}$$

[12] 而得到一个 $(p+q)$ 次型. (若 $p+q>n$, 则必定相应地全为零.)

型的楔形积显然服从结合律和分配率, 但一般不是可交换的. 因为由定义,

$$\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 = (\Omega^1{}_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_p}) \wedge (\Omega^2{}_{k_1 \cdots k_q} \boldsymbol{e}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{k_q}), \tag{60}$$

其中 $(j_1, \cdots, j_p)$ 和 $(k_1, \cdots, k_q)$ 是严格由大到小的次序. 相应地,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2 &= (-1)^{pq} (\Omega^2{}_{k_1 \cdots k_q} \boldsymbol{e}^{k_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{k_q}) \wedge (\Omega^1{}_{j_1 \cdots j_p} \boldsymbol{e}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}^{j_q}) \\ &= (-1)^{pq} \boldsymbol{\Omega}^2 \wedge \boldsymbol{\Omega}^1, \end{aligned} \tag{61}$$

因为在 $\boldsymbol{\Omega}^1 \wedge \boldsymbol{\Omega}^2$ 能成为要求于 $\boldsymbol{\Omega}^2 \wedge \boldsymbol{\Omega}^1$ 的形式之前, 每个 q 基元 $\boldsymbol{e}^{k_1}, \cdots, \boldsymbol{e}^{k_q}$ 都必须经历 p 次互换.

迄今已经考虑了流形的一个点上定义的张量和型. 现在将基本定义扩张, 以能处理在 M 上定义的场. 于是, M 上的一个 (r,s) 类型的平滑张量场 $T^r{}_s(M)$ (或简单地 $T^r{}_s$) 就是在每个点 $p \in M$ 上 $T^r{}_s(p)$ 的一个元的分派, 方式是 $T^r{}_s$ 相对于任何局域坐标基的分量是坐标的平滑函数. 基本定义的这一扩张对于表示微分的概念是必须的.

本书下文将只关注平滑张量场, 即使省略了限制词 “平滑” 和 “场” 时也是如此.

(a) 外部微分

外部微分是由作用到型上的算符 d 来实现的. 它按照下列规则一贯地将 p 次型转变为 $(p+1)$ 次型:

(a) 算符 d 作用于函数 (或零次型) f, 产生一个一次型 $\mathrm{d}f$, 即对每个 $\boldsymbol{X} \in T^1{}_0$ 有 $\mathrm{d}f(\boldsymbol{X}) = \langle \mathrm{d}f, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X}f$. 特别是, 在局域坐标基里有

(b) $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j$. 如果 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 是两个 p 次型, 有

(c) $\mathrm{d}(\alpha\boldsymbol{A}_1 + \beta\boldsymbol{A}_2) = \alpha\mathrm{d}\boldsymbol{A}_1 + \beta\mathrm{d}A_2(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1)$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个 p 次型, $\boldsymbol{B}$ 是一个 q 次型, 有

(d) $\mathrm{d}(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) = \mathrm{d}\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} + (-1)^p \boldsymbol{A} \wedge \mathrm{d}\boldsymbol{B}$. 庞加莱 (poincaré) 引理, 要求对每个 p 次型 $\boldsymbol{A}$ 有 $\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{A}) = 0$.

为表明受上述规则支配的算符 d 已很好地定义, 首先考虑 p 次型 $\boldsymbol{A}$ 的外 [13]
部微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{d}(A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p})$. 按照规则 (a)、(b)和 (d), 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A &= \mathrm{d}A_{j_1\cdots j_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p} \\ &= \frac{\partial A_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}. \end{aligned} \tag{62}$$

现在重要的是证实, 由方程 (62) 给出的 $\mathrm{d}A$ 不依赖于局域坐标系的选择. 如果代替局域坐标系 (x^j) 而选择不同的坐标系 $(x^{j'})$, 则由方程 (24) 和 (47) 有

$$A_{j'_1\cdots j'_p} = A_{j_1\cdots j_p}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}, \tag{63}$$

结果必然是

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(A_{j'_1\cdots j'_p}\mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p}) \\ &= \mathrm{d}\left(A_{j_1\cdots j_p}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}\mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p}\right) \\ &= \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}\mathrm{d}A_{j_1\cdots j_p} \wedge \mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p} \\ &\quad + \frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial x^{k'}\partial x^{j'_1}}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{j'_2}}\cdots\frac{\partial x^{j_p}}{\partial x^{j'_p}}A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{k'} \wedge \mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p} + \cdots \\ &\quad + \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_{p-1}}}{\partial x^{j'_{p-1}}}\frac{\partial^2 x^{j_p}}{\partial x^{k'}\partial x^{j'_p}}A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{k'} \wedge \mathrm{d}x^{j'_1} \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p}. \end{aligned} \tag{64}$$

方程 (64) 右边所有包含 $x^{j_i}(i = 1, \cdots, n)$ 的二阶导数的项为零, 这是因为它们对 k'、j'_i 的对称性和在楔形积里对同样指标基元的反对称性; 唯一幸存的是第一项, 显然也就是

$$\mathrm{d}A_{j_1\cdots j_p} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p} = \mathrm{d}(A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}).$$

相应有

$$\mathrm{d}(A_{j'_1\cdots j'_p}\mathrm{d}x^{j'_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j'_p}) = \mathrm{d}(A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{j_p}); \tag{65}$$

而这正是要证实的.

下面证实, 规则 (c) 与 d$\boldsymbol{A}$ 的表示 (62) 是一致的, 因为按照规则 (a)、(b)和 (d) 有

[14]
$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}) &= \mathrm{d}(A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\wedge B_{k_1\cdots k_q}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_q})\\ &= \frac{\partial A_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\wedge B_{k_1\cdots k_q}\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_q}\\ &\quad + A_{j_1\cdots j_p}\frac{\partial B_{k_1\cdots k_q}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\wedge\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_q}\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}+(-1)^p A_{j_1\cdots j_p}\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\\ &\quad\wedge\left(\frac{\partial B_{k_1\cdots k_q}}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{k_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{k_q}\right)\\ &= \mathrm{d}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}+(-1)^p\boldsymbol{A}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{B}.\end{aligned}\tag{66}$$

最后, 为确立规则 (d) 的一致性, 只需看到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\mathrm{d}\boldsymbol{A}) &= \mathrm{d}\left(\frac{\partial A_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\right)\\ &= \frac{\partial^2 A_{j_1\cdots j_p}}{\partial x^i\partial x^k}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{j_p}\equiv 0.\end{aligned}\tag{67}$$

这就完成了对算符 d 确已很好地定义的证明.

(*b*) 李括号和李微分

给定任意两个矢量场 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$, 它们的李括号 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ 定义为对任意函数 f 的作用, 给为

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f=(\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})f=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}f)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}f).\tag{68}$$

任何两个正切矢量的李括号再次是一个正切矢量, 因为

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](\alpha f+\beta g)=\alpha[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f+\beta[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g\tag{69}$$

和

$$[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](fg)=g[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f+f[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g,\tag{70}$$

其中 f 和 g 是两个任意函数, α 和 β 是两个任意实数. 这些关系式的第一个是显然的, 第二个也不难得到:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}](fg) &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}fg)-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}fg)\\ &= \boldsymbol{X}(g\boldsymbol{Y}f+f\boldsymbol{Y}g)-\boldsymbol{Y}(g\boldsymbol{X}f+f\boldsymbol{X}g)\\ &= g\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}f+(\boldsymbol{X}g)(\boldsymbol{Y}f)+(\boldsymbol{X}f)(\boldsymbol{Y}g)+f\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}g\\ &\quad-\{g\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}f+(\boldsymbol{X}f)(\boldsymbol{Y}g)+(\boldsymbol{Y}f)(\boldsymbol{X}g)+f\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}g\}\\ &= g[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]f+f[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]g.\end{aligned}\tag{71}$$

关系式 (69) 确立了李括号是一个线性算符, 而关系式 (70) 确立了它是一个微分. 可以容易地验证, 李括号满足雅可比恒等式,

$$[[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}],\boldsymbol{Z}]+[[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}],\boldsymbol{X}]+[[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}],\boldsymbol{Y}]=0. \tag{72}$$ [15]

已经看到, $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的李括号是一个正切矢量. 它的相对于局域坐标基的分量可由它对 x^j 的作用得到, 即有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]^j&=(\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{YX})x^j=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^j-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^j\\&=X^kY^j{}_{,k}-Y^kX^j{}_{,k},\end{aligned} \tag{73}$$

其中 (如前已指明的) 指标前的逗号表示对该指标的局域坐标求偏导数.

在局域坐标基里, 李括号 $[\partial_k,\partial_j]$ 显然为零.

由于是作为一种求导, $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$ 被称为 $\boldsymbol{Y}$ 在 $\boldsymbol{X}$ 方向上的李导数, 并被写为

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=-[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}]=-\mathscr{L}_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}. \tag{74}$$

更一般地, 将一个给定类型张量场 $\boldsymbol{T}$ 的李导数 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}$ 定义为符合下列规则的同样类型张量:

(a) 它对标量场 f 的作用被给为

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}f=\boldsymbol{X}f=\mathrm{d}f(\boldsymbol{X}). \tag{75}$$

(b) 如已定义的, 它对正切矢量 $\boldsymbol{Y}$ 的作用被给为

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]. \tag{76}$$

(c) 它线性地作用于张量场, 并在作用于张量积时符合莱布尼兹定则:

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T})=\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{S}\otimes\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}, \tag{77}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是任意张量场.

上述规则的最后一个能用来导出 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}$ 作用于任意类型张量的效果. 它作用于一次型 $\boldsymbol{\omega}$ 的效果能由对任意矢量场 $\boldsymbol{Y}$ 考虑收缩形式的关系

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\omega}\otimes\boldsymbol{Y})=(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})\otimes\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{\omega}\otimes(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}) \tag{78}$$

来确定, 也就是

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Y}\rangle=\langle\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Y}\rangle+\langle\boldsymbol{\omega},\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}\rangle. \tag{79}$$

明晰地写出上面最后一个方程, 有

$$X^k(\omega_j Y^j)_{,k} = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_j Y^j + \omega_j(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j \tag{80}$$

或, 用方程 (73) 可得

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_j Y^j &= X^k(\omega_{j,k}Y^j + \omega_j Y^j{}_{,k}) - \omega_j(X^k Y^j{}_{,k} - Y^k X^j{}_{,k}) \\ &= (X^k\omega_{j,k} + \omega_k X^k{}_{,j})Y^j. \end{aligned} \tag{81}$$

[16] 由于这最后一个方程对任意 $\boldsymbol{Y}$ 都成立, 结果就是

$$(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})_j = \omega_{j,k}X^k + \omega_k X^k{}_{,j}. \tag{82}$$

可以将方程另写成以下形式

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Y})] = (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\omega}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}). \tag{83}$$

由规则 (c), 方程 (83) 容许推广到 (r,s) 类型的张量. 于是有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)] &= (\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s) \\ &+\boldsymbol{T}(\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)+\cdots \\ &+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_s), \end{aligned} \tag{84}$$

除了右边第一项外, 这个方程中所有的项都能用已知的结果 (73)、(75) 和 (82) 来计算. 因此 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}$ 的分量就能由方程 (84) 得出.

为后面的应用, 这里导出一个联系一次型的外部导数与李导数的简单等式. 用方程 (82), 有

$$\begin{aligned}&\langle\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{X}\rangle \\ &= (\omega_{j,k}X^k + \omega_k X^k{}_{,j})Y^j - Y^j(\omega_{k,j}X^k + \omega_k X^k{}_{,j}) \\ &= (\omega_{j,k} - \omega_{k,j})X^k Y^j = 2\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \end{aligned} \tag{85}$$

现在由方程 (79) 代换 $\langle\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Y}\rangle$, 就得到所要求的结果:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{X}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{X}\rangle - \langle\boldsymbol{\omega},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\rangle\} \tag{86}$$

其中已经将 $\mathscr{L}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 写为李括号 $[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]$.

4. 协变微分

现在来定义一种不同于外部微分和李微分的微分, 它要求流形被赋予一个附加的结构. 这个附加结构就是仿射联络 ∇, 它给予 M 上的每个矢量场 $\boldsymbol{X}$ 一个微分算符 $\nabla_{\boldsymbol{X}}$, 该算符把任意一个矢量场 $\boldsymbol{Y}$ 映射为矢量场 $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$. 与这些要求一致, 加入条件:

(a) $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 对宗量 $\boldsymbol{X}$ 是线性的, 即

$$\nabla_{f\boldsymbol{X}+g\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} = f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} + g\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} \quad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in T^1{}_0), \tag{87}$$

其中 f 和 g 是定义在 M 上的任意两个函数;

(b) $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 对宗量 $\boldsymbol{Y}$ 是线性的, 即

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Z}) = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} + \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} \quad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in T^1{}_0), \tag{88}$$

(c)
$$\nabla_{\boldsymbol{X}} f = \boldsymbol{X} f, \tag{89}$$

其中 f 是 M 上的任意函数; 最后 [17]

(d)
$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(f\boldsymbol{Y}) = (\nabla_{\boldsymbol{X}} f)\boldsymbol{Y} + f\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}. \tag{90}$$

应该注意, 按照方程 (89), 在局域坐标基 (∂_k) 里, ∇_{∂_k} 在作用到函数上时与对 x^k 的偏导数重合.

有了由条件 (a)—(d) 规定的 $\nabla_{\boldsymbol{X}}$ 对矢量场 $\boldsymbol{Y}(\in T^1{}_0)$ 的作用, 现在把 $\boldsymbol{Y}$ 的协变导数 $\nabla\boldsymbol{Y}$ 定义为 (1, 1) 类型的张量, 它把逆变矢量场 $\boldsymbol{X}$ 映射到 $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 上, 即对每个 $\boldsymbol{X}\in T^1{}_0$ 有

$$\nabla\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}) = \langle\nabla\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X}\rangle = \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}. \tag{91}$$

按照这个定义, 可以把方程 (90) 重写为

$$\nabla(f\boldsymbol{Y}) = \mathrm{d}f\otimes\boldsymbol{Y} + f\nabla\boldsymbol{Y}. \tag{92}$$

为阐明引入联络的确切含义, 对于选择的某对双基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}^j)$ 来重写 $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 是有用的. 于是, 用规则 (a)—(d), 有

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = \nabla_{\boldsymbol{X}}(Y^j\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j. \tag{93}$$

由于 $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j$ 对特定 $\boldsymbol{e}_j$ 是一个 (1, 0) 类型张量场, 它在所选基里的表示形式必定是

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_l, \tag{94}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^l{}_j$ (依赖于 l 和 j) 是一次型. 相应地, 可以写出

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_l. \tag{95}$$

作为选择, 还可以重写方程 (93) 为

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^j\nabla_{X^k\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j \\ &= (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^jX^k\nabla_{\boldsymbol{e}_k}\boldsymbol{e}_j,\end{aligned} \tag{96}$$

或, 依照定义 (94)

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{X}Y^j)\boldsymbol{e}_j + Y^jX^k\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_l. \tag{97}$$

令

$$\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{e}_k) = \omega^l{}_{jk} \tag{98}$$

为 $\boldsymbol{e}^k$ 在 $\boldsymbol{\omega}^l{}_j$ 对基 $(\boldsymbol{e}^k)$ 的展开中的系数, 结论是, 联络 ∇ 被具体化为 n^2 个一次型 $\boldsymbol{\omega}^l{}_j$, 或等价地 n^3 个标量场 $\omega^l{}_{jk}$.

回到方程 (95) 并将其重写为

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{X}Y^j + \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})Y^l]\boldsymbol{e}_j, \tag{99}$$

可推断出

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j = \boldsymbol{X}Y^j + \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})Y^l. \tag{100}$$

[18] 在局域坐标基 $(\partial_k, \mathrm{d}X^l)$ 里, 方程 (100) 给出

$$(\nabla_{\partial_k}\boldsymbol{Y})^j = \partial_kY^j + Y^l\omega^j{}_{lk} = Y^j{}_{,k} + Y^l\omega^j{}_{lk}. \tag{101}$$

在局域坐标基里, 通常用

$$\Gamma^j{}_{lk} \text{ 代替 } \omega^j{}_{lk}; \tag{102}$$

并用分号表示协变导数 (与表示通常偏导数的逗号不同), 就得到标准公式

$$Y^j{}_{;k} = Y^j{}_{,k} + Y^l\Gamma^j{}_{lk}. \tag{103}$$

矢量场协变导数的定义可以一般地推广到张量场, 途径是要求算符 ∇ 在作用于张量积时遵守莱布尼兹定则, 即要求

$$\nabla(\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T}) = \nabla\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{T} + \boldsymbol{S}\otimes\nabla\boldsymbol{T}, \tag{104}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是两个任意张量场. 此要求的一个直接结果是 (见方程 (84))

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)\} &= (\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T})(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)\\ &+\boldsymbol{T}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\omega}^1,\boldsymbol{\omega}^2,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_s)+\cdots\\ &+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\omega}^1,\cdots,\boldsymbol{\omega}^r,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{s-1},\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}_s).\end{aligned}\tag{105}$$

于是, 如果 $\boldsymbol{\Omega}$ 是一次型, 那么对每个矢量场 $\boldsymbol{Y}$, 上述方程给出

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{Y}))=(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{\Omega}(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}),\tag{106}$$

或, 用局域基 $(\boldsymbol{e}_i)$ 和 $(\boldsymbol{e}_j)$, 有

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\Omega}_jY^j)=(\nabla_X\boldsymbol{\Omega})_jY^j+\Omega_j(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j.\tag{107}$$

现在用规则 (c) 和方程 (100), 得

$$\begin{aligned}(\nabla_X\boldsymbol{\Omega})_jY^j&=(\boldsymbol{X}\Omega_j)Y^j+\Omega_j(\boldsymbol{X}Y^j)-\Omega_j[\boldsymbol{X}Y^j+Y^l\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})]\\ &=(\boldsymbol{X}\Omega_j)Y^j-\Omega_l\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X})Y^j.\end{aligned}\tag{108}$$

结论是

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega})_j=\boldsymbol{X}\Omega_j-\Omega_l\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X}),\tag{109}$$

或等价地,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{X}\Omega_j-\Omega_l\boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X})]\boldsymbol{e}^j.\tag{110}$$

将上面最后一个方程具体化到 $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{e}^j$ 的情况, 得公式

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}^j=-\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}^l,\tag{111}$$

可与较早的公式 (94) 相对照. 方程 (111) 表明, 只要同样接受对张量积的莱布尼兹定则, n^2 个一次型 $\boldsymbol{\omega}^l{}_j$ 的知识足以决定一次型的协变导数.

还可注意, 在局域坐标基里, 方程 (109) 给出 [19]

$$\Omega_{j;k}=\Omega_{j,k}-\Omega_l\Gamma^l{}_{jk}.\tag{112}$$

方程 (109) 和 (112) 应用于一次型 $\mathrm{d}f$ 会产生一个重要结果. 由于 $\mathrm{d}f$ 在局域坐标基的分量是 $f_{,j}$, 由方程 (112) 可得, 在这种情况有

$$f_{,j;k}=f_{,j,k}-f_{,l}\Gamma^l{}_{jk};\tag{113}$$

交换这个方程中的指标 j 和 k, 可得

$$f_{,k;j}=f_{,k,j}-f_{,l}\Gamma^l{}_{kj}.\tag{114}$$

由于偏导数作用于函数时可交换, 将方程 (113) 和 (114) 相减得到

$$f_{,j;k} - f_{,k;j} = -f_{,l}(\Gamma^l{}_{jk} - \Gamma^l{}_{kj}). \tag{115}$$

方程 (115) 的右边只对不对称的联络才不为零. 因此, 通常写成

$$T^l{}_{jk} = -(\Gamma^l{}_{jk} - \Gamma^l{}_{kj}). \tag{116}$$

由这个量在方程 (115) 中的出现, 显然 $T^l{}_{jk}$ 是一个 (1, 2) 类型张量的分量. 它被称为扭率张量. 在§5 中将给出扭率张量更一般的定义; 但现在可以看到, 用它能将方程 (115) 写成

$$f_{,j;k} - f_{,k;j} = T^l{}_{jk} f_{,l}. \tag{117}$$

回到方程 (105), 现在看到, 借助于方程 (99) 和 (109), 容易写出一个任意张量场的协变导数, 即

$$S^{ij}{}_{k;l} = S^{ij}{}_{k,l} + S^{mj}{}_{k}\Gamma^i{}_{ml} + S^{im}{}_{k}\Gamma^j{}_{ml} - S^{ij}{}_{m}\Gamma^m{}_{kl}. \tag{118}$$

(a) 平行位移和短程线

令 $\boldsymbol{Y}$ 表示一个逆变矢量场. 考虑它沿 M 上一条曲线 λ 的变化. 在一个局域坐标系里, 由 t (λ 的参数) 的增量 δt 造成的沿 λ 的位移所导致的 $\boldsymbol{Y}$ 的变化 $\delta\boldsymbol{Y}$ 由下式给出:

$$(\delta\boldsymbol{Y})^j = Y^j{}_{,k}\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t. \tag{119}$$

在欧几里得几何和笛卡儿坐标系里, 如果 $\delta\boldsymbol{Y} = 0$, 就说 $\boldsymbol{Y}$ 是沿 λ "平行传播". 在一般的有联络的可微分流形里, 类似地定义一个矢量 $\boldsymbol{Y}$ 沿 λ 的平行传播是有

[20]
$$(D\boldsymbol{Y})^j = (\nabla_{\partial_k}\boldsymbol{Y})^j\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t = Y^j{}_{;k}\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t = 0, \tag{120}$$

或另一选择是有

$$(Y^j{}_{,k} + Y^l\Gamma^j{}_{lk})\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t = 0. \tag{121}$$

换句话说, $\boldsymbol{Y}$ 沿 λ 的平行传播要求 (见方程 (119))

$$(\delta\boldsymbol{Y})^j = -Y^l\Gamma^j{}_{lk}\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t. \tag{122}$$

特别地, 对曲线 λ 上正切矢量 $\mathrm{d}x^j(\lambda(t))/\mathrm{d}t$ 沿 λ 的平行传播,

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}x^j(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\right) = -\Gamma^j{}_{lk}\frac{\mathrm{d}x^l(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t. \tag{123}$$

如果 M 上曲线 λ 的正切矢量在平行传播后保持为自身的一个倍数, 则 λ 被称是一条短程线. 这个使 λ 为短程线的条件显然是

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x^j(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}-\Gamma^j{}_{lk}\frac{\mathrm{d}x^l(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\delta t\\&=[1-\phi(t)\delta t]\left(\frac{\mathrm{d}x^j(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}^2x^j(\lambda(t))}{\mathrm{d}t^2}\delta t\right),\end{aligned}\tag{124}$$

其中 $\phi(t)$ 是 t 的某个函数. 取极限 $\delta t\to 0$, 短程线方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^j{}_{lk}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=\phi(t)\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}.\tag{125}$$

容易验证, 如果曲线 λ 的参数是用变量

$$s=\int^t \mathrm{d}t''\exp\left\{\int^{t''}\mathrm{d}t'\phi(t')\right\},\tag{126}$$

则方程 (125) 成为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^j{}_{lk}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}=0;\tag{127}$$

当短程线方程简化到这种形式时, 就称它是仿射参数化的. 必须注意, 选择 s 的仅有自由度是它的原点和尺度.

5. 曲率型和嘉当结构方程 [21]

对一个赋予联络的流形, 定义两个映射

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}-\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X}-[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\tag{128}$$

和

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}-\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}-\nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\tag{129}$$

其中 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是两个逆变矢量场. 这两个映射分别被称为扭率和曲率. 如所定义的, 两者对其宗量都是反对称的.

首先考虑扭率, 容易验证, $\boldsymbol{T}$ 对其宗量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是线性的, 即有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\quad(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in T^1{}_0);\tag{130}$$

还有

$$\boldsymbol{T}(f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=f\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}),\tag{131}$$

其中 f 是任何函数. (在证明上述第二个关系时, 必须用等式

$$[f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]=f[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]-(\boldsymbol{Y}f)\boldsymbol{X}.)$$

关系 (130) 和 (131) 清楚地显示, 映射

$$\boldsymbol{T}: T^1{}_0 \times T^1{}_0 \to T^1{}_0 \tag{132}$$

是多重线性的. 相应地, $\boldsymbol{T}$ 是一个 (1, 2) 类型的张量场.

令 $(\boldsymbol{e}_j)$ 和 $(\boldsymbol{e}^i)$ 为 T_p 和 $T^*{}_p$ 的双基. 于是, 如已证明的 (方程 (100)),

$$(\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y})^j = \boldsymbol{X}Y^j + Y^l\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X}). \tag{133}$$

因此,

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X}\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{X})]\boldsymbol{e}_j. \tag{134}$$

从而,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^j(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) &= \langle \boldsymbol{e}^j, \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{X} - [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\rangle \\ &= \boldsymbol{X}\langle \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{Y}\rangle - \boldsymbol{Y}\langle \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{X}\rangle - \langle \boldsymbol{e}^j, [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\rangle \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{Y}) - \boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{X}),\end{aligned} \tag{135}$$

或, 用一般的等式 (86), 有

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^j(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = (\mathrm{d}\boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{\omega}^j{}_l \wedge \boldsymbol{e}^l)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}). \tag{136}$$

由于这个方程对任意 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 都成立, 结论是

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^j = \mathrm{d}\boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{\omega}^j{}_l \wedge \boldsymbol{e}^l = \boldsymbol{\Omega}^j(\text{比如说}). \tag{137}$$

[22] 这就是*嘉当结构方程*的第一个. 一个重要的特别情形是, 当扭率为零时, 方程 (137) 简化为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{\omega}^j{}_l \wedge \boldsymbol{e}^l = 0. \tag{137$'$}$$

在局域坐标基里, $\mathrm{d}\boldsymbol{e}^j = 0$ (因 $\boldsymbol{e}^j = \mathrm{d}x^j$), 方程 (137) 简化为

$$T^j = 2\Gamma^j{}_{lk}\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l = (\Gamma^j{}_{lk} - \Gamma^j{}_{kl})\mathrm{d}x^k \wedge \mathrm{d}x^l, \tag{138}$$

与方程 (116) 中对这个量的较早定义一致.

然后再看曲率, 由定义有

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z}. \tag{139}$$

方程 (139) 右边的表示显然对 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 是线性的. 而且, 还能验证

和
$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{R}(f\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},f\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}=f\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\\&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})f\boldsymbol{Z}=f\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z},\end{aligned}\right\}\tag{140}$$

其中 f 是任意函数. 因此, 映射

$$\boldsymbol{R}:T^1{}_0\times T^1{}_0\times T^1{}_0\to T^1{}_0,\tag{141}$$

是宗量的多重线性函数. 所以, $\boldsymbol{R}$ 是一个 (1, 3) 类型的张量场, 被称为黎曼张量.

现在, 运用已知的关系, 得到

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}&=\nabla_{\boldsymbol{X}}\{\boldsymbol{Y}e^j(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^j{}_k(\boldsymbol{Y})e^k(\boldsymbol{Z})\}\boldsymbol{e}_j\\&=[\boldsymbol{Y}e^l(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^l{}_k(\boldsymbol{Y})e^k(\boldsymbol{Z})]\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_l+[\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}e^j(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{X}\{\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})e^l(\boldsymbol{Z})\}]\boldsymbol{e}_j\\&=[\boldsymbol{Y}e^l(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^l{}_k(\boldsymbol{Y})e^k(\boldsymbol{Z})]\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_j\\&\quad+[\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}e^j(\boldsymbol{Z})+e^l(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{X}\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}e^l(\boldsymbol{Z})]\boldsymbol{e}_j\\&=[\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}e^j(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{X}e^l(\boldsymbol{Z})+e^l(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{X}\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})\\&\quad+\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}e^l(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^l{}_k(\boldsymbol{Y})e^k(\boldsymbol{Z})]\boldsymbol{e}_j.\end{aligned}\tag{142}$$

所以,

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}-\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}=\{&[\boldsymbol{X}\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\omega}^j{}_l(\boldsymbol{X})+\boldsymbol{\omega}^j{}_k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^k{}_l(\boldsymbol{Y})\\&-\boldsymbol{\omega}^j{}_k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^k{}_l(\boldsymbol{X})]e^l(\boldsymbol{Z})+[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]e^j(\boldsymbol{Z})\}\boldsymbol{e}_j.\end{aligned}\tag{143}$$

还有

$$\nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z}=\{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]e^j(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{\omega}^j{}_l([\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}])e^l(\boldsymbol{Z})\}\boldsymbol{e}_j.\tag{144}$$

现在将方程 (143) 和 (144) 结合, 得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}=\{&\boldsymbol{X}\langle\boldsymbol{\omega}^j{}_l,\boldsymbol{Y}\rangle-\boldsymbol{Y}\langle\boldsymbol{\omega}^j{}_l,\boldsymbol{X}\rangle-\langle\boldsymbol{\omega}^j{}_l,[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]\rangle\\&+\boldsymbol{\omega}^j{}_k(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\omega}^k{}_l(\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{\omega}^j{}_k(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}^k{}_l(\boldsymbol{X})\}e^l(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{e}_j,\end{aligned}\tag{145}$$

或, 用等式 (86), 有 [23]

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}=(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^j{}_l+\boldsymbol{\omega}^j{}_k\wedge\boldsymbol{\omega}^k{}_l)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})e^l(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{e}_j.\tag{146}$$

相应地, 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 是任何一次型,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})&=R^j{}_{lkm}[\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}^l\otimes(\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^m)](\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\\&=(R^j{}_{lkm}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^m)(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})e^l(\boldsymbol{Z})\boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}\tag{147}$$

比较方程 (146) 和 (147), 得到关系

$$\frac{1}{2}R^j{}_{lkm}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^m=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^j{}_l+\boldsymbol{\omega}^j{}_k\wedge\boldsymbol{\omega}^k{}_l. \tag{148}$$

定义二次型,

$$\boldsymbol{\Omega}^j{}_l=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^j{}_l+\boldsymbol{\omega}^j{}_k\wedge\boldsymbol{\omega}^k{}_l, \tag{149}$$

就有嘉当第二结构方程:

$$\frac{1}{2}R^j{}_{lkm}\boldsymbol{e}^k\wedge\boldsymbol{e}^m=\boldsymbol{\Omega}^j{}_l. \tag{150}$$

对局域坐标基

$$\boldsymbol{\omega}^j{}_l=\Gamma^j{}_{lm}\mathrm{d}x^m; \tag{151}$$

所以

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^j{}_l=\Gamma^j{}_{lm,n}\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^m=\frac{1}{2}(\Gamma^j{}_{lm,n}-\Gamma^j{}_{ln,m})\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^m. \tag{152}$$

而且,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}^j{}_k\wedge\boldsymbol{\omega}^k{}_l&=\Gamma^j{}_{kn}\Gamma^k{}_{lm}\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^m\\&=\frac{1}{2}(\Gamma^j{}_{kn}\Gamma^k{}_{lm}-\Gamma^j{}_{km}\Gamma^k{}_{ln})\mathrm{d}x^n\wedge\mathrm{d}x^m.\end{aligned} \tag{153}$$

相应地, 嘉当第二结构方程等价于定义

$$R^j{}_{lnm}=\Gamma^j{}_{lm,n}-\Gamma^j{}_{ln,m}+\Gamma^j{}_{kn}\Gamma^k{}_{lm}-\Gamma^j{}_{km}\Gamma^k{}_{ln}; \tag{154}$$

而这就是传统定义的黎曼张量.

将前面跟随嘉当所做的对黎曼张量的处理与更常见的处理联系起来是有趣的, 途径是在局域坐标基里从头计算方程 (139) 的右边. 于是, 用方程 (103), 有

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}&=\nabla_{\boldsymbol{X}}(Y^kZ^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j)=Y^k\nabla_{\boldsymbol{X}}(Z^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j)+Z^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j\nabla_{\boldsymbol{X}}Y^k\\&=Y^kX^lZ^j{}_{;k;l}\boldsymbol{e}_j+Y^k{}_{;l}X^lZ^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j.\end{aligned} \tag{155}$$

相应地,

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}-\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}&=Y^kX^l(Z^j{}_{;k;l}-Z^j{}_{;l;k})\boldsymbol{e}_j+[Y^k{}_{;l}X^l-X^k{}_{;l}Y^l]Z^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j\\&=Y^kX^l(Z^j{}_{;k;l}-Z^j{}_{;l;k})\boldsymbol{e}_j+[X,Y]^kZ^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j\\&\quad+X^lY^n(\Gamma^k{}_{nl}-\Gamma^k{}_{ln})Z^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j;\end{aligned} \tag{156}$$

[24] 或者, 由于

$$\nabla_{[X,Y]}\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]^k Z^j{}_{;k}\boldsymbol{e}_j, \tag{157}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} &= (Z^j{}_{;k;l} - Z^j{}_{;l;k} + T^n{}_{lk}Z^j{}_{;n})X^l Y^k \boldsymbol{e}_j \\ &= R^j{}_{ilk}Z^i X^l Y^k \boldsymbol{e}_j. \end{aligned} \tag{158}$$

因而得到关系

$$Z^j{}_{;k;l} - Z^j{}_{;l;k} = -R^j{}_{ikl}Z^i + T^n{}_{kl}Z^j{}_{;n}. \tag{159}$$

这就是里奇恒等式; 它是通常的引入扭率为零时的黎曼张量的出发点. 值得注意的是, 将方程 (159) 与方程

$$f_{,k;l} - f_{,l;k} = T^n{}_{kl}f_{,n} \tag{160}$$

作比较, 该方程曾在前面的§4 中导出 (方程 (117)).

由方程 (129) 得出的一个有意义的进一步结果是 (见方程 (114))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})f &= \nabla_{\boldsymbol{X}}(Y^j f_{,j}) - \nabla_{\boldsymbol{Y}}X^j f_{,j} - [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]^j f_{,j} \\ &= (X^l Y^j{}_{;l} - Y^l X^j{}_{;l})f_{,j} + Y^j X^l (f_{,j;l} - f_{,l;j}) - [X,Y]^j f_{,j} \\ &= X^l Y^n (\Gamma^j{}_{nl} - \Gamma^j{}_{ln})f_{,j} + X^l Y^j (-\Gamma^n{}_{jl} + \Gamma^n{}_{lj})f_{,n} = 0. \end{aligned} \tag{161}$$

到此仅已考虑了 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 对逆变矢量场和标量场的作用. 现在来考虑它对任意张量场的作用.

利用张量积的协变微分所服从的莱布尼兹定则, 容易验证

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Q}, \tag{162}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是任意张量场. 借助于方程 (162) 就能得到, 例如, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 对一次型 $\boldsymbol{\Omega}$ 的作用. 如果 $\boldsymbol{Z}$ 是任意逆变矢量场, 由方程 (162) 可得

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(\Omega_j Z^j) = [\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j Z^j + \Omega_j[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}]^j. \tag{163}$$

由于 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 作用于标量场时为零 (由方程 (161)), 结果是:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j Z^j &= -\Omega_j R^j{}_{ilk}Z^i X^l Y^k \\ &= -\Omega_i R^i{}_{jlk}Z^j X^l Y^k. \end{aligned} \tag{164}$$

因而,

$$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega}]_j = -R^i{}_{jlk}\Omega_i X^l Y^k. \tag{165}$$

另一方面, 用与推导方程 (158) 时同样的步骤计算 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 对 $\boldsymbol{\Omega}$ 的作用, 现在得到

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Omega} = X^l Y^k [\Omega_{j;k;l} - \Omega_{j;l;k} + T^n{}_{lk}\Omega_{j;n}]\boldsymbol{e}^j. \tag{166}$$

[25] 现在将方程 (165) 和 (166) 结合, 有

$$\Omega_{j;k;l} - \Omega_{j;l;k} = R^i{}_{jkl}\Omega_i + T^n{}_{kl}\Omega_{j;n}. \tag{167}$$

再考虑 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 对 (2, 0) 类型张量的作用, 有 (用方程 (161) 和 (162))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})[S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j] &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})S^{ij}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})S^{ij}\boldsymbol{e}_j \\ &= (R^i{}_{lmn}S^{lj} + R^j{}_{lmn}S^{il})X^m Y^n \boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j; \end{aligned}\tag{168}$$

结果是

$$S^{ij}{}_{;k;l} - S^{ij}{}_{;l;k} = -R^i{}_{mkl}S^{mj} - R^j{}_{mkl}S^{im} + T^n{}_{kl}S^{ij}{}_{;n}. \tag{169}$$

以类似方式, 得到

$$S_{ij;k;l} - S_{ij;l;k} = R^m{}_{jkl}S_{im} + R^m{}_{ikl}S_{mj} + T^n{}_{kl}S_{ij;n}. \tag{170}$$

现在对如何写下任意类型张量的相应公式已很显然. 最后注意到, 对第二 (或第三) 个协变指标收缩黎曼张量 (154), 就得到里奇张量 (或其负量), 即

$$R^j{}_{ljm} = -R^j{}_{lmj} = R_{lm}. \tag{171}$$

在局域坐标基里, 里奇张量分量的表示是 (见方程 (154))

$$R_{lm} = \Gamma^j{}_{lm,j} - \Gamma^j{}_{lj,m} + \Gamma^j{}_{kj}\Gamma^k{}_{lm} - \Gamma^j{}_{km}\Gamma^k{}_{lj}. \tag{172}$$

(*a*) 扭率为零时的循环恒等式和比安基恒等式

对扭率为零的情形 (见方程 (128)),

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Q} - \nabla_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q}] \quad (\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q}\in T^1{}_0), \tag{173}$$

现在来建立曲率张量满足的两个重要恒等式.

首先, 利用关系 (173) 可验证,

$$\begin{aligned}&\nabla_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}] + \nabla_{\boldsymbol{Y}}[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}] + \nabla_{\boldsymbol{Z}}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] \\ &= (\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}} - \nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{Z} + (\nabla_{\boldsymbol{Z}}\nabla_{\boldsymbol{X}} - \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Z}})\boldsymbol{Y} + (\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{Z}} - \nabla_{\boldsymbol{Z}}\nabla_{\boldsymbol{Y}})\boldsymbol{X}. \end{aligned}\tag{174}$$

所以,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\boldsymbol{X} \\ &= \nabla_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}] + \nabla_{\boldsymbol{Y}}[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}] + \nabla_{\boldsymbol{Z}}[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}] - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z} - \nabla_{[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]}\boldsymbol{X} - \nabla_{[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]}\boldsymbol{Y}. \end{aligned}\tag{175}$$

另一方面, 令方程 (173) 中的 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]$, 得到

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]-\nabla_{[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]}\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]]. \tag{176}$$

相应地, 由雅可比恒等式, 方程 (175) 简化为 [26]

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\boldsymbol{X}\\&=[\boldsymbol{X},[\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}]]+[\boldsymbol{Y},[\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}]]+[\boldsymbol{Z},[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]]=0.\end{aligned} \tag{177}$$

在局域坐标基里, 方程 (177) 给出循环恒等式

$$R^{j}{}_{lkm}+R^{j}{}_{kml}+R^{j}{}_{mlk}=0. \tag{178}$$

下一步, 考虑嘉当二次型 $\boldsymbol{\Omega}^{j}{}_{l}$ 的外部微分 (见方程 (149)). 有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}^{j}{}_{l}&=\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^{j}{}_{k}\wedge\boldsymbol{\omega}^{k}{}_{l}-\boldsymbol{\omega}^{j}{}_{k}\wedge\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}^{k}{}_{l}\\&=(\boldsymbol{\Omega}^{j}{}_{k}-\boldsymbol{\omega}^{j}{}_{m}\wedge\boldsymbol{\omega}^{m}{}_{k})\wedge\boldsymbol{\omega}^{k}{}_{l}-\boldsymbol{\omega}^{j}{}_{k}\wedge(\boldsymbol{\Omega}^{k}{}_{l}-\boldsymbol{\omega}^{k}{}_{m}\wedge\boldsymbol{\omega}^{m}{}_{l}).\end{aligned} \tag{179}$$

方程 (179) 第二行中一次型的三重楔形积相抵消; 余下的是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}^{j}{}_{l}-\Omega^{j}{}_{k}\wedge\boldsymbol{\omega}^{k}{}_{l}+\boldsymbol{\omega}^{j}{}_{k}\wedge\Omega^{k}{}_{l}=0; \tag{180}$$

这个方程表示的就是比安基恒等式. 它们的标准形式可以这样得到, 即对

$$\boldsymbol{\Omega}^{j}{}_{l}=\frac{1}{2}R^{j}{}_{lpq}\mathrm{d}x^{p}\wedge\mathrm{d}x^{q}\ \text{和}\ \boldsymbol{\omega}^{k}{}_{l}=\Gamma^{k}{}_{lr}\mathrm{d}x^{r} \tag{181}$$

在局域坐标基里重写方程 (180). 由这些代换, 方程 (180) 给出

$$(R^{j}{}_{lpq,r}-R^{j}{}_{kpq}\Gamma^{k}{}_{lr}+\Gamma^{j}{}_{kr}R^{k}{}_{lpq})\mathrm{d}x^{p}\wedge\mathrm{d}x^{q}\wedge\mathrm{d}x^{r}=0. \tag{182}$$

由于扭率为零时联络 $\Gamma^{j}_{k\ r}$ 对 k 和 r 是对称的, 下面方程中的附加项不会影响其正确性:

$$\begin{aligned}&(R^{j}{}_{lpq,r}-R^{j}{}_{kpq}\Gamma^{k}{}_{lr}+\Gamma^{j}{}_{kr}R^{k}{}_{lpq}\\&\quad-R^{j}{}_{lkq}\Gamma^{k}{}_{pr}-R^{j}{}_{lpk}\Gamma^{k}{}_{qr})\mathrm{d}x^{p}\wedge\mathrm{d}x^{q}\wedge\mathrm{d}x^{r}=0.\end{aligned} \tag{183}$$

而方程 (183) 的括号中的量正好就是 $R^{j}{}_{lpq}$ 对 x^{r} 的协变导数. 结果是

$$R^{j}{}_{lpq;r}+R^{j}{}_{lqr;p}+R^{j}{}_{lrp;q}=0; \tag{184}$$

这就是标准形式的比安基恒等式.

6. 度规和由之导出的联络; 黎曼几何和爱因斯坦场方程

度规张量 $\boldsymbol{g}$ 是 (0, 2) 类型的非奇异、对称张量场. 即有:

(a) $\boldsymbol{g}: T^0{}_1 \times T^0{}_1 \to \mathbb{R}^1$;

(b) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X})$ 对所有 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in T^0{}_1$; (185)

(c) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = 0$ 对所有 $\boldsymbol{Y} \in T^0{}_1$ 意味着 $\boldsymbol{X} = 0$.

[27] 条件 (b) 保证了 $\boldsymbol{g}$ 的对称性, 而条件 (c) 保证了其非奇异性.

在局域基里, 可写出

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \text{ 和 } g_{ij} = g_{ji}; \tag{186}$$

类似地, 在局域坐标基里,

$$\boldsymbol{g} = g_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \text{ 和 } g_{ij} = g_{ji}. \tag{187}$$

用分量的语言, 度规张量非奇异性的要求等价于在流形的每一点上矩阵 $[g_{ij}]$ 的行列式 g 不为零的要求. 于是矩阵 $[g_{ij}]$ 有着唯一的逆矩阵. 用 g^{ij} 标记逆矩阵的元素, 于是

$$g^{ij}g_{jk} = \delta^i{}_k. \tag{188}$$

这个方程保证了, 实际上可以把 g^{ij} 看作 (2, 0) 类型张量场 $\boldsymbol{g}^{-1}$ 的分量, 它在基 $\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ (与方程 (186) 中用的基成双) 中的表示是

$$\boldsymbol{g}^{-1} = g^{ij}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j. \tag{189}$$

可以由下式用度规张量来定义沿 M 上的曲线 λ 从 λ (a) 到 λ (b) (例如) 的路径长度 L,

$$L = \int_a^b \left| g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i(\lambda(t))}{\mathrm{d}t}\right|^{1/2} \mathrm{d}t. \tag{190}$$

与这个定义相一致的通常写法是

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{191}$$

这里 $\mathrm{d}s^2$ 是流形上相邻点之间间隔 $\mathrm{d}s$ 的平方.

给定 (r, s) 类型张量场 $\boldsymbol{T}$, 可以对度规张量 (或它的逆) 的指标之一收缩 $\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{g}^{-1} \otimes \boldsymbol{T}$, 分别得到 $(r-1, s+1)$ 和 $(r+1, s-1)$ 类型的张量. 收缩后张量的分量可写为

和

$$\left.\begin{aligned} g_{ij}T^{ab\cdots i\cdots p}{}_{cd\cdots q} &= T^{ab\cdots}{}_{j}{}^{\cdots p}{}_{cd\cdots q} \\ g^{ij}T^{ab\cdots p}{}_{cd\cdots i\cdots q} &= T^{ab\cdots p}{}_{cd\cdots}{}^{j}{}_{\cdots q}. \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

这个过程显然能重复. 这样由指标的提升和降低而导出的张量被视为表示同样的几何量, 因为通过提升一个指标接着又降低它, 就回到了原来的张量.

关于度规张量的一个重要概念是它的记号, 其定义是 g_{ij} (在某个点) 被写成对角线形式时正系数个数与负系数个数之差. 可以证明, 这样定义的记号在一个 (联络的) 流形的所有点上都相同. 欧几里得度规是记号在数值上等于流形维度的度规. 如果记号是 $\pm(n-2)$, 则度规被称为洛伦兹 (Lorentz) 或闵可夫斯基 (Minkowski) 度规, 这里的正号或负号只是一个习惯问题. [28]

(a) 由度规导出的联络

迄今考虑引入的度规, 与流形是否被赋予联络无关. 现在显示, 与度规相联系, 可以赋予流形以唯一的零扭率联络, 要求是

$$\nabla \boldsymbol{g} = 0. \tag{193}$$

由这样的联络有

$$\nabla(\boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{g} \otimes \nabla \boldsymbol{T}, \tag{194}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是任何张量场. 这样一种联络的主要好处是, 提升或降低指标的操作可与协变微分的操作交换.

为导出遵守要求 (193) 的零扭率联络, 由 (186) 式表示的 $\boldsymbol{g}$ 来计算 $\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{g}$. 于是要求

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = \boldsymbol{X} g_{ij} \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j + g_{ij}[(\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}^i) \otimes \boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{e}^i \otimes (\nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{e}^j)] = 0, \tag{195}$$

或者由方程 (111) 有

$$[\boldsymbol{X} g_{ij} - g_{lj} \boldsymbol{\omega}^l{}_i(\boldsymbol{X}) - g_{il} \boldsymbol{\omega}^l{}_j(\boldsymbol{X})] \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j = 0. \tag{196}$$

结果是

$$(\mathrm{d} g_{ij} - g_{lj} \omega^l{}_i - g_{il} \boldsymbol{\omega}^l{}_j)(\boldsymbol{X}) = 0. \tag{197}$$

在局域坐标基里令 $\boldsymbol{X} = \partial_k$, 由方程 (197) 得出要求

$$g_{ij,k} = g_{lj} \Gamma^l{}_{ik} + g_{il} \Gamma^l{}_{jk}, \tag{198}$$

其中, 按零扭率假定, Γ 符号对其 "协变" 指标是对称的. 由方程 (198) 可导出, 按通常样式, 有

$$g_{il} \Gamma^l{}_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right), \tag{199}$$

或等价地,

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \tag{200}$$

于是联络就被唯一地确定; 这种联络是黎曼几何的根本.

[29] 适合于度规 $\boldsymbol{g}$ 的 Γ 符号 (200) 被称为克里斯托费尔符号, 而联络本身被称为克里斯托费尔联络.

克里斯托费尔联络的两个基本结果如下.

第一, 两个逆变矢量场 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的标量积 $(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})$, 定义为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})=g_{ij}X^iY^j, \tag{201}$$

在 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 沿着 M 上的曲线 λ 平行传播时保持不变, 即 (由方程 (120) 和 (121))

$$D(g_{ij}X^iY^j)=(Dg_{ij})X^iY^j+g_{ij}(Y^jDX^i+X^iDY^j)=0, \tag{202}$$

因为由条件 $\nabla\boldsymbol{g}=0$ (联络由此导出) 有 Dg_{ij} 为零, 而按照沿 λ 平行传播的假定有 DX^i 和 DX^j 为零.

第二, §4 中由曲线 λ 的正切矢量沿 λ 平行传播时保持为自身的倍数的要求而导出的短程线方程 (127), 现在表现为极值问题的欧拉 – 拉格朗日 (Euler-Lagrage) 方程. 考虑积分 (见方程 (190))

$$I=\int_a^b L\mathrm{d}s,\quad \text{其中 } L=g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i(\lambda(s))}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^j(\lambda(s))}{\mathrm{d}s}, \tag{203}$$

而曲线 λ 是以沿 λ 的弧长 s 为参数. 与积分 I 相关联的极值问题的欧拉 – 拉格朗日方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j}\right)-\frac{\partial L}{\partial x^j}=0,\quad \text{其中 } \dot{x}^j=\frac{\mathrm{d}x^j(\lambda(s))}{\mathrm{d}s}. \tag{204}$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j}=2g_{ij}\dot{x}^i \text{ 和 } \frac{\partial L}{\partial x^j}=g_{ik,j}\dot{x}^i\dot{x}^k, \tag{205}$$

欧拉 – 拉格朗日方程简化为

$$g_{ij}\ddot{x}^i+\left(g_{ij,k}-\frac{1}{2}g_{ik,j}\right)\dot{x}^i\dot{x}^k=0, \tag{206}$$

或另一种形式,

$$g_{ij}\ddot{x}^i+\frac{1}{2}(g_{ij,k}+g_{kj,i}-g_{ik,j})\dot{x}^i\dot{x}^k=0. \tag{207}$$

用 g^{jl} 收缩最后这个方程, 得到

$$\ddot{x}^l+\Gamma^l{}_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k=0. \tag{208}$$

上述方程的另一种将被看到是很有用的形式, 是用 "速度"

$$u^j = \dot{x}^j = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \tag{209}$$

来表示. 于是

$$\ddot{x}^j = u^j{}_{,k} u^k, \tag{210}$$

[30]

而短程线方程取形式

$$(u^j{}_{,k} + \Gamma^j{}_{ik} u^i) u^k = u^j{}_{;k} u^k = 0. \tag{211}$$

如果短程线不是仿射参数化的, 它将取形式 (见方程 (125))

$$u^j{}_{;k} u^k = \phi u^j, \tag{212}$$

其中 ϕ 是某个标量函数.

可以直接验证 (通过用 u_j 收缩), 方程 (211) 允许整体 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) =$ 常数, 与 $\boldsymbol{u}$ 是沿短程线平行传播的事实一致.

(*b*) 克里斯托费尔联络对于黎曼和里奇张量的一些推论

当联络是适合于度规时, 黎曼和里奇张量具有附加的对称性. 方程 (170) 在用 g_{ij} 代换 S_{ij} 后给出

$$g_{im} R^m{}_{jkl} + g_{mj} R^m{}_{ikl} = 0; \tag{213}$$

或, 降低指标 m, 有

$$R_{ijkl} + R_{jikl} = 0. \tag{214}$$

因此, 完全协变的黎曼张量对其第一对指标也是反对称的. 现在由下列序列变换来导出一个更深层的对称性. 由循环恒等式开始 (见方程 (178)),

$$R_{jkmn} + R_{jmnk} + R_{jnkm} = 0, \tag{215}$$

利用已知的第一对和第二对指标的反对称性以及循环恒等式, 相继得到,

$$\begin{aligned} R_{jkmn} &= -(R_{jmnk} + R_{jnkm}) = R_{mjnk} + R_{njkm} \\ &= -(R_{mnkj} + R_{mkjn}) - (R_{nkmj} + R_{nmjk}) \\ &= 2R_{mnjk} + (R_{kmjn} + R_{knmj}) \\ &= 2R_{mnjk} - R_{kjnm} = 2R_{mnjk} - R_{jkmn}. \end{aligned} \tag{216}$$

因此

$$R_{jkmn} = R_{mnjk}. \tag{217}$$

所以黎曼张量对同时交换第一和第二对协变指标是不变的. 由这些对称性得出结论, 黎曼张量的独立分量个数是 $n^2(n^2-1)/12$ (即, 对一个四维流形的黎曼张量是 20).

[31] 由黎曼张量的对称性, 得出里奇张量的对称性,

$$R_{ij} = g^{kl}R_{ikjl} = g^{lk}R_{ljki} = R_{ji}. \tag{218}$$

在此可注意里奇张量在局域坐标基的明晰表示. 但首先看到

$$\begin{aligned}\Gamma^{j}{}_{jk} &= \frac{1}{2}g^{jl}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}) = \frac{1}{2}g^{jl}g_{lj,k} \\ &= (\lg\sqrt{|g|})_{,k}\end{aligned} \tag{219}$$

其中 $|g|$ 是 $[g_{ij}]$ 的行列式的绝对值. 由前面的收缩克里斯托费尔符号的表示, 方程 (172) 给出

$$R_{lm} = \Gamma^{j}{}_{lm,j} - \frac{\partial^2 \lg\sqrt{|g|}}{\partial x^l \partial x^m} + \frac{\partial \lg\sqrt{|g|}}{\partial x^k}\Gamma^{k}{}_{lm} - \Gamma^{j}{}_{km}\Gamma^{k}{}_{lj}. \tag{220}$$

(c) 爱因斯坦张量

爱因斯坦张量 G_{ij} 与里奇张量的关系是

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R, \tag{221}$$

其中

$$R = R^{j}{}_{j} = g^{ij}R_{ij} \tag{222}$$

是收缩的里奇张量 (或通常所称的标量曲率).

爱因斯坦张量最重要的性质是其协变散度为零:

$$G^{i}{}_{j;i} = 0. \tag{223}$$

这是由比安基恒等式 (184) 得来的. 对指标 i 和 k 收缩下式,

$$R^{i}{}_{jkl;m} - g^{ip}R_{jplm;k} + R^{i}{}_{jmk;l} = 0, \tag{224}$$

得到

$$R_{jl;m} - g^{kp}R_{jplm;k} - R_{jm;l} = 0. \tag{225}$$

现在提升指标 j 并用 m 对它收缩, 得到

$$R^{j}{}_{l;j} + R^{k}{}_{l;k} - R_{,l} = 0, \tag{226}$$

或

$$\left(R^{j}{}_{l} - \frac{1}{2}\delta^{j}{}_{l}R\right)_{;j} = 0, \tag{227}$$

这正是所要求的等式.

(*d*) 外尔张量

已经看到, 黎曼张量 R_{ijkl} 对两对指标 (ij) 和 (kl) 都是反对称的, 而且对两对指标 (ij) 和 (kl) 的同时互换是不变的. 由于这些对称性, 通过提升它的一个指标并用其余三个协变指标之一对它收缩所能做的唯一有意义的收缩就是导出里奇张量. 相应地, 合适的做法是将黎曼张量分离成 "无迹" 部分和 "里奇" 部分. 这种分离是由外尔张量来完成的, [32]

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{(n-2)}(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R. \tag{228}$$

这个张量显然具有黎曼张量的所有对称性; 但

$$g^{jl}C_{ijkl} = 0 \text{ 与 } g^{jl}R_{ijkl} = R_{ik} \text{ 不同.} \tag{229}$$

进一步的区别是, 黎曼张量能定义在仅赋予了联络的流形里, 而外尔张量只在度规也有定义时才能定义.

外尔张量对微分几何 (和广义相对论) 的更深层次问题的重要性是 $C^i{}_{jkl}$ 的共形不变性, 即对变换 $\boldsymbol{g} \to \Omega^2\boldsymbol{g}$ 的不变性, 其中 Ω 是某个标量函数; 但本书将不关注这些问题.

(*e*) 作为四维流型的时空; 标记问题和爱因斯坦场方程

在迄今对微分几何的讲述中, 没有对流形的维数 (或其记号) 作出限制. 但在广义相对论里, 时空被看作是有着洛伦兹记号的四维可微分流形; 本章 (如本书其余部分一样) 后继的讨论将限于这种情形. 本节将按这种标记和采用的习惯 (关于符号) 来概述理论的基本方程.

首先, 关于记号, 采用的习惯是, 当度规处于对角线形式时 (在时空的任何点上), 正系数个数与负系数个数之差是 -2; 特别地, 在平直空间里, 闵可夫斯基度规被取为下列形式,

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2, \tag{230}$$

其中 c 表示光速 (一般将通过单位的选择而设定为 1).

由于其洛伦兹记号, 时空的度规并不是正定的, 意思是 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X})$ 可以为正、零、或负. 按照 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}) > 0, = 0$, 或 < 0 将矢量称为类时, 零, 或类空. 物质粒子 (具有有限静质量) 只能给出类时轨迹 (即其正切矢量总为类时的曲线), [33]

而无质量粒子 (诸如光子、引力子和中微子)[①]给出零轨迹 (即其正切矢量总为零的曲线).

自由下落粒子给出短程线, 如果粒子具有有限静质量就是类时的, 如果无质量就是零的. 零短程线不能清楚地由弧长来参数化, 即使它们能由改变变量而仿射参数化 (如§4 方程 (126) 所示). 短程线方程 (类时或零) 在用四速度 $\boldsymbol{u}$ 表述时, 总能简化为方程 (211) 和 (212) 给出的形式. 沿类时短程线 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=1$, 而沿零短程线 $(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})=0$.

注意由黎曼张量的定义, 里奇恒等式有形式

$$R^{i}{}_{jkl}Z_i = Z_{j;k;l} - Z_{j;l;k}. \tag{231}$$

进一步, 由收缩得到里奇张量

$$g^{jl}R_{ijkl} = R_{ik}. \tag{232}$$

而外尔张量现在与黎曼和里奇张量的联系是

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = R_{ijkl} &- \frac{1}{2}(g_{ik}R_{jl} + g_{jl}R_{ik} - g_{jk}R_{il} - g_{il}R_{jk}) \\ &+ \frac{1}{6}(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})R. \end{aligned} \tag{233}$$

黎曼张量有 20 个可区分的分量, 而外尔和里奇张量各有 10 个这样的分量. 比安基恒等式

$$R_{ij[kl;m]} = \frac{1}{3}(R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l}) = 0, \tag{234}$$[②]

包括 24 个可区分的方程, 对应于 6 个可区分的指标对 $(i,j,i\neq j)$, 每一对都与 $k\neq l\neq m$ 的 4 种选择联合. 但是, 这 24 个方程中只有 20 个是线性独立的, 因为可以直接验证, 由于黎曼张量的各种对称性 (包括循环关系), 下列 4 个线性组合全都为零:

和

$$\left.\begin{aligned} R_{12[34;1]} - R_{13[41;2]} + R_{14[12;3]} &= 0, \\ R_{23[41;2]} - R_{24[12;3]} + R_{21[23;4]} &= 0, \\ R_{34[12;3]} - R_{31[23;4]} + R_{32[34;1]} &= 0, \\ R_{41[23;4]} - R_{42[34;1]} + R_{43[41;2]} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{235}$$

[34] 支配时空几何的爱因斯坦方程是

① 引力子迄今还只是一个理论预言; 而中微子振荡现象的发现则证明中微子是有质量的, 2015 年诺贝尔物理学奖即授予作出此项发现的日本和加拿大学者. —— 译者注

② 这里采用的记法是, 把一组指标包括在方括号里意味着, 问题中的量在将交替算符 A 以方程 (53) 的方式作用于其上时是 "反对称化" 的.

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}, \tag{236}$$

其中 T_{ij} 表示可能存在的物质和 (引力场以外的) 场的能量 – 动量张量, G 是引力常数 (像 c 那样, 也将通过单位的选择而一般地设为等于 1). 方程 (236) 的另一种形式是

$$R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (T = g^{ij} T_{ij}). \tag{236'}$$

在真空 (即其中 $T_{ij} = 0$ 的时空区域) 里, 爱因斯坦方程简化为

$$G_{ij} = 0, \text{ 或等价地, } R_{ij} = 0; \tag{237}$$

而黎曼张量和外尔张量重合.

一般都把爱因斯坦方程视为决定度规 (更特定地, 10 个度规系数 g_{ij}) 的方程. 由等式 (方程 (223)),

$$G^{i}{}_{j;i} = 0, \tag{238}$$

很清楚, 爱因斯坦方程的任何解都必定包含 4 个任意函数. 所以选择这些函数的自由度被表述为规范自由度并被追踪到理论的 "广义协变性". 这种规范自由度允许对度规加上 4 个坐标条件.

最后, 必须注意, 在真空里, 比安基恒等式的个数由 20 减为 16, 因为包含在方程 (238) 中等式的 4 个全都由于场方程 (237) 而满足.

7. 四次形式

广义相对论中处理问题的标准方式, 以前常是在一个适合手上问题的局域坐标基里考虑爱因斯坦场方程. 但在近年, 已在一定意义上显出优势的是有所不同的做法, 即选择适当的由四个线性独立矢量场组成的*四次基*, 将相关的量投影到所选的基上, 再考虑这些量所满足的方程. 这就是*四次形式*.

在运用四次形式时, 四次基的选择取决于研究者希望抓住的时空的潜在对称性, 而且在一定意义上这种选择就是问题的一部分. 此外, 并不总是清楚什么是 "相关" 的方程, 什么是这些方程之间可能有的关系. 鉴于这些, 这里将不带任何预先约定地给出理论的基本思想, 并推导出各种方程, 它们随后将显示出对所期待的应用是适合的.

(*a*) 四次表示 [35]

在每个时空点上设立 4 个逆变矢量基,

$$e_{(a)}{}^{i} \quad (a = 1, 2, 3, 4), \tag{239}$$

其中括号里的是四次指标, 而不是并不这样放入的张量指标. (还有, 以后都把拉丁字母中排在前面的 $(a, b,$ 等等) 用于四次指标, 后面的 $(i, j,$ 等等) 用于张量指标.) 与逆变矢量 (239) 相联, 有协变矢量,

$$e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}{}^{k}, \tag{240}$$

其中 g_{ik} 是度规张量. 另外再定义矩阵 $[e_{(a)}{}^{i}]$ 的逆 $e^{(b)}{}_{i}$ (四次指标标记行, 张量指标标记列), 致有

$$e_{(a)}{}^{i} e^{(b)}{}_{i} = \delta^{(b)}{}_{(a)} \quad \text{和} \quad e_{(a)}{}^{i} e^{(a)}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}, \tag{241}$$

其中采用对两类指标各自独立的求和惯例 (下文也如此). 进一步, 作为定义的一部分, 还假定

$$e_{(a)}{}^{i} e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)}, \tag{242}$$

其中

$$\eta_{(a)(b)} \text{ 是常数对称矩阵.} \tag{243}$$

通常假定基矢 $e_{(a)}{}^{i}$ 是正交的, 即 $\eta_{(a)(b)}$ 表示一个对角线矩阵, 有对角元 $+1, -1, -1, -1$. 这里不作这个假定, 但必须说明, 能够建立比即将细述的更一般的形式, 其中 $\eta_{(a)(b)}$ 被允许是流形上的函数. 在一定意义上这种进一步推广是值得推荐的, 在下面的§ (e) 将予简述; 而现在则仍在 $\eta_{(a)(b)}$ 为常数的假定下继续进行.

回到方程 (242), 令 $\eta^{(a)(b)}$ 为矩阵 $[\eta_{(a)(b)}]$ 的逆, 于是

$$\eta^{(a)(b)} \eta_{(b)(c)} = \delta^{(a)}{}_{(c)}. \tag{244}$$

作为上述各定义的结果, 有

$$\eta_{(a)(b)} e^{(a)}{}_{i} = e_{(b)i}, \quad \eta^{(a)(b)} e_{(a)i} = e^{(b)}{}_{i}; \tag{245}$$

[36] 最重要的是

$$e_{(a)i} e^{(a)}{}_{j} = g_{ij}. \tag{246}$$

给定任何矢量或张量场, 将其投影到四次标架上得到四次分量, 即

和

$$\left.\begin{aligned} A_{(a)} &= e_{(a)j} A^{j} \quad = e_{(a)}{}^{j} A_{j}, \\ A^{(a)} &= \eta^{(a)(b)} A_{(b)} = e^{(a)}{}_{j} A^{j} = e^{(a)j} A_{j}, \\ A^{i} \quad &= e_{(a)}{}^{i} A^{(a)} \quad = e^{(a)i} A_{(a)}; \end{aligned}\right\} \tag{247}$$

更一般地有

$$\left.\begin{aligned} T_{(a)(b)} &= e_{(a)}{}^{i} e_{(b)}{}^{j} T_{ij} \quad = e_{(a)}{}^{i} T_{i(b)}, \\ T_{ij} \quad &= e^{(a)}{}_{i} e^{(b)}{}_{j} T_{(a)(b)} = e^{(a)}{}_{i} T_{(a)j}. \end{aligned}\right\} \tag{248}$$

由方程 (241)、(242)、(244)和 (245) 清楚可见: (a) 可以随意地从张量指标变到四次指标, 反之亦然; (b) 用 $\eta^{(a)(b)}$ 和 $\eta_{(a)(b)}$ 提升和降低四次指标, 正如能用度规张量提升和降低张量指标一样; (c) 两类指标并存的量的存在没有疑义; (d) 收缩张量无论是对张量指标还是对四次指标进行, 结果是一样的.

(*b*) 方向导数和里奇旋转系数

逆变矢量 $\boldsymbol{e}_{(a)}$, 亦称正切矢量, 规定方向导数 (见方程 (8))

$$\boldsymbol{e}_{(a)} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}; \tag{249}$$

并记

$$\phi_{,(a)} = e_{(a)}{}^{i}\frac{\partial\phi}{\partial x^{i}} = e_{(a)}{}^{i}\phi_{,i}, \tag{250}$$

其中 ϕ 是任意标量场. 更一般地, 定义

$$\begin{aligned} A_{(a),(b)} &= e_{(b)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}A_{(a)} = e_{(b)}{}^{i}\frac{\partial}{\partial x^{i}}e_{(a)}{}^{j}A_{j} \\ &= e_{(b)}{}^{i}\nabla_{\partial_i}[e_{(a)}{}^{j}A_{j}] = e_{(b)}{}^{i}[e_{(a)}{}^{j}A_{j;i} + A_{k}e_{(a)}{}^{k}{}_{;i}]. \end{aligned} \tag{251}$$

于是可得

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}{}^{j}A_{j;i}e_{(b)}{}^{i} + e_{(a)k;i}e_{(b)}{}^{i}e_{(c)}{}^{k}A^{(c)}, \tag{252}$$

这里利用了上节末尾说明的各项规则和升降张量指标与协变导数运算可交换的事实.

用定义 [37]

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = e_{(c)}{}^{k}e_{(a)k;i}e_{(b)}{}^{i}, \tag{253}$$

可将方程 (252) 重写成

$$A_{(a),(b)} = e_{(a)}{}^{j}A_{j;i}e_{(b)}{}^{i} + \gamma_{(c)(a)(b)}A^{(c)}. \tag{254}$$

方程 (253) 定义的量 $\gamma_{(c)(a)(b)}$ 称为里奇旋转系数. 这些系数的一个等价定义是

$$e_{(a)k;i} = e^{(c)}{}_{k}\gamma_{(c)(a)(b)}e^{(b)}{}_{i}. \tag{255}$$

里奇旋转系数对其第一对指标是反对称的:

$$\gamma_{(c)(a)(b)} = -\gamma_{(a)(c)(b)} \tag{256}$$

这个结果来自于展开等式

$$0 = \eta_{(a)(b),i} = [e_{(a)k}e_{(b)}{}^{k}]_{;i}. \tag{257}$$

(注意, 如果 $\eta_{(a)(b)}$ 不是常数, 就不能导出这个反对称性.) 利用这个反对称性, 方程 (255) 还能写成如下形式,

$$e_{(a)}{}^{k}{}_{;i} = -\gamma_{(a)}{}^{k}{}_{i}. \tag{258}$$

回到方程 (254), 将它写成另一种形式,

$$e_{(a)}{}^{i} A_{i;j} e_{(b)}{}^{j} = A_{(a),(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}. \tag{259}$$

这个方程右边的量称为 $A_{(a)}$ 在 $e_{(b)}$ 方向的内在导数, 并记为 $A_{(a)|(b)}$:

$$A_{(a)|(b)} = e_{(a)}{}^{i} A_{i;j} e_{(b)}{}^{j} \text{ (或 } A_{i;j} = e^{(a)}{}_{i} A_{(a)|(b)} e^{(b)}{}_{j}). \tag{260}$$

于是有公式,

$$A_{(a)|(b)} = A_{(a);(b)} - \eta^{(n)(m)} \gamma_{(n)(a)(b)} A_{(m)}, \tag{261}$$

联系方向导数和内在导数.

由定义 (260) 清楚可见, 能够自由地从内在导数转变到协变导数, 反之亦然.

矢量场内在导数的概念容易以显然的方式扩展到张量场. 黎曼张量的内在导数是

$$R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = R_{ijkl;m} e_{(a)}{}^{i} e_{(b)}{}^{j} e_{(c)}{}^{k} e_{(d)}{}^{l} e_{(f)}{}^{m}. \tag{262}$$

现在展开

$$R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = [R_{ijkl} e_{(a)}{}^{i} e_{(b)}{}^{j} e_{(c)}{}^{k} e_{(d)}{}^{l}]_{;m} e_{(f)}{}^{m}, \tag{263}$$

并将不同基矢的协变导数分别用旋转系数置换 (按照关系 (258)), 可得 (与方程 (261) 类 似)

[38]
$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)|(f)} = {} & R_{(a)(b)(c)(d),(f)} \\ & -\eta^{(n)(m)} [\gamma_{(n)(a)(f)} R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)} R_{(a)(m)(c)(d)} \\ & +\gamma_{(n)(c)(f)} R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)} R_{(a)(b)(c)(m)}]. \end{aligned} \tag{264}$$

最后, 重要的是注意, 对旋转系数的计算并不要求对协变导数 (从而克里斯托费尔符号) 的计算. 因为, 由定义

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(b)i,j} [e_{(a)}{}^{i} e_{(c)}{}^{j} - e_{(a)}{}^{j} e_{(c)}{}^{i}], \tag{265}$$

并重写为

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = [e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}] e_{(a)}{}^{i} e_{(c)}{}^{j}, \tag{266}$$

可以看到, 能将 $e_{(b)i}$ 和 $e_{(b)j}$ 的常规导数用对应的协变导数来置换 (按照关于对称性联络的方程 (115)), 并写为

$$\begin{aligned}\lambda_{(a)(b)(c)} &= [e_{(b)i;j} - e_{(b)j;i}]e_{(a)}{}^{i}e_{(c)}{}^{j} \\ &= \gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(c)(b)(a)}.\end{aligned} \tag{267}$$

利用这个关系, 有

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}] \tag{268}$$

并由方程 (266) 显然可见, 对 $\lambda_{(a)(b)(c)}$ 的计算只需要对常规导数的计算. 还应注意, λ 符号对第一和第三个指标是反对称的:

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = -\lambda_{(c)(b)(a)}. \tag{269}$$

(c) 转换关系和结构常数

李括号 $[\boldsymbol{e}_{(a)}, \boldsymbol{e}_{(b)}]$ 在理论中起有重要作用; 而且它本身作为一个正切矢量, 能够对同一个基 $\boldsymbol{e}_{(a)}$ 展开. 于是, 必定有展开形式

$$[\boldsymbol{e}_{(a)}, \boldsymbol{e}_{(b)}] = C^{(c)}{}_{(a)(b)}\boldsymbol{e}_{(c)}. \tag{270}$$

此展开中的系数 $C^{(c)}{}_{(a)(b)}$ 称为结构常数; 它们对指标 (a) 和 (b) 是反对称的, 并且共有 24 个.

结构常数能用旋转系数表示如下. 考虑李括号对标量场 f 的作用, 有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{e}_{(a)}, \boldsymbol{e}_{(b)}]f &= e_{(a)}{}^{i}[e_{(b)}{}^{j}f_{,j}]_{,i} - e_{(b)}{}^{i}[e_{(a)}{}^{j}f_{,j}]_{,i} \\ &= [e_{(a)}{}^{i}e_{(b)}{}^{j}{}_{;i} - e_{(b)}{}^{i}e_{(a)}{}^{j}{}_{;i}]f_{,j} \\ &= [-\gamma_{(b)}{}^{j}{}_{(a)} + \gamma_{(a)}{}^{j}{}_{(b)}]f_{,j} \\ &= [-\gamma_{(b)}{}^{(c)}{}_{(a)} + \gamma_{(a)}{}^{(c)}{}_{(b)}]e_{(c)}{}^{j}f_{,j}.\end{aligned} \tag{271}$$

现在与方程 (270) 比较, 得出关系 [39]

$$C^{(c)}{}_{(a)(b)} = \gamma^{(c)}{}_{(b)(a)} - \gamma^{(c)}{}_{(a)(b)}. \tag{272}$$

以旋转系数表示的结构常数来明晰写出的方程 (270) 提供了转换关系, 它们共有 24 个.

(d) 里奇和比安基恒等式

将里奇恒等式 (方程 (231)),

$$e_{(a)i;k;l} - e_{(a)i;l;k} = R_{mikl}e_{(a)}{}^{m}, \tag{273}$$

投影到四次标架上, 有

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= R_{mikl}e_{(a)}{}^{m}e_{(b)}{}^{i}e_{(c)}{}^{k}e_{(d)}{}^{l} \\ &= \{-[\gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}{}_{i}e^{(g)}{}_{k}]_{;l} \\ &\quad +[\gamma_{(a)(f)(g)}e^{(f)}{}_{i}e^{(g)}{}_{l}]_{;k}\}e_{(b)}{}^{i}e_{c}{}^{(k)}e_{(d)}{}^{l}. \end{aligned} \tag{274}$$

现在将右边方括号中的量展开, 并再次将基矢量的协变导数分别用旋转系数置换, 得到

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)(c)(d)} &= -\gamma_{(a)(b)(c),(d)} + \gamma_{(a)(b)(d),(c)} \\ &\quad +\gamma_{(b)(a)(f)}[\gamma_{(c)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(d)}{}^{(f)}{}_{(c)}] \\ &\quad +\gamma_{(f)(a)(c)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(d)} - \gamma_{(f)(a)(d)}\gamma_{(b)}{}^{(f)}{}_{(c)}. \end{aligned} \tag{275}$$

由于旋转系数对其第一对指标的反对称性和构造黎曼张量四次分量操作的明显反对称性, 可清楚看到有 36 个 (275) 类型的方程.

最后, 比安基恒等式 (234) 用内在导数和四次分量来表示, 有形式

$$\begin{aligned} R_{(a)(b)[(c)(d)|(f)]} &= \frac{1}{6}\sum_{[(c)(d)(f)]}\{R_{(a)(b)(c)(d),(f)} \\ &\quad -\eta^{(n)(m)}[\gamma_{(n)(a)(f)}R_{(m)(b)(c)(d)} + \gamma_{(n)(b)(f)}R_{(a)(m)(c)(d)} \\ &\quad +\gamma_{(n)(c)(f)}R_{(a)(b)(m)(d)} + \gamma_{(n)(d)(f)}R_{(a)(b)(c)(m)}]\}; \end{aligned} \tag{276}$$

如在前面§6 (e) 已看到的, 共有 20 个线性独立的此类方程.

四次形式的基本方程是 24 个转换关系 (270)、36 个里奇恒等式 (275)和 20 个线性独立的比安基恒等式. 不清楚的是, 这些方程有多少是独立的, 对它们怎样排列和使用, 而且它们究竟适合于什么. 所有这些问题都将在下文适当的地方面对.

[40] (e) **四次形式的推广**

在前面对四次形式的讲述中, 已经明确假定, 方程 (242) 定义的 $\eta_{(a)(b)}$ 表示的是常数对称矩阵. 如果情况不是这样, 而 $\eta_{(a)(b)}$ 是时空的函数, 那么 (如已经注意到的) 就不能推论出旋转系数对其前两个指标的反对称性, 而是代之以 (见方程 (257))

$$\gamma_{(a)(b)(c)} - \gamma_{(b)(a)(c)} = \eta_{(a)(b),(c)}. \tag{277}$$

更重要的是, 用 $\eta^{(a)(b)}$ 和 $\eta_{(a)(b)}$ 提升和降低四次指标的过程不能与方向导数或内部导数的操作交换. 对前面各节相关内容的仔细研究表明, 代替方程 (272) 的结构常数的正确表示是

$$C^{(c)}{}_{(a)(b)} = \gamma_{(a)}{}^{(c)}{}_{(b)} - \gamma_{(b)}{}^{(c)}{}_{(a)}, \tag{278}$$

而方程 (275) 和 (276) 所给的里奇和比安基恒等式依然成立.

8. 纽曼 – 彭罗斯形式

纽曼 – 彭罗斯形式是一种有着特别选择的基矢的四次形式. 所作的选择是 4 个零矢量 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$, 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$, 其中 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是实数, 而 $\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 是互为共轭的复数. 这种形式由纽曼和彭罗斯于 1962 年首创时的新奇之处, 正是其对零基的选择:[①]它背离了到当时仍习以为常的正交基选择. 选择零基的潜在动力是彭罗斯的坚强信念, 即时空的基本要素是使得引入旋量基成为可能的光锥结构. 将会看到, 广义相对论的黑洞解的时空光锥结构确切地就是这样的类型, 使纽曼 – 彭罗斯形式对掌握这些时空的内在对称性并揭示其解析的丰富性最为有效. 但现在已可指出, 纽曼 – 彭罗斯形式对广义相对论黑洞解的特别适应性是来自其 "D 型" 特征和哥尔德伯 – 萨赫定理, 这些内容随后将在本章 (§9) 和后文中讲述.

(a) 零基和自旋系数 [41]

如已讲过的, 纽曼 – 彭罗斯形式的基础是选择一组由一对实数零矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$ 和一对共轭复数零矢量 $\boldsymbol{m}$、$\overline{\boldsymbol{m}}$ 组成的零基. 要求它们满足正交条件,

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=\boldsymbol{l}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=\boldsymbol{n}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=0, \tag{279}$$

另外还要求

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}=\overline{\boldsymbol{m}}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=0, \tag{280}$$

即这些矢量为零. 通常还给基矢进一步加上归一化条件,

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=1 \quad \text{和} \quad \boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=-1. \tag{281}$$

加上这个进一步条件决不是必要的 (见§7 (e)). 的确, 在彭罗斯后来的一些工作里, 他宁愿不用条件 (281), 以与自己对时空零锥结构的观点更为协调. 但对本书的论题而言, 基矢选择中的这个附加自由度不能提供任何好处来超过同时带来的不利之处, 即旋转系数对其前两个指标不是反对称的, 还有更严重的是升降四次指标的操作不能与方向导数和内部导数操作交换. 由于这些原因, 本书将保留归一化条件 (281). 于是, 由 $\eta_{(a)(b)}$ 表示的基本矩阵是一个常数对

① 彭罗斯最初被导致考虑引入零基, 是由于他对以一种根本性的方式将旋量分析结合进广义相对论的兴趣. 纽曼 – 彭罗斯形式的这另一种探索将在第 10 章 (§102) 简要介绍.

称矩阵

$$[\eta_{(a)(b)}] = [\eta^{(a)(b)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{282}$$

有对应 (见§7 (a))

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{m}, \quad \text{和 } \boldsymbol{e}_4 = \overline{\boldsymbol{m}}. \tag{283}$$

相应的协变基是

$$\boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{n}; \quad \boldsymbol{e}^2 = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{l}; \quad \boldsymbol{e}^3 = -\boldsymbol{e}_4 = -\overline{\boldsymbol{m}}, \quad \text{和 } \boldsymbol{e}^4 = -\boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{m}. \tag{284}$$

作为方向导数的基矢由特别符号标记:

[42]

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}^2 = D; \quad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}^1 = \Delta; \quad \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}^4 = \delta; \quad \text{和 } \boldsymbol{e}_4 = -\boldsymbol{e}^3 = \delta^*. \tag{285}$$

各个里奇旋转系数, 现在称为*自旋系数*, 也类似地由特别符号标记:

$$\left.\begin{array}{lll} \kappa = \gamma_{311}; & \rho = \gamma_{314}; & \varepsilon = \dfrac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}); \\ \sigma = \gamma_{313}; & \mu = \gamma_{243}; & \gamma = \dfrac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}); \\ \lambda = \gamma_{244}; & \tau = \gamma_{312}; & \alpha = \dfrac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}); \\ \nu = \gamma_{242}; & \pi = \gamma_{241}; & \beta = \dfrac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}). \end{array}\right\} \tag{286}$$

很清楚, 任何量的复数共轭能够由指标 4 置换指标 3 (无论它在哪里) 得到, 反之亦然. 这是一条普遍规则.

(*b*) 外尔、里奇、黎曼张量的表示

外尔张量是黎曼张量的无迹部分, 其四次分量是 (见方程 (233))

$$\begin{aligned} R_{abcd} = C_{abcd} &- \frac{1}{2}(\eta_{ac}R_{bd} - \eta_{bc}R_{ad} - \eta_{ad}R_{bc} + \eta_{bd}R_{ac}) \\ &+ \frac{1}{6}(\eta_{ac}\eta_{bd} - \eta_{ad}\eta_{bc})R, \end{aligned} \tag{287}$$

其中 R_{bd} 标记里奇张量的四次分量, R 是标量曲率:

$$R_{ac} = \eta^{bd}R_{abcd} \quad \text{和} \quad R = \eta^{ab}R_{ab} = 2(R_{12} - R_{34}). \tag{288}$$

① 下文在不至于造成混淆的前提下将省去辨别四次指标的括号.

C_{abcd} 无迹的事实要求

$$\eta^{ad}C_{abcd} = C_{1bc2} + C_{2bc1} - C_{3bc4} - C_{4bc3} = 0. \tag{289}$$

此外, 还必须要求

$$C_{1234} + C_{1342} + C_{1423} = 0. \tag{290}$$

条件 (289) 对 $b = c$ 明晰地写出时给出

$$C_{1314} = C_{2324} = C_{1332} = C_{1442} = 0, \tag{291}$$

而当 $b \neq c$ 时该条件与循环要求 (290) 一起给出

$$\left.\begin{aligned} &C_{1231} = C_{1334}; C_{1241} = C_{1443}; C_{1232} = C_{2343}; C_{1242} = C_{2434}, \\ &C_{1212} = C_{3434};\ \text{和}\ C_{1342} = \frac{1}{2}(C_{1212} - C_{1234}) = \frac{1}{2}(C_{3434} - C_{1234}). \end{aligned}\right\} \tag{292}$$

利用以上结果, 得出黎曼张量的各分量通过下式与外尔和里奇张量的分量关联,

[43]

$$\left.\begin{aligned} &R_{1212} = C_{1212} + R_{12} - \frac{1}{6}R; R_{1324} = C_{1324} + \frac{1}{12}R; R_{1234} = C_{1234}; \\ &R_{3434} = C_{3434} - R_{34} - \frac{1}{6}R; R_{1313} = C_{1313}; R_{2323} = C_{2323}; \\ &R_{1314} = \frac{1}{2}R_{11}; R_{2324} = \frac{1}{2}R_{22}; R_{3132} = -\frac{1}{2}R_{33}; \\ &R_{1213} = C_{1213} + \frac{1}{2}R_{13}; \quad R_{1334} = C_{1334} + \frac{1}{2}R_{13}; \\ &R_{1223} = C_{1223} - \frac{1}{2}R_{23}; \quad R_{2334} = C_{2334} + \frac{1}{2}R_{23}; \end{aligned}\right\} \tag{293}$$

而附加的复数共轭关系可由指标 4 置换指标 3 得到, 反之亦然.

在纽曼 – 彭罗斯形式里, 外尔张量的 10 个独立分量由下列 5 个复数标量表示,

$$\left.\begin{aligned} \Psi_0 &= -C_{1313} = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s. \\ \Psi_1 &= -C_{1213} = -C_{pqrs}l^p n^q l^r m^s, \\ \Psi_2 &= -C_{1342} = -C_{pqrs}l^p m^q \overline{m}^r n^s, \\ \Psi_3 &= -C_{1242} = -C_{pqrs}l^p n^q \overline{m}^r n^s, \\ \Psi_4 &= -C_{2424} = -C_{pqrs}n^p \overline{m}^q n^r \overline{m}^s. \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

虽然一般而言很清楚外尔张量是由 5 个复数标量 $\Psi_0, \cdots, \Psi_4$ 完全确定, 但更方便的是有一个总公式来用 5 个标量明晰地表示外尔张量的不同分量. 这样一个公式能以下列方式得出.

首先引入一个符号来表示 4 个量的积的构建, 其线性组合具有黎曼和外尔张量所有的基本对称性, 即令

$$\begin{aligned}\{w_p x_q y_r z_s\} = {} & w_p x_q y_r z_s - w_p x_q z_r y_s - x_p w_q y_r z_s + x_p w_q z_r y_s \\ & + y_p z_q w_r x_s - y_p z_q x_r w_s - z_p y_q w_r x_s + z_p y_q x_r w_s. \end{aligned} \tag{295}$$

这样构建的线性组合显然对 (p,q) 和对 (r,s) 是反对称的, 对指标对 (p,q) 和 (r,s) 的同时互换是不变的. 用这个标记, 很清楚外尔张量的张量分量 C_{pqrs} 必定可表示为

$$\begin{aligned} C_{pqrs} = {} & Q_{1212}\{l_p n_q l_r n_s\} + Q_{3434}\{m_p \overline{m}_q m_r \overline{m}_s\} + Q_{1234}\{l_p n_q m_r \overline{m}_s\} \\ & + Q_{1314}\{l_p m_q l_r \overline{m}_s\} + Q_{2324}\{n_p m_q n_r \overline{m}_s\} \\ & + [Q_{1313}\{l_p m_q l_r m_s\} + Q_{2323}\{n_p m_q n_r m_s\} + Q_{1213}\{l_p n_q l_r m_s\} \\ & + Q_{1223}\{l_p n_q n_r m_s\} + Q_{1323}\{l_p m_q n_r m_s\} + Q_{1324}\{l_p m_q n_r \overline{m}_s\} \\ & + Q_{1334}\{l_p m_q m_r \overline{m}_s\} + Q_{2334}\{n_p m_q m_r \overline{m}_s\} + \text{复数共轭}], \end{aligned} \tag{296}$$

[44] 其中所有的 Q 是尚未确定的系数, 而右边方括号里 8 个量的 "复数共轭" 是这样得到的, 即把所有的 $\boldsymbol{m}$ 都写成 $\overline{\boldsymbol{m}}$, 所有的指标 3 都写成指标 4, 反过来也如此.

表示式 (296) 中的系数 Q 可由 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$、$\overline{\boldsymbol{m}}$ 的分量的适当乘积来收缩方程两边而得到. 于是, 用 $l^p m^q l^r m^s$ 来收缩, 左边按定义得到 $-\Psi_0$, 而右边唯一剩下的项有系数 Q_{2424}; 从而有 $Q_{2424} = -\Psi_0$. 类似地, 用 $l^p m^q l^r \overline{m}^s$ 收缩方程, 右边仅剩的项有系数 Q_{2423}; 而这个系数必定为零, 因为左边得到的是 C_{1314}, 已经证明它是零 (见方程 (291)). 照此进行, 系统地利用方程 (291)、(292)和 (294) 中的各种定义和要求, 可得

$$\begin{aligned} & Q_{1324} = \Psi_2; \quad Q_{1212} = Q_{3434} = -(\Psi_2 + \Psi_2{}^*); \quad Q_{1234} = (\Psi_2 - \Psi_2{}^*); \\ & Q_{1313} = -\Psi_4; \quad Q_{2424} = -\Psi_0; \quad Q_{1213} = -Q_{1334} = \Psi_3; \\ & Q_{1224} = Q_{2443} = -\Psi_1; \quad \text{和 } Q_{1314} = Q_{2324} = Q_{1323} = Q_{1424} = 0. \end{aligned} \tag{297}$$

所以, 所要求的公式是

$$\begin{aligned} C_{pqrs} = {} & -(\Psi_2 + \Psi_2{}^*)[\{l_p n_q l_r n_s\} + \{m_p \overline{m}_q m_r \overline{m}_s\}] + (\Psi_2 - \Psi_2{}^*)\{l_p n_q m_r \overline{m}_s\} \\ & + [\![-\Psi_0\{n_p \overline{m}_q n_r \overline{m}_s\} - \Psi_4\{l_p m_q l_r m_s\} + \Psi_2\{l_p m_q n_r \overline{m}_s\} \\ & - \Psi_1[\{l_p n_q n_r \overline{m}_s\} + \{n_p \overline{m}_q \overline{m}_r m_s\}] \\ & + \Psi_3[\{l_p n_q l_r m_s\} - \{l_p m_q m_r \overline{m}_s\}] + \text{复数共轭}]\!]. \end{aligned} \tag{298}$$

特别有

$$C_{1334} = \Psi_1; \quad C_{2443} = \Psi_3; \quad C_{1212} = C_{3434} = -(\Psi_2 + \Psi_2{}^*);$$

和

$$C_{1234} = (\Psi_2 - \Psi_2{}^*). \tag{299}$$

计入 4 个为零的分量并允许复数共轭, 已经在方程 (294) 和 (299) 中给定了外尔张量的所有可区分分量.

最后, 里奇张量的 10 个分量可由下列 4 个实数标量和 3 个复数标量给定:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11}; \quad \Phi_{22} = -\frac{1}{2}R_{22}; \quad \Phi_{02} = -\frac{1}{2}R_{33}; \quad \Phi_{20} = -\frac{1}{2}R_{44}; \\ &\Phi_{11} = -\frac{1}{4}(R_{12} + R_{34}); \quad \Phi_{01} = -\frac{1}{2}R_{13}; \quad \Phi_{10} = -\frac{1}{2}R_{14}; \\ &\Lambda = \frac{1}{24}R = \frac{1}{12}(R_{12} - R_{34}); \quad \Phi_{12} = -\frac{1}{2}R_{23}; \quad \Phi_{21} = -\frac{1}{2}R_{24}. \end{aligned}\right\} \tag{300}$$

(c) 转换关系和结构常数 [45]

现在来写出理论的各个方程的明晰形式.

首先考虑转换关系 (见方程 (270) 和 (272))

$$[\boldsymbol{e}_{(a)}, \boldsymbol{e}_{(b)}] = (\gamma_{cba} - \gamma_{cab})\boldsymbol{e}^c = C^c{}_{ab}\boldsymbol{e}_c. \tag{301}$$

作为举例, 考虑

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Delta}, D] = [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}] &= [\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1] = (\gamma_{c12} - \gamma_{c21})\boldsymbol{e}^c \\ &= -\gamma_{121}\boldsymbol{e}^1 + \gamma_{212}\boldsymbol{e}^2 + (\gamma_{312} - \gamma_{321})\boldsymbol{e}^3 + (\gamma_{412} - \gamma_{421})\boldsymbol{e}^4 \\ &= -\gamma_{121}\boldsymbol{\Delta} + \gamma_{212}D - (\gamma_{312} - \gamma_{321})\delta^* - (\gamma_{412} - \gamma_{421})\delta, \end{aligned} \tag{302}$$

或, 给予自旋系数以其指定的符号, 得到

$$\boldsymbol{\Delta}D - D\boldsymbol{\Delta} = (\gamma + \gamma^*)D + (\varepsilon + \varepsilon^*)\boldsymbol{\Delta} - (\tau^* + \pi)\delta - (\tau + \pi^*)\delta^*. \tag{303}$$

以类似方式, 可得:

$$\delta D - D\delta = (\alpha^* + \beta - \pi^*)D + \kappa\boldsymbol{\Delta} - (\rho^* + \varepsilon - \varepsilon^*)\delta - \sigma\delta^*, \tag{304}$$

$$\delta\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{\Delta}\delta = -\nu^* D + (\tau - \alpha^* - \beta)\boldsymbol{\Delta} + (\mu - \gamma + \gamma^*)\delta + \lambda^*\delta^*, \tag{305}$$

$$\delta^*\delta - \delta\delta^* = (\mu^* - \mu)D + (\rho^* - \rho)\boldsymbol{\Delta} + (\alpha - \beta^*)\delta + (\beta - \alpha^*)\delta^* \tag{306}$$

将上述关系以方程 (301) 的方式表示, 得出结构常数与自旋系数的关系如下所示:

$$\begin{array}{llll}
C^1{}_{21} = +(\gamma+\gamma^*); & C^1{}_{31} = +(\alpha^*+\beta-\pi^*); & C^1{}_{32} = -\nu^*; & C^1{}_{43} = \mu^*-\mu, \\
C^2{}_{21} = +(\varepsilon+\varepsilon^*); & C^2{}_{31} = +\kappa; & C^2{}_{32} = \tau-\alpha^*-\beta; & C^2{}_{43} = \rho^*-\rho, \\
C^3{}_{21} = -(\tau^*+\pi); & C^3{}_{31} = -(\rho^*+\varepsilon-\varepsilon^*); & C^3{}_{32} = \mu-\gamma+\gamma^*; & C^3{}_{43} = \alpha-\beta^*, \\
C^4{}_{21} = -(\tau+\pi^*); & C^4{}_{31} = -\sigma; & C^4{}_{32} = +\lambda^*; & C^4{}_{43} = \beta-\alpha^*.
\end{array} \tag{307}$$

(*d*) 里奇恒等式和消元关系

现在来写出里奇恒等式在纽曼 – 彭罗斯形式中的明晰表示. 例如, 考虑方程 (275) 的 (1313) 分量, 有 (用关系 (293))

$$\begin{aligned}
-\Psi_0 = C_{1313} = R_{1313} = {} & \gamma_{133,1} - \gamma_{131,3} \\
& +\gamma_{133}(\gamma_{121}+\gamma_{431}-\gamma_{413}+\gamma_{431}+\gamma_{134}) \\
& -\gamma_{131}(\gamma_{433}+\gamma_{123}-\gamma_{213}+\gamma_{231}+\gamma_{132});
\end{aligned} \tag{308}$$

或, 将方向导数和自旋系数代之以其指定符号, 得

$$D\sigma-\delta\kappa = \sigma(3\varepsilon-\varepsilon^*+\rho+\rho^*)+\kappa(\pi^*-\tau-3\beta-\alpha^*)+\Psi_0. \tag{309}$$

[46] 如在§7 (*d*) 关于标准四次形式的讲述中提到的, 可以由方程 (275) 的不同分量总共写出 36 个方程. 但是在纽曼 – 彭罗斯形式里, 只写出半数的方程就够了 (省去写方程的复数共轭). 下面列出最初由纽曼和彭罗斯于 1962 年导出的 18 个方程, 并且指明在每个情况产生方程的黎曼张量分量.

$$\begin{aligned}
D\rho-\delta^*\kappa = {} & (\rho^2+\sigma\sigma^*)+\rho(\varepsilon+\varepsilon^*) \\
& -\kappa^*\tau-\kappa(3\alpha+\beta^*-\pi)+\Phi_{00}, \qquad [R_{1314}] \qquad \text{(a)} \\
D\sigma-\delta\kappa = {} & \sigma(\rho+\rho^*+3\varepsilon-\varepsilon^*) \\
& -\kappa(\tau-\pi^*+\alpha^*+3\beta)+\Psi_0, \qquad [R_{1313}] \qquad \text{(b)} \\
D\tau-\Delta\kappa = {} & \rho(\tau+\pi^*)+\sigma(\tau^*+\pi)+\tau(\varepsilon-\varepsilon^*) \\
& -\kappa(3\gamma+\gamma^*)+\Psi_1+\Phi_{01}, \qquad [R_{1312}] \qquad \text{(c)} \\
D\alpha-\delta^*\varepsilon = {} & \alpha(\rho+\varepsilon^*-2\varepsilon)+\beta\sigma^*-\beta^*\varepsilon-\kappa\lambda \\
& -\kappa^*\gamma+\pi(\varepsilon+\rho)+\Phi_{10}, \qquad \left[\frac{1}{2}(R_{3414}-R_{1214})\right] \qquad \text{(d)} \\
D\beta-\delta\varepsilon = {} & \sigma(\alpha+\pi)+\beta(\rho^*-\varepsilon^*)-\kappa(\mu+\gamma) \\
& -\varepsilon(\alpha^*-\pi^*)+\Psi_1, \qquad \left[\frac{1}{2}(R_{1213}-R_{3413})\right] \qquad \text{(e)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D\gamma - \Delta\varepsilon &= \alpha(\tau+\pi^*) + \beta(\tau^*+\pi) - \gamma(\varepsilon+\varepsilon^*) \\
&\quad -\varepsilon(\gamma+\gamma^*) + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \left[\frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3412})\right] \quad \text{(f)} \\
D\lambda - \delta^*\pi &= (\rho\lambda + \sigma^*\mu) + \pi(\pi+\alpha-\beta) - \nu\kappa^* \\
&\quad -\lambda(3\varepsilon - \varepsilon^*) + \Phi_{20}, \qquad [R_{2441}] \quad \text{(g)} \\
D\mu - \delta\pi &= (p^*\mu + \sigma\lambda) + \pi(\pi^* - \alpha^* + \beta) \\
&\quad -\mu(\varepsilon+\varepsilon^*) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \qquad [R_{2431}] \quad \text{(h)} \\
D\nu - \Delta\pi &= \mu(\pi+\tau^*) + \lambda(\pi^*+\tau) + \pi(\gamma-\gamma^*) \\
&\quad -\nu(3\varepsilon+\varepsilon^*) + \Psi_3 + \Phi_{21}, \qquad [R_{2421}] \quad \text{(i)} \\
\Delta\lambda - \delta^*\nu &= -\lambda(\mu+\mu^*+3\gamma-\gamma^*) \\
&\quad +\nu(3\alpha+\beta^*+\pi-\tau^*) - \Psi_4, \qquad [R_{2442}] \quad \text{(j)} \\
\delta\rho - \delta^*\sigma &= \rho(\alpha^*+\beta) - \sigma(3\alpha-\beta^*) + \tau(\rho-\rho^*) \\
&\quad +\kappa(\mu-\mu^*) - \Psi_1 + \Phi_{01}, \qquad [R_{3143}] \quad \text{(k)} \\
\delta\alpha - \delta^*\beta &= (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\alpha^* + \beta\beta^* - 2\alpha\beta \\
&\quad +\gamma(\rho-\rho^*) + \varepsilon(\mu-\mu^*) - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \\
&\qquad \left[\frac{1}{2}(R_{1234} - R_{3434})\right] \quad \text{(l)} \\
\delta\lambda - \delta^*\mu &= \nu(\rho-\rho^*) + \pi(\mu-\mu^*) + \mu(\alpha+\beta^*) \qquad [47] \\
&\quad +\lambda(\alpha^*-3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, \qquad [R_{2443}] \quad \text{(m)} \\
\delta\nu - \Delta\mu &= (\mu^2 + \lambda\lambda^*) + \mu(\gamma+\gamma^*) - \nu^*\pi \\
&\quad +\nu(\tau-3\beta-\alpha^*) + \Phi_{22}, \qquad [R_{2423}] \quad \text{(n)} \\
\delta\gamma - \Delta\beta &= \gamma(\tau-\alpha^*-\beta) + \mu\tau - \sigma\nu - \varepsilon\nu^* \\
&\quad -\beta(\gamma-\gamma^*-\mu) + \alpha\lambda^* + \Phi_{12}, \qquad \left[\frac{1}{2}(R_{1232} - R_{3432})\right] \quad \text{(o)} \\
\delta\tau - \Delta\sigma &= (\mu\sigma + \lambda^*\rho) + \tau(\tau+\beta-\alpha^*) \\
&\quad -\sigma(3\gamma-\gamma^*) - \kappa\nu^* + \Phi_{02}, \qquad [R_{1332}] \quad \text{(p)} \\
\Delta\rho - \delta^*\tau &= -(\rho\mu^* + \sigma\lambda) + \tau(\beta^*-\alpha-\tau^*) \\
&\quad +\rho(\gamma+\gamma^*) + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \qquad [R_{1324}] \quad \text{(q)} \\
\Delta\alpha - \delta^*\gamma &= \nu(\rho+\varepsilon) - \lambda(\tau+\beta) + \alpha(\gamma^*-\mu^*) \\
&\quad +\gamma(\beta^*-\tau^*) - \Psi_3. \qquad \left[\frac{1}{2}(R_{1242} - R_{3442})\right] \quad \text{(r)}
\end{aligned}
$$

(310)

虽然上面方程的每一个都含有一个或多个外尔和里奇标量, 但很清楚能从它们得到总共 16 个独立于它们并只含自旋系数的实数方程. 理由是, 虽然方程 (275) (上面的所有方程都是从中导出) 的右边对第一对和第二对指标是反对称的, 但却不具有黎曼张量 (左边) 对第一和第二对指标同时互换的不变

性. 恰恰是这后一个不变性 (和循环恒等式一起) 将黎曼张量的独立分量个数从 36 减为 20. 同样理由, 必定能够从包含在方程 (275) (和 (310)) 里的 36 个方程中的总共 16 个里消除黎曼张量. 这种消除能从上列方程直接进行. 于是方程 (310, a) 的虚部就不含 Φ_{00}, 因为它是实数. 类似地, 由方程 (310, c)、(310, e), 以及方程 (310, d) 的复数共轭, 容易消除 Ψ_1 和 $\Phi_{01}(=\Phi_{01}{}^*)$, 并得到单一的只含自旋系数的复数方程. 通过这样系统的消除, 得到下列 4 个实数和 6 个复数消元关系:

$$D(\rho-\rho^*)+\delta\kappa^*-\delta^*\kappa=(\rho-\rho^*)(\rho+\rho^*+\varepsilon+\varepsilon^*)+\kappa(\tau^*+\pi-3\alpha-\beta^*)$$
$$-\kappa^*(\tau+\pi^*-3\alpha^*-\beta), \tag{a}$$
$$D(\mu-\mu^*)+\delta(\alpha+\beta^*-\pi)-\delta^*(\alpha^*+\beta-\pi^*)=(\gamma+\gamma^*)(\rho-\rho^*)$$
$$+\alpha(\pi^*-2\beta)-\alpha^*(\pi-2\beta^*)+k^*\nu^*-\kappa\nu+\beta\pi-\beta^*\pi^*+(\rho+\rho^*)(\mu-\mu^*) \tag{b}$$
$$D(\mu-\mu^*-\gamma+\gamma^*)+\Delta(\varepsilon-\varepsilon^*)-\delta\pi+\delta^*\pi^*=(\varepsilon+\varepsilon^*)(\mu^*-\mu)$$
$$+\tau^*(\alpha^*+\pi^*-\beta)-\tau(\alpha+\pi-\beta^*)+\lambda\sigma-\lambda^*\sigma^*+\rho^*\mu-\rho\mu^*+2(\varepsilon\gamma-\varepsilon^*\gamma^*), \tag{c}$$

[48]
$$\Delta(\mu^*-\mu)+\delta\nu-\delta^*\nu^*=(\mu-\mu^*)(\mu+\mu^*+\gamma+\gamma^*)+\nu(\tau-3\beta-\alpha^*+\pi^*)$$
$$-\nu^*(\tau^*+\pi-3\beta^*-\alpha), \tag{d}$$
$$D(\tau-\alpha^*-\beta)-\Delta\kappa+\delta(\varepsilon+\varepsilon^*)=\rho(\tau^*+\pi)+\kappa^*\lambda^*+\sigma(\tau^*-\alpha-\beta^*)$$
$$+\varepsilon(\tau-\pi^*)-\rho^*(\beta+\alpha^*+\pi^*)+\varepsilon^*(2\alpha^*+2\beta-\tau-\pi^*)+\kappa(\mu-2\gamma), \tag{e}$$
$$\delta(\rho-\varepsilon+\varepsilon^*)-\delta^*\sigma+D(\beta-\alpha^*)=\rho(\alpha^*+\beta+\tau)-\rho^*(\tau-\beta+\alpha^*+\pi^*)$$
$$+(\varepsilon^*-\varepsilon)(2\alpha^*-\pi^*)+\sigma(\pi-2\alpha)+\kappa(\gamma^*-\gamma-\mu^*)+\kappa^*\lambda^*, \tag{f}$$
$$D\lambda+\Delta\sigma^*-\delta^*(\tau^*+\pi)=\sigma^*(3\gamma^*-\gamma+\mu-\mu^*)+(\pi+\tau^*)(\pi-\tau^*+\alpha)$$
$$+\lambda(\rho-\rho^*-3\varepsilon+\varepsilon^*)-\beta\pi-\tau^*\beta^*, \tag{g}$$
$$D\nu+\Delta(\alpha+\beta^*-\pi)-\delta^*(\gamma+\gamma^*)=\nu(\rho-2\varepsilon)+\lambda(\pi^*-\alpha^*-\beta)+\mu(\pi+\tau^*)$$
$$-\mu^*(\alpha+\beta^*+\tau^*)+\gamma(\pi-\tau^*)+\gamma^*(2\alpha+2\beta^*-\pi-\tau^*)+\sigma^*\nu^*, \tag{h}$$
$$\Delta(\beta^*-\alpha)+\delta\lambda+\delta^*(\gamma-\gamma^*-\mu)=\nu(\varepsilon^*-\varepsilon-\rho^*)+\lambda(\tau-2\beta)+\alpha(\mu+\mu^*)$$
$$-\mu^*(\pi+\tau^*+\beta^*)+\mu(\pi+\beta^*)+(\gamma-\gamma^*)(\tau^*-2\beta^*)+\sigma^*\nu^*, \tag{i}$$
$$D\mu+\Delta\rho-\delta\pi-\delta^*\tau=\rho^*\mu-\rho\mu^*+\pi(\pi^*-\alpha^*+\beta)+\tau(\beta^*-\alpha-\tau^*)$$
$$+\rho(\gamma+\gamma^*)-\mu(\varepsilon+\varepsilon^*). \tag{j}$$

(311)

(e) **比安基恒等式**

如在前面§7 (d) 中已讲过的, 总共有 20 个线性独立的比安基恒等式. 完整的一套是 8 个复数恒等式

$$\left.\begin{aligned} &R_{13[13|4]}=0; \quad R_{13[21|4]}=0; \quad R_{13[13|2]}=0; \quad R_{13[43|2]}=0;\\ &R_{42[13|4]}=0; \quad R_{42[21|4]}=0; \quad R_{42[13|2]}=0; \quad R_{42[43|2]}=0; \end{aligned}\right\} \tag{312}$$

和 4 个由

$$\eta^{bc}\left(R_{ab}-\frac{1}{2}\eta_{ab}R\right)_{|c}=0 \tag{313}$$

得出的实数恒等式. 详细写出, 方程 (313) 提供两个实数方程,

和

$$\left.\begin{aligned}R_{11|2}+R_{34|1}-R_{13|4}-R_{14|3}=0,\\ R_{22|1}+R_{34|2}-R_{23|4}-R_{24|3}=0,\end{aligned}\right\} \tag{314}$$

及一个复数方程

$$R_{33|4}+R_{12|3}-R_{31|2}-R_{32|1}=0. \tag{315}$$

现在来用自旋系数和外尔、里奇标量写出这些恒等式的明晰形式. 作为例子, 考虑方程 (312) 所列恒等式的第一个, 有

[49]

$$R_{1313|4}+R_{1334|1}+R_{1341|3}=0. \tag{316}$$

利用方程 (293) 中给出的关系, 另可写为

$$C_{1313|4}+\left(C_{1334}+\frac{1}{2}R_{13}\right)_{|1}-\frac{1}{2}R_{11|3}=0. \tag{317}$$

考虑外尔张量中的项, 有

$$\begin{aligned}C_{1313|4}&=C_{1313,4}-\eta^{nm}(\gamma_{n14}C_{m313}+\gamma_{n34}C_{1m13}\\&\quad+\gamma_{n14}C_{13m3}+\gamma_{n34}C_{131m})\\&=C_{1313,4}-2(\gamma_{214}+\gamma_{344})C_{1313}+2\gamma_{314}(C_{1213}+C_{4313})\\&=-\delta^*\Psi_0+4\alpha\Psi_0-4\rho\Psi_1,\end{aligned} \tag{318}$$

和

$$\begin{aligned}C_{1334|1}&=C_{1334,1}-\eta^{nm}[\gamma_{n11}C_{m334}+\gamma_{n31}(C_{1m34}+C_{13m4})+\gamma_{n41}C_{133m}]\\&=C_{1334,1}-[(\gamma_{211}+\gamma_{341})C_{1334}+\gamma_{131}(C_{1234}-C_{3434})\\&\quad+\gamma_{231}C_{1314}+\gamma_{141}C_{1332}+\gamma_{131}C_{1324}+\gamma_{241}C_{1331}]\\&=D\Psi_1-2\varepsilon\Psi_1+3\kappa\Psi_2-\pi\Psi_0.\end{aligned} \tag{319}$$

类似地可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(R_{13|1}-R_{11|3})&=-D\Phi_{01}+\delta\Phi_{00}+2(\varepsilon+\rho^*)\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{10}\\&\quad-2\kappa\Phi_{11}-\kappa^*\Phi_{02}+(\pi^*-2\alpha^*-2\beta)\Phi_{00}.\end{aligned} \tag{320}$$

将方程 (318)、(319)和 (320) 结合, 就得到所需的恒等式 (316) 的明晰形式. 对其余的恒等式也可以类似方式操作. 下面给出 8 个复数恒等式 (312) 的明晰形式:

$$
\begin{aligned}
&-\delta^*\Psi_0 + D\Psi_1 + (4\alpha-\pi)\Psi_0 - 2(2\rho+\varepsilon)\Psi_1 + 3\kappa\Psi_2 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{13[13|4]} = 0, && \text{(a)}\\
&+\delta^*\Psi_1 - D\Psi_2 - \lambda\Psi_0 + 2(\pi-\alpha)\Psi_1 + 3\rho\Psi_2 - 2\kappa\Psi_3 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{13[21|4]} = 0, && \text{(b)}\\
&-\delta^*\Psi_2 + D\Psi_3 + 2\lambda\Psi_1 - 3\pi\Psi_2 + 2(\varepsilon-\rho)\Psi_3 + \kappa\Psi_4 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{42[13|4]} = 0, && \text{(c)}\\
&+\delta^*\Psi_3 - D\Psi_4 - 3\lambda\Psi_2 + 2(2\pi+\alpha)\Psi_3 - (4\varepsilon-\rho)\Psi_4 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{42[21|4]} = 0, && \text{(d)}\\
&-\Delta\Psi_0 + \delta\Psi_1 + (4\gamma-\mu)\Psi_0 - 2(2\tau+\beta)\Psi_1 + 3\sigma\Psi_2 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{13[13|2]} = 0, && \text{(e)}\\
&-\Delta\Psi_1 + \delta\Psi_2 + \nu\Psi_0 + 2(\gamma-\mu)\Psi_1 - 3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{13[43|2]} = 0, && \text{(f)}\\
&-\Delta\Psi_2 + \delta\Psi_3 + 2\nu\Psi_1 - 3\mu\Psi_2 + 2(\beta-\tau)\Psi_3 + \sigma\Psi_4 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{42[13|2]} = 0, && \text{(g)}\\
&-\Delta\Psi_3 + \delta\Psi_4 + 3\nu\Psi_2 - 2(\gamma+2\mu)\Psi_3 - (\tau-4\beta)\Psi_4 \\
&\quad +[\text{Ricci}] = 0; && R_{42[43|2]} = 0, && \text{(h)}
\end{aligned}
\tag{321}
$$

[50]

其中在相应方程里的里奇张量项 (方括号内的 Ricci) 是:

$$
\begin{aligned}
&-D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} + 2(\varepsilon+\rho^*)\Phi_{01} + 2\sigma\Phi_{10} - 2\kappa\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{02} \\
&\quad +(\pi^* - 2\alpha^* - 2\beta)\Phi_{00}, && \text{(a)}\\
&+\delta^*\Phi_{01} - \Delta\Phi_{00} - 2(\alpha+\tau^*)\Phi_{01} + 2\rho\Phi_{11} + \sigma^*\Phi_{02} \\
&\quad -(\mu^* - 2\gamma - 2\gamma^*)\Phi_{00} - 2\tau\Phi_{10} - 2D\Lambda, && \text{(b)}\\
&-D\Phi_{21} + \delta\Phi_{20} + 2(\rho^* - \varepsilon)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{10} + 2\pi\Phi_{11} - \kappa^*\Phi_{22} \\
&\quad -(2\alpha^* - 2\beta - \pi^*)\Phi_{20} - 2\delta^*\Lambda, && \text{(c)}\\
&-\Delta\Phi_{20} + \delta^*\Phi_{21} + 2(\alpha-\tau^*)\Phi_{21} + 2\nu\Phi_{10} + \sigma^*\Phi_{22} - 2\lambda\Phi_{11} \\
&\quad -(\mu^* + 2\gamma - 2\gamma^*)\Phi_{20}, && \text{(d)}\\
&-D\Phi_{02} + \delta\Phi_{01} + 2(\pi^* - \beta)\Phi_{01} - 2\kappa\Phi_{12} - \lambda^*\Phi_{00} + 2\sigma\Phi_{11} \\
&\quad +(\rho^* + 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{02}, && \text{(e)}\\
&\Delta\Phi_{01} - \delta^*\Phi_{02} + 2(\mu^* - \gamma)\Phi_{01} - 2\rho\Phi_{12} - \nu^*\Phi_{00} + 2\tau\Phi_{11} \\
&\quad +(\tau^* - 2\beta^* + 2\alpha)\Phi_{02} + 2\delta\Lambda, && \text{(f)}\\
&-D\Phi_{22} + \delta\Phi_{21} + 2(\pi^* + \beta)\Phi_{21} - 2\mu\Phi_{11} - \lambda^*\Phi_{20} + 2\pi\Phi_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(\rho^* - 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{22} - 2\Delta\Lambda, && \text{(g)}\\
\Delta\ &\Phi_{21} - \delta^*\Phi_{22} + 2(\mu^* + \gamma)\Phi_{21} - 2\nu\Phi_{11} - \nu^*\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12}\\
&+(\tau^* - 2\alpha - 2\beta^*)\Phi_{22}. && \text{(h)}
\end{aligned}
\qquad (321')
$$

收缩的恒等式 (314) 和 (315) 的明晰形式是:

$$
\begin{aligned}
&\delta^*\Phi_{01} + \delta\Phi_{10} - D(\Phi_{11} + 3\Lambda) - \Delta\Phi_{00}\\
&= \kappa^*\Phi_{12} + \kappa\Phi_{21} + (2\alpha + 2\tau^* - \pi)\Phi_{01} + (2\alpha^* + 2\tau - \pi^*)\Phi_{10}\\
&\quad -2(\rho + \rho^*)\Phi_{11} - \sigma^*\Phi_{02} - \sigma\Phi_{20} + [\mu + \mu^* - 2(\gamma + \gamma^*)]\Phi_{00}, && \text{(i)}\\
&\delta^*\Phi_{12} + \delta\Phi_{21} - \Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) - D\Phi_{22}\\
&= -\nu\Phi_{01} - \nu^*\Phi_{10} + (\tau^* - 2\beta^* - 2\pi)\Phi_{12} + (\tau - 2\beta - 2\pi^*)\Phi_{21}\\
&\quad +2(\mu + \mu^*)\Phi_{11} - (\rho + \rho^* - 2\varepsilon - 2\varepsilon^*)\Phi_{22} + \lambda\Phi_{02} + \lambda^*\Phi_{20}, && \text{(j)}\\
&\delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) - D\Phi_{12} - \Delta\Phi_{01} + \delta^*\Phi_{02}\\
&= \kappa\Phi_{22} - \nu^*\Phi_{00} + (\tau^* - \pi + 2\alpha - 2\beta^*)\Phi_{02} - \sigma\Phi_{21} + \lambda^*\Phi_{10}\\
&\quad +2(\tau - \pi^*)\Phi_{11} - (2\rho + \rho^* - 2\varepsilon^*)\Phi_{12} + (2\mu^* + \mu - 2\gamma)\Phi_{01}. && \text{(k)}
\end{aligned}
\qquad (322)
$$

[51]

在真空里, 里奇标量为零, 相关的比安基恒等式由 8 个里奇项等于零的复数方程 (321, a–h) 给出; 而且在这种情况, 无需关心收缩的恒等式 (322). 但是一般地, 方程 (321, a–h) 的里奇项是必须包括的; 而且在这种形式里它们被代之以与爱因斯坦方程

$$
R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right), \qquad (323)
$$

一致的能量 – 动量张量的分量.

组成纽曼 – 彭罗斯形式基本方程的是转换关系 (303)—(306)、里奇恒等式 (310, a–r)、消元关系 (311, a–j) 和比安基恒等式 (方程 (321) 和 (322)). 但是如前面已讲过的, 并不清楚这些方程的目的是什么, 在什么意义上它们能代替爱因斯坦方程或者与之等价.

(*f*) 麦克斯韦方程

在纽曼 – 彭罗斯形式里, 反对称的麦克斯韦张量 F_{ij} 被代之以 3 个复数标量,

$$
\left.
\begin{aligned}
&\phi_0 = F_{13} = F_{ij}l^i m^j,\\
&\phi_1 = \frac{1}{2}(F_{12} + F_{43}) = \frac{1}{2}F_{ij}(l^i n^j + \overline{m}^i m^j),\\
&\phi_2 = F_{42} = F_{ij}\overline{m}^i n^j;
\end{aligned}
\right\} \qquad (324)
$$

和

而麦克斯韦方程,

$$F_{[ij;k]} = 0 \text{ 和 } g^{ik}F_{ij;k} = 0, \tag{325}$$

用四次分量和内在导数表示, 即

$$F_{[ab|c]} = 0 \text{ 和 } \eta^{nm}F_{an|m} = 0, \tag{326}$$

被代之以方程

$$\left.\begin{aligned} \phi_{1|1} - \phi_{0|4} = 0, \quad \phi_{2|1} - \phi_{1|4} = 0, \\ \phi_{1|3} - \phi_{0|2} = 0, \quad \phi_{2|3} - \phi_{1|2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{327}$$

这些方程的明晰形式不难得到. 于是,

$$\begin{aligned} \phi_{1|1} = \frac{1}{2}[&F_{12,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n11}F_{m2} + \gamma_{n21}F_{1m}) \\ &+F_{43,1} - \eta^{nm}(\gamma_{n41}F_{m3} + \gamma_{n31}F_{4m})] \\ &= \phi_{1,1} - (\gamma_{131}F_{42} + \gamma_{241}F_{13}) \\ &= D\phi_1 + \kappa\phi_2 - \pi\phi_0; \end{aligned} \tag{328}$$

[52] 类似地,

$$\phi_{0|4} = \delta^*\phi_0 - 2\alpha\phi_0 + 2\rho\phi_1. \tag{329}$$

所以, 麦克斯韦方程 (327) 的第一个成为

$$D\phi_1 - \delta^*\phi_0 = (\pi - 2\alpha)\phi_0 + 2\rho\phi_1 - \kappa\phi_2. \tag{330}$$

而其余方程是

$$D\phi_2 - \delta^*\phi_1 = -\lambda\phi_0 + 2\pi\phi_1 + (\rho - 2\varepsilon)\phi_2, \tag{331}$$

$$\delta\phi_1 - \Delta\phi_0 = (\mu - 2\gamma)\phi_0 + 2\tau\phi_1 - \sigma\phi_2, \tag{332}$$

$$\delta\phi_2 - \Delta\phi_1 = -\nu\phi_0 + 2\mu\phi_1 + (\tau - 2\beta)\phi_2. \tag{333}$$

再转到麦克斯韦场的能量 – 动量张量, 有

$$T_{ab} = \eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{ef}F^{ef}; \tag{334}$$

利用麦克斯韦标量 ϕ_0、ϕ_1 和 ϕ_2, 容易得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}T_{11} = \phi_0\phi_0^*; \quad -\frac{1}{2}T_{13} = \phi_0\phi_1^*; \\ -\frac{1}{4}(T_{12} + T_{34}) = \phi_1\phi_1^*; \quad -\frac{1}{2}T_{23} = \phi_1\phi_2^*; \\ -\frac{1}{2}T_{22} = \phi_2\phi_2^*; \quad -\frac{1}{2}T_{33} = \phi_0\phi_2^*; \end{aligned} \tag{335}$$

而 T_{ab} 的迹当然是零. 所以, 按照方程 (300) 和 (323), 就能

$$\text{设 } \Lambda = 0 \text{ 并将 } \Phi_{mn} \text{ 代之以 } \phi_m \phi_n{}^*, \tag{336}$$

只差一个比例常数 $-8\pi G/c^4$.

方程 (321, a–h) 所列比安基恒等式里的里奇项 (321′, a–h) 在利用麦克斯韦方程 (330)—(334) 后大为简化. 例如, 考虑方程 (321′, a) 中里奇标量的导数里的项, 有

$$\begin{aligned} -D\Phi_{01} + \delta\Phi_{00} &\to -D(\phi_0\phi_1{}^*) + \delta(\phi_0\phi_0{}^*) \\ &= -\phi_0(D\phi_1{}^* - \delta\phi_0{}^*) - \phi_1{}^* D\phi_0 + \phi_0{}^*\delta\phi_0 \\ &= -\phi_0\{(\pi^* - 2\alpha^*)\phi_0{}^* + 2\rho^*\phi_1{}^* - \kappa^*\phi_2{}^*\} \\ &\quad -\phi_1{}^* D\phi_0 + \phi_0{}^*\delta\phi_0; \end{aligned} \tag{337}$$

将上面最后一步代入 (321′, a), 得到的是

$$-\phi_1{}^* D\phi_0 + \phi_0{}^*\delta\phi_0 + 2(\varepsilon\phi_0\phi_1{}^* + \sigma\phi_1\phi_0{}^* - \kappa\phi_1\phi_1{}^* - \beta\phi_0\phi_0{}^*). \tag{338}$$

列在 (321′) 里的其它项也可以类似地简化; 而包括在方程 (321, a–h) 里的里奇项对一个爱因斯坦 – 麦克斯韦场取下列形式 (差一个比例常数):

$$\begin{aligned} &-\phi_1{}^* D\phi_0 + \phi_0{}^*\delta\phi_0 + 2(\varepsilon\phi_0\phi_1{}^* + \sigma\phi_1\phi_0{}^* - \kappa\phi_1\phi_1{}^* - \beta\phi_0\phi_0{}^*), && \text{(a)} \\ &+\phi_1{}^*\delta^*\phi_0 - \phi_0{}^*\Delta\phi_0 + 2(-\alpha\phi_0\phi_1{}^* + \rho\phi_1\phi_1{}^* + \gamma\phi_0\phi_0{}^* - \tau\phi_1\phi_0{}^*), && \text{(b)} \\ &-\phi_1{}^* D\phi_2 + \phi_0{}^*\delta\phi_2 + 2(-\varepsilon\phi_2\phi_1{}^* - \mu\phi_1\phi_0{}^* + \beta\phi_2\phi_0{}^* + \pi\phi_1\phi_1{}^*), && \text{(c)} \\ &-\phi_0{}^*\Delta\phi_2 + \phi_1{}^*\delta^*\phi_2 + 2(\alpha\phi_2\phi_1{}^* + \nu\phi_1\phi_0{}^* - \gamma\phi_2\phi_0{}^* - \lambda\phi_1\phi_1{}^*), && \text{(d)} \\ &-\phi_2{}^* D\phi_0 + \phi_1{}^*\delta\phi_0 + 2(-\kappa\phi_1\phi_2{}^* - \beta\phi_0\phi_1{}^* + \sigma\phi_1\phi_1{}^* + \varepsilon\phi_0\phi_2{}^*), && \text{(e)} \\ &+\phi_1{}^*\Delta\phi_0 - \phi_2{}^*\delta^*\phi_0 + 2(-\rho\phi_1\phi_2{}^* - \gamma\phi_0\phi_1{}^* + \tau\phi_1\phi_1{}^* + \alpha\phi_0\phi_2{}^*), && \text{(f)} \\ &-\phi_2{}^* D\phi_2 + \phi_1{}^*\delta\phi_2 + 2(-\varepsilon\phi_2\phi_2{}^* - \mu\phi_1\phi_1{}^* + \beta\phi_2\phi_1{}^* + \pi\phi_1\phi_2{}^*), && \text{(g)} \\ &+\phi_1{}^*\Delta\phi_2 - \phi_2{}^*\delta^*\phi_2 + 2(-\alpha\phi_2\phi_2{}^* - \nu\phi_1\phi_1{}^* + \gamma\phi_2\phi_1{}^* + \lambda\phi_1\phi_2{}^*). && \text{(h)} \end{aligned} \tag{339}$$

[53]

又由于能量 – 动量张量的协变散度为零由麦克斯韦方程自动保证, 故无需关心方程 (322).

(*g*) 四次变换

选择了一个四次标架, 不论是通常四次形式里的正交标架, 还是纽曼 – 彭罗斯形式里的零标架, 就能在某个点上对标架作洛伦兹变换, 并连续地扩张到整个时空. 对应着洛伦兹变换群的 6 个参数, 有 6 个自由度来旋转所选的四次

标架. 在考虑这样的洛伦兹变换对各个纽曼 – 彭罗斯量的影响时, 方便的做法是将基矢 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 的一般洛伦兹变换看作由下列三类旋转组成:

(a) I 类旋转, 保留矢量 $\boldsymbol{l}$ 不变;

(b) II 类旋转, 保留矢量 $\boldsymbol{n}$ 不变; 和

(c) III 类旋转, 保留 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的方向不变, 并在 $(\boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}})$ 平面上将 $\boldsymbol{m}$ (和 $\overline{\boldsymbol{m}}$) 旋转一个角度 θ.

与这三类旋转联系, 有下列明确的变换 (容易验证它们保持基本的正交性和归一化条件):

$$\mathrm{I}: \boldsymbol{l} \to \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m} \to \boldsymbol{m} + a\boldsymbol{l}, \overline{\boldsymbol{m}} \to \overline{\boldsymbol{m}} + a^*\boldsymbol{l} \text{ 和 } \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n} + a^*\boldsymbol{m} + a\overline{\boldsymbol{m}} + aa^*\boldsymbol{l};$$

$$\mathrm{II}: \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \to \boldsymbol{m} + b\boldsymbol{n}, \overline{\boldsymbol{m}} \to \overline{\boldsymbol{m}} + b^*\boldsymbol{n} \text{ 和 } \boldsymbol{l} \to \boldsymbol{l} + b^*\boldsymbol{m} + b\overline{\boldsymbol{m}} + bb^*\boldsymbol{n};$$

$$\mathrm{III}: \boldsymbol{l} \to A^{-1}\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \to A\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{m} \text{ 和 } \overline{\boldsymbol{m}} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\overline{\boldsymbol{m}};$$

其中 a 和 b 是流形上的两个复数函数, A 和 θ 是两个实数函数.

[54] I 类旋转对各个纽曼 – 彭罗斯量的影响容易得出. 考虑外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_1, 有

$$\begin{aligned} -\Psi_0 = C_{1313} &\to C_{pqrs}l^p(m^q + al^q)l^r(m^s + al^s) \\ &= C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s = -\Psi_0, \end{aligned} \tag{340}$$

和

$$\begin{aligned} -\Psi_1 = C_{1213} &\to C_{pqrs}l^p(n^q + a^*m^q + a\overline{m}^q + aa^*l^q)l^r(m^s + al^s) \\ &= C_{pqrs}l^p(n^q + a^*m^q)l^r m^s \\ &= C_{1213} + a^*C_{1313} = -(\Psi_1 + a^*\Psi_0), \end{aligned} \tag{341}$$

这里对 Ψ_1 的演算中, 除外尔张量的明显的对称性外, 还用了 $C_{1413} = 0$ (见方程 (291)) 的事实. 变换对其余外尔标量的影响也能类似地得出, 结果是

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_0 \to \Psi_0, \Psi_1 \to \Psi_1 + a^*\Psi_0, \Psi_2 \to \Psi_2 + 2a^*\Psi_1 + (a^*)^2\Psi_0, \\ &\Psi_3 \to \Psi_3 + 3a^*\Psi_2 + 3(a^*)^2\Psi_1 + (a^*)^3\Psi_0, \\ &\Psi_4 \to \Psi_4 + 4a^*\Psi_3 + 6(a^*)^2\Psi_2 + 4(a^*)^3\Psi_1 + (a^*)^4\Psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{342}$$

用类似方式, 得出自旋系数变换如下:

$$\kappa \to \kappa; \sigma \to \sigma + a\kappa; \rho \to \rho + a^*\kappa; \varepsilon \to \varepsilon + a^*\kappa;$$

$$\tau \to \tau + a\rho + a^*\sigma + aa^*\kappa; \pi \to \pi + 2a^*\varepsilon + (a^*)^2\kappa + Da^*;$$

$$\alpha \to \alpha + a^*(\rho + \varepsilon) + (a^*)^2\kappa; \beta \to \beta + a\varepsilon + a^*\sigma + aa^*\kappa;$$

$$\begin{aligned}
&\gamma \to \gamma + a\alpha + a^*(\beta+\tau) + aa^*(\rho+\varepsilon) + (a^*)^2\sigma + a(a^*)^2\kappa;\\
&\lambda \to \lambda + a^*(2\alpha+\pi) + (a^*)^2(\rho+2\varepsilon) + (a^*)^3\kappa + \delta^* a^* + a^* D a^*;\\
&\mu \to \mu + a\pi + 2a^*\beta + 2aa^*\varepsilon + (a^*)^2\sigma + a(a^*)^2\kappa + \delta a^* + aDa^*;\\
&\nu \to \nu + a\lambda + a^*(\mu+2\gamma) + (a^*)^2(\tau+2\beta) + (a^*)^3\sigma + aa^*(\pi+2\alpha)\\
&\qquad + a(a^*)^2(\rho+2\varepsilon) + a(a^*)^3\kappa + (\Delta + a^*\delta + a\delta^* + aa^* D)a^*. \qquad (343)
\end{aligned}$$

而表示麦克斯韦场的标量变成

$$\phi_0 \to \phi_0, \phi_1 \to \phi_1 + a^*\phi_0, \phi_2 \to \phi_2 + 2a^*\phi_1 + (a^*)^2\phi_0. \qquad (344)$$

Ⅱ 类旋转对各个纽曼 – 彭罗斯量的相应影响也容易从前面的公式得出, 因为 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 互换的效果是产生变换

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_0 \rightleftarrows \Psi_4{}^*, \Psi_1 \rightleftarrows \Psi_3{}^*, \Psi_2 \rightleftarrows \Psi_2{}^*, \phi_0 \rightleftarrows -\phi_2{}^*, \phi_1 \rightleftarrows -\phi_1{}^*,\\
&\kappa \rightleftarrows -\nu^*, \rho \rightleftarrows -\mu^*, \sigma \rightleftarrows -\lambda^*, \alpha \rightleftarrows -\beta^*, \varepsilon \rightleftarrows -\gamma^*, \text{和 } \pi \rightleftarrows -\tau^*.
\end{aligned}\right\} \qquad (345)$$

特别地, Ⅱ 类旋转对外尔标量的影响是 [55]

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_0 \to \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4,\\
&\Psi_1 \to \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4,\\
&\Psi_2 \to \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, \Psi_3 \to \Psi_3 + b\Psi_4, \Psi_4 \to \Psi_4.
\end{aligned}\right\} \qquad (346)$$

最后, 写下 Ⅲ 类旋转对纽曼 – 彭罗斯量的影响.

$$\begin{aligned}
&\Psi_0 \to A^{-2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\Psi_0, \Psi_1 \to A^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Psi_1, \Psi_2 \to \Psi_2,\\
&\Psi_3 \to A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\Psi_3, \quad \text{和} \quad \Psi_4 \to A^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\Psi_4;\\
&\phi_0 \to A^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\phi_0, \quad \phi_1 \to \phi_1, \phi_2 \to A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi_2;\\
&\kappa \to A^{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\kappa, \sigma \to A^{-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\sigma, \rho \to A^{-1}\rho, \tau \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\tau},\\
&\pi \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\pi, \lambda \to A\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}\lambda, \mu \to A\mu, \nu \to A^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\nu,\\
&\gamma \to A\gamma - \frac{1}{2}\Delta A + \frac{1}{2}\mathrm{i}A\Delta\theta,\\
&\varepsilon \to A^{-1}\varepsilon - \frac{1}{2}A^{-2}DA + \frac{1}{2}\mathrm{i}A^{-1}D\theta,\\
&\alpha \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\delta^*\theta - \frac{1}{2}A^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\delta^* A,\\
&\beta \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\beta + \frac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\delta\theta - \frac{1}{2}A^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\delta A. \qquad (347)
\end{aligned}$$

这就完成了对纽曼 – 彭罗斯形式的讲述.

9. 光学标量, 彼得罗夫分类, 哥尔德伯 – 萨赫定理

§8 在纽曼 – 彭罗斯形式里从数学上引入的自旋系数的物理意义, 在考虑基矢沿 $\boldsymbol{l}$ 或 $\boldsymbol{n}$ 的传播时变得明显. 基矢 $\boldsymbol{e}_{(a)}$ 在经历一个无限小位移 ξ 时的一阶变化, 按定义是

$$\begin{aligned}\delta e_{(a)i} &= e_{(a)i;j}\xi^j = e^{(b)}{}_i\gamma_{(b)(a)(c)}e^{(c)}{}_j\xi^j \\ &= -\gamma_{(a)(b)(c)}e^{(b)}{}_i\xi^{(c)}.\end{aligned} \tag{348}$$

因此, $\boldsymbol{e}_{(a)}$ 沿方向 c 的单位位移的变化 $\delta\boldsymbol{e}_{(a)}(c)$ 是

$$\delta\boldsymbol{e}_{(a)}(c) = -\gamma_{(a)(b)(c)}\boldsymbol{e}^{(b)}. \tag{349}$$

特别地, 对 $\boldsymbol{l}$ 沿 $\boldsymbol{l}$ 的单位位移的变化, 有 (见方程 (284))

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{l}(1) &= -\gamma_{1(b)1}\boldsymbol{e}^{(b)} = -\gamma_{121}\boldsymbol{e}^{(2)} - \gamma_{131}\boldsymbol{e}^{(3)} - \gamma_{141}\boldsymbol{e}^{(4)} \\ &= -\gamma_{121}\boldsymbol{l} + \gamma_{131}\overline{\boldsymbol{m}} + \gamma_{141}\boldsymbol{m},\end{aligned} \tag{350}$$

[56] 或, 给自旋系数以其指定符号, 有

$$\delta\boldsymbol{l}(1) = (\varepsilon + \varepsilon^*)\boldsymbol{l} - \kappa\overline{\boldsymbol{m}} - \kappa^*\boldsymbol{m} \tag{351}$$

类似地得到

$$\delta\boldsymbol{n}(1) = -\gamma_{2(b)1}\boldsymbol{e}^{(b)} = -(\varepsilon + \varepsilon^*)\boldsymbol{n} + \pi\boldsymbol{m} + \pi^*\overline{\boldsymbol{m}} \tag{352}$$

和

$$\delta\boldsymbol{m}(1) = -\gamma_{3(b)1}\boldsymbol{e}^{(b)} = +(\varepsilon - \varepsilon^*)\boldsymbol{m} + \pi^*\boldsymbol{l} - \kappa\boldsymbol{n} \tag{353}$$

从方程 (351)—(353) 可以得出几个重要结论. 将方程 (351) 重写成另一种形式 (见方程 (348)),

$$l_{i;j}l^j = (\varepsilon + \varepsilon^*)l_i - \kappa\overline{m}_i - \kappa^*m_i, \tag{354}$$

由方程 (211) 和 (212) 得出结论, 当且仅当 $\kappa = 0$ 时, $\boldsymbol{l}$ 矢量形成零短程线的叠合; 进一步, 当且仅当另外还有 $\varepsilon = 0$ 时, 这些矢量是仿射参数化的. 如果 $\kappa = 0$, 对仿射参数化的后一个要求 (即 $\varepsilon = 0$) 总能由一个§7 (g) 里描述的 Ⅲ 类旋转实现 (见方程 (347)), 并且不会影响 $\boldsymbol{l}$ 的方向, 也不会影响初始已为零的 κ.

如果矢量 $\boldsymbol{l}$ 起初就被定义为仿射参数化零短程线的叠合, 以至于 $\kappa = \varepsilon = 0$, 那么通过 I 类旋转 (不会影响 $\boldsymbol{l}$ 和 κ、ε 的初始为零) 就能安排 $\pi = 0$. 在这

样一个旋转后, 按照方程 (352) 和 (353), 新的定向矢量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 对沿 $\boldsymbol{l}$ 的位移不发生变化. 换句话说, 在这种情况下, 所有基矢 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 在沿 $\boldsymbol{l}$ 平行传播时保持不变.

(a) 光学标量

零短程线叠合的一些更深刻性质能由明晰地写出下列方程右边的求和而导出,

$$l_{i;j} = e^{(a)}{}_i \gamma_{(a)1(b)} e^{(b)}{}_j. \tag{355}$$

得到

$$\begin{aligned} l_{i;j} = {} & (\varepsilon + \varepsilon^*) l_i n_j + (\gamma + \gamma^*) l_i l_j - (\alpha^* + \beta) l_i \overline{m}_j - (\alpha + \beta^*) l_i m_j \\ & - \kappa \overline{m}_i n_j - \kappa^* m_i n_j + \sigma \overline{m}_i \overline{m}_j + \sigma^* m_i m_j \\ & - \tau \overline{m}_i l_j - \tau^* m_i l_j + \rho \overline{m}_i m_j + \rho^* m_i \overline{m}_j. \end{aligned} \tag{356}$$

首先看到, 若用 l^j 收缩这个方程, 就重新获得方程 (354). 由于 $\boldsymbol{l}$ 形成仿射参数化零短程线的叠合, $\kappa = \varepsilon = 0$, 方程 (356) 变成

$$\begin{aligned} l_{i;j} = {} & (\gamma + \gamma^*) l_i l_j - (\alpha^* + \beta) l_i \overline{m}_j - (\alpha + \beta^*) l_i m_j - \tau \overline{m}_i l_j \\ & + \sigma \overline{m}_i \overline{m}_j + \sigma^* m_i m_j + \rho \overline{m}_i m_j + \rho^* m_i \overline{m}_j - \tau^* m_i l_j. \end{aligned} \tag{357}$$

由上面最后这个方程, 得到 [57]

$$l_{[i;j]} = -(\alpha^* + \beta - \tau) l_{[i} \overline{m}_{j]} - (\alpha + \beta^* - \tau^*) l_{[i} m_{j]} + (\rho - \rho^*) \overline{m}_{[i} m_{j]} \tag{358}$$

和

$$l_{[i;j} l_{k]} = (\rho - \rho^*) \overline{m}_{[i} m_j l_{k]}. \tag{359}$$

由有关本课题的标准定理 (见本章末文献注释里的参考文献) 可知, 当且仅当自旋系数 ρ 为实数时, 零短程线的叠合是正交超面 (即, $\boldsymbol{l}$ 与一个标量场的梯度成比例); 而当且仅当另外还有 $\alpha^* + \beta = \tau$ 时, $\boldsymbol{l}$ 等于一个标量场的梯度.

由方程 (357)、(358) 和 (359) 得出

$$\frac{1}{2} l^i_{;i} = -\frac{1}{2}(\rho + \rho^*) = \theta(\text{比如}), \tag{360}$$

$$\frac{1}{2} l_{[i;j]} l^{i;j} = -\frac{1}{4}(\rho - \rho^*)^2 = \omega^2(\text{比如}), \tag{361}$$

和

$$\frac{1}{2} l_{(i;j)} l^{i;j} = \theta^2 + |\sigma|^2. \tag{362}$$

上面方程定义的量 θ、ω和 σ 是由萨赫首先引进的, 被称为光学标量. θ 和 ω 的另一种定义是

$$\theta = -\mathrm{Re}\,\rho \quad 和 \quad \omega = \mathrm{Im}\,\rho. \tag{363}$$

ρ 和 σ 的几何意义如下. 首先, 记得 $\boldsymbol{l}$ 是一条零射线, 比如说 N, 的正切矢量, 而 $\boldsymbol{m}$ 是正交于 $\boldsymbol{l}$ 的复矢量. 在 N 上的一点 P, $\boldsymbol{m}$ 的实部与 $\boldsymbol{l}$ 组成一个二维平面. 现在考虑一个小圆圈, 其中心在 N 上的 P 点, 平放在与 $\boldsymbol{l}$ 正交的二维面上. 如果跟踪 $\boldsymbol{l}$ 叠合的与这个圆圈相交的射线到未来零方向, 圆圈可能变得收缩或膨胀、旋转或切变 (成为椭圆). 膨胀 (或收缩)、旋转、和切变分别由 $-\mathrm{Re}\,\rho$、$\mathrm{Im}\,\rho$ 和 σ 量度 (见图 1), $|\sigma|$ 量度切变的幅度, 而 $\frac{1}{2}\mathrm{arg}\sigma$ 量度椭圆的短轴与所指派二维平面的夹角.

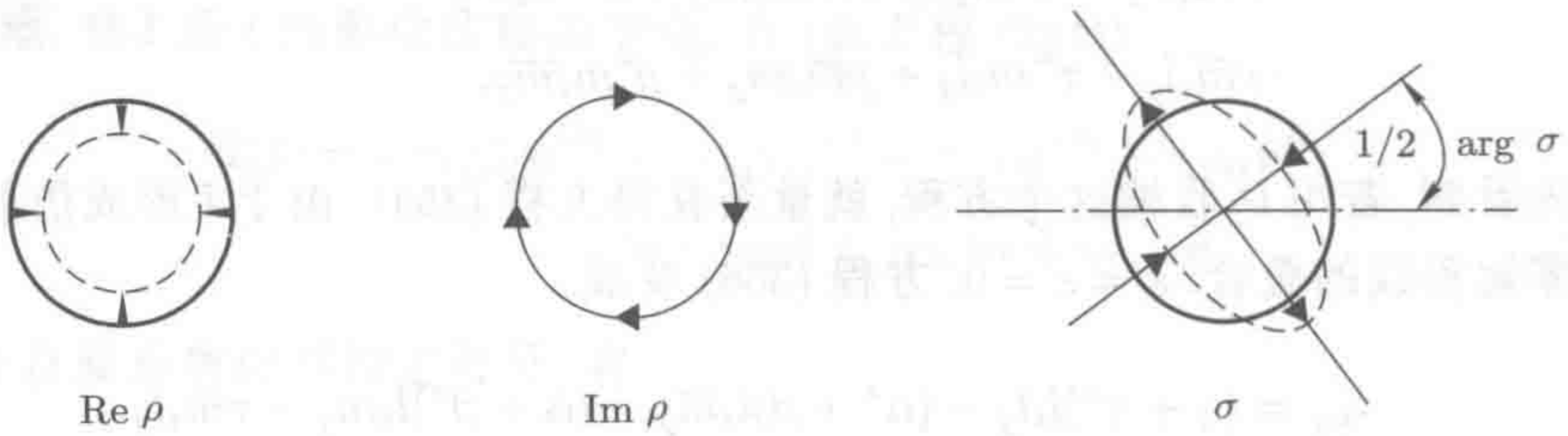


图 1 借助垂直于光束的小圆圈的传播效应对光学标量作的几何解释

$\mathrm{Im}\,\rho$ 是旋转量度的事实与这个量在叠合是正交超面时为零的要求是一致的.

自旋系数 ρ 和 σ 对描述光线束穿过引力场时行为所起的基本作用, 可以进一步由 $\boldsymbol{l}$ 在正交方向 $\boldsymbol{m}$ 传播时所经历的变化来显示. 按照方程 (349), 这个变化由下式给出,

$$\delta \boldsymbol{l}(3) = -\gamma_{1(b)3}\boldsymbol{e}^{(b)} = (\alpha^* + \beta)\boldsymbol{l} - \rho^*\boldsymbol{m} - \sigma\overline{\boldsymbol{m}}. \tag{364}$$

支配 ρ 和 σ 沿短程线变化的方程由方程 (310, a) 和 (310, b) 给出, 其中现在可设 $\kappa = \varepsilon = 0$. 于是有

[58]

$$D\rho = (\rho^2 + |\sigma|^2) + \Phi_{00}. \tag{365}$$

和

$$D\sigma = \sigma(\rho + \rho^*) + \Psi_0, \tag{366}$$

其中可重新记起

$$\Phi_{00} = -\frac{1}{2}R_{11} = -\frac{1}{2}R_{ij}l^i l^j \quad 和 \quad \Psi_0 = -C_{pqrs}l^p m^q l^r m^s. \tag{367}$$

这里再注意一下上述支配光学标量的方程的其它一些有用形式. 方程 (366) 可被重写成

$$D\sigma = -2\theta\sigma + \Psi_0. \tag{368}$$

对 ω 的类似方程可由取方程 (365) 的虚部并记得 Φ_{00} 是实数而得到, 即有

$$D\omega = \frac{1}{2}(\rho + \rho^*)(\rho - \rho^*) = -2\theta\omega. \tag{369}$$

而方程 (365) 的实部给出

$$D\theta = \omega^2 - \theta^2 - |\sigma|^2 - \Phi_{00}. \tag{370}$$

方程 (368)、(369) 和 (370) 是普遍使用的标准形式.

(*b*) **彼得罗夫分类**

已经看到, 对一个选择的零四次标架, 外尔张量如何完全由 5 个复数标量 $\Psi_0, \Psi_1, \cdots, \Psi_4$ 确定. 但是这些标量所取的值依赖于标架的选择, 也依赖于所经受的洛伦兹变换的 6 参数群. 现在出现的问题是, 这些标量中是哪些、有多少能够由标架的适当取向而为零. 对这个问题的回答导致对外尔张量的代数分类, 称为*彼得罗夫分类*, 所分的类型称为*彼得罗夫类型*.

令 $\Psi_4 \neq 0$. (如果 Ψ_4 碰巧在所选标架里为零, 能够通过 I 类旋转而使它不为零, 只要空间不是共形平坦, 也不是所有外尔标量都为零.) 现在考虑有参数 b 的 II 类旋转. 外尔标量 Ψ_0、Ψ_1 等等成为 (见方程 (346)) [59]

$$\left.\begin{aligned} &{\Psi_0}^{(1)} = \Psi_0 + 4b\Psi_1 + 6b^2\Psi_2 + 4b^3\Psi_3 + b^4\Psi_4, \\ &{\Psi_1}^{(1)} = \Psi_1 + 3b\Psi_2 + 3b^2\Psi_3 + b^3\Psi_4, \\ &{\Psi_2}^{(1)} = \Psi_2 + 2b\Psi_3 + b^2\Psi_4, {\Psi_3}^{(1)} = \Psi_3 + b\Psi_4, {\Psi_4}^{(1)} = \Psi_4, \end{aligned}\right\} \tag{371}$$

其中上标 "(1)" 指明标量由旧值而来的新值. 显然, 如果 b 被选为方程

$$\Psi_4 b^4 + 4\Psi_3 b^3 + 6\Psi_2 b^2 + 4\Psi_1 b + \Psi_0 = 0 \tag{372}$$

的根, 就能通过 II 类旋转而使 ${\Psi_0}^{(1)}$ 为零. 这个方程总有 4 个根, 而 $\boldsymbol{l}$ 的对应新方向, 即 $\boldsymbol{l} + b^*\boldsymbol{m} + b\overline{\boldsymbol{m}} + bb^*\boldsymbol{n}$, 被称为外尔张量的*主零方向*. 如果一个或更多的根重合, 张量就被称为代数特殊的; 否则就被称为代数普遍的. 而根相重合或相区分的不同方式就导致了彼得罗夫分类.

(α) *彼得罗夫 I 型* — 在这种情况, 方程 (372) 的所有 4 个根各不相同, 记为 b_1、b_2、b_3 和 b_4. 于是通过有参数 $b = b_1$ (比如说) 的 II 类旋转, 就能使

$\Psi_0 = 0$. 再通过 I 类旋转 (不影响 Ψ_0) 能使 Ψ_4 为零.[①]这样使 Ψ_0 和 Ψ_4 为零后, Ψ_1、Ψ_2和 Ψ_3 就保留为非零, 而且 $\Psi_1\Psi_3$ 和 Ψ_2 对余下的 III 类旋转不变 (但不会影响 Ψ_0 和 Ψ_4 为零).

(β) 彼得罗夫 II 型 — 方程 (372) 允许两个相重合的根 $b_1 = b_2$ ($\neq b_3 \neq b_4$ 而且 $b_3 \neq b_4$). 在这种情况, 除方程 (372) 外, 其导数 (对 b), 即

$$\Psi_4 b^3 + 3\Psi_3 b^2 + 3\Psi_2 b + \Psi_1 = 0, \tag{373}$$

在 $b = b_2$ 时也满足. 所以, 由参数为 $b = b_1$ ($= b_2$) 的 II 类旋转, Ψ_0 和 Ψ_1 将为零. 再由 I 类旋转 (不会影响 Ψ_0 和 Ψ_1 的初始同时为零) (见方程 (342)) 能使 Ψ_4 为零. 只余下 Ψ_2 和 Ψ_3 不为零, 其中又只有 Ψ_2 对 III 类旋转不变.

[60] (γ) 彼得罗夫 D 型 —方程 (372) 允许两组相区分的双重根 b_1 和 b_2. 现在来证明, 在这种情况, 如何由一个 II 类旋转再接一个 I 类旋转, 就能使 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3和 Ψ_4 同时为零, 留下 Ψ_2 为唯一非零的标量.

按假定, Ψ_0 在参数为 b 的 II 类旋转后的值是

$$\Psi_0{}^{(1)} = \Psi_4(b - b_1)^2(b - b_2)^2. \tag{374}$$

其余标量的值可以这样得到, 即接连地对 $\Psi_0{}^{(1)}$ 的表示式求导数, 并在每一步都重正化而使 b 的最高次幂有同样的系数 Ψ_4. 于是得到

$$\left.\begin{aligned} \Psi_1{}^{(1)} &= \frac{1}{2}\Psi_4(b - b_1)(b - b_2)(2b - b_1 - b_2) \\ \Psi_2{}^{(1)} &= \frac{1}{3}\Psi_4[(b - b_1)(b - b_2) + \frac{1}{2}(2b - b_1 - b_2)^2] \\ \Psi_3{}^{(1)} &= \frac{1}{2}\Psi_4(2b - b_1 - b_2), \text{ 和 } \Psi_4{}^{(1)} = \Psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{375}$$

选择 $b = b_1$, 有

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_0{}^{(1)} = \Psi_1{}^{(1)} = 0, \quad \Psi_2{}^{(1)} = \frac{1}{6}\Psi_4(b_1 - b_2)^2, \\ &\Psi_3^{(1)} = \frac{1}{2}\Psi_4(b_1 - b_2), \text{和 } \Psi_4{}^{(1)} = \Psi_4. \end{aligned}\right\} \tag{376}$$

---

① 注意方程 (参见方程 (342))

$$\Psi_0(a^*)^4 + 4\Psi_1(a^*)^3 + 6\Psi_2(a^*)^2 + 4\Psi_3 a^* + \Psi_4 = 0 \tag{372'}$$

的根是方程 (372) 的根的倒数.

现在给标架一个参数为 a^* 的 I 类旋转. 外尔标量的新值就是 (见方程 (342))

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_0{}^{(2)} = \Psi_1{}^{(2)} = 0 \\ &\Psi_2{}^{(2)} = \Psi_2{}^{(1)} = \frac{1}{6}\Psi_4(b_1 - b_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{377}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3{}^{(2)} &= \Psi_3{}^{(1)} + 3a^*\Psi_2{}^{(1)} = \frac{1}{2}\Psi_4(b_1 - b_2) + \frac{1}{2}\Psi_4 a^*(b_1 - b_2)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Psi_4(b_1 - b_2)[1 + a^*(b_1 - b_2)], \end{aligned} \tag{378}$$

和

$$\begin{aligned} \Psi_4{}^{(2)} &= \Psi_4 + 4a^* \cdot \frac{1}{2}\Psi_4(b_1 - b_2) + 6(a^*)^2 \cdot \frac{1}{6}\Psi_4(b_1 - b_2)^2 \\ &= \Psi_4[1 + a^*(b_1 - b_2)]^2. \end{aligned} \tag{379}$$

相应地, 由选择

$$a^* = (b_2 - b_1)^{-1}, \tag{380}$$

能使 $\Psi_3{}^{(2)}$ 和 $\Psi_4{}^{(2)}$ 也为零. 因此, 由一个参数为 b_1 的 II 类旋转, 再接一个参数为 $a^* = (b_2 - b_1)^{-1}$ 的 I 类旋转, Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 被简化为零, 而 Ψ_2 是唯一不为零的标量. 而且 Ψ_2 对 III 类旋转不变.

(δ) 彼得罗夫 III 型 — 如果方程 (372) 的 3 个根相重合, 且 $b_1 = b_2 = b_3 \neq b_4$, 于是由参数为 $b = b_1\ (= b_2 = b_3)$ 的 II 类旋转能使 Ψ_0、Ψ_1 和 Ψ_2 同时为零; 再由一个后继的 I 类旋转能使 Ψ_4 为零 (不影响 Ψ_0、Ψ_1 和 Ψ_2 为零). 而 Ψ_3 是唯一的不为零标量, 其量值可由 III 类旋转改变.

(ε) 彼得罗夫 N 型— 如果所有 4 个根都重合, 即只有一个确定的根 b (比如说), 那么由参数为 b 的 II 类旋转就能使 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_2 和 Ψ_3 同时为零, 而 Ψ_4 是唯一不为零的标量. [61]

现在来导出 $\boldsymbol{l}$ 为外尔张量的主零方向和各个彼得罗夫类型出现的一些简单条件.

用 C_{pqrs} 的一般表示 (298), 可得

$$\begin{aligned} C_{pqrs}l^q l^r = {} & (\Psi_2 + \Psi_2{}^*)l_p l_s + \Psi_0 \overline{m}_p \overline{m}_s + \Psi_0{}^* m_p m_s \\ & - \Psi_1(l_p \overline{m}_s + l_s \overline{m}_p) - \Psi_1{}^*(l_p m_s + l_s m_p). \end{aligned} \tag{381}$$

相应地,

$$C_{pqr[s}l_{t]}l^q l^r = (\Psi_0{}^* m_p - \Psi_1{}^* l_p)m_{[s}l_{t]} + (\Psi_0 \overline{m}_p - \Psi_1 l_p)\overline{m}_{[s}l_{t]} \tag{382}$$

和

$$l_{[u}C_{p]qr[s}l_{t]}l^q l^r = \Psi_0 l_{[u}m_{p]}m_{[s}l_{t]} + \Psi_0{}^* l_{[u}\overline{m}_{p]}\overline{m}_{[s}l_{t]}. \tag{383}$$

结果是, $\boldsymbol{l}$ 为属于 I 型外尔张量的非兼并主零方向的条件是

$$l_{[u}C_{p]qr[s}l_{t]}l^q l^r = 0, \quad \text{当且仅当 } \Psi_0 = 0; \tag{384}$$

而 $\boldsymbol{l}$ 为属于 II 型外尔张量的双简并主零方向的条件是

$$C_{pqr[s}l_{t]}l^q l^r = 0, \quad \text{当且仅当 } \Psi_0 = \Psi_1 = 0. \tag{385}$$

而当 Ψ_0 和 Ψ_1 为零时,

$$C_{pqrs}l^q l^r = (\Psi_2 + \Psi_2{}^*)l_p l_s. \tag{386}$$

如果外尔张量是 D 型, $\boldsymbol{n}$ 是第二个双简并零方向, 于是除条件 (385) 外, 还必须有

$$C_{pqr[s}n_{t]}n^q n^r = 0; \tag{387}$$

而当 $\Psi_4 = \Psi_3 = 0$ 时,

$$C_{pqrs}n^q n^r = (\Psi_2 + \Psi_2{}^*)n_p n_s. \tag{388}$$

如果外尔张量是 III 型, 且 $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0$, 于是由方程 (298) 有

$$C_{pqrs}l^s = [\Psi_3(l_p m_q - l_q m_p) + \Psi_3{}^*(l_p \overline{m}_q - l_q \overline{m}_p)]l_r; \tag{389}$$

结果是

$$C_{pqr[s}l_{t]}l^r = 0, \quad \text{当且仅当 } \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = 0. \tag{390}$$

最后, 如果张量是 N 型, 且 $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$, 于是有

$$C_{pqrs} = -\Psi_4\{l_p m_q l_r m_s\} - \Psi_4{}^*\{l_p \overline{m}_q l_r \overline{m}_s\}, \tag{391}$$

[62] 和

$$C_{pqrs}l^s = 0, \quad \text{当且仅当 } \Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0. \tag{392}$$

(c) 哥尔德伯 – 萨赫定理

现在限于里奇张量为零、且黎曼张量和外尔张量重合时的真空. 在这个限定下定理的陈述是:

如果黎曼张量是 II 型, 且选择的零基是使 $\boldsymbol{l}$ 为重复的零方向, 且 $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, 于是 $\kappa = \sigma = 0$; 反之, 如果 $\kappa = \sigma = 0$, 于是 $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, 且黎曼张量为 II 型.

这个定理的重要性在于它将场的 II 型特征与无切变零短程线叠合的存在相互联系.

可以直截了当地证明, 当 $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ 时, 由矢量 $\boldsymbol{l}$ 组成的叠合是短程的 ($\kappa = 0$) 和无切变的 ($\sigma = 0$). $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$ 时的比安基恒等式 (方程 (321, a, b, c, e, f 和 g)) 是

$$\left.\begin{array}{c} 3\kappa\Psi_2 = 0, (\mathrm{a}); D\Psi_2 = -2\kappa\Psi_3 + 3\rho\Psi_2, (\mathrm{b}); \\ D\Psi_3 - \delta^*\Psi_2 = -\kappa\Psi_4 - 2(\varepsilon - \rho)\Psi_3 + 3\pi\Psi_2, (\mathrm{c}); \\ 3\sigma\Psi_2 = 0, (\mathrm{e}); -\delta\Psi_2 = -3\tau\Psi_2 + 2\sigma\Psi_3, (\mathrm{f}); \\ \Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3 = -3\mu\Psi_2 - 2(\tau - \beta)\Psi_3 + \sigma\Psi_4, (\mathrm{g}). \end{array}\right\} \tag{393}$$

如果空间不是平坦的 (即 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_2、Ψ_3 和 Ψ_4 不全为零), 则由方程 (393, a, b, c) 有 $\kappa = 0$, 由方程 (393, e, f, g) 有 $\sigma = 0$.

对反论, 即若 $\kappa = \sigma = 0$ 则有 $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$, 的证明就不那么直截了. 首先假定, 通过 Ⅲ 类旋转 (不影响 κ 和 σ 为零), 已使 ε 为零. 然后里奇恒等式 (310, a, b, c, e 和 k) 对 $\kappa = \sigma = 0$ 给出

$$\left.\begin{array}{c} D\rho = \rho^2, (\mathrm{a}); \Psi_0 = 0, (\mathrm{b}); D\tau = (t^* + \pi)\rho + \Psi_1, (\mathrm{c}); \\ D\beta = \rho^*\beta + \Psi_1, (\mathrm{e}); \delta\rho = (\alpha^* + \beta)\rho + (\rho - \rho^*)\tau - \Psi_1, (\mathrm{k}); \end{array}\right\} \tag{394}$$

而当按照方程 (394, b) 设 Ψ_0 等于零时, 比安基恒等式 (方程 (321, a 和 e)) 是

$$D\Psi_1 = 4\rho\Psi_1, (\mathrm{a}); \quad \text{和} \quad \delta\Psi_1 = 2(2\tau + \beta)\Psi_1, (\mathrm{e}). \tag{395}$$

最后, 转换关系 (304) 给出

$$D\delta - \delta D = (\pi^* - \alpha^* - \beta)D + \rho^*\delta. \tag{396}$$

由方程 (343) 很清楚, 由 I 类旋转 (不影响 Ψ_0, 也不影响 κ、σ 或 ε 为零) 能 [63]
安排 $\tau = 0$, 前提是 $\rho \neq 0$. (另一方面, 如果 $\rho = 0$, 由方程 (394, k) 可得 $\Psi_1 = 0$, 而这是希望证明的结果.) 于是假定已使 τ 为零 (和 $\rho \neq 0$), 由方程 (395) 有

$$D\lg\Psi_1 = 4\rho \quad \text{和} \quad \delta\lg\Psi_1 = 2\beta. \tag{397}$$

从而,

$$(D\delta - \delta D)\lg\Psi_1 = 2D\beta - 4\delta\rho. \tag{398}$$

现在, 用关系 (394, e 和 k) 并记得 τ 已为零, 有

$$(D\delta - \delta D)\lg\Psi_1 = 2\rho^*\beta - 4(\alpha^* + \beta)\rho + 6\Psi_1. \tag{399}$$

另一方面, 将转换关系 (396) 运用于 $\lg\Psi_1$, 并利用方程 (395, a 和 e), 得到

$$\begin{aligned} (D\delta - \delta D)\lg\Psi_1 &= (\pi^* - \alpha^* - \beta)D\lg\Psi_1 + \rho^*\delta\lg\Psi_1 \\ &= 4(\pi^* - \alpha^* - \beta)\rho + 2\beta\rho^*. \end{aligned} \tag{400}$$

现在由方程 (399) 和 (400) 的右边相等, 得

$$\Psi_1 = \frac{2}{3}\pi^*\rho, \tag{401}$$

而方程 (394, c) 对 $\tau = 0$ 要求

$$\Psi_1 = -\pi^*\rho. \tag{402}$$

由于已假定 $\rho \neq 0$, 所以方程 (401) 和 (402) 给出 $\Psi_1 = 0$; 定理的证明到此完成.

哥尔德伯 – 萨赫定理的一个推论是, 如果场是代数特殊的, 并且是彼得罗夫 D 型, 那么由两个主零方向 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 组成的叠合必定既是短程的也是无切变的, 即当 $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ 有 $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$; 反之亦然.

值得注意的是, 广义相对论的黑洞解全都是彼得罗夫 D 型, 并因此能在这样一个零四次标架里分析它们, 即其中的自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 以及除 Ψ_2 外的所有外尔标量为零. 这个事实正是纽曼 – 彭罗斯形式对考虑它们特别有效的原因.

文献注释

§1—§6. 有许多关于微分几何的好书; 但对本书的确切需要来说, 其中大多数要么太深、要么太广. 这几节的内容适合本书的特殊需要, 在方式和观点上与下列著作相似:

1. D. LOVELOCK and H. RUND, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, Appendix, 331–52, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

[64] 2. S. W. HAWKING and G. F. R. ELLIS, *The Large-Scale Structure of Space-Time*, chapter II, 19–55, Cambridge, England, 1973.

§7. 关于四次形式的简要讲述可见下列著作:

3. L. D. LANDAU and E. M. LIFSCHITZ, *Classical Fields*, §98, 291–94, Pergamon Press, Oxford, 1975.

4. S. CHANDRASEKHAR in *General Relativity—An Einstein Centenary Survey*, chapter 7, 371–91, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979,

§8. 纽曼 – 彭罗斯形式在本书中起着核心作用; 如将在第 8、9、10 章中看到的, 它特别适合于对广义相对论黑洞解的研究. 有关这个课题的基础论文是:

5. E. T. NEWMAN and R. PENROSE, *J. Math. Phys.*, 3, 566–79 (1962).

促进基本概念更完整地建立的是:

6. R. Penrose, *An Analysis of the Structure of Space-Time*, Cambridge University Adams Prize Essay, Cambridge, England, 1966.

此形式的另一个可供选择版本, 即用基矢 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 以及 $\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 来揭示基本对称性的是:

7. R. Geroch, A. Held, and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, 14, 874–81 (1973).

出于一定的实用考虑 (在第 8 章的文献注释里说明), 已经选择仍取原初的较少对称性的版本.

对纽曼 – 彭罗斯形式的其它讲述有:

8. F. A. E. Pirani in *Lectures on General Relativity*, Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, I, 249–373, Prentice Hall, Inc., Englewood, New Jersey, 1964.

9. R. A. Breuer, *Gravitational Perturbation Theory and Synchotron Radiation*, Lecture Notes in Physics, 44, Springer Verlag, Berlin, 1975.

亦见文献 4.

§9 (a). 光学标量由萨赫引进:

10. R. K. Sachs, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 264, 309–37 (1961).

11. ——, ibid. 270, 103–26 (1962).

亦见:

12. R. K. Sachs, *Relativity, Groups, and Topology*, 523–62, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1964.

更凝练和明白的讲述见:

13. R. Penrose in *Perspectives in Geometry and Relativity*, 259–74, edited by B. Hoffmann, Indiana University Press, Bloomington, Indiana, 1966.

当然, 光学标量的意义, 如自旋系数一样, 仅在纽曼 – 彭罗斯形式建立后才显现. (亦见文献 6.)

§9 (b). 描述彼得罗夫分类 (有时也叫彼得罗夫 – 皮拉尼 (Pirani) 分类) 的原始论文是:

14. A. Z. Petrov, *Sci. Nat. Kazan State University*, 114, 55–69 (1954).

15. F. A. E. Pirani, *Phys. Rev.*, 105, 1089–99 (1957).

更详尽的介绍见:

16. A. Z. Petrov, *Einstein Spaces*, translated by R. E. Kelleher and J. Woodrow, Pergamon Press, Oxford, 1969.

17. F. A. E. Pirani in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 119–226, edited by L. Witten, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

亦见文献 8.

[65] 本书的讲述是对文献 5 内容的精制. (亦见文献 4.)

§9 (*c*). 哥尔德伯 – 萨赫定理的证明见:

18. J. N. Goldberg and R. K. Sachs, *Acta Phys. Polonica, Supp.* 13, 22, 13–23 (1962)

但本书的证明是跟随文献 5.

第二章

充分广义的时空

[66]

10. 引言

广义相对论的黑洞解是静态和球对称的 (如史瓦西解和雷斯纳 – 诺兹特朗解) 或者定常态和轴对称的 (如克尔解和克尔 – 纽曼解). 而在本书中给予同等关注的这些解的扰动态, 却既不是定常态也不是轴对称的. 作为处理对解的扰动态所提出的各种问题的基础, 有充分广义时空中的爱因斯坦方程和麦克斯韦方程在手是便利的, 这些方程将包含在研究进程中会遇到的不同情形. 本章将考虑表现出所需普遍性的时空, 并将给出能用来立即写出适合于各种情形的相关方程的基础张量表示.

11. 定常态轴对称时空和惯性系的拖曳

首先来考虑适于定常态轴对称时空的度规, 作为研究既非定常态也非轴对称的更广义时空的准备.

对定常态轴对称时空描述的合适方式是, 取时间 t $(= x^0)$ 和关于对称轴的经度角 $\varphi(= x^1)$ 作为坐标中的两个. 时空的定常态和轴对称特征要求度规系数独立于 t 和 φ, 且有

$$g_{ij} = g_{ij}(x^2, x^3), \tag{1}$$

其中 x^2 和 x^3 是其余两个空间坐标.

除定常态和轴对称外, 还要求时空对时间 t 和角度 φ 的同时反转, 即 $t \to -t$ 和 $\varphi \to -\varphi$, 是不变的. 这个追加要求的物理意义是, 引力场的源, 无论它是什么, 有着纯粹围绕对称轴旋转的运动; 在这种情况, 源的能量 – 动量张量具有所述的不变性. 换句话说, 这里考虑的时空是联系着一个 “转动物体”.

无论如何, 所假定的不变性要求

[67]

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0, \tag{2}$$

这是因为有着这些系数的度规项对反转 $t \to -t$ 和 $\varphi \to -\varphi$ 会改变符号. 所以, 按照所作的假定, 度规必定有形式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 + 2g_{01}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1 + g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 \\ & + [g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 + 2g_{23}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + g_{33}(\mathrm{d}x^3)^2], \end{aligned} \tag{3}$$

其中所有度规系数都只是 x^2 和 x^3 的函数.

度规形式的进一步简化能由运用下面的定理来做到.

定理 二维空间 (x^1, x^2) 的有着正定或负定记号 $(+,+$ 或 $-,-)$ 的度规

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}(\mathrm{d}x^1)^2 + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + g_{22}(\mathrm{d}x^2)^2 \tag{4}$$

总能通过坐标变换而成为对角线形式,

$$\mathrm{d}s^2 = \pm e^{2\mu}[(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2], \tag{5}$$

其中 $e^{2\mu}$ 是 x^1 和 x^2 的某个函数.

证明 为证明此定理, 很清楚的是存在下面的变换就足够,

$$x^{1'} = \phi(x^1, x^2) \quad \text{和} \quad x^{2'} = \psi(x^1, x^2), \tag{6}$$

它们能将度规的逆变形式

$$\mathrm{d}s^2 = g^{11}(\mathrm{d}x_1)^2 + 2g^{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + g^{22}(\mathrm{d}x_2)^2, \tag{7}$$

简化为 $(\mathrm{d}x_1)^2$ 和 $(\mathrm{d}x_2)^2$ 有着相等系数的对角线形式.

对一个能达到所述结果的变换, 必要和充分的是有

$$g^{1'2'} = g^{11}\phi_{,1}\psi_{,1} + g^{12}(\phi_{,1}\psi_{,2} + \phi_{,2}\psi_{,1}) + g^{22}\phi_{,2}\psi_{,2} = 0 \tag{8}$$

和

$$\begin{aligned} g^{1'1'} - g^{2'2'} = {} & g^{11}({\phi_{,1}}^2 - {\psi_{,1}}^2) + 2g^{12}(\phi_{,1}\phi_{,2} - \psi_{,1}\psi_{,2}) \\ & + g^{22}({\phi_{,2}}^2 - {\psi_{,2}}^2) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

容易验证, 下列代换可使方程 (8) 完全成立,

$$\phi_{,1} = \kappa(g^{21}\psi_{,1} + g^{22}\psi_{,2}) \quad \text{和} \quad \phi_{,2} = -\kappa(g^{11}\psi_{,1} + g^{12}\psi_{,2}), \tag{10}$$

其中 κ 是任意函数. 但是同样的代换对方程 (9) 却产生出条件

$$[\kappa^2\{g^{11}g^{22}-(g^{12})^2\}-1][g^{11}\psi_{,1}{}^2+2g^{12}\psi_{,1}\psi_{,2}+g^{22}\psi_{,2}{}^2]=0. \tag{11}$$ [68]

对正定或负定的度规, 方程 (11) 中方括号里的项不可能为零; 要使该方程成立只有选择

$$\kappa^2=\frac{1}{g^{11}g^{22}-(g^{12})^2}=g_{11}g_{22}-(g_{12})^2=g, \tag{12}$$

其中 g 标记协变形式度规的行列式. 结论是, 方程 (8) 和 (9) 都由下列代换而成立,

$$\phi_{,1}=+g^{\frac{1}{2}}(g^{21}\psi_{,1}+g^{22}\psi_{,2})=+g^{\frac{1}{2}}g^{2k}\psi_{,k}$$

和

$$\phi_{,2}=-g^{\frac{1}{2}}(g^{11}\psi_{,1}+g^{12}\psi_{,2})=-g^{\frac{1}{2}}g^{1k}\psi_{,k}. \tag{13}$$

这些方程的可积条件要求

$$(g^{\frac{1}{2}}g^{ik}\psi_{,k})_{,i}=0. \tag{14}$$

换句话说, ψ 可以是所考虑的二维空间中拉普拉斯 (Laplace) 方程的任何解. 能将度规简化为对 $(\mathrm{d}x_1)^2$ 和 $(\mathrm{d}x_2)^2$ [从而也对协变形式度规中的 $(\mathrm{d}x^1)^2$ 和 $(\mathrm{d}x^2)^2$] 有相等系数的对角线形式的变换的存在已经证实.

值得注意, 将方程 (13) 重写为协变形式,

$$\phi_{,i}=g^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{ij}g^{jk}\psi_{,k}, \tag{15}$$

(其中 ε_{ij} 是两个指标的交变记号), ϕ 和 ψ 的梯度表现出相互为 "双".

由已证明的定理可得出, 方程 (3) 方括号里的度规部分能简化为

$$\pm e^{2\mu}[(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2], \tag{16}$$

其中 μ 是 x^2 和 x^3 的某个函数.

运用已有的这些简化, 可将适合于定常态轴对称时空的度规写成下列形式

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2-e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2-e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \tag{17}$$

其中 ν、ψ、ω、μ_2 和 μ_3 是 x^2 和 x^3 的函数. 注意, 由于保留了函数 μ_2 和 μ_3 互不相同, 现在还没有将度规按定常态轴对称的基本假定和对 t、φ 的同时反演不变的要求所能做的那样完全地专门化. 这样做是为有助于在后面阶段能通过一个有利的坐标条件用这个规范自由度来限制 μ_2 和 μ_3.

[69]

(a) 惯性系的拖曳

与度规 (17) 相关联, 能由下列基矢来定义四次标架:

$$\begin{aligned} e_{(0)i} &= (e^{\nu} \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(1)i} &= (\omega e^{\psi} \ , -e^{\psi} \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(2)i} &= (0 \ , \ 0 \ , -e^{\mu_2} \ , \ 0), \\ e_{(3)i} &= (0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , -e^{\mu_3}). \end{aligned} \tag{18}$$

对应的逆变基矢是:

$$\begin{aligned} e_{(0)}{}^{i} &= (e^{-\nu} \ , \omega e^{-\nu} \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(1)}{}^{i} &= (0 \ , \ e^{-\psi} \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(2)}{}^{i} &= (0 \ , \ 0 \ , e^{-\mu_2} \ , \ 0), \\ e_{(3)}{}^{i} &= (0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , e^{-\mu_3}). \end{aligned} \tag{19}$$

对这样定义的四次标架有

$$e_{(a)}{}^{i} e_{(b)i} = \eta_{(a)(b)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

于是, 在所选标架里, 度规是闵可夫斯基的: 所以, 它局域地表示一个惯性系.

现在考虑时空中的一个点, 具有四速度,

$$u^0 = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{1-V^2}}, \quad u^1 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \Omega u^0, \quad u^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s} = u^0 v^\alpha \quad (\alpha = 2,3), \tag{21}$$

其中

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \quad v^\alpha = \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}t} \quad (\alpha = 2,3), \tag{22}$$

和

$$V^2 = e^{2\psi-2\nu}(\Omega-\omega)^2 + e^{2\mu_2-2\nu}(v^2)^2 + e^{2\mu_3-2\nu}(v^3)^2. \tag{23}$$

同一个点在局域惯性系里有四速度,

$$u^{(a)} = e^{(a)}{}_i u^i = \eta^{(a)(b)} e_{(b)i} u^i, \tag{24}$$

或, 如容易得到的,

$$u^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2}}, \quad u^{(1)} = \frac{e^{\psi-\nu}(\Omega-\omega)}{\sqrt{1-V^2}}, \quad \text{和} \quad u^{(\alpha)} = \frac{e^{\mu_2-\nu}v^\alpha}{\sqrt{1-V^2}} (\alpha = 2,3). \tag{25}$$

所以, 一个被视为在所选坐标架里以角速度 Ω 描绘出圆轨道 (具有原周长 πe^{ψ}) 的点, 在局域惯性系里将被赋予角速度, [70]

$$e^{\psi-\nu}(\Omega-\omega). \tag{26}$$

相应地, 一个在局域惯性系里被视为静止的点 (即 $u^{(1)}=u^{(2)}=u^{(3)}=0$), 在坐标架里将被赋予角速度 ω. 于是, 不为零的 ω 被称为是描述惯性系的 "拖曳". 第 6 章将证明, 在具有度规 (17) 的渐近平坦时空里,

$$\omega \to 2Jr^{-3} \tag{27}$$

其中 J 是一个常量, 意义是源的角动量.

12. 所需广义的时空

现在希望将线元 (17) 推广到包含非定常态、非轴对称的情况. 主要关注的是, 这些推广能够在完全普遍的意义上处理要么静态和球对称、要么定常态和轴对称的时空的扰动.

首先, 限于在任何时间都保持其轴对称性的时空, 即允许度规依赖于 t 但限制它独立于 φ. 令度规的逆变形式为

$$\boldsymbol{g}=g^{ij}\partial_i\partial_j. \tag{28}$$

然后假定, 度规的所有分量 g^{ij} 只是 x^0、x^2 和 x^3 的函数. 现在来证明, 如何通过只涉及 x^0、x^2 和 x^3 的局域坐标变换, 就能使 3×3 矩阵 $[g^{ij}]$ $(i,j=0,2,3)$ 成为对角线形式.

定理 (科腾 – 达波 (Cotton-Darboux)) 三维空间 $(x^0、x^1、x^2)$ 的度规

$$\boldsymbol{g}=g^{ij}\partial_i\partial_j \quad (i,j=0,1,2), \tag{29}$$

总能通过局域坐标变换而成为对角线形式.

证明 首先看到, 通过选择短程坐标系, 度规能成为下列形式

$$\boldsymbol{g}=e^0\partial_0+g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta \quad (e^0=\pm1;\alpha,\beta=1,2). \tag{30}$$

[短程坐标系的构建, 是由考虑能使 $g^{ij}f_{,i}f_{,j}\neq0$ 的面 $f(x^0,x^1,x^2)$, 令正交于 $f=0$ 的短程线为坐标线 x^0, 并选择面上的坐标 x^1 和 x^2 短程地平行于 f.] [71]

考虑坐标变换,

$$x^{i'}=\phi^{i'}(x^0,x^1,x^2) \quad (i'=0,1,2), \tag{31}$$

其中 $\phi^{i'}$ 是 x^0、x^1 和 x^2 的函数, 并希望由度规 (30) 在新坐标系里是对角线式的条件来确定. 条件显然是

$$g^{i'j'} = e^0 \frac{\partial \phi^{i'}}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial x^0} + g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^{i'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^{j'}}{\partial x^\beta} = 0 \quad [(i', j') = (0,1), (1,2), (2,0)], \tag{32}$$

或更清晰地写成,

$$\left.\begin{aligned} e^0 \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} &= -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^\beta} = K^0, (\text{比如说}) \\ e^0 \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} &= -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^2}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^\beta} = K^1, (\text{比如说}) \\ e^0 \frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} &= -g^{\alpha\beta} \frac{\partial \phi^0}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^\beta} = K^2, (\text{比如说}) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

因此,

$$\frac{\partial \phi^0}{\partial x^0} = \left(\frac{\boldsymbol{K}^1 \boldsymbol{K}^2}{\boldsymbol{K}^0}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial \phi^1}{\partial x^0} = \left(\frac{\boldsymbol{K}^2 \boldsymbol{K}^0}{\boldsymbol{K}^1}\right)^{1/2}, \quad \text{和} \quad \frac{\partial \phi^2}{\partial x^0} = \left(\frac{\boldsymbol{K}^0 \boldsymbol{K}^1}{\boldsymbol{K}^2}\right)^{1/2}. \tag{34}$$

现在假定, ϕ^0、ϕ^1 和 ϕ^2 作为两个变量 x^1 和 x^2 的函数, 被指定在 $x^0 = 0$ 面上 (比如说); 进一步, $\boldsymbol{K}^0$、$\boldsymbol{K}^1$ 和 $\boldsymbol{K}^2$ 在这个面上都不为零, 并满足通常的平滑性条件. 于是, 由柯西 – 科瓦勒乌斯基 (Cauchy-Kowalewski) 定理, 存在唯一的函数组 ϕ^0、ϕ^1 和 ϕ^2 满足方程组 (33), 并简化为在 $x^0 = 0$ 上指定的值. 能使三维空间度规成为对角线形式的局域坐标变换的存在从而得到确认.

回到对适合于非定常态、轴对称时空的度规的考虑, 按照已建立的定理, 可设

$$g^{02} = g^{03} = g^{23} = 0. \tag{35}$$

并将对角线系数写成形式

$$g^{00} = e^{-2\nu}, \quad g^{22} = -e^{-2\mu_2}, \quad \text{和} \quad g^{33} = -e^{-2\mu_3}, \tag{36}$$

[72] 其中 ν、μ_2 和 μ_3 是 x^0、x^2 和 x^3 的函数. 令 g^{ij} 的其余系数为

和

$$\left.\begin{aligned} g^{01} &= \omega e^{-2\nu}, \quad g^{12} = -q_2 e^{-2\mu_2}, \quad g^{13} = -q_3 e^{-2\mu_3} \\ g^{11} &= \omega^2 e^{-2\nu} - e^{-2\psi} - q_2^2 e^{-2\mu_2} - q_3^2 e^{-2\mu_3}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

其中 ω、q_2、q_3 和 ψ 是 x^0、x^2 和 x^3 的函数.

有了以已描述方式选择的度规逆变形式, 度规的协变形式是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - q_2 \mathrm{d}x^2 - q_3 \mathrm{d}x^3 - \omega \mathrm{d}t)^2 \\ & - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2. \end{aligned} \tag{38}$$

与度规 (17) 的比较表明, 度规 (38) 在一定意义上是将前者自然地推广到允许非定常态. 而且必须注意, 现在没有那个对定常态度规 (17) 曾有的规范自由度来给 μ_2 和 μ_3 附加任何坐标条件.

所选的度规形式 (38) 包含 7 个函数, 即 ν、ψ、μ_2、μ_3、ω、q_2 和 q_3. 另一方面, 由于爱因斯坦方程是协变的并只提供度规系数的 6 个独立方程, 所以必定是这 7 个函数只以 6 个独立组合存在于场方程中. 至于这怎样才能发生, 可由考虑下列坐标变换来推断,

$$x^1 = x^{1'} + f(x^{0'}, x^{2'}, x^{3'}) \quad 和 \quad x^i = x^{i'} \quad (i = 0, 2, 3). \tag{39}$$

在这种变换下, 只有度规系数 g_{i1} $(i = 0, 2, 3)$ 会改变, 即有

$$g_{i'1'} = g_{i1} + g_{11} f_{,i} \quad 或 \quad (g_{i'1'} - g_{i1})/g_{11} = f_{,i} \quad (i = 0, 2, 3). \tag{40}$$

由这些关系的可积条件, 可得

$$\omega_{,2} - q_{2,0}, \quad \omega_{,3} - q_{3,0}, \quad 和 \quad q_{2,3} - q_{3,2}, \tag{41}$$

对变换 (39) 是不变的. 将要验证的事实是, 函数 ω、q_2 和 q_3 只以组合 (41) 存在于场方程中. 但组合 (41) 之间有等式,

$$(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,3} - (\omega_{,3} - q_{3,0})_{,2} + (q_{2,3} - q_{3,2})_{,0} = 0. \tag{42}$$

以这样的方式, 已用来表示度规系数的 7 个函数, 只作为 6 个独立量存在于场方程中 (如已指明的).

对非定常态、轴对称时空导出的度规形式 (38) 能运用于一类这样的非轴对称时空, 其度规系数对变量 x^1 $(= \varphi)$ 可分离, 即

$$g^{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) = g^{ij}(x^0, x^2, x^3) h(x^1), \tag{43}$$ [73]

其中 h (x^1) 是 x^1 的某个函数. 因为在这种情况很清楚, 由一个只涉及 x^0、x^2 和 x^3 而保持 x^1 不变的坐标变换, 能使 g^{02}、g^{03} 和 g^{23} 为零, 而在方程 (43) 中出现的共同因子 h (x^1) 当然并不带来任何差异. 为允许这种可能的推广, 现将 ν、ψ、μ_2、μ_3、q_2、q_3 和 ω 这 7 个函数形式上设为也是 x^1 的函数. 后面的章节里将表明, 这种形式的度规具有所需的灵活性和普遍性, 来包含方程和适合于度规 (38) 的表示所应用的所有情况, 而度规系数被允许是所有 4 个变量 x^0、x^1、x^2 和 x^3 的函数. 还必须指出, 即使有了这样的推广, 用以表示度规系数的 7 个函数在场方程中仍只以 6 个独立组合存在 (见§13 和§14).

本章以下各节将给出必须与所选度规形式连同使用的基本表示和方程.

13. 结构方程和黎曼张量的分量

为了对§12 所选择的最普遍度规形式写出爱因斯坦方程的明晰形式, 需要通过嘉当结构方程得出黎曼张量的分量. 在推导相关方程时, 可由下式来保持最大的对称性,

$$\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\mathrm{d}x^4, \quad \partial_t = \mathrm{i}\partial_4, \quad \nu = \mu_4, \quad \text{和} \quad \omega = \mathrm{i}q_4. \tag{44}$$

于是度规 (38) 成为

$$\mathrm{d}s^2 = -\sum_A e^{2\mu_A}(\mathrm{d}x^A)^2 - e^{2\psi}\left(\mathrm{d}x^1 - \sum_A q_A \mathrm{d}x^A\right)^2, \tag{45}$$

其中大写拉丁指标 $(A, B, \cdots)$ 以及对它们的求和都限于值 2、3 和 4. (45) 形式的度规对指标 2、3 和 4 是完全对称的. 但必须注意, 在这个复杂的版本里, 记号是 (–, –, –, –). 还应记得, ψ、μ_A 和 q_A 是所有 4 个变量 x^1 和 x^A $(A = 2、3、4)$ 的函数.

为避免混淆, 不采取对一个重复大写拉丁指标 (限于其范围) 的求和, 需要求和的时候将明确指出 (如在方程 (45) 中).

在运用嘉当方法时, 取

$$\omega^A = e^{\mu_A}\mathrm{d}x^A \quad \text{和} \quad \omega^1 = e^{\psi}\left(\mathrm{d}x^1 - \sum_A q_A \mathrm{d}x^A\right) \tag{46}$$

[74] 作为一次型的基 (在第 1 章§5 中记为 e^i). 这对应于选择一个记号为 (–, –, –, –) 的正交四次标架. 用 ω^A 和 ω^1 来表示一次型 $\mathrm{d}x^A$ 和 $\mathrm{d}x^1$ 的反关系是

$$\mathrm{d}x^A = e^{-\mu_A}\omega^A \quad \text{和} \quad \mathrm{d}x^1 = e^{-\psi}\omega^1 + \sum_A e^{-\mu_A} q_A \omega^A. \tag{47}$$

推导嘉当结构方程 (第 1 章方程 (137) 和 (149)) 的第一步是用二次型的基, 即 $\omega^i \wedge \omega^j (i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4)$, 来表示 ω 的外部导数. 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^A &= \sum_B e^{\mu_A}\mu_{A,B}\mathrm{d}x^B \wedge \mathrm{d}x^A + e^{\mu_A}\mu_{A,1}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^A \\
&= \sum_B e^{-\mu_B}\mu_{A,B}\omega^B \wedge \omega^A + \mu_{A,1}\left[e^{-\psi}\omega^1 + \sum_B e^{-\mu_B} q_B \omega^B\right] \wedge \omega^A \\
&= \sum_B e^{-\mu_B}(\mu_{A,B} + q_B\mu_{A,1})\omega^B \wedge \omega^A + e^{-\psi}\mu_{A,1}\omega^1 \wedge \omega^A.
\end{aligned} \tag{48}$$

为更紧凑地书写如上的方程, 便利的做法是定义函数 $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ 对 x^A $(A = 2、3、4)$ 的冒号导数,

$$f_{:A} = f_{,A} + q_A f_{,1}. \tag{49}$$

它是一个导数, 因为它符合莱布尼兹定则:

$$(fg)_{:A} = fg_{:A} + gf_{:A}. \tag{50}$$

用这种标志法, 方程 (48) 成为

$$\mathrm{d}\omega^A = -\sum_B e^{-\mu_B}\mu_{A:B}\omega^A \wedge \omega^B - e^{-\psi}\mu_{A,1}\omega^A \wedge \omega^1. \tag{51}$$

类似地, 有

$$\mathrm{d}\omega^1 = \sum_A e^{-\mu_A}(\psi_{:A} + q_{A,1})\omega^A \wedge \omega^1 - \sum_{A,B} e^{\psi-\mu_A-\mu_B} q_{B:A}\omega^A \wedge \omega^B. \tag{52}$$

现在, 当扭率为零时, 嘉当第一结构方程 (第 1 章方程 (137)) 给出

$$\mathrm{d}\omega^1 = -\sum_A \omega^1{}_A \wedge \omega^A \tag{53}$$

和

$$\mathrm{d}\omega^A = -\sum_B \omega^A{}_B \wedge \omega^B - \omega^A{}_1 \wedge \omega^1; \tag{54}$$

这些方程由对 $\mathrm{d}\omega^1$ 和 $\mathrm{d}\omega^A$ 的知识来确定联络一次型 $\omega^1{}_A$ 和 $\omega^A{}_B$. 另外, 由于 [75]
一次型 ω^1 和 ω^A 提供了正交四次标架的基, 由第 1 章方程 (197) 可得

$$\omega^i{}_j = -\omega^j{}_i \quad (i, j = 1, 2, 3, 4). \tag{55}$$

由对方程 (51) 和 (52) 与方程 (53) 和 (54) 的比较, 得出结论

$$\begin{aligned}\omega^1{}_A = -\omega^A{}_1 = {} & e^{-\mu_A}(\psi_{:A} + q_{A,1})\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{A,1}\omega^A \\ & + \frac{1}{2}\sum_B e^{\psi-\mu_A-\mu_B} Q_{AB}\omega^B\end{aligned} \tag{56}$$

和

$$\omega^A{}_B = -\omega^B{}_A = -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_A-\mu_B}Q_{AB}\omega^1 + e^{-\mu_B}\mu_{A:B}\omega^A - e^{-\mu_A}\mu_{B:A}\omega^B, \tag{57}$$

其中

$$Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}. \tag{58}$$

现在, 令

$$\Psi_A = \psi_{:A} + q_{A,1}, \tag{59}$$

就有对不同联络型的清晰表示,

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_2 &= e^{-\mu_2}\Psi_2\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{2,1}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\omega^4,\\
\omega^1{}_3 &= e^{-\mu_3}\Psi_3\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{3,1}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_2}Q_{32}\omega^2,\\
\omega^1{}_4 &= e^{-\mu_4}\Psi_4\omega^1 - e^{-\psi}\mu_{4,1}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_3}Q_{43}\omega^3,\\
\omega^2{}_3 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^1 + e^{-\mu_3}\mu_{2:3}\omega^2 - e^{-\mu_2}\mu_{3:2}\omega^3,\\
\omega^3{}_4 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\omega^1 + e^{-\mu_4}\mu_{3:4}\omega^3 - e^{-\mu_3}\mu_{4:3}\omega^4,\\
\omega^4{}_2 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_4-\mu_2}Q_{42}\omega^1 + e^{-\mu_2}\mu_{4:2}\omega^4 - e^{-\mu_4}\mu_{2:4}\omega^2.
\end{aligned} \tag{60}$$

为从嘉当第二结构方程, 即

$$\frac{1}{2}R^i{}_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l = \Omega^i{}_j = \mathrm{d}\omega^i{}_j + \omega^i{}_k\wedge\omega^k{}_j, \tag{61}$$

得出黎曼张量的分量, 必须计算方程 (60) 中所列联络型的外部导数. (其实将会看到, 通过考虑度规对指标 2、3 和 4 的基本对称性, 可以仅由例如 $\Omega^1{}_2$ 和 $\Omega^2{}_3$ 的知识写出黎曼张量的所有分量.)

所需的 $\omega^i{}_j$ 的外部导数能借助于下列容易验证的引理来得出.

[76] **引理** 若 F 是 x^1、x^2、x^3 和 x^4 的任何函数, 于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F\omega^1) = &\sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathscr{D}_A(Fe^{\psi})\omega^A\wedge\omega^1\\
&+\frac{1}{2}\sum_{A,B}Fe^{\psi-\mu_A-\mu_B}Q_{AB}\omega^A\wedge\omega^B,
\end{aligned} \tag{62}$$

和

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F\omega^A) = &\sum_B e^{-\mu_A-\mu_B}(e^{\mu_A}F)_{:B}\omega^B\wedge\omega^A\\
&+e^{-\psi-\mu_A}(e^{\mu_A}F)_{,1}\omega^1\wedge\omega^A,
\end{aligned} \tag{63}$$

其中 $\mathscr{D}_A$ 是一个算符, 作用在任何函数 $f\,(x^1,\cdots,x^4)$ 上给出

$$\mathscr{D}_A f = f_{:A} + q_{A,1}f = f_{,A} + (q_A f)_{,1}. \tag{64}$$

(注意 $\mathscr{D}_A$ 不是导数, 而且 (见方程 (59))

$$e^{-\psi}\mathscr{D}_A(e^{\psi}) = \psi_{:A} + q_{A,1} = \Psi_A. \tag{65}$$

现在运用上述引理连同联络型 (60), 得出

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^1{}_2 = &\sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathscr{D}_A(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)\omega^A\wedge\omega^1 - e^{-\psi-\mu_2}(e^{\mu_2-\psi}\mu_{2,1})_{,1}\omega^1\wedge\omega^2\\
&-\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{,1}\omega^3\wedge\omega^1 - \frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{,1}\omega^4\wedge\omega^1\\
&+\omega^2\wedge\omega^3\{e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}\Psi_2Q_{23} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:2}\\
&+e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2,1})_{:3}\}\\
&+\omega^2\wedge\omega^4\{e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}\Psi_2Q_{24} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:2}\\
&+e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2,1})_{:4}\}\\
&+\omega^3\wedge\omega^4\{e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}\Psi_2Q_{34} + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:3}\\
&-\frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:4}\},
\end{aligned}\tag{66}$$

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_3\wedge\omega^2{}_3 = &\left[e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3} - \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2\right]\omega^1\wedge\omega^2\\
&-\left[e^{-\mu_2-\mu_3}\Psi_3\mu_{3:2} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}\mu_{3,1}Q_{23}\right]\omega^1\wedge\omega^3\\
&+\left[\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}\mu_{3:2} + e^{-\psi-\mu_3}\mu_{3,1}\mu_{2:3}\right]\omega^2\wedge\omega^3\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4}Q_{34}Q_{23}\omega^1\wedge\omega^4 - \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{2:3}\omega^2\wedge\omega^4\\
&+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{3:2}\omega^3\wedge\omega^4,
\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_4\wedge\omega^2{}_4 = &[e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4} - \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}Q_{24}^2]\omega^1\wedge\omega^2\\
&-\left[e^{-\mu_2-\mu_4}\Psi_4\mu_{4:2} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}\mu_{4,1}Q_{24}\right]\omega^1\wedge\omega^4\\
&+\left[\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{4:2} + e^{-\psi-\mu_4}\mu_{4,1}\mu_{2:4}\right]\omega^2\wedge\omega^4\\
&-\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_3}Q_{43}\mu_{2:4}\omega^2\wedge\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{43}\mu_{4:2}\omega^4\wedge\omega^3\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3}Q_{43}Q_{24}\omega^1\wedge\omega^3;
\end{aligned}\tag{68}$$

和 [77]

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega^2{}_3 = &-\frac{1}{2}\sum_A e^{-\psi-\mu_A}\mathscr{D}_A(e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23})\omega^A\wedge\omega^1\\
&-e^{-\psi-\mu_2}(e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2:3})_{,1}\omega^2\wedge\omega^1 + e^{-\psi-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2})_{,1}\omega^3\wedge\omega^1\\
&+\omega^2\wedge\omega^3\Big\{-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2:3})_{:3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-e^{-\mu_2-\mu_3}\left(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2}\right)_{:2}\Big\}\\
&+\omega^2\wedge\omega^4\left\{-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{24}-e^{-\mu_2-\mu_4}\left(e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2:3}\right)_{:4}\right\}\\
&+\omega^3\wedge\omega^4\left\{-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4}Q_{23}Q_{34}+e^{-\mu_3-\mu_4}\left(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2}\right)_{:4}\right\},
\end{aligned}
\tag{69}
$$

$$
\begin{aligned}
{\omega^1}_2\wedge{\omega^1}_3=&\left[\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}\Psi_2Q_{34}-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}\Psi_3Q_{24}\right]\omega^1\wedge\omega^4\\
&+\left[\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}\Psi_2Q_{32}+e^{-\psi-\mu_3}\Psi_3\mu_{2,1}\right]\omega^1\wedge\omega^2\\
&+\left[-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_3}\Psi_3Q_{23}-e^{-\psi-\mu_2}\Psi_2\mu_{3,1}\right]\omega^1\wedge\omega^3\\
&+\left[\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2+e^{-2\psi}\mu_{2,1}\mu_{3,1}\right]\omega^2\wedge\omega^3\\
&+\left[\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{24}Q_{23}-\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{2,1}\right]\omega^2\wedge\omega^4\\
&+\left[\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4}Q_{23}Q_{34}+\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{3,1}\right]\omega^3\wedge\omega^4,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

$$
\begin{aligned}
{\omega^3}_4\wedge{\omega^4}_2=&\left[-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{4:2}-\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{42}\mu_{4:3}\right]\omega^1\wedge\omega^4\\
&+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-2\mu_4}Q_{34}\mu_{2:4}\omega^1\wedge\omega^2+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_2}Q_{42}\mu_{3:4}\omega^1\wedge\omega^3\\
&+e^{-2\mu_4}\mu_{3:4}\mu_{2:4}\omega^2\wedge\omega^3-e^{-\mu_3-\mu_4}\mu_{4:3}\mu_{2:4}\omega^2\wedge\omega^4\\
&+e^{-\mu_2-\mu_4}\mu_{3:4}\mu_{4:2}\omega^3\wedge\omega^4.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

现在 (见方程 (55) 和 (61))

$$
\frac{1}{2}R^1{}_{2kl}\omega^k\wedge\omega^l=\Omega^1{}_2=\mathrm{d}\omega^1{}_2-\omega^1{}_3\wedge\omega^2{}_3-\omega^1{}_4\wedge\omega^2{}_4.
\tag{72}
$$

所以, 按照上面对 $\Omega^1{}_2$ 的表示将方程 (66)、(67) 和 (68) 结合, 就能由简单地采集 $\omega^k\wedge\omega^l$ 的系数而读出黎曼张量 $R^1{}_{2kl}$ 的分量. 于是, $\Omega^1{}_2$ 中 $\omega^1\wedge\omega^2$ 的系数 $R^1{}_{212}$ 就由下式给出,

$$
\begin{aligned}
R^1{}_{212}=&-e^{-\psi-\mu_2}\mathscr{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)-e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3}-e^{-\psi-\mu_2}\left(e^{\mu_2-\psi}\mu_{2,1}\right)_{,1}\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}Q_{24}^2-e^{-2\mu_4}\psi_4\mu_{2:4};
\end{aligned}
\tag{73}
$$

[78] 再降低指标, 就能得到下面方程 (75) 中的 (a); 而 (g)、(j) 和 (s) 类似地是 Ω^1_2 中 $\omega^1\wedge\omega^3$、$\omega^2\wedge\omega^3$ 和 $\omega^3\wedge\omega^4$ 的系数. 以同样的方式, 方程 (d) 和 (p) 能由按

照以下定义将方程 (69)、(70) 和 (71) 结合而得到,

$$\frac{1}{2}R^2{}_{3kl}\omega^k\wedge\omega^l=\Omega^2{}_3=\mathrm{d}\omega^2{}_3-\omega^1{}_2\wedge\omega^1{}_3-\omega^3{}_4\wedge\omega^4{}_2. \tag{74}$$

利用对指标 (2)、(3) 和 (4) 的基本对称性来适当地排列方程 (a)、(d)、(j)、(p) 和 (s) 中的指标, 就能得到黎曼张量的其余分量.

$$\begin{aligned}
-R_{1212}=&-e^{-\psi-\mu_2}\mathscr{D}_2(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)-e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{2:3}-e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{2:4}\\
&-e^{-\psi-\mu_2}(e^{\mu_2-\psi}\mu_{2,1})_{,1}+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2}[e^{-2\mu_3}Q_{23}^2+e^{-2\mu_4}Q_{24}^2]; \qquad \text{(a)}\\
-R_{1313}=&-e^{-\psi-\mu_3}\mathscr{D}_3(e^{\psi-\mu_3}\Psi_3)-e^{-2\mu_2}\Psi_2\mu_{3:2}-e^{-2\mu_4}\Psi_4\mu_{3:4}\\
&-e^{-\psi-\mu_3}(e^{\mu_3-\psi}\mu_{3,1})_{,1}+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3}[e^{-2\mu_2}Q_{23}^2+e^{-2\mu_4}Q_{34}^2]; \qquad \text{(b)}\\
-R_{1414}=&-e^{-\psi-\mu_4}\mathscr{D}_4(e^{\psi-\mu_4}\Psi_4)-e^{-2\mu_2}\Psi_2\mu_{4:2}-e^{-2\mu_3}\Psi_3\mu_{4:3}\\
&-e^{-\psi-\mu_4}(e^{\mu_4-\psi}\mu_{4,1})_{,1}+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4}[e^{-2\mu_2}Q_{24}^2+e^{-2\mu_3}Q_{34}^2]; \qquad \text{(c)}\\
-R_{2323}=&-e^{-\mu_2-\mu_3}[(e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2:3})_{:3}+(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2})_{:2}]-e^{-2\mu_4}\mu_{3:4}\mu_{2:4}\\
&-\frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2-e^{-2\psi}\mu_{2,1}\mu_{3,1}; \qquad \text{(d)}\\
-R_{2424}=&-e^{-\mu_2-\mu_4}[(e^{\mu_2-\mu_4}\mu_{2:4})_{:4}+(e^{\mu_4-\mu_2}\mu_{4:2})_{:2}]-e^{-2\mu_3}\mu_{4:3}\mu_{2:3}\\
&-\frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}Q_{24}^2-e^{-2\psi}\mu_{2,1}\mu_{4,1}; \qquad \text{(e)}\\
-R_{3434}=&-e^{-\mu_3-\mu_4}[(e^{\mu_3-\mu_4}\mu_{3:4})_{:4}+(e^{\mu_4-\mu_3}\mu_{4:3})_{:3}]-e^{-2\mu_2}\mu_{4:2}\mu_{3:2}\\
&-\frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_4}Q_{34}^2-e^{-2\psi}\mu_{3,1}\mu_{4,1}; \qquad \text{(f)}\\
-R_{1213}=&-e^{-\psi-\mu_3}\mathscr{D}_3(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)+e^{-\mu_2-\mu_3}\Psi_3\mu_{3:2}\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4-\mu_2-\mu_3}Q_{43}Q_{42}\\
&+\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}[Q_{23,1}+Q_{23}(\mu_3-\mu_2+\psi)_{,1}]; \qquad \text{(g)}\\
-R_{1214}=&-e^{-\psi-\mu_4}\mathscr{D}_4(e^{\psi-\mu_2}\Psi_2)+e^{-\mu_2-\mu_4}\Psi_4\mu_{4:2}\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-\mu_2-\mu_4}Q_{34}Q_{32}\\
&+\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}[Q_{24,1}+Q_{24}(\mu_4-\mu_2+\psi)_{,1}]; \qquad \text{(h)}\\
-R_{1314}=&-e^{-\psi-\mu_4}\mathscr{D}_4(e^{\psi-\mu_3}\Psi_3)+e^{-\mu_3-\mu_4}\Psi_4\mu_{4:3}\\
&+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{24}Q_{23}\\
&+\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}[Q_{34,1}+Q_{34}(\mu_4-\mu_3+\psi)_{,1}]; \qquad \text{(i)}
\end{aligned}$$

$$-R_{1223} = e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}\left(\Psi_2 - \frac{1}{2}\mu_{3:2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:2}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_3}Q_{43}\mu_{2:4}$$
[79]
$$+e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2,1})_{:3} - e^{-\psi-\mu_3}\mu_{3,1}\mu_{2:3}; \tag{j}$$
$$-R_{1224} = e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}Q_{24}\left(\Psi_2 - \frac{1}{2}\mu_{4:2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:2}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{2:3}$$
$$+e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{-\psi+\mu_2}\mu_{2,1})_{:4} - e^{-\psi-\mu_4}\mu_{4,1}\mu_{2:4}; \tag{k}$$
$$-R_{1334} = e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{34}\left(\Psi_3 - \frac{1}{2}\mu_{4:3}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{\psi-\mu_3}Q_{34})_{:3}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{3:2}$$
$$+e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{-\psi+\mu_3}\mu_{3,1})_{:4} - e^{-\psi-\mu_4}\mu_{4,1}\mu_{3:4}; \tag{l}$$
$$-R_{1332} = e^{\psi-2\mu_3-\mu_2}Q_{32}\left(\Psi_3 - \frac{1}{2}\mu_{2:3}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\psi-\mu_3}Q_{32})_{:3}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_2}Q_{42}\mu_{3:4}$$
$$+e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_3}\mu_{3,1})_{:2} - e^{-\psi-\mu_2}\mu_{2,1}\mu_{3:2}; \tag{m}$$
$$-R_{1442} = e^{\psi-2\mu_4-\mu_2}Q_{42}\left(\Psi_4 - \frac{1}{2}\mu_{2:4}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_2}(e^{\psi-\mu_4}Q_{42})_{:4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_2}Q_{32}\mu_{4:3}$$
$$+e^{-\mu_4-\mu_2}(e^{-\psi+\mu_4}\mu_{4,1})_{:2} - e^{-\psi-\mu_2}\mu_{2,1}\mu_{4:2}; \tag{n}$$
$$-R_{1443} = e^{\psi-2\mu_4-\mu_3}Q_{43}\left(\Psi_4 - \frac{1}{2}\mu_{3:4}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_3}(e^{\psi-\mu_4}Q_{43})_{:4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}\mu_{4:2}$$
$$+e^{-\mu_4-\mu_3}(e^{-\psi+\mu_4}\mu_{4,1})_{:3} - e^{-\psi-\mu_3}\mu_{3,1}\mu_{4:3}; \tag{o}$$
$$-R_{2334} = e^{-\mu_2-\mu_4}[\mu_{3:2:4} + \mu_{3:2}(\mu_3-\mu_2)_{:4} - \mu_{3:4}\mu_{4:2}]$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{34} - \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{3,1}; \tag{p}$$
$$-R_{3224} = e^{-\mu_3-\mu_4}[\mu_{2:3:4} + \mu_{2:3}(\mu_2-\mu_3)_{:4} - \mu_{2:4}\mu_{4:3}]$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_3-2\mu_2-\mu_4}Q_{32}Q_{24} - \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}Q_{34}\mu_{2,1}; \tag{q}$$
$$-R_{3442} = e^{-\mu_3-\mu_2}[\mu_{4:3:2} + \mu_{4:3}(\mu_4-\mu_3)_{:2} - \mu_{4:2}\mu_{2:3}]$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_3-2\mu_4-\mu_2}Q_{34}Q_{42} - \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_2}Q_{32}\mu_{4,1}; \tag{r}$$

$$-R_{1234} = \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}[(e^{\psi-\mu_2}Q_{24})_{:3} - (e^{\psi-\mu_2}Q_{23})_{:4}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{34}(2\Psi_2 - \mu_{3:2} - \mu_{4:2}); \qquad \text{(s)}$$
$$-R_{1423} = \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}[(e^{\psi-\mu_4}Q_{43})_{:2} - (e^{\psi-\mu_4}Q_{42})_{:3}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{23}(2\Psi_4 - \mu_{2:4} - \mu_{3:4}); \qquad \text{(t)}$$
$$-R_{1342} = \frac{1}{2}e^{-\mu_4-\mu_2}[(e^{\psi-\mu_3}Q_{32})_{:4} - (e^{\psi-\mu_3}Q_{34})_{:2}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{42}(2\Psi_3 - \mu_{4:3} - \mu_{2:3}). \qquad \text{(u)}$$

(75)

需要注意, 通过以不同顺序来排列指标 2、3 和 4, 能得出黎曼张量 (由于其对称性) 同一个分量的形式上不同的表示. 例如, 如 $\Omega^2{}_3$ 的定义所要求的, 由结合方程 (68)、(70) 和 (71) 可得 $\omega^1 \wedge \omega^3$ 的系数 [80]

$$-R_{2313} = \frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_3}\mathscr{D}_3(e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}) - e^{-\psi-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3:2})_{,1}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_3}\Psi_3 Q_{23} + e^{-\psi-\mu_2}\Psi_2\mu_{3,1} - \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_4-\mu_2}Q_{42}\mu_{3:4}. \qquad (76)$$

并不能明显看出, 除了符号外, 这个 R_{2313} 的表示与方程 (75, m) 中 R_{1332} 的表示是一样的. 但是, 展开这两个表示就能验证, 只要正确使用冒号导数和算符 $\mathscr{D}_A$ 的定义, 事实上它们如所要求是一样的. 其它类似等同性的确认并不总是易事, 因为常常要依靠如下式这样并不显然的等式:

$$Q_{[23:4]} - Q_{[23q_4],1} = 0. \qquad (77)$$

转到里奇张量和爱因斯坦张量的分量, 它们能由适当地组合黎曼张量的分量来得到, 即有,

$$\left.\begin{aligned} -R_{11} &= R_{1212} + R_{1313} + R_{1414}, \text{等}, \\ +R_{12} &= +G_{12} = R_{1332} + R_{1442}, \text{等}, \\ -\frac{1}{2}R &= R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} + R_{2323} + R_{2424} + R_{3434}, \\ \text{和} \qquad G_{11} &= R_{2323} + R_{2424} + R_{3434}, \text{等}. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

这里不拟明晰地写出这些表示, 但在后继章节里将有机会遇到其不同的具体情形.

最后注意, 可以由下列对应关系从 (复数) 坐标 x^4 回复到 (实数) 时空坐标 x^0 $(= t)$,

$$-\mathrm{i}^4 \to^0; \quad {}_{,4} \to -\mathrm{i}_{,0}; \quad \mu_4 \to \nu; \quad \text{和} \quad q_4 \to -\mathrm{i}\omega. \qquad (79)$$

14. 四次标架和旋转系数

如同§15 中得出麦克斯韦方程的明晰形式那样, 在一定情况下将四次形式运用到具有 §12 中所选度规的时空是便利的. 对于这样的运用, 关于适当四次标架中里奇旋转系数的知识当然是必不可少的. 这里选择的四次标架是§13 中使用的具有记号 (–, –, –, –) 的复数标架的具有记号 (+, –, –, –) 的实数版本.. 为所选正交标架提供基的协变矢量很清楚地是 (见方程 (18) 和 (19))

[81]

$$\begin{aligned} e_{(0)i} &= (e^{\nu} \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(1)i} &= (\omega e^{\psi} \ , -e^{\psi} \ , \ q_2 e^{\psi} \ , \ q_3 e^{\psi}), \\ e_{(2)i} &= (0 \ \ , \ 0 \ , -e^{\mu_2} \ , \ 0), \\ e_{(3)i} &= (0 \ \ , \ 0 \ , \ 0 \ \ , -e^{\mu_3}). \end{aligned} \tag{80}$$

对应的逆变矢量是

$$\begin{aligned} e_{(0)}{}^{i} &= (e^{-\nu} \ , \ \omega e^{-\nu} \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(1)}{}^{i} &= (0 \ \ , \ e^{-\psi} \ , \ 0 \ , \ 0), \\ e_{(2)}{}^{i} &= (0 \ \ , q_2 e^{-\mu_2} , e^{-\mu_2} , \ 0), \\ e_{(3)}{}^{i} &= (0 \ \ , q_3 e^{-\mu_3} , \ 0 \ \ , e^{-\mu_3}). \end{aligned} \tag{81}$$

如在第 1 章§8 (b) 中说明的, 计算旋转系数的最便利方法是通过符号 (第 1 章方程 (266))

$$\lambda_{(a)(b)(c)} = e_{(a)}{}^{i}[e_{(b)i,j} - e_{(b)j,i}]e_{(c)}{}^{j}. \tag{82}$$

这些符号的计算是直截了当的. 结果可由§13 中引入的 “冒号导数” 记法来表示为紧凑形式. 但是, 由于不希望引入虚数坐标 $x^4 = \mathrm{i}x^0$, 这里将大写拉丁字母 (A、B 等等) 限制为指标 0、2 和 3. 并记

$$q_0 = \omega. \tag{83}$$

定义 (1) 函数 $f(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 对 $x^A (A = 0, 2, 3)$ 的冒号导数是

$$f_{:A} = f_{,A} + q_A f_{,1}. \tag{84}$$

(2) 作用于 $f(x^0, x^1, x^2, x^4)$ 的算符 $\mathscr{D}_A$ 给出

$$\mathscr{D}_A f = f_{:A} + q_{A,1} f = f_{,A} + (q_A f)_{,1}, \tag{85}$$

(3)

$$Q_{AB} = q_{A:B} - q_{B:A}, \tag{86}$$

和

(4)

$$\Psi_A = \psi_{:A} + q_{A,1} = e^{-\psi}\mathscr{D}_A(e^{\psi}). \tag{87}$$

值得注意, 这里冒号导数简单地与沿正切矢量 $e_{(0)}$ 的方向导数直接关联, 即有

$$e_{(0)}f = e^{-\nu}f_{:0}, \quad e_{(2)}f = e^{-\mu_2}f_{:2}, \quad e_{(3)}f = e^{-\mu_3}f_{:3}$$

和

$$e_{(1)}f = e^{-\psi}f_{,1}. \tag{88}$$

由以上定义得出 λ 符号的值如下: [82]

$$\begin{aligned}
&\lambda_{100} = -\nu_{,1}e^{-\psi}, \quad \lambda_{110} = -\Psi_0 e^{-\nu}, \quad \lambda_{223} = -\mu_{2:3}e^{-\mu_3},\\
&\lambda_{200} = -\nu_{:2}e^{-\mu_2}, \quad \lambda_{112} = -\Psi_2 e^{-\mu_2}, \quad \lambda_{233} = +\mu_{3:2}e^{-\mu_2},\\
&\lambda_{300} = -\nu_{:3}e^{-\mu_3}, \quad \lambda_{113} = -\Psi_3 e^{-\mu_3}, \quad \lambda_{210} = Q_{20}e^{\psi-\mu_2-\nu},\\
&\lambda_{122} = \mu_{2,1}e^{-\psi}, \quad \lambda_{220} = -\mu_{2:0}e^{-\nu}, \quad \lambda_{310} = Q_{30}e^{\psi-\mu_3-\nu},\\
&\lambda_{133} = \mu_{3,1}e^{-\psi}, \quad \lambda_{330} = -\mu_{3:0}e^{-\nu}, \quad \lambda_{213} = Q_{23}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}.
\end{aligned} \tag{89}$$

旋转系数 $\gamma_{(a)(b)(c)}$ 现在用 $\lambda_{(a)(b)(c)}$ 按下式决定 (见第 1 章, 方程 (268)),

$$\gamma_{(a)(b)(c)} = \frac{1}{2}[\lambda_{(a)(b)(c)} + \lambda_{(c)(a)(b)} - \lambda_{(b)(c)(a)}]. \tag{90}$$

得出:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{100} = -\nu_{,1}e^{-\psi}, \quad \gamma_{101} = -\Psi_0 e^{-\nu},\\
&\gamma_{200} = -\nu_{:2}e^{-\mu_2}, \quad \gamma_{121} = -\Psi_2 e^{-\mu_2},\\
&\gamma_{300} = -\nu_{:3}e^{-\mu_3}, \quad \gamma_{131} = -\Psi_3 e^{-\mu_3},\\
&\gamma_{122} = \mu_{2,1}e^{-\psi}, \quad \gamma_{202} = -\mu_{2:0}e^{-\nu},\\
&\gamma_{133} = \mu_{3,1}e^{-\psi}, \quad \gamma_{303} = -\mu_{3:0}e^{-\nu},\\
&\gamma_{233} = \mu_{3:2}e^{-\mu_2}, \quad \gamma_{232} = -\mu_{2:3}e^{-\mu_3},\\
&\gamma_{102} = \gamma_{201} = -\gamma_{120} = \frac{1}{2}Q_{20}e^{\psi-\mu_2-\nu},\\
&\gamma_{103} = \gamma_{301} = -\gamma_{130} = \frac{1}{2}Q_{30}e^{\psi-\mu_3-\nu},\\
&\gamma_{132} = \gamma_{231} = -\gamma_{123} = \frac{1}{2}Q_{23}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}.
\end{aligned} \tag{91}$$

15. 麦克斯韦方程

本章以导出有着所选度规的时空中的麦克斯韦方程来结束. 最方便的推导是在§14 的四次标架里进行.

麦克斯韦方程,

$$\eta^{(n)(m)}F_{(a)(n)|(m)} = 0 \quad \text{和} \quad F_{[(a)(b)|(c)]} = 0, \tag{92}$$

在§14 的正交标架里变成

$$\begin{aligned}
&e^{-\nu}F_{a0:0} - e^{-\psi}F_{a1,1} - e^{-\mu_2}F_{a2:2} - e^{-\mu_3}F_{a3:3} \\
&= -F_{01}(\gamma_{0a1} - \gamma_{1a0}) - F_{02}(\gamma_{0a2} - \gamma_{2a0}) - F_{03}(\gamma_{0a3} - \gamma_{3a0}) \\
&\quad + F_{12}(\gamma_{1a2} - \gamma_{2a1}) + F_{23}(\gamma_{2a3} - \gamma_{3a2}) + F_{31}(\gamma_{3a1} - \gamma_{1a3}) \\
&\quad + F_{a1}(-\gamma_{100} + \gamma_{122} + \gamma_{133}) + F_{a2}(-\gamma_{200} + \gamma_{211} + \gamma_{233}) \\
&\quad + F_{a3}(-\gamma_{300} + \gamma_{311} + \gamma_{322}) + F_{a0}(\gamma_{101} + \gamma_{202} + \gamma_{303})
\end{aligned} \tag{93}$$

[83] 和

$$\begin{aligned}
&F_{[a,b,c]} + \sum_{[a,b,c]}(-\gamma_{0ac}F_{0b} + \gamma_{1ac}F_{1b} + \gamma_{2ac}F_{2b} + \gamma_{3ac}F_{3b} \\
&-\gamma_{0bc}F_{a0} + \gamma_{1bc}F_{a1} + \gamma_{2bc}F_{a2} + \gamma_{3bc}F_{a3}) = 0.
\end{aligned} \tag{94}$$

方程 (93) 左边的特别形式是由这个事实导出的, 即沿逆变基矢 (81) 的方向导数简单地与冒号导数关联 (如方程 (88) 所示).

现在将方程 (91) 给出的旋转系数值代入方程 (93) 和 (94), 经过较长但直截了当的演算后得出以下 8 个方程的组合:

$$\mathscr{D}_3(e^{\psi+\mu_2}F_{12}) - \mathscr{D}_2(e^{\psi+\mu_3}F_{13}) + (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,1} = 0, \tag{a}$$

$$\mathscr{D}_2(e^{\psi+\nu}F_{01}) + \mathscr{D}_0(e^{\psi+\mu_2}F_{12}) - (e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{,1} = 0, \tag{b}$$

$$\mathscr{D}_3(e^{\psi+\nu}F_{01}) + \mathscr{D}_0(e^{\psi+\mu_3}F_{13}) - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{,1} = 0, \tag{c}$$

$$\begin{aligned}
&(e^{\mu_2+\mu_3}F_{01})_{:0} + (e^{\nu+\mu_3}F_{12})_{:2} + (e^{\nu+\mu_2}F_{13})_{:3} \\
&= e^{\psi-\mu_3}F_{02}Q_{02} + e^{\psi+\mu_2}F_{03}Q_{03} - e^{\psi+\nu}F_{23}Q_{23},
\end{aligned} \tag{d}$$

$$\mathscr{D}_2(e^{\psi+\mu_3}F_{02}) + \mathscr{D}_3(e^{\psi+\mu_2}F_{03}) + (e^{\mu_2+\mu_3}F_{01})_{,1} = 0, \tag{e}$$

$$-\mathscr{D}_2(e^{\psi+\nu}F_{23}) + \mathscr{D}_0(e^{\psi+\mu_2}F_{03}) - (e^{\mu_2+\nu}F_{13})_{,1} = 0, \tag{f}$$

$$+\mathscr{D}_3(e^{\psi+\nu}F_{23}) + \mathscr{D}_0(e^{\psi+\mu_3}F_{02}) - (e^{\mu_3+\nu}F_{12})_{,1} = 0, \tag{g}$$

$$\begin{aligned}
&(e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{:3} - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{:2} + (e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{:0} \\
&= e^{\psi+\nu}F_{01}Q_{23} + e^{\psi+\mu_2}F_{12}Q_{03} - e^{\psi+\mu_3}F_{13}Q_{02}.
\end{aligned} \tag{h (95)}$$

以上 8 个方程并不都是线性独立的, 它们也不依赖于下面的容易验证的交换规则:

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{D}_A(f_{,1}) = f_{:A,1}\\ &(\mathscr{D}_A\mathscr{D}_B - \mathscr{D}_B\mathscr{D}_A)f = -(Q_{AB}f)_{,1}.\end{aligned}\right\} \quad \text{和} \tag{96}$$

于是, 将算符 $\mathscr{D}_0$、$-\mathscr{D}_3$ 和 $\mathscr{D}_2$ 分别作用于方程 (a)、(b) 和 (c), 再相加并借助于交换规则予以简化, 可得

$$\begin{aligned}&[-Q_{03}e^{\psi+\mu_2}F_{12} + Q_{02}e^{\psi+\mu_3}F_{13} - Q_{23}e^{\psi+\nu}F_{01}\\ &\quad +(e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{:0} + (e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{:3} - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{:2}]_{,1} = 0.\end{aligned} \tag{97}$$

而由方程 (h) 可见上面这个方程是完全成立的. 类似地, 将算符 $\mathscr{D}_0$、$-\mathscr{D}_3$ 和 $-\mathscr{D}_2$ 分别作用于方程 (e)、(f) 和 (g), 相加并用交换规则 (96) 简化, 所得方程也由于方程 (d) 而完全成立.

现在已有办法对具有度规 (38) 的非定常态、非轴对称时空写出爱因斯坦方程和爱因斯坦 - 麦克斯韦方程的明晰形式.

文献注释 [84]

§11. 看来是 Bardeen 第一个认识到, 这一节所选择的度规形式特别适合于描述定常态轴对称时空:

1. J. M. Bardeen, *Astrophys. J.*, 161, 103-9 (1970).

另见:

2. J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky, ibid., 178, 347-69 (1972).

§12. 关于在三维空间里总能局域地, 即在一个有限的开放领域里, 建立一个曲线坐标的三重正交系的定理 (本书称为科腾 – 达波定理), 虽具有基本性, 却似乎没有在微分几何的任何标准文献里被提及. A. Trautman 教授确实查出, 文献

3. E. Cotton, *Ann. Fac. Sci. Toulouse, Ser.* 2,1, 385-438 (1899) (特别见 p.410)

被作为一个 “例子” 在

4. A. Z. Petrov, *Einstein Spaces*, translated by R. E. Kelleher and J. Woodrow, Pergamon Press, Oxford, 1969. (见 p.44 的例 5)

中引用. 本书把达波的名字加在科腾后面来给定理起名, 是因为科腾的证明是以达波对欧几里得空间情况的证明为模本:

5. G. Darboux, *Lecons sur les Systèmes Orthogonaux et les Coordinnèes Curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1898. 见 pp.1–2

我感谢 Trautman 教授在这些和相关问题上的兴趣和给予的指教.

§13. 黎曼张量对同样形式但在轴对称条件下的度规的四次分量在下列论文中给出:

6. S. Chandrasekhar and J. L. Friedman, *Astrophys. J.*, 175, 379–405 (1972).

§14—§15. 这两节中的分析是对下列论文中所作处理的推广:

7. S. Chandrasekhar and B. C. Xanthopoulos, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 367, 1–14 (1979).

第三章

史瓦西时空

16. 引言

对包含事件视界和在中心的实质性奇点的史瓦西时空的完整理解, 只是在较为近期才达到. 本章将避开通常的历史途径, 而代之以提供一个直指时空基本特征的史瓦西度规的推导 (实质上归功于辛格 (Synge)). 而且, 由于史瓦西时空中的短程线显示了具有事件视界的时空的一些基本性状, 本章也将予以讲述, 或许比严格需要的要更完全. 本章结尾是对纽曼 – 彭罗斯形式的史瓦西时空的描述, 及对其 D 型特征的证明.

17. 史瓦西度规

史瓦西度规是爱因斯坦方程对真空的球对称解. 跟随辛格, 将球对称时空定义为这样的流形, 它是一个单位二维球面 S_2 和一个有着不定度规的二维流形 U_2 的笛卡儿积 $S_2 \times U_2$. 在 S_2 上取通常的极坐标 (θ, φ), 度规是

$$\mathrm{d}\Omega^2 = (\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2 \sin^2\theta. \tag{1}$$

在 U_2 上, 由于其不定度规特征, 零线

$$u = 常数, \quad v = 常数 \tag{2}$$

必定存在, 并将被取为 U_2 上坐标系的基. 这样选择了 S_2 和 U_2 上的坐标后, 就能写出球对称时空度规的最一般形式,

$$\mathrm{d}s^2 = 4f\mathrm{d}u\mathrm{d}v - e^{2\mu_3}[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2 \sin^2\theta], \tag{3}$$

其中 f 和 μ_3 是 u 和 v 的函数.

度规 (3) 能由下列代换而变成第 2 章中考虑的广义度规的一种特别情况,

$$u = \frac{1}{2}(x^0 + x^2) \text{ 和 } v = \frac{1}{2}(x^0 - x^2); \tag{4}$$

[86] 于是度规成为

$$\mathrm{d}s^2 = f[(\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2] - e^{2\mu_3}[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2 \sin^2\theta]. \tag{5}$$

为能直接改写第 2 章的公式, 方便的做法是记

$$f = e^{2\mu_2}, \quad e^{2\psi} = e^{2\mu_3}\sin^2\theta, \quad \mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}\varphi, \quad \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}\theta, \quad \text{和 } \mathrm{d}x^4 = \mathrm{i}\mathrm{d}x^0, \tag{6}$$

度规变成

$$-\mathrm{d}s^2 = e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^4)^2 + e^{2\psi}(\mathrm{d}x^1)^2 + e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 + e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2. \tag{7}$$

度规现在已是第 2 章§13 中的形式, 并有

$$q_2 = q_3 = q_4 = 0, \quad \mu_4 = \mu_2, \quad \text{和 } e^{\psi} = e^{\mu_3}\sin\theta. \tag{8}$$

相应地, 对现在所选的度规有

$$\Psi_4 = \mu_{3,4}, \quad \Psi_2 = \mu_{3,2}, \quad \text{和 } \Psi_3 = \cot\theta, \tag{9}$$

而 μ_2 和 μ_3 只是 x^2 和 x^4 的函数.

现在可以列出第 2 章 (方程 (75)) 所给的黎曼张量在正予考虑的特别情形的分量表.

黎曼张量仅有的非零分量是:

$$\begin{aligned}
-R_{1212} &= -R_{2323} = -e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3,2})_{,2} - e^{-2\mu_2}\mu_{3,4}\mu_{2,4} \\
&= -e^{-2\mu_2}[\mu_{3,2,2} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2} + \mu_{3,4}\mu_{2,4}], && \text{(a)} \\
-R_{1414} &= -R_{3434} = -e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3,4})_{,4} - e^{-2\mu_2}\mu_{3,2}\mu_{2,2} \\
&= -e^{-2\mu_2}[\mu_{3,4,4} + \mu_{3,4}(\mu_3 - \mu_2)_{,4} + \mu_{3,2}\mu_{2,2}], && \text{(b)} \\
-R_{1214} &= +R_{2334} = -e^{-\mu_3-\mu_2}(e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3,2})_{,4} + e^{-2\mu_2}\mu_{3,4}\mu_{2,2} \\
&= -e^{-2\mu_2}[\mu_{3,2,4} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,4} - \mu_{3,4}\mu_{2,2}], && \text{(c)} \\
-R_{1313} &= e^{-2\mu_3} - e^{-2\mu_2}[(\mu_{3,2})^2 + (\mu_{3,4})^2], && \text{(d)} \\
-R_{2424} &= -e^{-2\mu_2}(\mu_{2,4,4} + \mu_{2,2,2}). && \text{(e)}
\end{aligned} \tag{10}$$

场方程现在要求里奇张量的分量为零. 这个条件给出 (见第 2 章方程 (78))

$$-R_{22} = R_{1212} + R_{2323} + R_{2424} = 2R_{1212} + R_{2424} = 0, \tag{11}$$

$$-R_{44} = R_{1414} + R_{2424} + R_{3434} = 2R_{1414} + R_{2424} = 0, \tag{12}$$

$$-R_{11} = R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} = 0, \tag{13}$$

$$-R_{33} = R_{1313} + R_{2323} + R_{3434} = 0; \tag{14}$$

而里奇张量仅有的并不为零的非对角线分量是

$$R_{24} = R_{2114} + R_{2334} = 0. \tag{15}$$

[87]

容易看到方程 (10, b) 和 (11)—(15) 要求

和

$$\left.\begin{aligned} R_{1212} = R_{1414} = -\frac{1}{2}R_{2424} = -\frac{1}{2}R_{1313} \\ R_{2334} = R_{1214} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

回复到时空变量 x^0, 有

和

$$\left.\begin{aligned} R_{1212} = -R_{1010} = \frac{1}{2}R_{2020} = -\frac{1}{2}R_{1313} \\ R_{1210} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned} R_{1212} &= e^{-2\mu_2}[\mu_{3,2,2} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,2} - \mu_{3,0}\mu_{2,0}], && \text{(a)} \\ R_{1010} &= e^{-2\mu_2}[\mu_{3,0,0} + \mu_{3,0}(\mu_3 - \mu_2)_{,0} - \mu_{3,2}\mu_{2,2}], && \text{(b)} \\ R_{1210} &= e^{-2\mu_2}[\mu_{3,2,0} + \mu_{3,2}(\mu_3 - \mu_2)_{,0} - \mu_{3,0}\mu_{2,2}], && \text{(c)} \\ R_{1313} &= -e^{-2\mu_3} + e^{-2\mu_2}[(\mu_{3,2})^2 - (\mu_{3,0})^2], && \text{(d)} \\ R_{2020} &= e^{-2\mu_2}(\mu_{2,0,0} - \mu_{2,2,2}). && \text{(e)} \end{aligned} \tag{18}$$

将方程 (17) 写成组合

$$R_{1212} + R_{1010} = 0, \quad R_{1210} = 0,$$

$$R_{1212} + R_{1313} - R_{1010} = 0, \quad \text{和 } R_{0202} + R_{1313} = 0. \tag{19}$$

将方程 (18) 的黎曼张量分量代入上面的方程, 它们能简化成

$$[(e^{\mu_3})_{,2}e^{-\mu_2}]_{,2} + [(e^{\mu_3})_{,0}e^{-\mu_2})_{,0} + (e^{\mu_3})_{,0}(e^{-\mu_2})_{,0} + (e^{\mu_3})_{,2}(e^{-\mu_2})_{,2} = 0, \tag{20}$$

$$(e^{\mu_3})_{,0,2} - (e^{\mu_3})_{,2}\mu_{2,0} - (e^{\mu_3})_{,0}\mu_{2,2} = 0, \tag{21}$$

$$e^{2\mu_2} + \{e^{\mu_3}(e^{\mu_3})_{,0,0} - e^{\mu_3}(e^{\mu_3})_{,2,2} + [(e^{\mu_3})_{,0}]^2 - [(e^{\mu_3})_{,2}]^2\} = 0, \tag{22}$$

和

$$e^{-2\mu_2}(\mu_{2,0,0}-\mu_{2,2,2})-e^{-2\mu_3}+e^{-2\mu_2-2\mu_3}\{[(e^{\mu_3})_{,2}]^2-[(e^{\mu_3})_{,0}]^2\}=0. \quad (23)$$

回复到变量

$$f=e^{2\mu_2} \text{ 并令 } Z=e^{\mu_3}, \quad (24)$$

能将方程 (20)—(24) 重写为

$$f(Z_{,2,2}+Z_{,0,0})-(Z_{,2}f_{,2}+Z_{,0}f_{,0})=0, \quad (25)$$

[88]

$$2fZ_{,0,2}-(Z_{,2f_{,0}}+Z_{,0}f_{,2})=0, \quad (26)$$

$$f+Z(Z_{,0,0,}-Z_{,2,2})+(Z_{,0})^2-(Z_{,2})^2=0, \quad (27)$$

$$\frac{1}{2f}[(\lg f)_{,0,0}-(\lg f)_{,2,2}]-\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{Z^2 f}[(Z_{,2})^2-(Z_{,0})^2]=0. \quad (28)$$

将方程 (25) 和 (26) 结合给出

$$f(Z_{,0,0}\pm 2Z_{,0,2}+Z_{,2,2})-(Z_{,2}\pm Z_{,0})(f_{,2}\pm f_{,0})=0; \quad (29)$$

而方程 (28) 能借助于方程 (27) 简化为

$$\frac{1}{2}[(\lg f)_{,0,0}-(\lg f)_{,2,2}]+\frac{1}{Z}(Z_{,0,0}-Z_{,2,2})=0 \quad (30)$$

最后, 回复到初始变量 u 和 v, 有方程

$$fZ_{,u,u}-Z_{,u}f_{,u}=0, \quad (31)$$

$$fZ_{,v,v}-Z_{,v}f_{,v}=0, \quad (32)$$

$$f+ZZ_{,u,v}+Z_{,u}Z_{,v}=0, \quad (33)$$

和

$$\frac{1}{2}(\lg f)_{,u,v}+\frac{1}{Z}Z_{,u,v}=0. \quad (34)$$

(a) 方程的解

将方程 (31) 重写成

$$\frac{Z_{,u,u}}{Z_{,u}}=\frac{f_{,u}}{f}, \quad (35)$$

结果是

$$f=B(v)Z_{,u}, \quad (36)$$

其中 $B(v)$ 是 v 的任意函数. 类似地, 由方程 (32) 得出

$$f=A(u)Z_{,v}, \quad (37)$$

其中 $A(u)$ 是 u 的任意函数. 现将方程 (33) 写成两个可选形式,

$$f+(ZZ_{,v})_{,u}=0 \text{ 和 } f+(ZZ_{,u})_{,v}=0, \tag{38}$$

将方程 (36) 或 (37) 中的 f 代入, 得

$$[B(v)Z+ZZ_{,v}]_{,u}=0, \quad \text{和 } [A(u)Z+ZZ_{,u}]_{,v}=0. \tag{39}$$

所以,

$$Z_{,u}=-A(u)+\frac{F(u)}{Z} \text{ 和 } Z_{,v}=-B(v)+\frac{G(v)}{Z}, \tag{40}$$

其中 $F(u)$ 和 $G(v)$ 也是所指明变量的任意函数. 利用方程 (36)、(37) 和 (40), [89]
得

$$\begin{aligned} Z_{,u}Z_{,v}&=-A(u)Z_{,v}+F(u)\frac{Z_{,v}}{Z}=-f+F(u)\frac{Z_{,v}}{Z}\\ &=-B(v)Z_{,u}+G(v)\frac{Z_{,u}}{Z}=-f+G(v)\frac{Z_{,u}}{Z}. \end{aligned} \tag{41}$$

相应地,

$$F(u)\frac{Z_{,v}}{Z}=G(v)\frac{Z_{,u}}{Z}. \tag{42}$$

方程 (42) 与方程 (36) 和 (37) 一起要求

$$\frac{Z_{,u}}{Z_{,v}}=\frac{F(u)}{G(v)}=\frac{A(u)}{B(v)}. \tag{43}$$

所以,

$$\frac{F(u)}{A(u)}=\frac{G(v)}{B(v)}=\text{常量}=2M \text{ (比如说)}. \tag{44}$$

于是得到解

$$Z_{,u}=-A(u)\left(1-\frac{2M}{Z}\right) \text{ 和 } Z_{,v}=-B(v)\left(1-\frac{2M}{Z}\right), \tag{45}$$

还有

$$f=-A(u)B(v)\left(1-\frac{2M}{Z}\right). \tag{46}$$

现在可以验证, 由方程 (45) 和 (46) 表示的方程 (31)—(33) 的解也满足剩余的方程 (34).

由方程 (45) 给出的 Z 的解的意义在下列形式中变得更清楚,

$$\mathrm{d}Z=-\left(1-\frac{2M}{Z}\right)[A(u)\mathrm{d}u+B(v)\mathrm{d}v]. \tag{47}$$

按照这个方程, Z 不是 u 或 v 的独立函数, 而是同时依赖于它们, 即能在 (u,v) 面上画出常数 Z 的曲线. 后面这个陈述实质上是伯克霍夫 (Birkhoff) 定理的内容, 将在下面的 §(c) 和§18 中讲到.

最后注意, 度规自身的解由下式给出,

$$\mathrm{d}s^2 = -4\left(1-\frac{2M}{Z}\right)A(u)B(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v - Z^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{48}$$

[90]

(b) 克鲁斯卡尔坐标

度规解 (48) 中两个任意函数 $A(u)$ 和 $B(v)$ 的存在, 是与作为 U_2 中的坐标来定义 u 和 v, 或者 u 的某个函数和 v 的某个函数, 所具有的自由度完全一致的. 这个规范自由度的可得性又与这样的事实相一致, 即两个任意函数 $A(u)$ 和 $B(v)$ 是以 $A(u)\mathrm{d}u$ 和 $B(v)\mathrm{d}v$ 的结合同时存在于度规 (48) 和 Z 的解 (47) 中. 但是, 如果不想在度规中引进假造的坐标奇点 (由度规的形式显然可见, 特别是在 $Z=2M$ 处), 在选择希望用作 U_2 中坐标的函数 u 和 v 时就必须小心. 奇点的出现可能仅仅意味着, 所选的坐标函数在流形的一定的很好定义的邻域适用, 但不是全局地适用.

避免假造奇点的坐标函数的一个选择可以这样得到, 令

$$-A(u)\mathrm{d}u \to 2M\mathrm{d}\lg u \text{ 和 } -B(v)\mathrm{d}v \to 2M\mathrm{d}\lg v. \tag{49}$$

于是有

$$\mathrm{d}Z = 2M\left(1-\frac{2M}{Z}\right)\mathrm{d}[\lg(uv)], \tag{50}$$

和

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{16M^2}{uv}\left(1-\frac{2M}{Z}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v - Z^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{51}$$

对方程 (50) 积分给出

$$|uv| = C|Z-2M|\mathrm{e}^{Z/2M}, \tag{52}$$

其中 C 是积分常数. 选

$$C = (2M)^{-1}, \tag{53}$$

并将 Z 代之以通常的径向坐标 r, 度规 (51) 成为其克鲁斯卡尔形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{32M^3}{r}\mathrm{e}^{-r/2M}\mathrm{d}u\mathrm{d}v - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{54}$$

其中 r 与 uv 的联系是

$$uv = (1-r/2M)\mathrm{e}^{r/2M}. \tag{55}$$

现在来检查 (u,v) 平面上度规能很好定义的区域.

首先看到, 如果允许 r 为负值, 则 (r, uv) 关系 (55) 是双值的. 所以, 该关系对 $r>0$ 和 $r<0$ 的两个分支必定对应于完全相区分的物理状况. 由于 r 反号有着与 M 反号同样的效果, 关系 (55) 对 $r<0$ 的分支显然就适合于 M 的负值, 这就不怎么值得关注, 因为如即将看到的, M 的物理意义是质量. 所以, 这里就限于 $r>0$ 和 $M>0$.

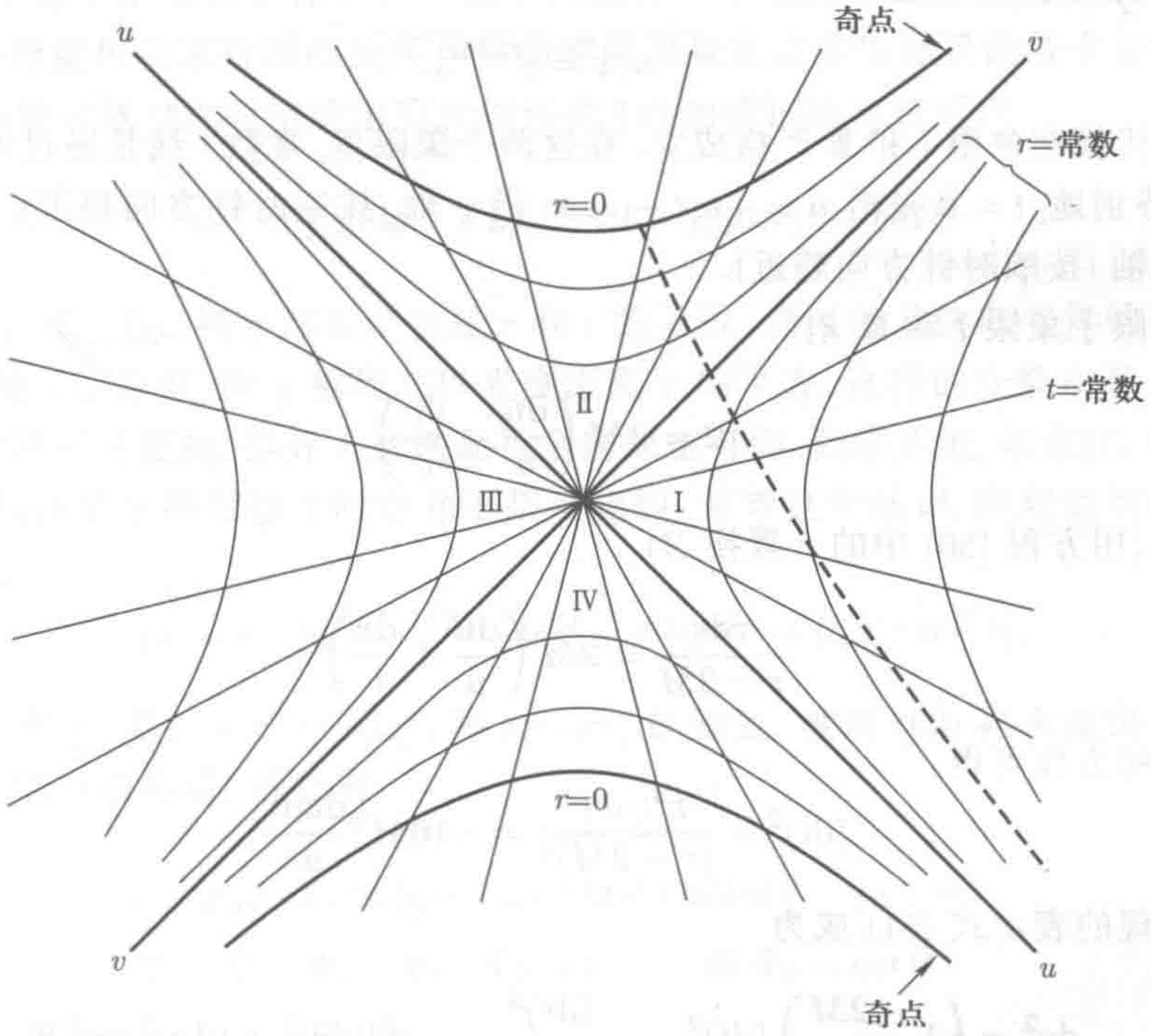


图 2 $u-v$ 坐标 (等价于克鲁斯卡尔坐标) 中的史瓦西几何. 任一点上的光锥由通过该点的零短程线 u =常数和 v =常数规定. t 为常数和 r 为常数的线分别是起于原点的径向线和双曲线. 虚线是一条可能的穿过视界的类时轨迹.

在 (u,v) 平面上, r 为常数的曲线是以坐标轴为渐近线的直角双曲线. 而 [91]
且, $r>2M$ 的 "等半径" 线限制在象限 I 和 III (图 2), $r<2M$ 的线限制在象限 II 和 IV, 而坐标轴本身给出 $r=2M$. 任何点上的光锥由通过该点的零短程线 u =常数和 $v=$ 常数规定. 由图 2 中光锥的形状清楚可见, 象限 II 中的类时 (或零) 轨线都不能沿 r 增大的方向进入象限 I. 这些几何上明显的事实显示 (如在下面的§19 和 §20 中将更清楚地看到的), $r=2M$ 的面是事件视界.

图 2 展示的时空的更基本特征是, 未来指向 (r 减小的方向) 类时轨线一 [92]

旦穿过视界 (在 $r = 2M$) 进入象限 Ⅱ, 就不可避免与 $r = 0$ 线相交, 那里的原体积元为零. 换句话说, 任何东西越过视界后都不可逃脱地被挤压进 $r = 0$ 的"无". 因此, 这个中心就成为史瓦西时空的奇异线; 对此事实的进一步佐证是, 黎曼张量 (在局域惯性标架里) 的所有非零分量都在 $r = 0$ 上发散, 而在其它地方都不如此 (见下面的方程 (75)).

(*c*) 变换到史瓦西坐标

令

$$u/v = e^{t/2M}. \tag{56}$$

这个代换在象限 I 和 Ⅲ 严格成立. 在这两个象限里, 常数 t 线是通过原点的直线. 特别地, $t = 0$ 是沿 $u = +v, t \to +\infty$ 沿 v 轴 (按逆时针方向趋近), $t \to -\infty$ 沿 u 轴 (按顺时针方向趋近).

限于象限 I 和 Ⅲ, 有

$$\mathrm{d}t = 2M\left(\frac{\mathrm{d}u}{u} - \frac{\mathrm{d}v}{v}\right). \tag{57}$$

还有 (用方程 (50) 中的 r 置换 Z)

$$\frac{r\mathrm{d}r}{r - 2M} = 2M\left(\frac{\mathrm{d}u}{u} + \frac{\mathrm{d}v}{v}\right). \tag{58}$$

由这些方程可得

$$(\mathrm{d}t)^2 - \frac{r^2(\mathrm{d}r)^2}{(r - 2M)^2} = -16M^2\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{uv}; \tag{59}$$

而度规的表示式 (51) 成为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)(\mathrm{d}t)^2 - \frac{(\mathrm{d}r)^2}{1 - 2M/r} - r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2\sin^2\theta]. \tag{60}$$

这是史瓦西度规的最熟知的形式, 也是史瓦西本人最初写下的形式. 不过, 现在的推导强调, 它只在象限 I 和 Ⅲ 严格适用. (60) 式有一些优点. 例如, 从中显然可见, 径向坐标 r 是"光度距离", 即"半径"为 r 的球的表面积是 $4\pi r^2$, 而

[93] t 是无穷远处静止观测者的原时的量度. 还有, 度规对 $r \to \infty$ 的渐近形式表明, 它描述球对称分布的惯性质量 M 的外部时空. 最后, 由于度规系数明确地与时间无关, 另外也没有惯性系拖曳 (见第 2 章§11 (*a*)), 所以视界以外的观测者所体验的时空是静态的. 而这就是伯克霍夫定理的通常表述.

回到 (u, v) 平面, 现在可见, 在处于象限 I 里的任何观测者看来, 任何类时或零轨道从象限 I 进入象限 Ⅱ 将要用无限长的时间才能做到. (§19 和 §20 里将给出对这种现象的描绘.) 而且, 由于没有类时或零轨道能够从象限 Ⅱ 进

入象限 I, 所以 $r = 2M$ 内部空间的事件是象限 I 里的所有观测者都不可认知的, $r = 2M$ 内部空间发生的事件不能传达到外部空间. 正是在这个意义上, $r = 2M$ 面是一个事件视界; 也是在这个意义上, 史瓦西度规描述黑洞的时空.

18. 史瓦西度规的另一种导出

鉴于史瓦西度规标准形式 (60) 在后继发展中所起的重要作用, 从在§17 (*c*) 中才终于出现的坐标 r 和 t 出发对它作一个从头导出将是有益的. 另外, 这还将提供机会来直接得到所需要的黎曼张量在这些坐标里的各个分量.

导致对球对称时空要求有度规形式 (1) 的论证也允许写出

$$\mathrm{d}s^2 = f_{00}(\mathrm{d}t)^2 + 2f_{02}\mathrm{d}r\mathrm{d}t + f_{22}(\mathrm{d}r)^2 + g\mathrm{d}\Omega^2 \tag{61}$$

其中 f_{00}, f_{02}, f_{22}, 和 g 都只是变量 r 和 t 的函数. 通过涉及这些变量的坐标变换, 能使 f_{02} 为零, 而 g 被代之以光度距离 r 的平方. 这样的变换在某个开放邻域显然是可能的, 但并不清楚是否全局地也可能. 而事实上, 如在§17 中已显示的, 这样的变换对整个时空并不是可能的. 带着这个认识, 度规能简化为下列形式,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}r)^2 - r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2\sin^2\theta], \tag{62}$$

其中 ν 和 μ_2 是 $t(= x^0 = -\mathrm{i}x^4)$ 和 $r(= x^2)$ 的函数. 度规 (62) 再次是第 2 章中所考虑的一般形式. 现在有

$$\begin{gathered}\nu = \mu_4, \quad \mu_3 = \lg r, \quad \psi = \lg r + \lg\sin\theta, \quad \mu_{3,2} = r^{-1}, \\ \Psi_4 = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Psi_2 = r^{-1}, \quad \text{和 } \Psi_3 = \cot\theta. \end{gathered} \tag{63}$$

扫视第 2 章中给出的黎曼张量分量表 (方程 (67)), 可见仅有的非零分量 [94] 是

$$\begin{aligned} -R_{1212} &= -R_{2323} = +\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\mu_{2,r}, \\ -R_{1414} &= -R_{3434} = -\frac{e^{-2\mu_2}}{r}\nu_{,r}, \\ -R_{2334} &= +R_{1214} = -\frac{e^{-\nu-\mu_2}}{r}\mu_{2,4}, \\ -R_{1313} &= r^{-2}(1 - e^{-2\mu_2}), \end{aligned} \tag{64}$$

和

$$-R_{2424} = -e^{-\mu_2-\nu}[(e^{\mu_2-\nu}\mu_{2,4})_{,4} + (e^{\nu-\mu_2}\nu_{,r})_{,r}],$$

应该记得它们是具有下列基矢的标架中的四次分量,

$$e_{(a)i}=\begin{vmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\mu_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{vmatrix}. \tag{65}$$

现在场方程由设定里奇张量的各个分量为零得出, 即,

$$-R_{42}=R_{1412}+R_{3432}=-2\frac{e^{-\nu-\mu_2}}{r}\mu_{2,4}=0. \tag{66}$$

因而,

$$\mu_2\equiv\mu_2(r). \tag{67}$$

再考虑方程

$$-R_{44}+R_{22}=R_{1414}+R_{3434}-(R_{1212}+R_{2323})=0, \tag{68}$$

得到

$$\frac{2}{r}e^{-2\mu_2}(\nu+\mu_2)_{,r}=0. \tag{69}$$

所以,

$$\nu=-\mu_2(r)+f(t), \tag{70}$$

其中 $f(t)$ 是 t 的任意函数. 取 $f(t)=0$ 不失一般性, 因为它能被 "吸收" 到 t 的定义中, 即由 $\mathrm{d}t$ 取代 $e^{f(t)}\mathrm{d}t$. 由这个对时间坐标的再定义有

$$\nu=-\mu_2, \tag{71}$$

[95] 而 ν 和 μ_2 都只是 r 的函数. 原初允许也是 t 的函数的度规系数现在不依赖于 t 的事实, 进一步证明了伯克霍夫定理: 球质量外部的时空必定是静态的.

现在考虑下列方程能使解完成,

$$-R_{33}=R_{1313}+R_{2323}+R_{4343}=0. \tag{72}$$

将方程 (64) 中的黎曼张量分量代入, 得

$$-2\mu_{2,r}\frac{\mathrm{e}^{-2\mu_2}}{r}=\frac{1}{r^2}(1-\mathrm{e}^{-2\mu_2}). \tag{73}$$

这个方程的解是

$$\mathrm{e}^{-2\mu_2}=1-2M/r(=\mathrm{e}^{2\nu}), \tag{74}$$

其中 M 是常量. 现在已能证实, 解 (74) 保证了黎曼张量的其余分量为零. 于是重新得到了度规的解 (60).

最后注意到, 有了方程 (74) 给出的 μ_2 和 ν 的解, 黎曼张量的非零分量 (64) 缩减为

$$\left.\begin{aligned} -R_{(1)(3)(1)(3)} &= R_{(2)(0)(2)(0)} = 2Mr^{-3} \\ R_{(1)(2)(1)(2)} &= R_{(2)(3)(2)(3)} = -R_{(1)(0)(1)(0)} = -R_{(3)(0)(3)(0)} = Mr^{-3}, \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

和

其中已将指标加上括号来强调它们是由基矢 (65) 指定的局域惯性标架中的四次分量. 可以看到黎曼张量的所有这些分量在 $r=0$ 处都发散, 这正是史瓦西时空在 $r=0$ 处奇异性的表现.

为得到协变张量分量, 就必须在表示史瓦西度规的坐标架里对四次分量 (对每一个指标) 作变换 (65); 而对方程 (75) 所列的分量作这个变换得到

$$\left.\begin{aligned} &R_{0101} = -Mr^{-1}\mathrm{e}^{2\nu}\sin^2\theta, \quad R_{0303} = -Mr^{-1}\mathrm{e}^{2\nu}, \\ &R_{1212} = +Mr^{-1}\mathrm{e}^{-2\nu}\sin^2\theta, \quad R_{2323} = +Mr^{-1}\mathrm{e}^{-2\nu}, \\ &R_{1313} = -2Mr\sin^2\theta, \quad R_{0202} = 2Mr^{-3}, \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

其中应记得有

$$\mathrm{e}^{2\nu} = 1 - 2M/r, \tag{77}$$

而且, 指标 0、1、2、3 分别代表坐标 t、φ、r、θ.

19. 史瓦西时空的短程线: 类时短程线 [96]

在第 1 章中 (§6 (a) 方程 (203)) 已表明, 支配线元为

$$\mathrm{d}s^2 = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{78}$$

的时空中短程线的方程, 能由拉格朗日量

$$2\mathscr{L} = g_{ij}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau} \tag{79}$$

导出, 其中 τ 是沿短程线的某个仿射参数. 对类时短程线, τ 可以就是画出短程线的粒子的原时 s.

对史瓦西时空, 拉格朗日量是

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} - r^2\dot{\theta}^2 - (r^2\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2\right], \tag{80}$$

其中点号表示对 τ 的导数. 相应的正则动量是

$$p_t = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}, \quad p_\varphi = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (r^2 \sin^2\theta)\dot{\varphi},$$
$$p_r = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}, \quad \text{和 } p_\theta = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}. \tag{81}$$

导致的哈密顿量是

$$\mathscr{K} = p_t\dot{t} - (p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi}) - \mathscr{L} = \mathscr{L}. \tag{82}$$

哈密顿量与拉格朗日量的相等表明, 现在的问题中没有 "势能", 能量只来自于 "动能", 正如由拉格朗日量的表示式 (79) 所明示的那样. 由此得出哈密顿量和拉格朗日量的守恒性:

$$\mathscr{K} = \mathscr{L} = \text{常量}. \tag{83}$$

通过调节仿射参数 τ, 可使 $2\mathscr{L}$ 对类时短程线的值为 $+1$, 对零短程线的值为零. (这里不关注类空短程线.)

进一步的运动积分可由下列方程得出,

$$\frac{\mathrm{d}p_t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{\mathrm{d}p_\varphi}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi} = 0. \tag{84}$$

[97] 即有

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \text{常量}{=}E \text{ (比如说)} \tag{85}$$

和

$$p_\varphi = r^2 \sin^2\theta \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \text{常量}. \tag{86}$$

另外, 由运动方程

$$\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(r^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = (r^2 \sin\theta\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2, \tag{87}$$

可得, 如果选择当 $\dot{\theta}$ 为零时将 θ 的值设为 $\pi/2$, 则 $\ddot{\theta}$ 将也为零, 且 θ 将保持为所设的值. 结论是, 短程线是画在一个可由 $\theta = \pi/2$ 识别的不变平面上. 方程 (86) 于是给出

$$p_\varphi = r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \text{常量}{=}L \text{ (比如说)}, \tag{88}$$

其中 L 表示关于垂直于该不变平面的轴的角动量.

有了由方程 (85) 和 (88) 所示的 $\dot{t}$ 和 $\dot{\varphi}$, 拉格朗日量的守恒性给出

$$\frac{E^2}{1 - 2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1 - 2M/r} - \frac{L^2}{r^2} = 2\mathscr{L} = +1\text{或 } 0, \tag{89}$$

取决于所考虑的是类时或零短程线.

本节仅限于类时短程线. (零短程线将在下一节中考虑.) 对类时短程线, 方程 (88) 和 (89) 可重写为

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{L^2}{r^2}\right)=E^2 \tag{90}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{L}{r^2}. \tag{91}$$

将 r 视为 φ (代替 τ) 的函数, 可得方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=(E^2-1)\frac{r^4}{L^2}+\frac{2M}{L^2}r^3-r^2+2Mr. \tag{92}$$

令

$$u=r^{-1}, \tag{93}$$

如牛顿理论中对开普勒轨道的分析那样, 得到问题的基本方程:

[98]

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=2Mu^3-u^2+\frac{2M}{L^2}u-\frac{1-E^2}{L^2}. \tag{94}$$

这个方程决定着不变平面上短程线的几何. 一旦方程 (94) 被对 $u(\varphi)$ 解出, 解就能由下列方程的直接积分而完成,

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{1}{Lu^2}\text{ 和 }\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{E}{Lu^2(1-2Mu)}. \tag{95}$$

(a) 径向短程线

零角动量的径向短程线虽然简单, 却描绘了§17 讲述的时空的一些基本特征. 支配这些短程线的方程是 (见方程 (85) 和 (90))

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=\frac{2M}{r}-(1-E^2)\quad\text{和}\quad\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{E}{1-2M/r}. \tag{96}$$

现在考虑在某个有限距离 r_i 由静止开始朝中心下落的粒子的轨道. 起始距离与常量 E 的关系是

$$r_i=\frac{2M}{1-E^2}\quad(r=r_i\text{当 }\dot{r}=0). \tag{97}$$

运动方程能借助于变量 η 而最方便地积分,

$$r=\frac{M}{1-E^2}(1+\cos\eta)=\frac{2M}{1-E^2}\cos^2\frac{1}{2}\eta=r_i\cos^2\frac{1}{2}\eta. \tag{98}$$

显然, 当 $r = r_i$ 时 $\eta = 0$; 而当 r 穿过 $r = 2M$ 处的视界和到达 $r = 0$ 处的奇点时 η 的值是

$$\eta = \eta_{\mathrm{H}} = 2\sin^{-1} E \quad \text{当 } r = 2M$$

和

$$\eta = \pi \text{ 当 } r = 0. \tag{99}$$

用 η 表示的有待积分的方程是

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = (1 - E^2)\tan^2\frac{1}{2}\eta \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{E\cos^2\dfrac{1}{2}\eta}{\cos^2\dfrac{1}{2}\eta - \cos^2\dfrac{1}{2}\eta_{\mathrm{H}}}, \tag{100}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\eta} = -r_i \sin\frac{1}{2}\eta\cos\frac{1}{2}\eta. \tag{101}$$

[99] 由于考虑的是下落的粒子,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -(1 - E^2)^{1/2}\tan\frac{1}{2}\eta = -\left(\frac{2M}{r_i}\right)^{1/2}\tan\frac{1}{2}\eta. \tag{102}$$

由方程 (101) 和 (102) 现在得到

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\eta} = \left(\frac{r_i^3}{2M}\right)^{1/2}\cos^2\frac{1}{2}\eta = \left(\frac{r_i^3}{8M}\right)^{1/2}(1 + \cos\eta). \tag{103}$$

因此,

$$\tau = \left(\frac{r_i^3}{8M}\right)^{1/2}(\eta + \sin\eta), \tag{104}$$

其中已假定在起始点 $\eta = 0$ 处 $\tau = 0$. 由方程 (104) 可见, 粒子是在有限的原时穿过视界和到达奇点,

$$\tau_{\mathrm{H}} = \left(\frac{r_i^3}{8M}\right)^{1/2}(\eta_{\mathrm{H}} + \sin\eta_{\mathrm{H}}) \text{ 和 } \tau_0 = \left(\frac{r_i^3}{8M}\right)^{1/2}\pi. \tag{105}$$

如即将看到的, 坐标时间 t 里的轨道方程的情形却大为不同. 用来积分得出 t 的方程是 (见方程 (100) 和 (103))

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = E\left(\frac{r_i^3}{2M}\right)^{1/2}\frac{\cos^4\dfrac{1}{2}\eta}{\cos^2\dfrac{1}{2}\eta - \cos^2\dfrac{1}{2}\eta_{\mathrm{H}}}. \tag{106}$$

这个方程积分后给出

$$t = E\left(\frac{r_i^3}{2M}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{2}(\eta+\sin\eta)+(1-E^2)\eta\right] +2M\lg\left[\frac{\tan\frac{1}{2}\eta_{\rm H}+\tan\frac{1}{2}\eta}{\tan\frac{1}{2}\eta_{\rm H}-\tan\frac{1}{2}\eta}\right]. \tag{107}$$

按照这个结果,

$$t\to\infty \text{ 随着 } \eta\to\eta_{\rm H}-0, \tag{108}$$

与原时 τ 的行为形成鲜明对照. 这是§17 (c) 里由一般论证所得结论的一个例子, 就是说, 对于 "无穷远处" 的观测者, 一个有着类时轨道的粒子将需要无限长的时间才能到达视界, 而按照它自己的原时却能在有限时间里穿过视界. 而且在穿过视界后, 粒子也将在有限原时里到达奇点. 这些事实在图 3 里用解 (104) 和 (108) 予以描绘.

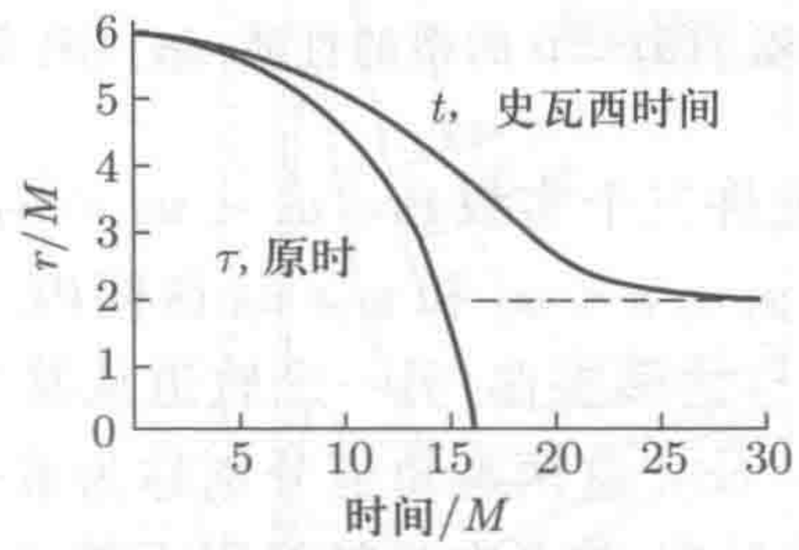


图 3 在 $r=6M$ 处由静止开始朝奇点下落的检验粒子的类时径向短程线上坐标时间 t 和原时 τ 的变化.

[100]

(b) 束缚轨道 $(E^2<1)$

对支配不变平面上轨道几何的方程 (94) 的研究可以方便地分离成两个部分, 分别对应于 $E^2<1$ 和 $E^2\geqslant 1$. 这两类轨道的特征分别是能量 (除静能量外) 为负和为正 (及为零). 如所预期的, 正是这个区分决定着轨道是束缚的还是开放的 (即 r 沿轨道保持受束缚与否). 本小节将限于束缚轨道 $(E^2<1)$. 这些轨道由方程

$$\left(\frac{{\rm d}u}{{\rm d}\varphi}\right)^2 = f(u) \tag{109}$$

支配, 其中

$$f(u)=2Mu^3-u^2+\frac{2M}{L^2}u-\frac{1-E^2}{L^2}\quad (E^2<1). \tag{110}$$

短程线几何显然将由方程 $f(u)=0$ 的根的性质来决定. 由于 $f(u)$ 是 u 的三次式, 所以就有两种可能性: 要么所有的根都是实数, 要么其中一个是实数而另外两个是一对共轭复数. 用 u_1、u_2 和 u_3 表示三次方程 $f(u)=0$ 的根, 有

$$u_1u_2u_3=(1-E^2)/2ML^2 \tag{111}$$

和

$$u_1+u_2+u_3=1/2M. \tag{112}$$

由于已经假定 $(1-E^2)>0$, 方程 $f(u)=0$ 必定总有一个正的实根. 进一步由
[101] 对 $u=0$ 有 $f<0$ 和对 $u\to\pm\infty$ 有 $f(u)\to\pm\infty$ 的事实, 就得出必定有图 4 所示的五种情形. 这些不同的情形导致了以下的可能性.①

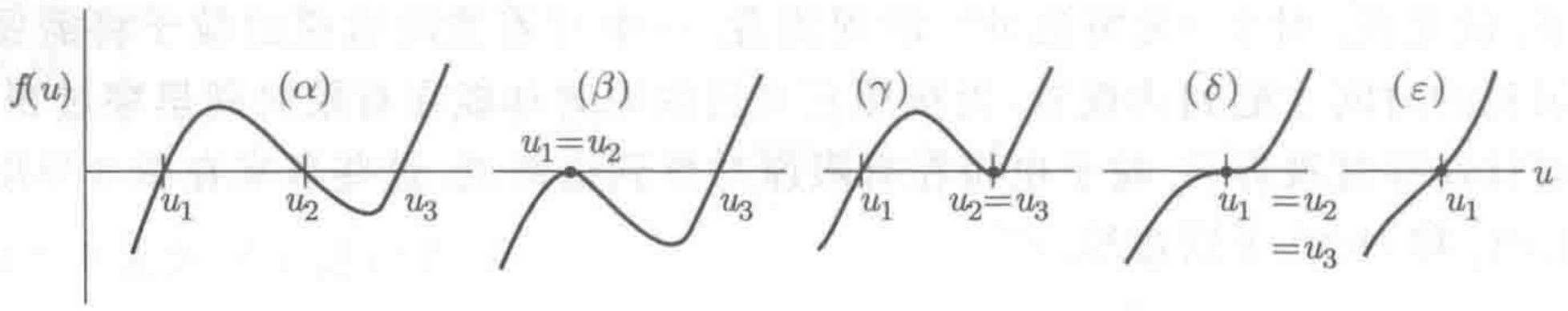


图 4 $E^2<1$ 时三次方程 $f(u)=0$ 的根的性质. (α) (β) 等各种情形的区分见正文.

(α): 对于每一对允许三个实根 $0<u_1<u_2<u_3$ 的 E 和 L 值, 存在两个确定轨道, 分别限制在 $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ 和 $u\geqslant u_3$ 区间内, 也就是, 一个轨道在 r 的两个极值 $(=u_1^{-1}$ 和 $u_2^{-1})$ 之间振荡, 另一个轨道从某个远心点 $(=u_3^{-1})$ 起始下落到 $r=0$ 奇点 (即 $u\to\infty$). 这两类轨道分别称为第一和第二类. 第一类轨道是开普勒轨道的相对论对应, 前者在牛顿极限下趋于后者. 第二类轨道没有牛顿对应. 但是将会看到, 这两类轨道 (还有开放轨道, 见下文§ (c)) 都如牛顿轨道那样, 能最方便地由偏心率 $e\geqslant 0$ 和正焦弦 l 来参数化.

(β): 第一类轨道是稳定圆轨道 (零偏心率), 而第二类轨道尽管也被称为具有零偏心率, 却仍下落到奇点.

(γ): 第一类轨道从某个远心点 u_1^{-1} 起始, 经过无数次的螺旋, 渐近地趋向半径为 u_3^{-1} 的圆. 第二类轨道在一定意义上是第一类轨道的继续, 即从同一个圆朝向中心螺旋出来, 最终落到奇点.

(δ): 三个根重合; 与下面 (ε) 情形的原则区别是, 还允许一个半径为 $u_1^{-1}(=u_2^{-1}=u_3^{-1})$ 的不稳定圆轨道.

---

① 将关系式 (111)、(112) 与进一步的关系式

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_1=1/L^2$$

结合起来可以证明, $E^2<1$ 时方程 $f(u)=0$ 不可能除了一个正根外还有两个负的实根. 图 4 包含了所有允许的可能性.

(ε): 只有一类轨道, 全都由有限的远心距离起始落到奇点. 将会看到, 这些轨道能最便利地由一个虚数偏心率来参数化; 在其它方面它们与径向短程线相似. [102]

上述各种不同情形也可以这样来理解, 即把方程 (90) 左边出现的量,

$$\mathscr{V}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right), \tag{113}$$

解释为 "势能", 其意义是与被解释为 "动能" 的 $\dot{r}^2$ 一起组成一个运动常量. (见图 5, 其中已对参数 E 和 L 的一些典型值绘出了势能曲线.)

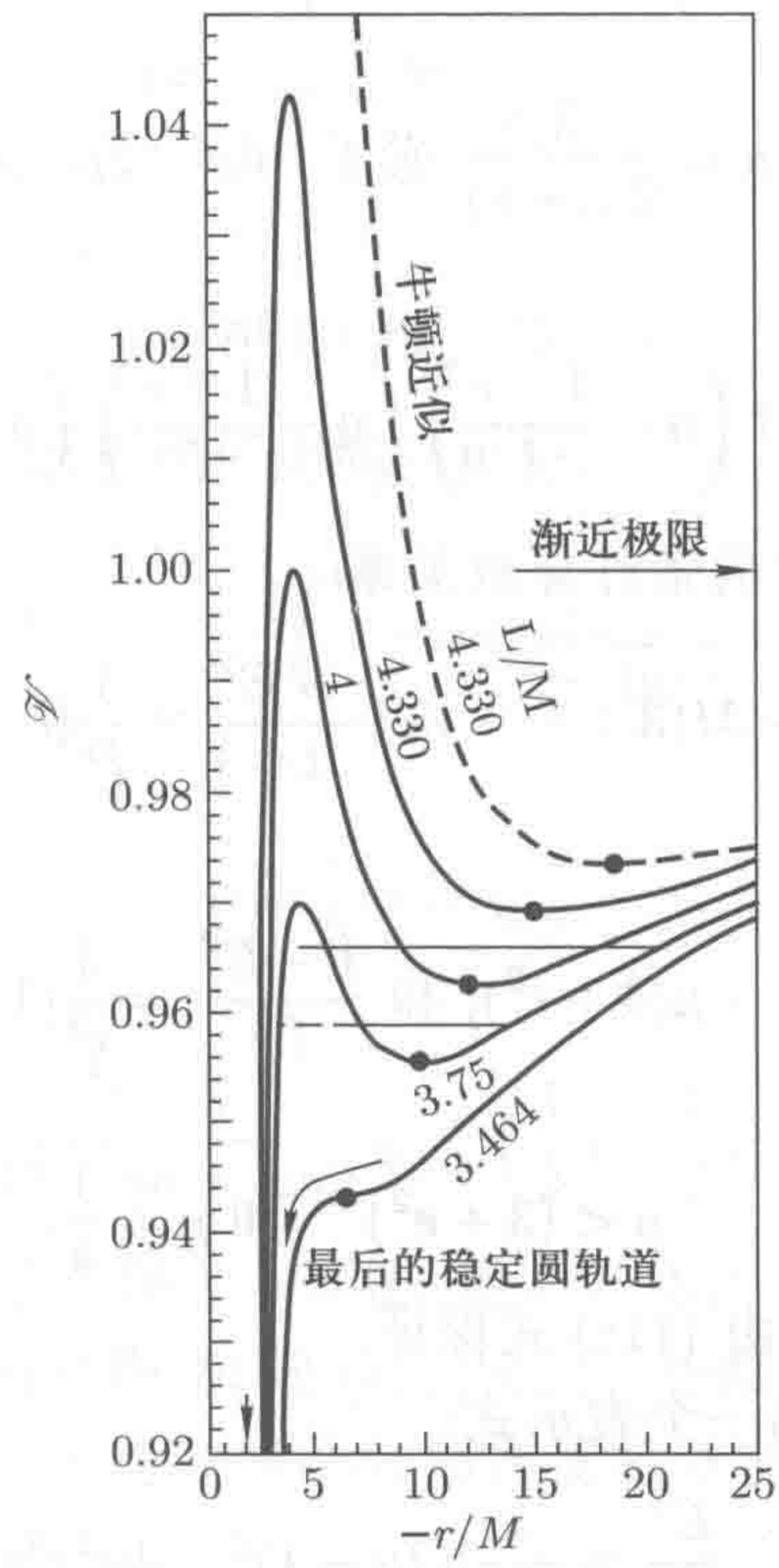


图 5 适合于类时轨道的有效势 (见方程 (113)). 势的极小值对应于稳定圆轨道, 极大值对应于不稳定圆轨道. 拐折点是最后的稳定圆轨道.

[103]

(i) 第一类轨道

第一类轨道出现于情形 (α)、(β)、(γ) 和 (δ); 这些情形要求 $f(u) = 0$ 允许三个实根, 全都是正的; 将它们写为

$$u_1 = \frac{1}{l}(1 - e), \quad u_2 = \frac{1}{l}(1 + e), \quad \text{和 } u_3 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{l}, \tag{114}$$

其中正焦弦 l 是某个正的常数; 而按条件 $E^2<1$ 的要求, 偏心率 e 对 $u_1>0$ 是小于 1 的:

$$0\leqslant e<1 \text{ 对 } E^2<1. \tag{115}$$

(已按 (112) 式的要求对 u_3 赋值).

重要的是注意, 依照 $u_1\leqslant u_2\leqslant u_3$ 的顺序, 必须要求

$$\frac{1}{2M}-\frac{2}{l}\geqslant\frac{1}{l}(1+e) \text{ 或 } l\geqslant 2M(3+e). \tag{116}$$

令

$$\mu=\frac{M}{l}, \tag{117}$$

有重要的不等式

$$\mu\leqslant\frac{1}{2(3+e)} \text{ 或 } 1-6\mu-2\mu e\geqslant 0. \tag{118}$$

下式

$$f(u)=2M\left(u-\frac{1-e}{l}\right)\left(u-\frac{1+e}{l}\right)\left(u-\frac{1}{2M}+\frac{2}{l}\right) \tag{119}$$

与其定义式 (110) 相符的条件导致关系

$$\frac{M}{L^2}=\frac{1}{l^2}[l-M(3+e^2)] \text{ 和 } \frac{1-E^2}{L^2}\equiv\frac{1}{l^3}(l-4M)(1-e^2), \tag{120}$$

或, 借助于 μ,

$$\frac{1}{L^2}=\frac{1}{lM}[1-\mu(3+e^2)] \text{ 和 } \frac{1-E^2}{L^2}=\frac{1}{l^2}(1-4\mu)(1-e^2). \tag{121}$$

由这些关系有

$$\mu<(3+e^2)^{-1} \text{ 和 } \mu<\frac{1}{4}. \tag{122}$$

可以验证, 这些不等式由 (118) 式保证.

[104] 还可提及 E^2 的另一个表示式:

$$\frac{E^2}{L^2}=\frac{1}{lM}[(2\mu-1)^2-4\mu^2e^2]. \tag{123}$$

回到方程 (109), 现在作代换

$$u=\frac{1}{l}(1+e\cos\chi), \tag{124}$$

其中 χ 是一个新变量, 按达尔文 (Darwin) 的称呼是 “相对论异常”. 按方程 (124),

$$\left.\begin{aligned}&\text{在远心点有 } u=(1-e)/l, \quad \chi=\pi\\&\text{在近心点有 } u=(1+e)/l, \quad \chi=0.\end{aligned}\right\} \tag{125}$$

容易验证, 代换 (124) 将方程 (109) 简化为简单形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = [1-2\mu(3+e\cos\chi)]$$
$$= \left[(1-6\mu+2\mu e) - 4\mu e\cos^2\frac{1}{2}\chi\right], \tag{126}$$

或等价地,

$$\pm\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\varphi} = (1-6\mu+2\mu e)^{1/2}\left(1-k^2\cos^2\frac{1}{2}\chi\right)^{1/2}, \tag{127}$$

其中

$$k^2 = \frac{4\mu e}{1-6\mu+2\mu e}. \tag{128}$$

不等式 (118) 保证了

$$k^2 \leqslant 1 \text{ 和 } 1-6\mu+2\mu e > 0. \tag{129}$$

现已明显, 对 φ 的解可借助于雅可比椭圆积分,

$$F(\psi,k) = \int_0^{\psi}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{1-k^2\sin^2\gamma}} \tag{130}$$

来表示, 其中

$$\psi = \frac{1}{2}(\pi-\chi). \tag{131}$$

于是, 可写

$$\varphi = \frac{2}{(1-6\mu+2\mu e)^{1/2}}F\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\chi,k\right), \tag{132}$$

其中 φ 的起点已选为远心点即 $\chi=\pi$ 处. 近心点是在 $\chi=0$ 处, 那里 $\psi=\pi/2$. (由方程 (132) 给出的轨道在图 7a 的 (a)、(b)、(c) 中绘出.)

现在解已可由对 t 和 τ 的方程 (95) 的直接积分来完成. 即有 [105]

$$\tau = \frac{1}{L}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{u^2} = \frac{1}{L}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}\chi}{u^2}, \tag{133}$$

和

$$t = \frac{E}{L}\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\chi}\frac{\mathrm{d}\chi}{u^2(1-2Mu)}. \tag{134}$$

用方程 (121)、(123)、(124) 和 (126), 得到

$$\tau = \frac{l^{3/2}}{M^{1/2}}[1-\mu(3+e^2)]^{1/2}\int_{\chi}^{\pi}\mathrm{d}\chi(1+e\cos\chi)^{-2}[1-2\mu(3+e\cos\chi)]^{-1/2} \tag{135}$$

和

$$t = \frac{l^{3/2}}{M^{1/2}}[(2\mu-1)^2 - 4\mu^2 e^2]^{1/2} \int_\chi^\pi \mathrm{d}\chi (1+e\cos\chi)^{-2}$$
$$\times [1-2\mu(3+e\cos\chi)]^{-1/2}[1-2\mu(1+e\cos\chi)]^{-1}. \tag{136}$$

以具有同样偏心率和正焦弦的开普勒轨道的牛顿周期,

$$T_{\text{Newton}} = \left[\frac{4\pi^2 l^3}{(1-e^2)^3 GM}\right]^{1/2} \tag{137}$$

为单位来表示 t 和 τ, 可得出方程 (135) 和 (136) 右边积分前面的因子分别是

$$\frac{1}{2\pi} T_{\text{Newton}} (1-e^2)^{3/2}[1-\mu(3+e^2)]^{1/2}$$

和

$$\frac{1}{2\pi} T_{\text{Newton}} (1-e^2)^{3/2}[(2\mu-1)^2 - 4\mu^2 e^2]^{1/2}. \tag{138}$$

(其中 T_{Newton} 由方程 (137) 给出. 由这两个因子, 方程 (135) 和 (136) 右边的积分给出以秒为单位的 t 和 τ; 迄今一直采用的 $c=1$ 和 $G=1$ 的单位制在这个事例中放弃, 以便与牛顿理论的结果比较.)

现在考虑两个特殊情形: 两个根 u_1 和 u_2 重合 (图 4 的 (β)) 时的 $e=0$ 情形和两个根 u_2 和 u_3 重合 (图 4 的 (γ)) 时的 $2\mu\,(3+e)=1$ 情形.

[106] (α) $e=0$ 情形: 这时的轨道为圆形, 半径为

$$R_c = l \text{ 和 } \mu = M/r_c. \tag{139}$$

将轨道的角动量 L 和能量 E 与轨道参数 e 和 l 相联系的方程 (121) 和 (123) 现在给出

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1-3M/r_c}{r_c M} \text{ 和 } \frac{E^2}{L^2} = \frac{(2M/r_c-1)^2}{r_c M} \tag{140}$$

将上面方程的第一个重写为

$$r_c^2 - \frac{L^2}{M} r_c + 3L^2 = 0, \tag{141}$$

得出 (由图 5 显然可见), 零偏心率轨道适合于下列两个根中的一个或另一个,

$$r_c = \frac{L^2}{2M}[1 \pm (1-12M^2/L^2)^{1/2}]; \tag{142}$$

而且, 对

$$L/M < 2\sqrt{3} \tag{143}$$

不可能有圆轨道. 对 L/M 的最小允许值有

$$r_c = 6M \text{ 和 } E^2 = 8/9 \text{ 对 } L/M = 2\sqrt{3}. \tag{144}$$

显然, 方程 (142) 两个根 (对 $L/M > 2\sqrt{3}$) 之较大者确定由方程 (113) 定义的势能曲线 $\mathscr{V}(r)$ 的极小值位置, 而较小的根确定势能曲线的极大值位置. 因此, 较大半径的圆轨道是稳定的, 而较小半径的圆轨道是不稳定的. 两种轨道的半径的允许范围是

$$6M < r_c \text{ (稳定)} < \infty \text{ 和 } 3M \leqslant r_c \text{ (不稳定)} \leqslant 6M. \tag{144'}$$

对 $L/M > 2\sqrt{3}$ 所允许的两种零偏心率轨道中, 只有具有较大半径 (较小 u) 的稳定轨道是包括在正在考虑的第一类轨道中.

这些圆轨道的一次完整转动的周期, 以原时和坐标时来量度是 (见方程 (136)—(138))

$$\tau_{\text{period}} = T_{\text{Newton}} \left(\frac{1-3\mu}{1-6\mu}\right)^{1/2} \text{ 和 } t_{\text{period}} = T_{\text{Newton}}(1-6\mu)^{-1/2}. \tag{145}$$

(注意, 当 $\mu \to 1/6$ 和 $r_c \to 6M$ 时 $t_{\text{period}} \to \infty$.)

(β) $2\mu(3+e) = 1$ 情形: 这时的近心点距离 r_p 和远心点距离 r_{ap} 由下式给出: [107]

$$r_p = \frac{l}{1+e} = 2M\frac{3+e}{1+e} \text{ 和 } r_{ap} = 2M\frac{3+e}{1-e}. \tag{146}$$

可见这些轨道的近心点距离限制在以下范围,

$$4M \leqslant r_p < 6M. \tag{147}$$

而且, 对这些轨道有

$$\frac{L^2}{M^2} = 4\frac{(3+e)^2}{(3-e)(1+e)} \text{ 和 } 1 - E^2 = \frac{1-e^2}{9-e^2}. \tag{148}$$

用于表示解 (132) 的椭圆积分的模数 k 这时成为 1, 而再回到方程 (126) 是便利的, 它给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 4\mu e \sin^2\frac{1}{2}\chi \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\varphi} = -2(\mu e)^{1/2}\sin\frac{1}{2}\chi, \tag{149}$$

其中负号的选择是为使 φ 在 χ 从其远心点值 π 减小 (至其近心点值 0) 时可以增大 (从零起). 方程 (149) 要求的解是

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\mu e}}\lg\left(\tan\frac{1}{4}\chi\right) \quad (\varphi = 0 \text{ 当 } \chi = \pi). \tag{150}$$

方程 (150) 显示, 当 $\chi \to 0$ 时 $\varphi \to \infty$, 而且近心点被趋近. 也就是说, 轨道渐近地趋于 r_p 上的圆, 围绕这个圆 (沿逆时针方向) 螺旋转动无数次. 在下面的 § (ii, β) 中将表明, 这个轨道 "延续" 到该圆的内部, 成为一个第二类轨道而最终下落到奇点. (见图 $7a$, (d))

(γ) *后牛顿近似*: 对牛顿理论的开普勒轨道所作的一级相对论修正可以容易地从方程 (126) 导出, 只要注意到在通常出现的条件下 $\mu = M/l$ 是一个非常小的量: 它实质上是史瓦西半径 (~ 2 km) 与一个行星或双星轨道的主轴 ($\sim 10^6$—10^8 km) 之比. 于是, 将方程 (126) 展开到 μ 的一级, 得

$$-\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\chi(1 + 3\mu + \mu e\cos\chi); \tag{151}$$

或以积分形式,

$$-\varphi = (1 + 3\mu)\chi + \mu e\sin\chi + 常数. \tag{152}$$

[108] 由方程 (152) 可见, 在一个 χ 改变了 2π 的完整转动后, φ 的改变是 $2(1 + 3\mu)\pi$. 所以, 每次转动的近心点进动 $\Delta\varphi$ 是

$$\Delta\varphi = 6\pi\frac{M}{l} = 6\pi\frac{M}{a(1 - e^2)}, \tag{153}$$

其中 a 表示开普勒椭圆的半主轴; 这正是标准结果 (由爱因斯坦首先得出).

(ii) 第二类轨道

如已说明的, 第二类轨道有着在 u_3^{-1} 处的远心点, 并最终落到奇点 $r = 0$ 上. 重要的是看到, 由于 $u_1 + u_2 + u_3 = 1/2M$ 和 $u_1 + u_2 > 0$, 所以 $u_3 < 1/2M$; 因而所有这些轨道都起始于视界之外.

为得到这些轨道的解, 以

$$u = \left(\frac{1}{2M} - \frac{2}{l}\right) + \left(\frac{1}{2M} - \frac{3 + e}{l}\right)\tan^2\frac{1}{2}\xi, \tag{154}$$

代换 (124). 于是有

和

$$\left.\begin{array}{ll} u = u_3 = \dfrac{1}{2M} - \dfrac{2}{l} & 当\ \xi = 0 \\ u \to \infty & 当\ \xi \to \pi. \end{array}\right\} \tag{155}$$

而且, 方程 (109) 简化成

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = (1 - 6\mu + 2\mu e)\left(1 - k^2\sin^2\frac{1}{2}\xi\right), \tag{156}$$

其中 k^2 的定义与对第一类轨道的相同. 相应地, 对 φ 的解可以由同样的椭圆函数 (130) 来表示. 于是可写出 (见方程 (132))

$$\varphi = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{1/2}}F\left(\frac{1}{2}\xi, k\right). \tag{157}$$

在远心点有 $\xi = 0$ 和 $\varphi = 0$; 在奇点有 $\xi \to \pi, \varphi$ 取有限值

$$\varphi_0 = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{1/2}} K(k), \tag{158}$$

其中 $K(k)$ 是完整椭圆积分,

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \gamma}}. \tag{159}$$

(由方程 (157) 给出的轨道的例子绘于图 $7a$, (a)、(b)、(c).) [109]

原时 τ 和坐标时 t 的解可由积分下列方程得到,

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\xi} = \frac{1}{Lu^2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi} \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi} = \frac{E}{Lu^2(1 - 2Mu)} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}. \tag{160}$$

对 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\xi$ 的方程右边因子 $(1 - 2Mu)^{-1}$ 的出现表明, 对 t 的积分随 $u \to 1/2M$ 而发散. 所以, 这些轨道对 $r < 2M$ 的部分是位于视界之外的观测者不可到达的; 同样的现象对径向短程线也发生过: 这是§17 (b) 和§ (c) 里在一般基础上导出的结果的又一个例子. 同样重要的是看到, 所有这些穿过视界的轨道都必定终结于中心, 这是在那个点上时空奇异性的表现.

现在考虑两种特殊情形, $e = 0$ 和 $2\mu(3 + e) = 1$.

(α) $e = 0$ 情形: 由于 k^2 也是零, 方程 (156) 的积分给出

$$\xi = (1 - 6\mu)^{1/2}(\varphi - \varphi_0), \tag{161}$$

其中 φ_0 是积分常数. 对 u 的相应解是

$$u = \frac{1}{l} + \left(\frac{1}{2M} - \frac{3}{l}\right) \mathrm{s}^2 \left[\frac{1}{2}(1 - 6\mu)^{1/2}(\varphi - \varphi_0)\right]. \tag{162}$$

这个 "零偏心率" 轨道不是一个圆! 它在当 $\varphi = \varphi_0$ 时从远心距离 u_3^{-1} (在 $3M \leqslant u_3^{-1} \leqslant 6M$ 的范围) 开始, 当

$$\varphi - \varphi_0 = \pi/(1 - 6\mu)^{1/2}, \tag{163}$$

到达奇点 $r = 0$, 此前还旋转一次或多次, 取决于 μ 接近 $1/6$ 的程度. 在 u_3^{-1} 上的圆是这些解的外包, 也就是说, 对这个半径所预期的圆轨道是运动方程的一个奇异解. (见图 $7a$, (e))

$e = 0$ 和 $\mu = 1/6$ 的情形必须分开来处理. 这时 $f(u) = 0$ 的所有三个根都重合 (图 4 的 (δ)), 而且 $u_1 = u_2 = 1/6M$. 如在§ (i, α) 中已表明的, 半径为 $6M$

的圆轨道被运动方程允许为一个特别解; 事实上它是稳定圆轨道半径的下限 (见方程 (144′) 和 (146)). 一般的解可由适合于这种情形的方程得到, 即

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 2M\left(u - \frac{1}{6M}\right)^3; \tag{164}$$

[110] 这个方程的解是

$$u = \frac{1}{6M} + \frac{2}{M(\varphi - \varphi_0)^2}. \tag{165}$$

这个轨道围绕半径为 $6M$ 的圆螺旋转动无数次, 渐近地趋于那个圆 (见图 $7a$, (f)).

(β) $2\mu(3+e)=1$ 情形: 这时不可能由在导致方程 (156) 的分析中简单地令 $\mu = 1/2\,(3+e)$ 来得到解: 在最初的代换 (154) 中 $\tan^2\frac{1}{2}\xi$ 的系数为零. 所以对这种情形的考虑必须从头开始.

当 $2\mu\,(3+e)=1$ 时, $f(u)=0$ 的根是

$$u_1 = \frac{1-e}{l} \text{ 和 } u_2 = u_3 = \frac{1}{4M} - \frac{1-e}{2l} = \frac{1+e}{l}; \tag{166}$$

采用的新代换是

$$u = \frac{1}{l}\left(1 + e + 2e\tan^2\frac{1}{2}\xi\right). \tag{167}$$

由这个代换有

$$u = u_2 = u_3 = (1+e)/l \text{ 当 } \xi = 0, \quad u \to \infty \text{ 当 } \xi = \pi. \tag{168}$$

还有, 方程 (109) 简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 4\mu e\sin^2\frac{1}{2}\xi. \tag{169}$$

可以看到, 这正是对同样情形 $u_2 = u_3$ 考虑第一类轨道时得到的同样方程 (见方程 (149)). 与以前一样, 可写出

$$\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\mu e}}\lg\left(\tan\frac{1}{4}\xi\right). \tag{170}$$

沿着这个轨道, 当 $\xi = \pi$ 时有 $\varphi = 0$ 和 $r \to 0$; 当 $\xi \to 0$ 有 $\varphi \to \pi$ 和趋于远心点 $r = l/(1+e)$. 也就是说, 轨道围绕 $l/(1+e)$ 上的圆螺旋转动 (在逆时针方向) 无数次, 渐近地趋于那个圆. 这种行为与第一类轨道相同. 但有一个重要差别: $l/(1+e)$ 上的圆对第一类轨道是近心点, 而对第二类轨道却是远心点. 如果希望将这两类轨道视为相互延续 (当 $u_2 = u_3$), 就必须设想是第一类轨道螺旋绕转无数次而趋于 $l/(1+e)$ 的圆, 然后向内螺旋并最终落到奇点. (见图 $7a$, (d))

[111]

(iii) 虚偏心率轨道

最后必须考虑的情形是 $f(u)=0$ 只有一个实根 (对正在考虑的束缚轨道而言它必须是正的) 和一对共轭复数根 (图 4 的 (ε)). 显然, 相应的轨道从某个有限的远心距离开始, 将落到奇点, 在此之前会围绕奇点转动一次或多次. 将这些轨道用虚偏心率 $\mathrm{i}e(e>0)$ 来表征, 并将 $f(u)=0$ 的根写为

$$u_1=\frac{1}{2M}-\frac{2}{l},\quad u_2=\frac{1}{l}(1+\mathrm{i}e),\quad \text{和 } u_3=\frac{1}{l}(1-\mathrm{i}e). \tag{171}$$

显然, 有了现在的定义, 可以通过简单地将方程 (121) 和 (123) 中的 $+e^2$ 写成 $-e^2$, 反之亦然, 从而得到取代的方程,

$$\text{和}\qquad \left.\begin{aligned}\frac{1}{L^2}&=\frac{1}{lM}[1-\mu(3-e^2)],\quad \frac{1-E^2}{L^2}=\frac{1}{l^2}(1-4\mu)(1+e^2),\\ \frac{E^2}{L^2}&=\frac{1}{lM}[(2\mu-1)^2+4\mu^2e^2].\end{aligned}\right\} \tag{172}$$

这些方程的最后一个还附带地表明, l 必须为正. 另外, $(1-E^2)>0$ 的束缚轨道还要求 $\mu<1/4$, 而且这个不等式保证了

$$1-3\mu+\mu e^2>0. \tag{173}$$

还能看到, e^2 没有上限.

有了关于 $f(u)=0$ 的根的假定 (171), 必须考虑的方程是

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=2M\left(u-\frac{1}{2M}+\frac{2}{l}\right)\left[\left(u-\frac{1}{l}\right)^2+\frac{e^2}{l^2}\right]. \tag{174}$$

现在所作的代换是

$$u=\frac{1}{l}\left(1+e\tan\frac{1}{2}\xi\right). \tag{175}$$

由于 u 的范围是

$$\frac{1}{2M}-\frac{2}{l}\leqslant u<\infty, \tag{176}$$

所以 ξ 的相应范围是

$$\xi_0\leqslant\xi\leqslant\pi, \tag{177}$$

[112]

其中

$$\tan\frac{1}{2}\xi_0=-\frac{6\mu-1}{2\mu e}, \tag{178}$$

或等价地,

$$\sin\frac{1}{2}\xi_0=-\frac{6\mu-1}{\Delta}\ \text{和}\ \cos\frac{1}{2}\xi_0=\frac{2\mu e}{\Delta}, \tag{179}$$

其中

$$\Delta = [(6\mu - 1)^2 + 4\mu^2 e^2]^{1/2}. \tag{180}$$

用代换 (175), 方程 (174) 简化为

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\sqrt{2}[(6\mu - 1) + 2\mu e \sin\xi + (6\mu - 1)\cos\xi]^{1/2}. \tag{181}$$

由椭圆积分理论的标准公式, φ 的解能用雅可比椭圆积分来表示. 于是有

$$\pm\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int^{\psi} \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\gamma}}, \tag{182}$$

其中

$$k^2 = \frac{1}{2\Delta}(\Delta + 6\mu - 1), \tag{183}$$

和

$$\begin{aligned} \sin^2\psi &= \frac{1}{\Delta + 6\mu - 1}\{\Delta - 2\mu e \sin\xi - (6\mu - 1)\cos\xi)\} \\ &= \frac{1}{\Delta + 6\mu - 1}\left\{\Delta + 6\mu - 1 - 2\left[2\mu e \sin\frac{1}{2}\xi + (6\mu - 1)\cos\frac{1}{2}\xi\right]\cos\frac{1}{2}\xi\right\}. \end{aligned} \tag{184}$$

由方程 (179) 和 (184) 可得

$$\begin{aligned} &\sin^2\psi = 0 \text{ 当 } \xi = \xi_0 \text{ (在远心点)} \\ &\text{或当 } \xi = \pi \text{ (在奇点).} \end{aligned} \tag{185}$$

另外,

$$\sin^2\psi = 0 \text{ 当 } \xi = \tan^{-1}\frac{2\mu e}{6\mu - 1}. \tag{186}$$

所以, ψ 在 ξ 的范围 (177) 内可取值为零. 结论是, 与 ξ 的范围相关联的 ψ 的范围是

$$-\pi/2 \leqslant \psi \leqslant +\pi/2 \quad (\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \pi). \tag{187}$$

相应地, 可将 φ 的解写为

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\{K(k) - F(\psi, k)\}, \tag{188}$$

[113] 其中 $K(k)$ 是完整椭圆积分, 而 $F(\psi, k)$ 如通常一样是不完整雅可比积分. 在将 φ 的解写为 (188) 的形式时, 已假定在奇点 $\varphi = 0$, 在那里有 $\xi = \pi$ 和 $\psi = \pi/2$. φ 在 $\xi = \xi_0$ 和 $\psi = -\pi/2$ 的远心点的值是

$$\varphi_{ap} = 2K(k)/\sqrt{\Delta}. \tag{189}$$

(由方程 (188) 给出的轨道的例子绘于图 $7a$, (g)、(h)).

对束缚轨道的讨论至此已完成. 现在转向 $E^2 \geqslant 1$ 的开放轨道.

(c) 开放轨道 ($E^2 > 1$)

当 $E^2 > 1$ 时, $f(u)$ 中的常数项是正的. 因此方程 $f(u) = 0$ 必定有一个负根, 所要区分的情形 (少于束缚轨道) 示于图 6. [再次可证, 所有三个实根都为负的情形不可能出现 (见 100 页脚注).]

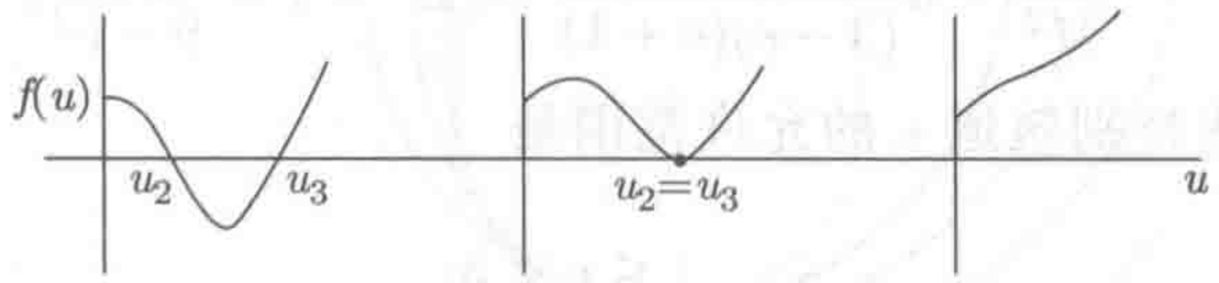


图 6 三次方程 $f(u) = 0$ 对 $E^2 > 1$ 的根的性质.

只要有三个实根并且其中两个是正的 (不同或重合), 就必须继续区分两类轨道: 第一类轨道限于区间 $0 < u \leqslant u_2$ (类似于牛顿理论里的双曲线轨道), 而第二类轨道有 $u \geqslant u_3$ (基本上与第二类束缚轨道没有差别). 当 $u_2 = u_3$ 时, 两类轨道随着从相反两侧围绕同一个圆螺旋转动无数次并渐近地趋于那个圆而接合. 最后, 当方程 $f(u) = 0$ 允许一对共轭复根 (还有一个负的实根) 时, 相应的轨道可被视为属于虚偏心率型, 它们与§ (b, iii) 中的束缚轨道的区别仅在于它们不是束缚的!

(i) 第一和第二类轨道

当所有三个根都是实数时, 可以继续像对束缚轨道那样使用偏心率 e, 唯一的差别是现在 $e \geqslant 1$. 于是可写出 (见方程 (114))

$$u_1 = -\frac{1}{l}(e-1), \quad u_2 = \frac{1}{l}(e+1), \quad \text{和} \quad u_3 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{l} \quad (e \geqslant 1). \tag{190}$$

不等式 (118), 即

$$1 - 6\mu - 2\mu e \geqslant 0 \tag{191}$$

继续成立, 因为它只是假定的根的顺序 $u_1 < u_2 \leqslant u_3$ 的结果. 关系式 (121) 也继续成立, 差别也是现在 $e \geqslant 1$. 因而有

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1}{lM}[1 - \mu(3+e^2)] \text{ 和 } \frac{E^2-1}{L^2} = \frac{1}{l^2}(1-4\mu)(e^2-1). \tag{192}$$

[114]

由于 $L^2 > 0$ 和 $E^2 - 1 \geqslant 0$ (由假定), 有

$$1 - \mu(3+e^2) > 0 \tag{193}$$

和

$$\mu \leqslant \frac{1}{4}. \tag{194}$$

对 $\mu \leqslant 1/4$ 的要求是由两个不等式 (191) 和 (193) 来保证的. 对这两个不等式, 容易验证 (193) 对 $e < 3$ 保证了 (191), 而 (191) 对 $e \geqslant 3$ 保证了 (193). 由此可以看到, 当 $2\mu(3+e) = 1$ 时 (即 u_2 和 u_3 两根重合), 关系式 (192) 变为 (见方程 (148))

$$\frac{L^2}{M^2} = 4\frac{(3+e)^2}{(3-e)(e+1)} \text{ 和 } E^2 - 1 = \frac{e^2-1}{9-e^2}. \tag{195}$$

相应地, 对这些特别轨道 e 的允许范围是

$$1 \leqslant e < 3; \tag{196}$$

而对应的近心点距离必定在下列范围内 (见对束缚轨道的范围 (147)),

$$3M < r_p \leqslant 4M. \tag{197}$$

还可以相当一般地看到, 由于第一类轨道 (还有属于虚偏心率型的轨道) 是 "从无限远处到达", 所以还能赋予它们一个碰撞参量 D 和一个无限远处速度 V; 这两个量与 L 和 E 的关系是

$$D^2 = \frac{L^2}{V^2} = \frac{L^2E^2}{E^2-1} \quad \left(E^2 = \frac{1}{1-V^2}\right). \tag{198}$$

转到这些轨道的解析表示, 作与前同样的变换, 即

[115]

$$u = \frac{1}{l}(1 + e\cos\chi). \tag{199}$$

但是, 由于 $e \geqslant 1$, 所以

$$u = 0 \text{ 当 } \chi = \cos^{-1}(-e^{-1}) = \chi_\infty(\text{比如说}). \tag{200}$$

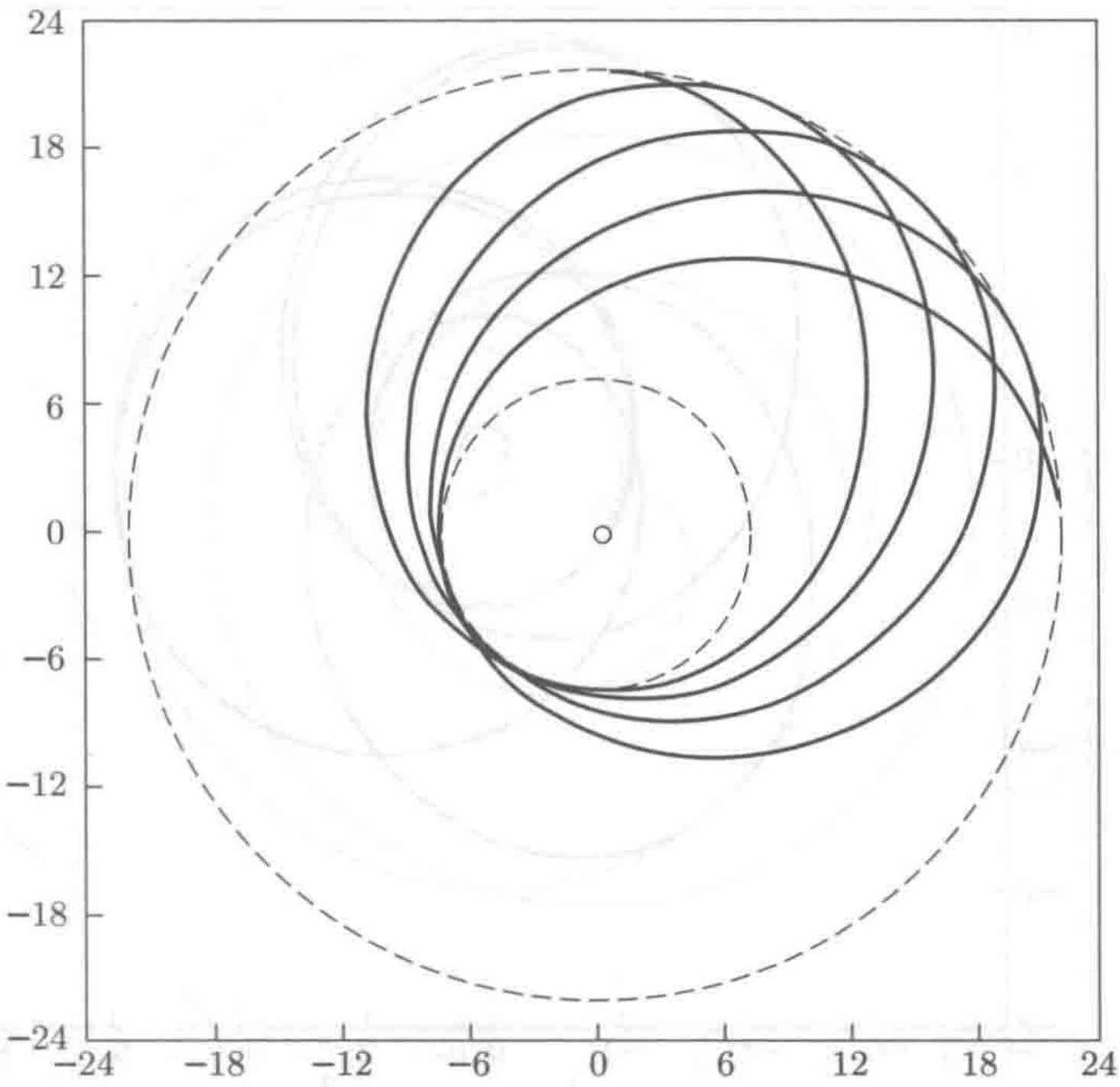
但当 $\chi = 0$ 时近心点行程仍会发生. 所以 χ 的允许范围是

$$0 \leqslant \chi < \chi_\infty = \cos^{-1}(-e^{-1}). \tag{201}$$

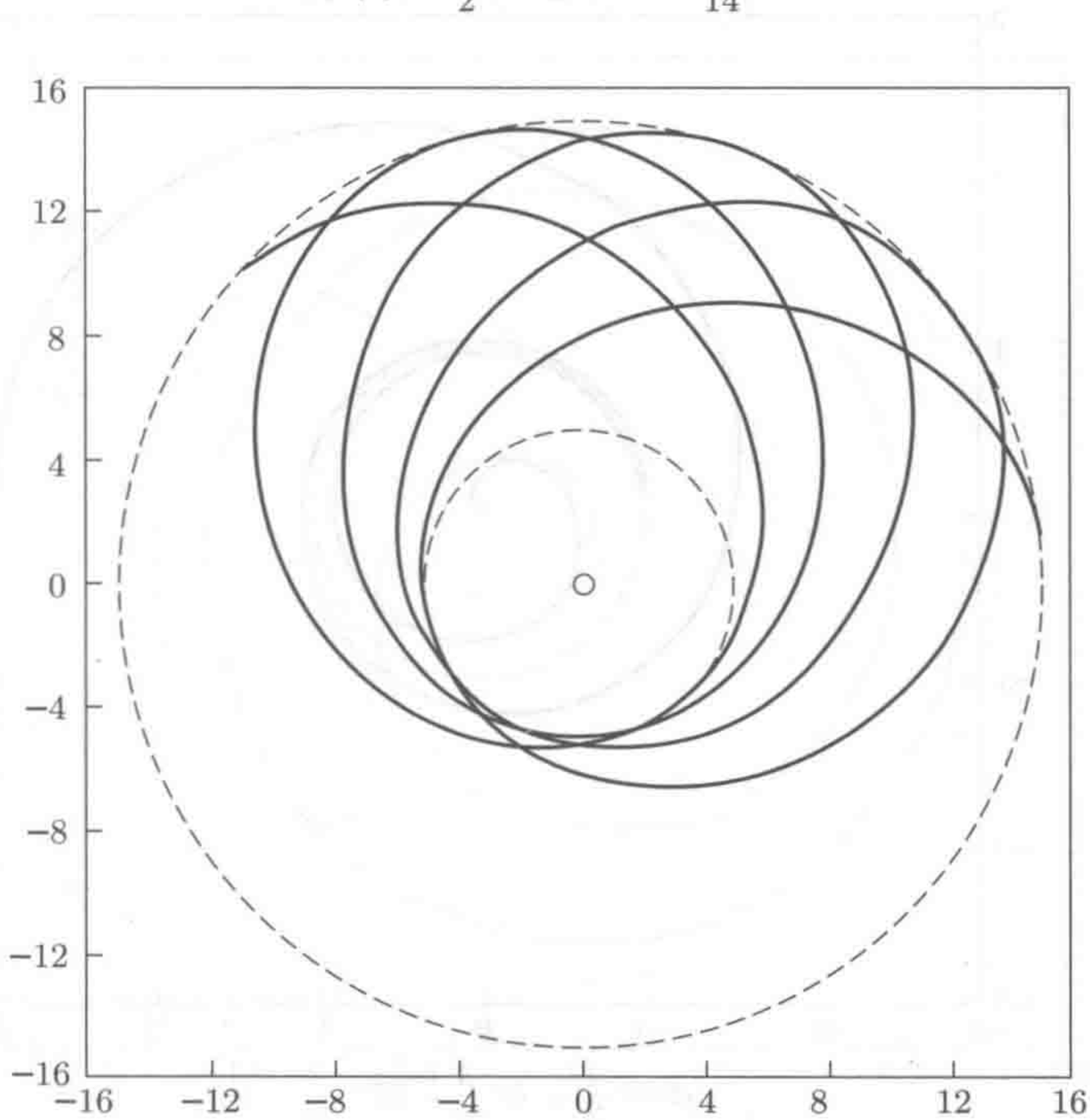
除了对 χ 范围的这个限制外, § (b, i) 中的分析依然适用和成立, χ 的解也可用具有同样模数 k 的椭圆积分 (130) 来表示. 记住对 χ 范围的限制, 现在可将 φ 的解写为如下形式 (见方程 (132)):

$$\varphi = \frac{2}{(1-6\mu+2\mu e)^{1/2}}\left[K(k) - F\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\chi, k\right)\right]. \tag{202}$$

[116]

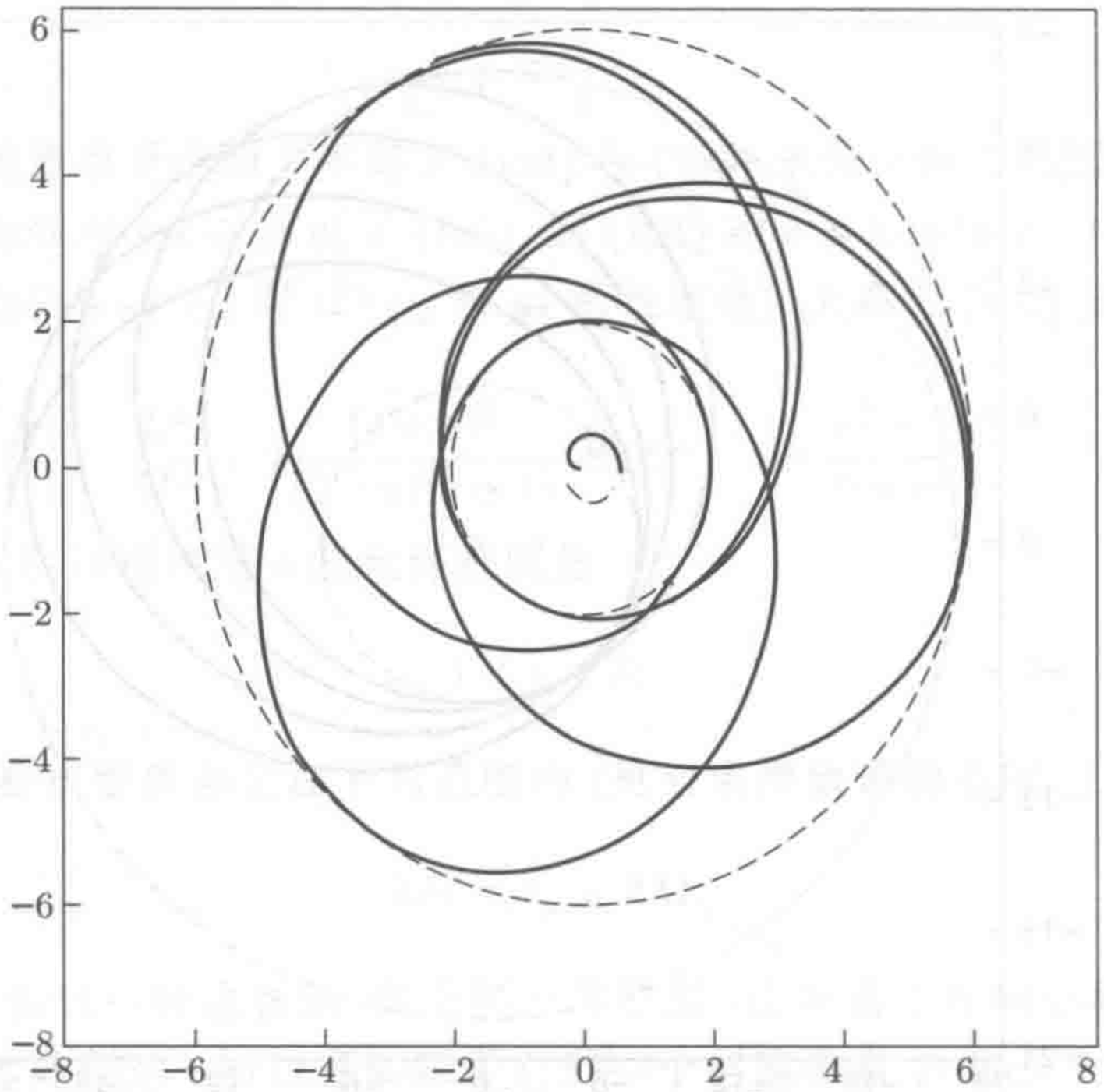


(a)$e=\frac{1}{2}$, $l=11$, $M=\frac{3}{14}$

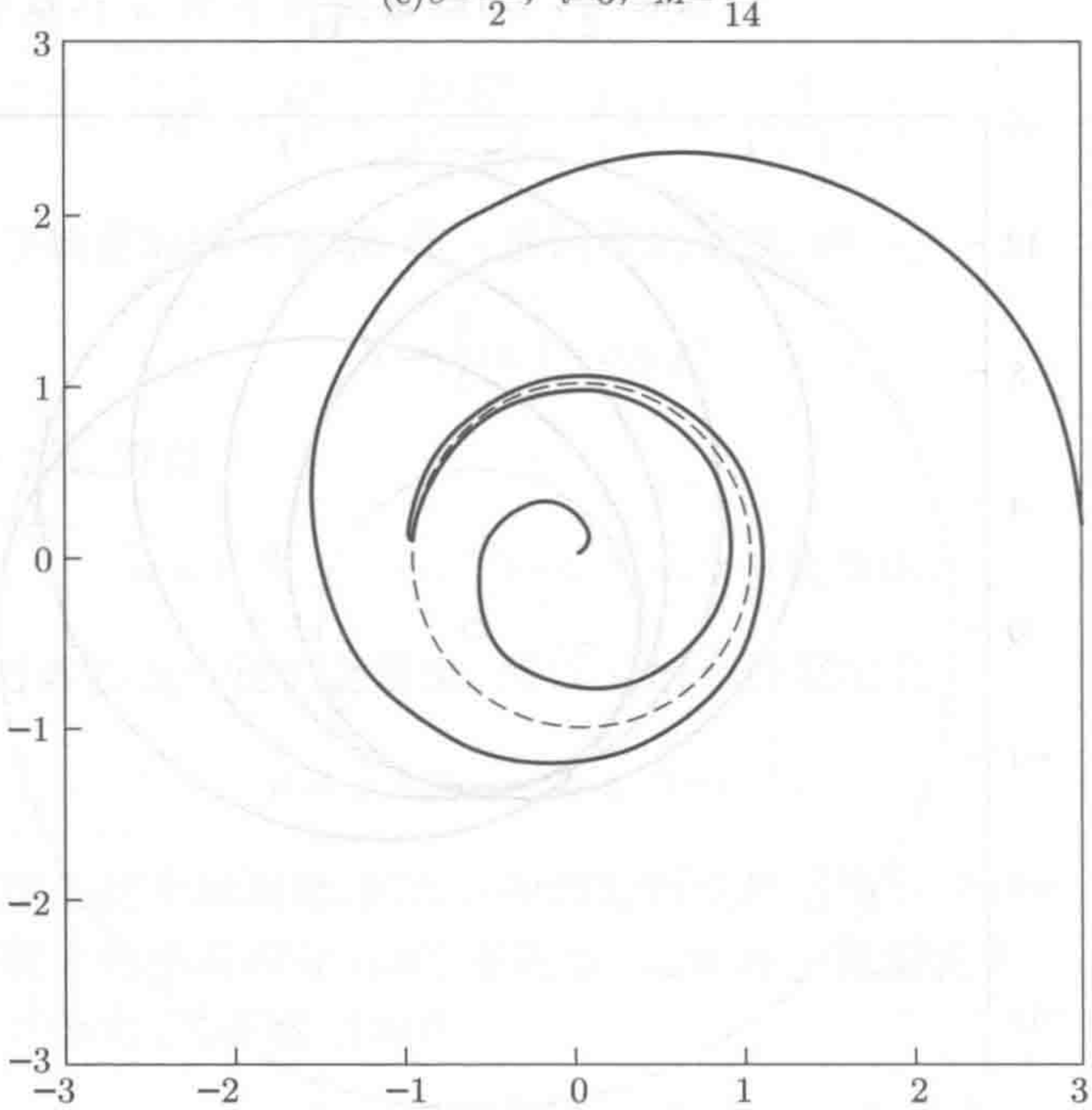


(b)$e=\frac{1}{2}$, $l=7.5$, $M=\frac{3}{14}$

[117]

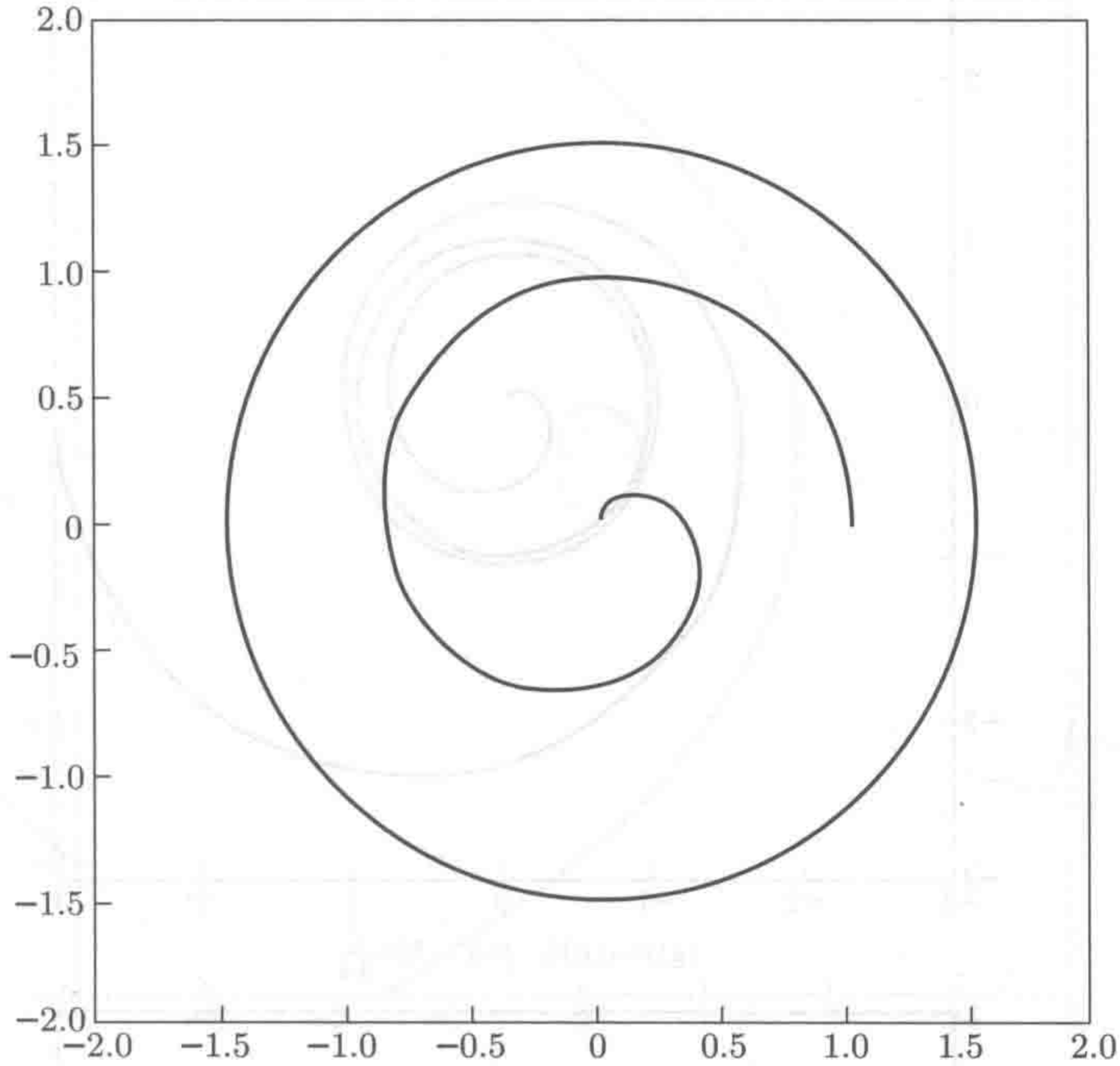


(c) $e=\frac{1}{2}$, $l=3$, $M=\frac{3}{14}$

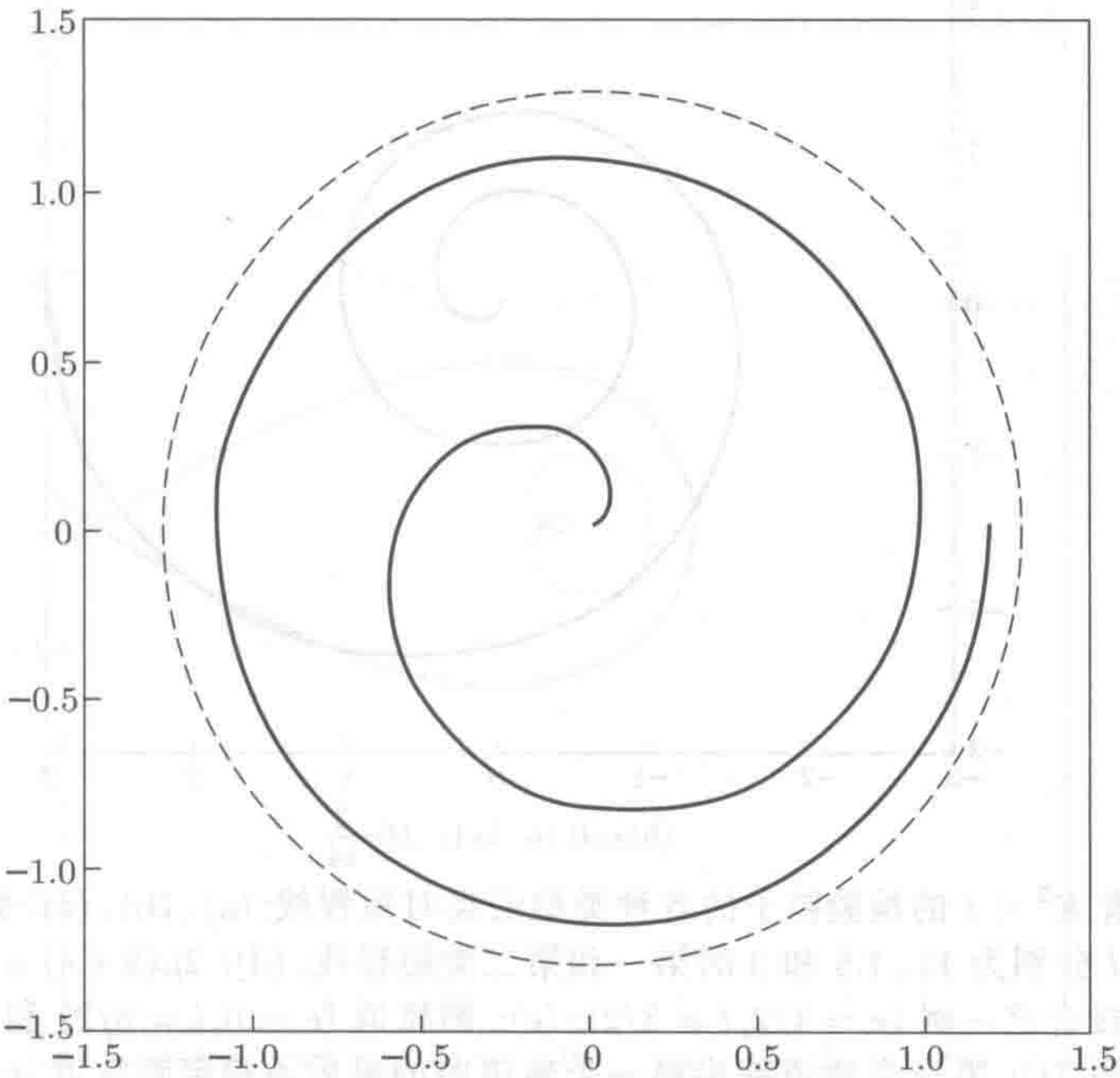


(d) $e=\frac{1}{2}$, $l=\frac{3}{2}$, $M=\frac{3}{14}$

[118]

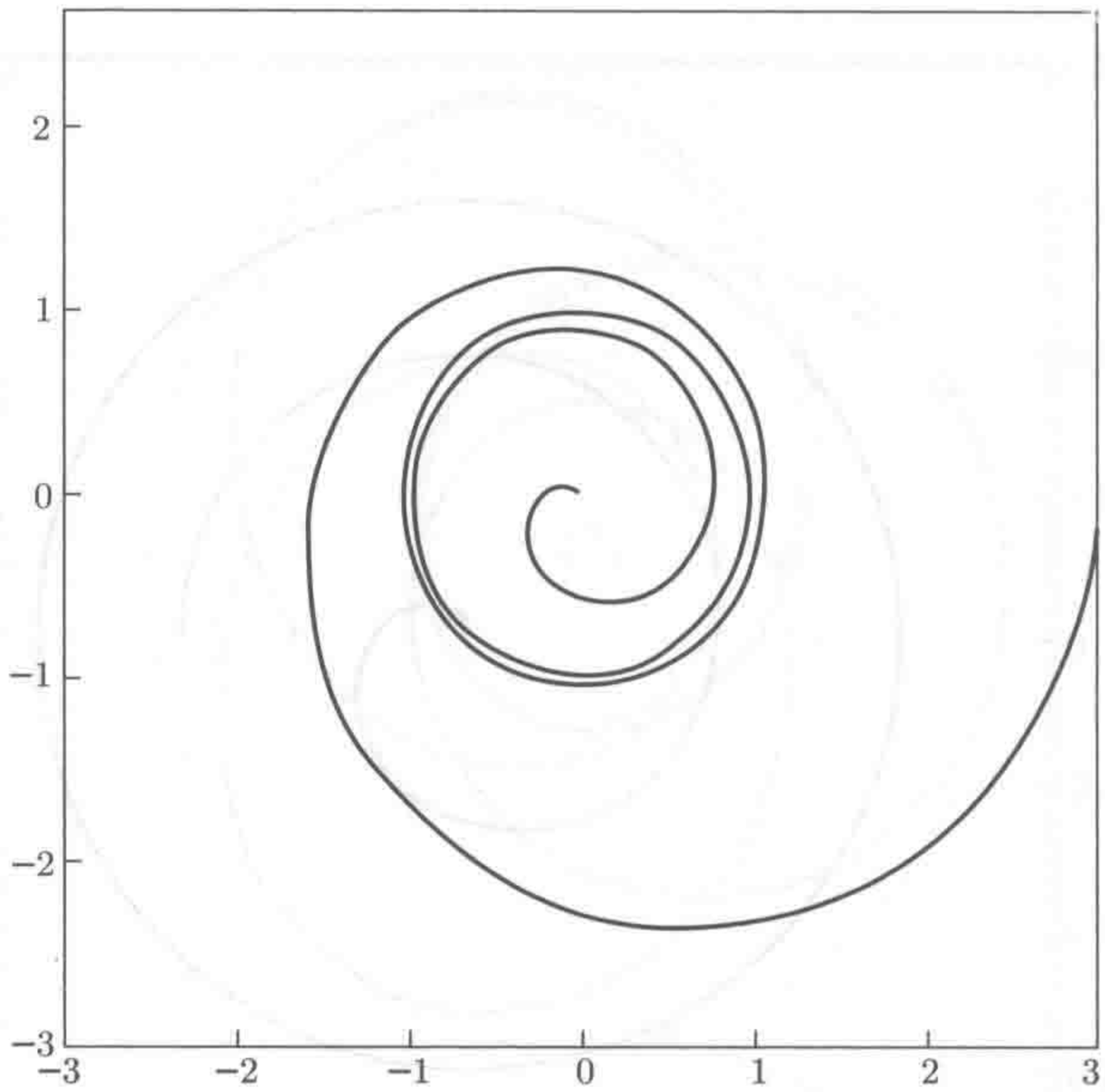


(e) $e=0$, $l=\dfrac{3}{2}$, $M=\dfrac{3}{14}$

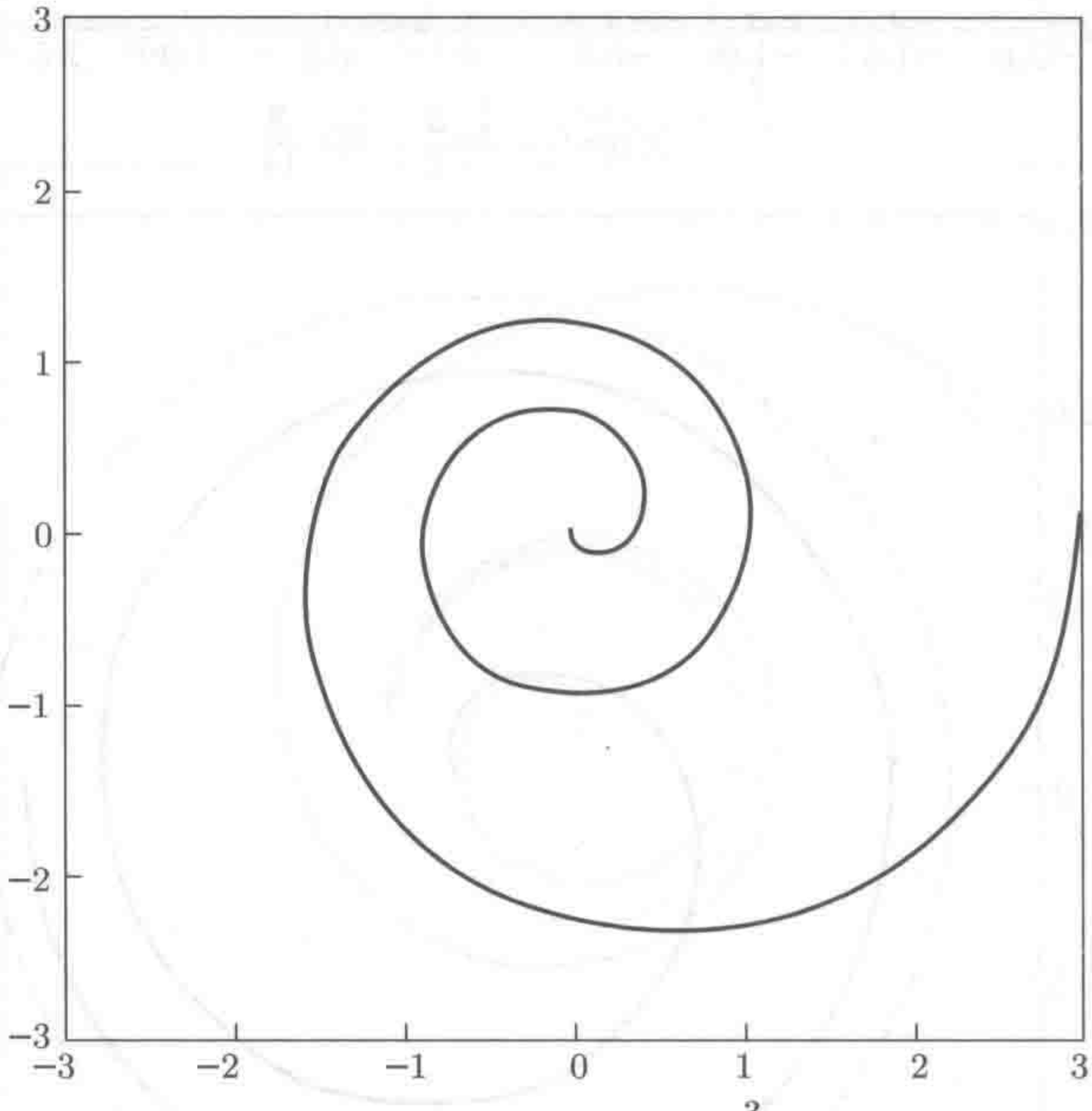


(f) $e=0$, $\mu=\dfrac{1}{6}$, $M=\dfrac{3}{14}$

[119]



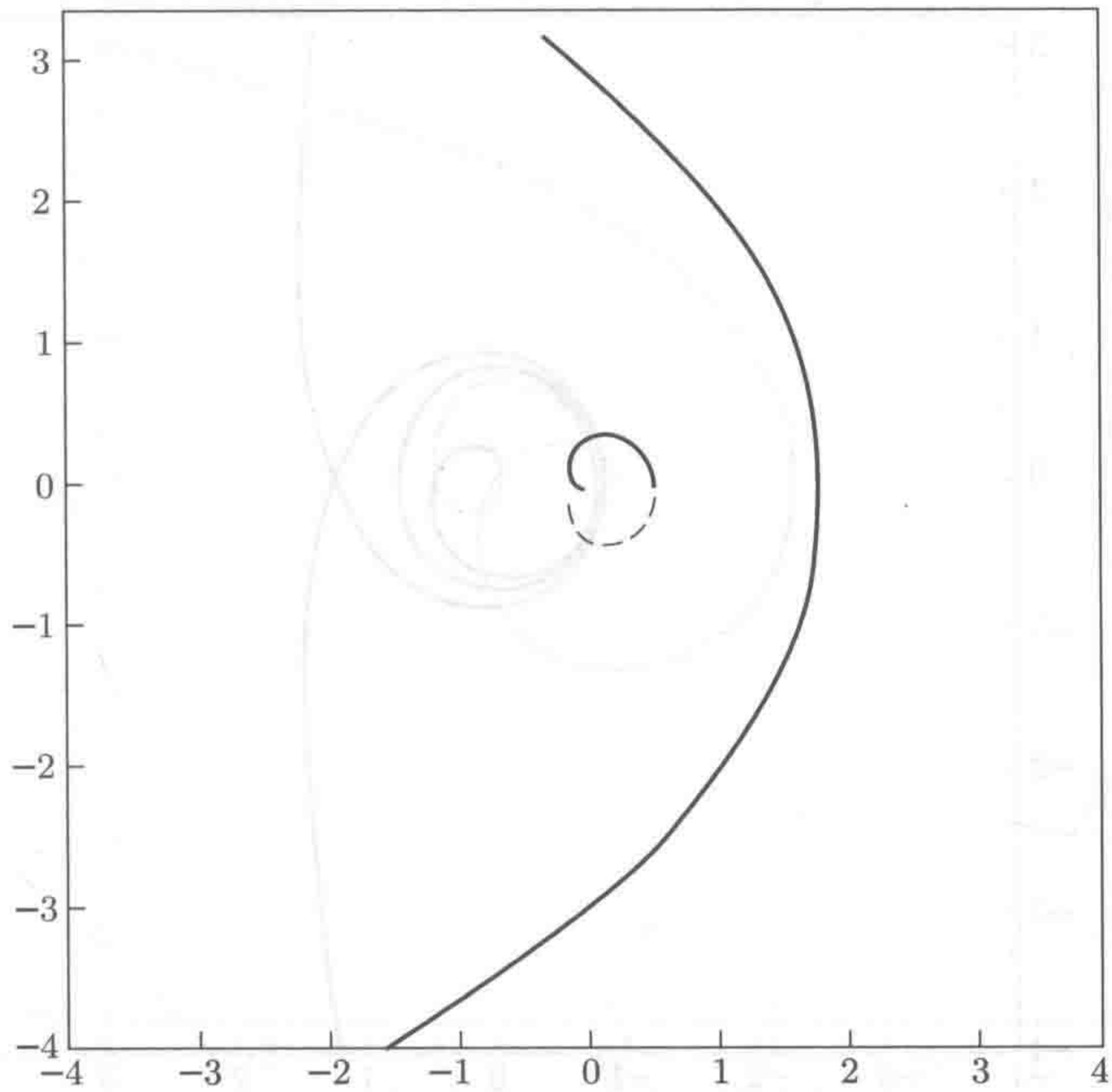
(g)e=0.01i，l=1，M=$\frac{3}{14}$



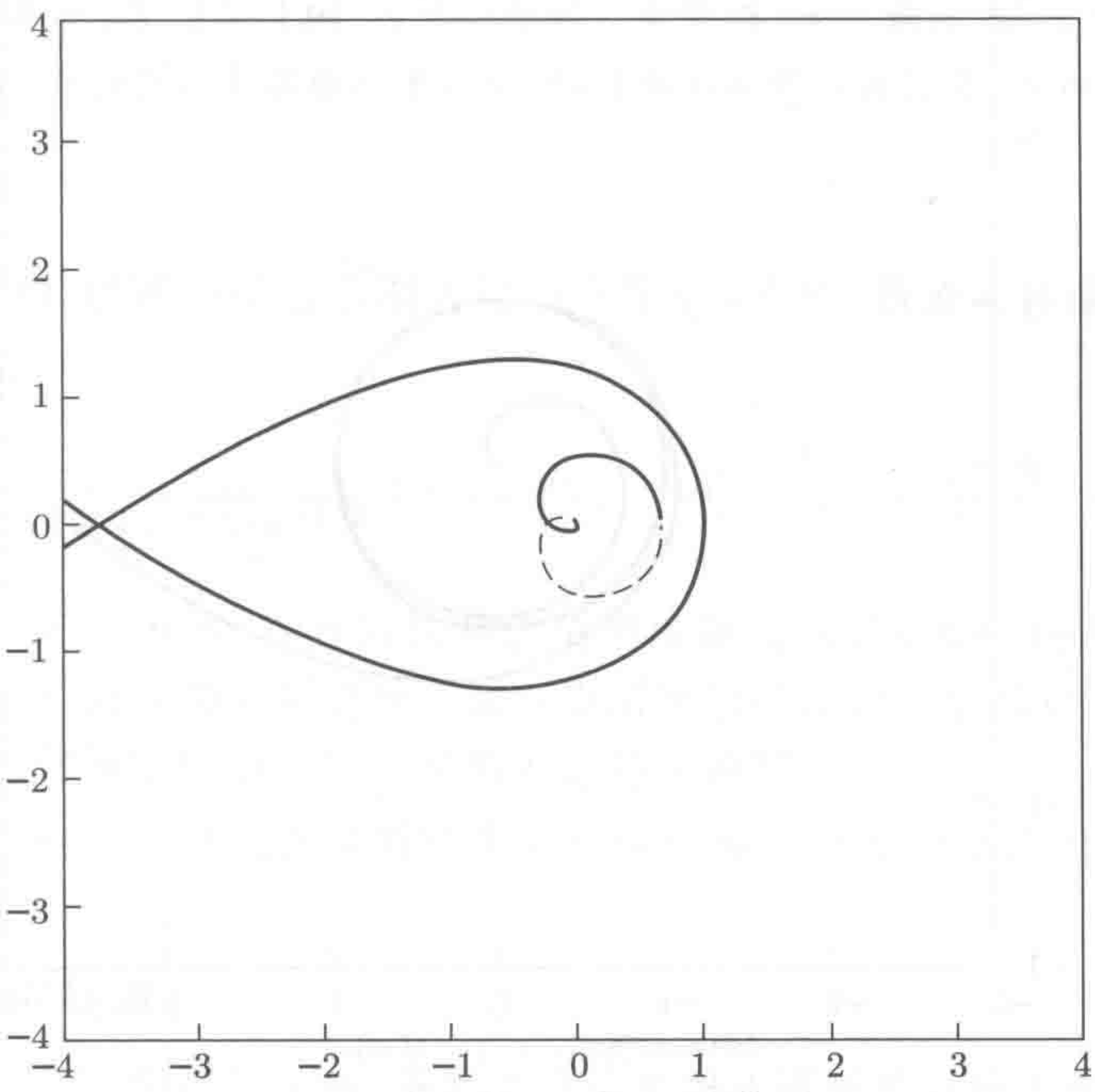
(h)e=0.1i，l=1，M=$\frac{3}{14}$

图 7a. 有着 $E^2 < 1$ 的检验粒子的各种类型的类时短程线: (a)、(b)、(c): 偏心率 $e = 1/2$ 和正焦弦 l 分别为 11、7.5 和 3 的第一和第二类短程线; (d): $2\mu(3 + e) = 1$ 时第一和第二类轨道接合之一例 $(e = 1/2, l = 3/2)$; (e): 圆轨道 $(e = 0, l = 3/2)$ 和相关的第二类轨道之一例; (f): 第二类轨道旋出第一类轨道时的最后不稳定圆轨道 $(e = 0, \mu = 1/6)$; (g)、(h): $l = 1$ 和虚偏心率 e 分别为 0.01i 和 0.1i 的束缚轨道. (所有图中坐标轴以 $M = 3/14$ 为单位)

[120]

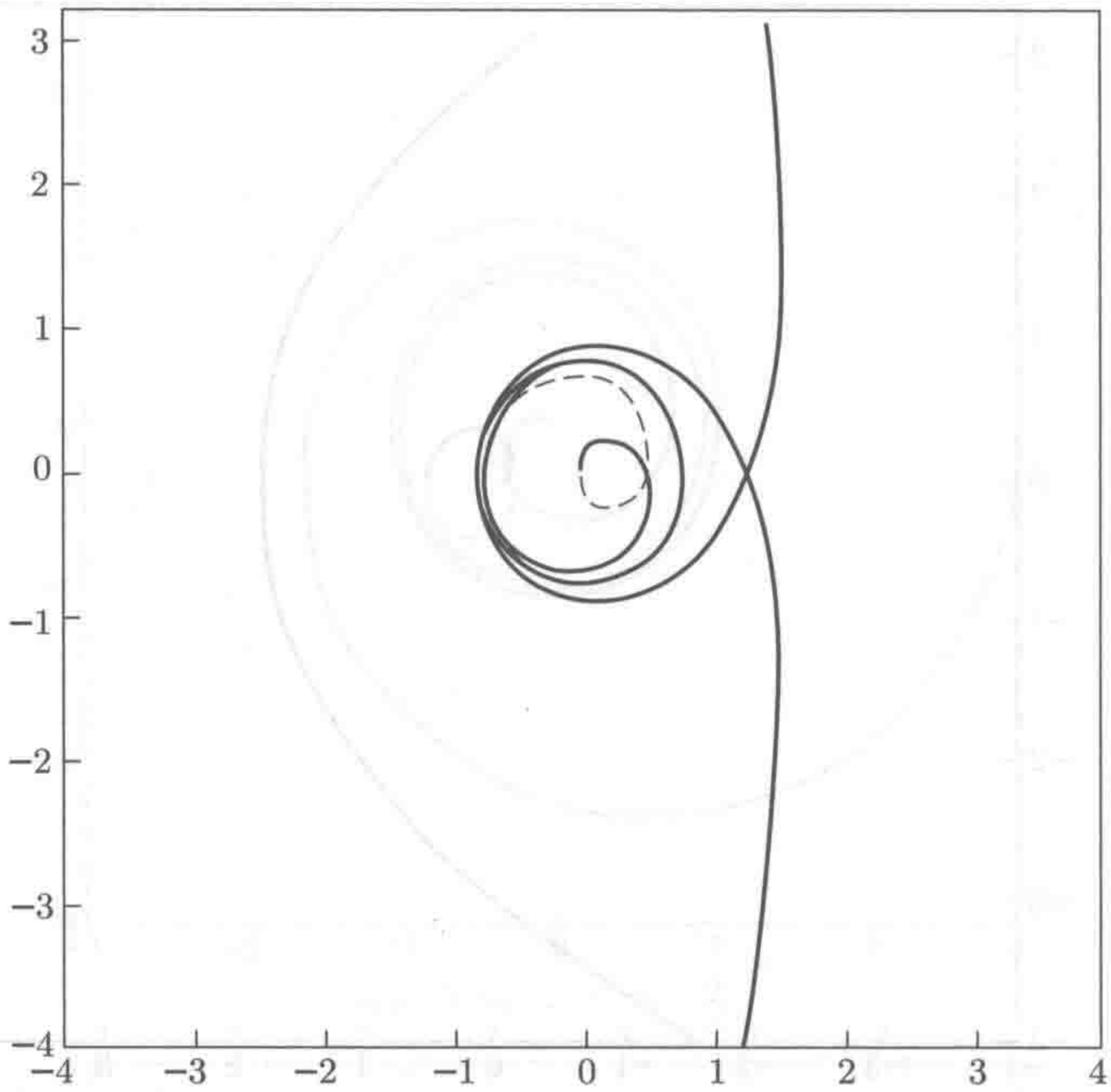


(a) $e=\frac{3}{2}$, $l=4.5$, $M=\frac{3}{14}$

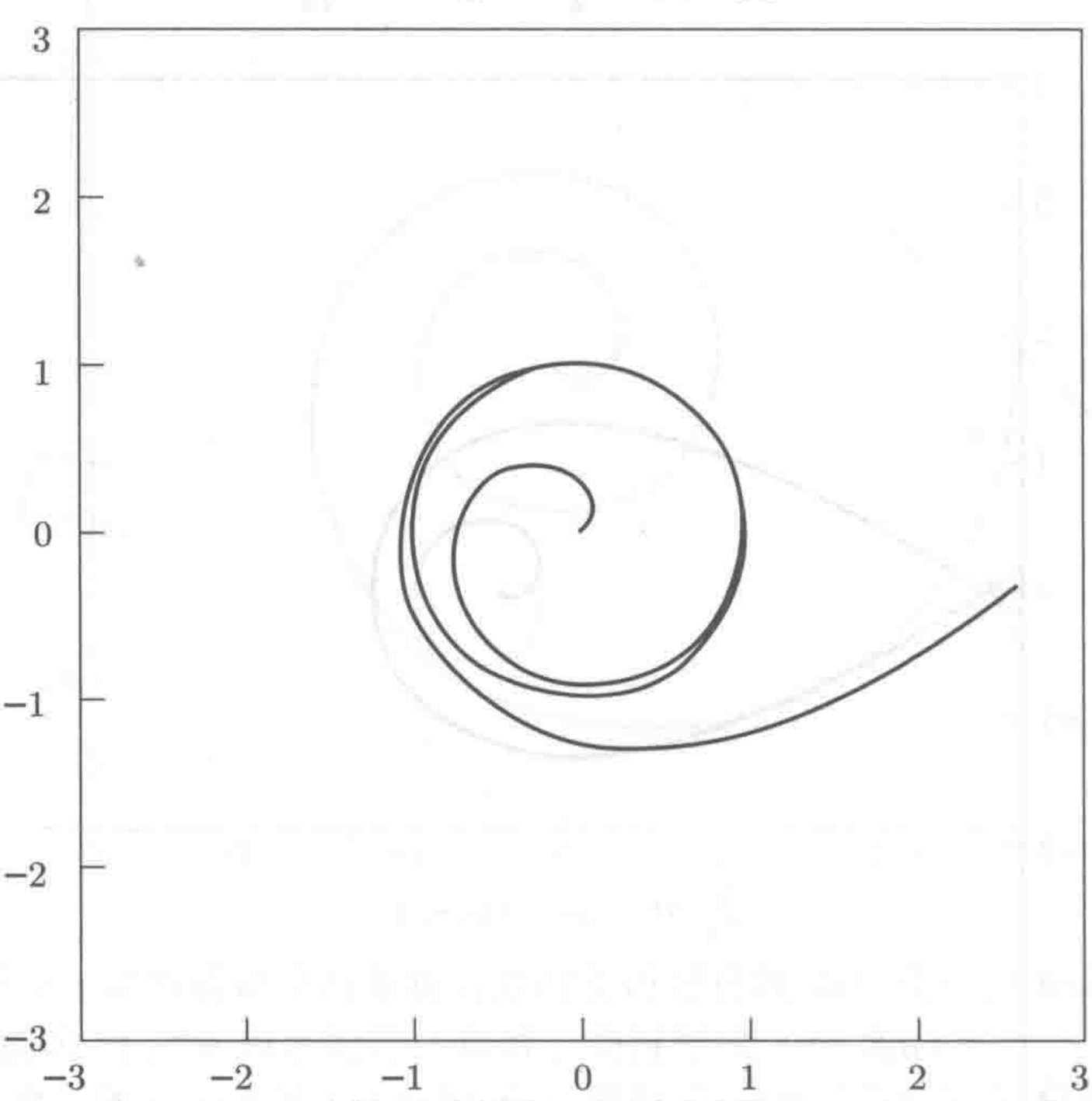


(b) $e=\frac{3}{2}$, $l=\frac{5}{2}$, $M=\frac{3}{14}$

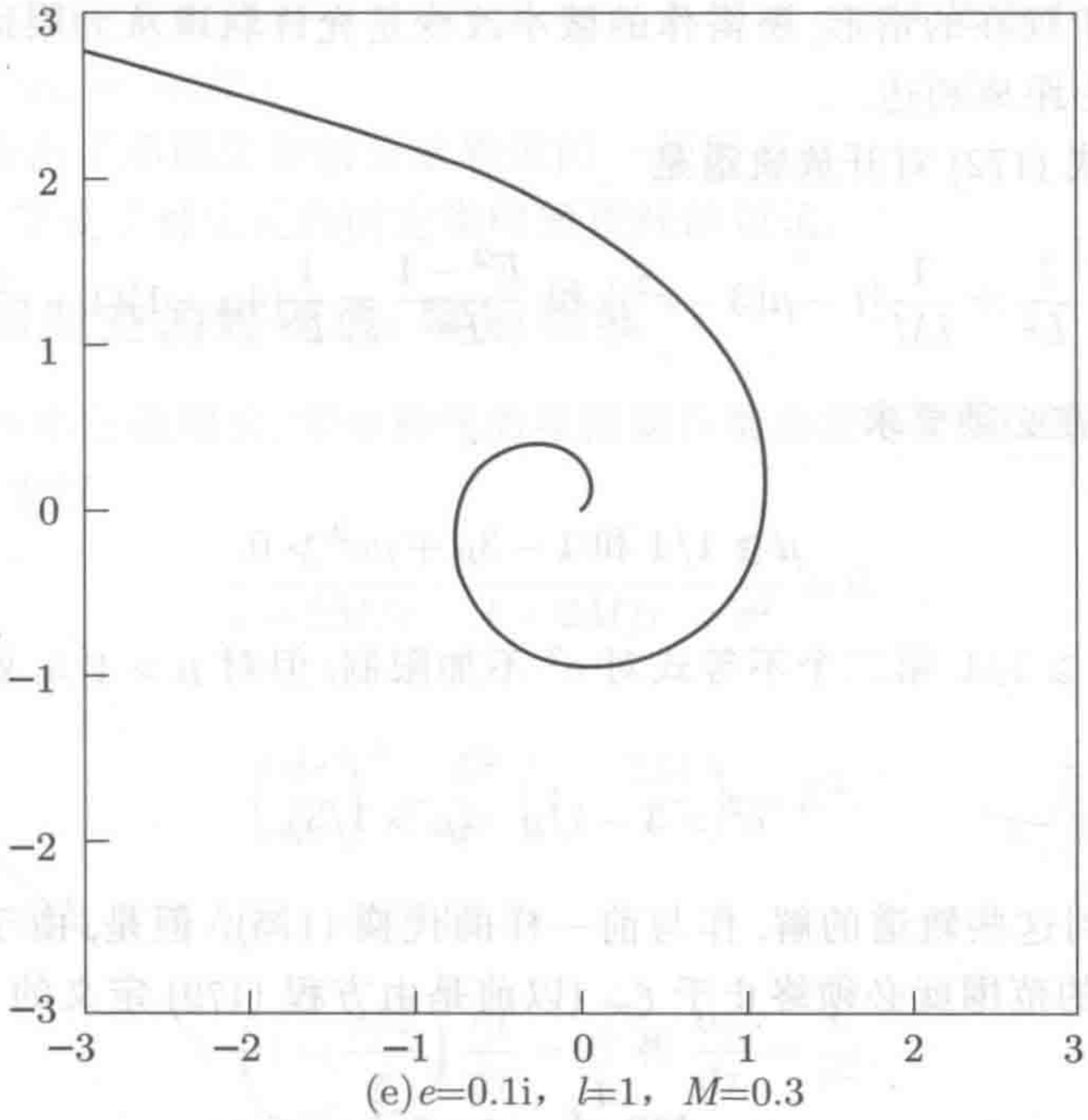
[121]



(c) $e=\frac{3}{2}$, $l=1.94$, $M=\frac{3}{14}$



(d) $e=0.001\mathrm{i}$, $l=1$, $M=0.3$



(e) e=0.1i, l=1, M=0.3

图 7*b*. 有着 $E^2 > 1$ 的检验粒子的各种类型的类时短程线: (a)、(b)、(c): 偏心率 $e = 3/2$ 和正焦弦分别为 4.5、2.5、1.94 的第一和第二类轨道 (坐标轴以 $M = 3/14$ 为单位); (d)、(e): $l = 1$ 并分别具有虚偏心率 $e = 0.001\mathrm{i}$ 和 $0.1\mathrm{i}$ 的开放轨道 (坐标轴以 $M = 0.3$ 为单位).

在写出上式时, 已将 φ 的起点取为近心点即 $\chi = 0$ 处. 轨道向外渐近地延至无限远, 朝向是

$$\varphi = \varphi_\infty = \frac{2}{(1 - 6\mu + 2\mu e)^{1/2}}[K(k) - F(\psi_\infty, k)] \quad \left(\psi_\infty = \frac{1}{2}\cos^{-1} e^{-1}\right). \quad (203)$$

当两个根 u_2 和 u_3 重合时这些轨道的极限情形是由同一方程 (150) 描述 (再次除了对 χ 范围的限制之外). 如对束缚轨道已讲述过的那样, 开放轨道也围绕 r_p 上的圆螺旋转动无数次并渐近地趋于该圆.

§ (*b*, ii) 中关于第二类束缚轨道的讨论没有任何改变地适用于开放轨道, 所要注意的只是 $e \geqslant 1$.

(ii) 虚偏心率轨道

如在§ (*b*, iii) 中已显示的, 落到奇点的束缚轨道能最好地由虚偏心率来表征. 类似地落到奇点的开放轨道同样也能由虚偏心率表征; § (*b*, iii) 中的分析

也能适用于现在的情形, 所需作的微小改变是允许轨道从无限远处而不是从有限的远心距离到达.

关系式 (172) 对开放轨道是

$$\frac{1}{L^2}=\frac{1}{lM}[1-\mu(3-e^2)] \text{ 和 } \frac{E^2-1}{L^2}=\frac{1}{l^2}(4\mu-1)(1+e^2). \tag{204}$$

[122] 相应地, 现在必须要求

$$\mu\geqslant 1/4 \text{ 和 } 1-3\mu+\mu e^2>0. \tag{205}$$

对 $1/3\geqslant\mu\geqslant 1/4$, 第二个不等式对 e^2 不加限制; 但对 $\mu>1/3$, 就需要加以限制

$$e^2>3-1/\mu \quad (\mu>1/3). \tag{206}$$

为得到这些轨道的解, 作与前一样的代换 (175). 但是, 由于现在的要求 $\mu\geqslant 1/4$, ξ 的范围就必须终止于 ξ_∞ (以前是由方程 (179) 定义的 ξ_0), 那里有

$$\tan\frac{1}{2}\xi_\infty=-e^{-1}, \tag{207}$$

或

$$\sin\frac{1}{2}\xi_\infty=-\frac{1}{\sqrt{1+e^2}} \text{ 和 } \cos\frac{1}{2}\xi_\infty=\frac{e}{\sqrt{1+e^2}}.$$

当 $\xi=\xi_\infty$ 时 u 为零, $\xi<\xi_\infty$ 时 u 为负, 所以当 $\xi\to\xi_\infty+0$ 时有 $u\to 0$ 和 $r\to\infty$. 但是 ξ 的上限 π (当 $u\to\infty$ 和 $r\to 0$) 不受影响. 因此 ξ 的允许范围是

$$\xi_\infty<\xi\leqslant\pi. \tag{208}$$

除了这些改变外, φ 的解可以再次写为 (见方程 (183)、(184) 和 (188))

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\{K(k)-F(\psi,k)\}. \tag{209}$$

如前面的解中一样, φ 的起点也是在奇点 (那里 $\xi=\pi$ 和 $\psi=+\pi/2$). 但是随着轨道外伸到无限远, ψ 的下限即 ψ_∞, 可以通过对方程 (184) 中的 $\sin\frac{1}{2}\xi$ 和 $\cos\frac{1}{2}\xi$ 代入由方程 (207) 给出的适合于 ξ_∞ 的值来得到. 结果是

$$\sin^2\psi_\infty=\frac{1}{\Delta+6\mu-1}\left(\Delta+6\mu-1-2e^2\frac{4\mu-1}{e^2+1}\right). \tag{210}$$

(注意, 方程 (210) 的右边对 $\mu > 1/4$ 是小于 1; 对 $\mu = 1/4$ 是等于 1, 且如束缚轨道那样有 $\psi_\infty = -\pi/2$.)

图 7*b* 给出了不同类型的开放轨道的一些例子.

这样就完成了对史瓦西时空类时短程线的讨论.

20. 史瓦西时空的短程线: 零短程线 [123]

如在§19 中已说明的, 零短程线的拉格朗日量必定等于零. 因此, 方程 (89) 现在必须代之以

$$\frac{E^2}{1-2M/r} - \frac{\dot{r}^2}{1-2M/r} - \frac{L^2}{r^2} = 0, \tag{211}$$

或

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2. \tag{212}$$

这个方程必须与下列方程一起考虑,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{L}{r^2}. \tag{213}$$

再次将 r 视为 φ 的函数, 用 $u = 1/r$ 作为独立变量取代 r, 得到方程 (见方程 (94))

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} = f(u) \text{ (比如说)}, \tag{214}$$

其中

$$D = L/E \tag{215}$$

是碰撞参量. 可见 $f(u)$ 的定义与以前的不同, 它现在没有 u 的线性项, 而且常数项总为正.

(*a*) 径向短程线

对零短程线的讨论由径向短程线开始. 相关的方程是 (见方程 (212) 和 (213))

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm E \text{ 和 } \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E. \tag{216}$$

相应地,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \tag{217}$$

或以积分形式,

$$t = \pm r_* + \text{ 正负常量}. \tag{218}$$

其中

$$r_* = r + 2M \lg\left(\frac{r}{2M} - 1\right). \tag{219}$$

[124] 现在导入的变量 r_* 将在后继的进展中扮演极为重要的角色. 它通常由 (见方程 (74))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}, \tag{220}$$

定义, 其中

$$\Delta = r^2 - 2Mr = r^2 e^{2\nu} \tag{221}$$

是视界函数. 按方程 (219) 定义的 r_* 有

$$r_* \to -\infty \text{ 当 } r \to 2M + 0, \quad r_* \to r \text{ 当 } r \to +\infty. \tag{222}$$

变量 r_* 的重要性体现于这一事实: 其从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的范围覆盖了视界外观测者所能进入的全部时空.

方程 (218) 必须与方程

$$r = \pm E\tau + \text{ 正负常量} \tag{223}$$

对照, 它将 r 与原时 τ 相关联. 方程 (218) 和 (223) 表明, 径向短程线按照自己的原时能够越过视界, 它不会注意到已越过; 但它甚至连到达视界都要用无限长的坐标时: 它的 "去世" 不在视界外观测者的体验范围内. 所有这些都在图 8 中明显可见, 图中绘出了包含在短程线 (217) 之间的零锥.

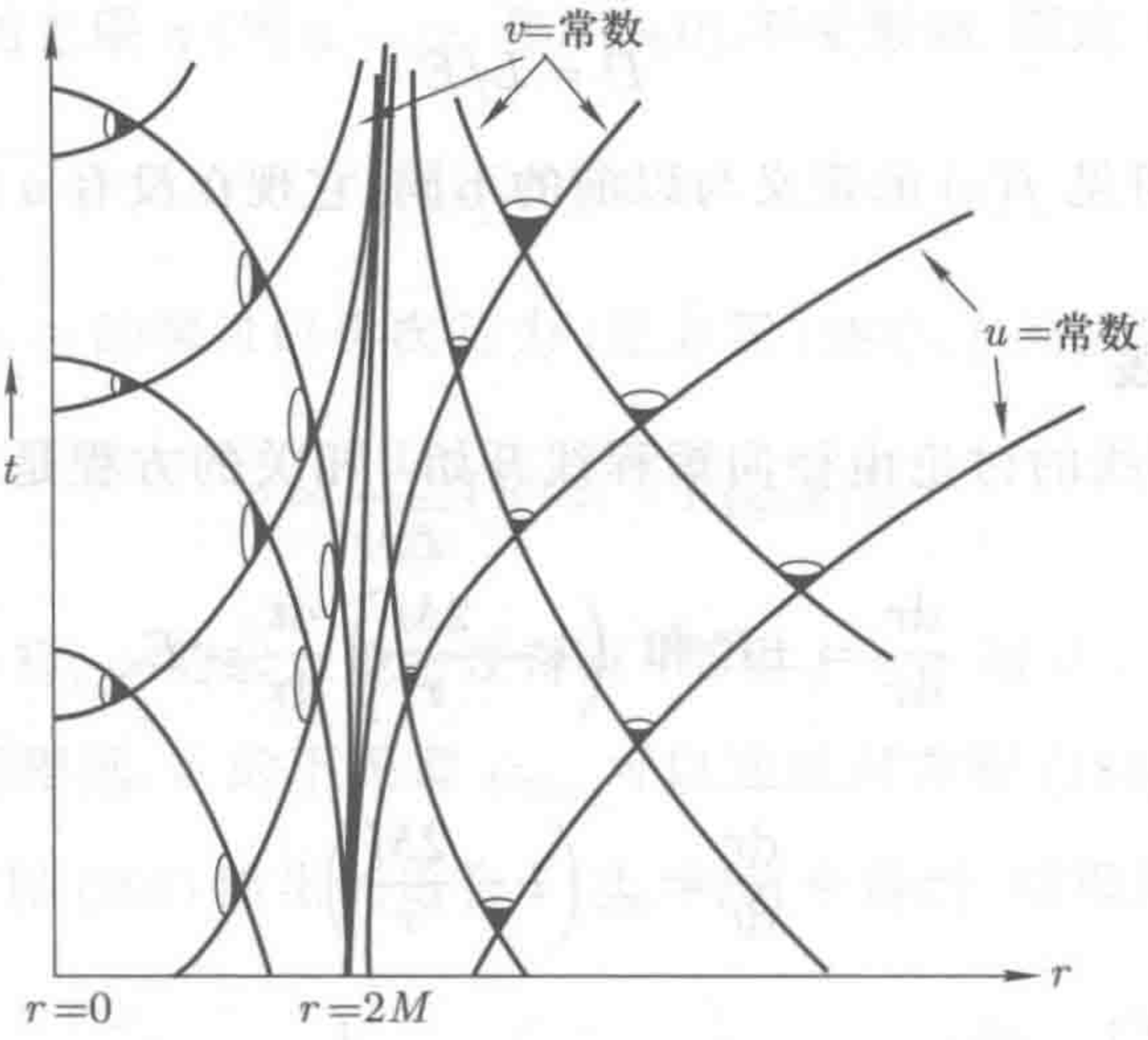


图 8 史瓦西坐标中向内和向外的径向零短程线

与短程线 (217) 相关的正切矢量是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{r^2}{\Delta}E,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\pm E,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=0,\quad \text{和}\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=0. \tag{224}$$

在§21 中将看到, 这些零矢量提供了构建在纽曼 – 彭罗斯形式中描述史瓦西时空所需的零四次标架的基.

(*b*) 临界轨道

回到一般方程 (214), 首先考虑必须区分的不同情形. 它们很显然与下列三次方程根的性质有关,

$$f(u)=2Mu^3-u^2+\frac{1}{D^2}=0. \tag{225}$$

这个方程的根 u_1、u_2 和 u_3 的和和积由下式给出:

$$u_1+u_2+u_3=\frac{1}{2M}\ \text{和}\ u_1u_2u_3=-\frac{1}{2MD^2}. \tag{226}$$

方程 $f(u)=0$ 显然必须允许一个负的实根, 而其它两个根可以是实数 (不同或重合) 或一对共轭复数. 所以, 必须区分的不同情形基本上与开放类时轨道一样. 现在, 两个正实根[①]重合的情形对零短程线的区分起着特别的决定性作用. 因此首先考虑这个关键性的情形. [125]

两个重合根出现的条件可如下得出. 方程 (225) 的导数, 即

$$f'(u)=6Mu^2-2u=0, \tag{227}$$

允许 $u=(3M)^{-1}$ 作为一个根; 而如果

$$D^2=27M^2\ \text{或}\ D=(3\sqrt{3})M, \tag{228}$$

则 $u=(3M)^{-1}$ 也是方程 (225) 的根 (其实是双根). 由根的乘积条件, 可推断出 $f\ (u)=0$ 的根是 [126]

$$u_1=-1/6M\ \text{和}\ u_2=u_3=1/3M\ \text{和}\ D=(3\sqrt{3})M. \tag{229}$$

另外, 当 D 有值 (228) 时, 对 $u=(3M)^{-1}$ 有 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi$ 为零. 因此, 半径为 $3M$ 的圆轨道是一条允许的零短程线. 但是这个圆轨道不可能是稳定的. 它在零短程线族中的地位可以由考虑适合于这一情形的完整方程来理解, 即

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=2M\left(u+\frac{1}{6M}\right)\left(u-\frac{1}{3M}\right)^2. \tag{230}$$

① 由 $u_1+u_2+u_3=0$ 可知三个负的实根是不可能的.

可以验证这个方程适合于

$$u = -\frac{1}{6M} + \frac{1}{2M}\tanh^2\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0), \tag{231}$$

其中 φ_0 是积分常数. 如果 φ_0 是选为

$$\tanh^2\frac{1}{2}\varphi_0 = \frac{1}{3}, \tag{232}$$

则有

$$u = 0 \text{ 和 } r \to \infty \text{ 当 } \varphi = 0. \tag{233}$$

但还要注意

$$u = \frac{1}{3M} \quad \text{当 } \varphi \to \infty. \tag{234}$$

所以, 碰撞参量为 $D = (3\sqrt{3})M$、来自无限远处的零短程线围绕半径为 $3M$ 的圆螺旋转动并渐近地趋于该圆.

必定还有一个 "第二类轨道" 与轨道 (231) 相关联, 它从奇点起始, 在 $r = 3M$ 的同一个圆的相反一侧围绕该圆螺旋转动并渐近地趋于该圆. 这样一个轨道可由

$$u = \frac{1}{3M} + \frac{1}{2M}\tan^2\frac{1}{2}\xi \tag{235}$$

代入同一方程 (230) 得到. 于是该方程简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \sin^2\frac{1}{2}\xi; \tag{236}$$

可取

$$\varphi = 2\lg\left(\tan\frac{1}{4}\xi\right) \text{ 或 } \tan\frac{1}{4}\xi = e^{\varphi/2} \tag{237}$$

[127] 作为合适的解. 将这个解代入方程 (235), 得

$$u = \frac{1}{3M} + \frac{2e^{\varphi}}{M(e^{\varphi}-1)^2}. \tag{238}$$

沿这个轨道

和

$$\left.\begin{aligned} &u \to \infty \text{ 和 } r \to \infty \text{ 当 } \varphi \to 0 \\ &u \to (3M)^{-1} \text{ 当 } \varphi \to \infty; \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

该轨道的相应属性已如所述. 如在§19 (b, ii) 的类似内容里已说明的, φ 的符号相反时的解 (239) 可视为解 (231) 的 "延续".

图 9 绘出了所能发生的零短程线的各种类型.

(i) 回避锥

在任何一点都能定义一个 "回避锥", 其产生者是由方程 (230) 的解 (231) 描述的、通过该点的零线, 其意是, 如在一般基础上很清楚并将在下文§ (*e*) 中解析地论证的, 包含在锥里的光线必定穿过视界而被捕获.

用 ψ 标记锥 (在大距离处向内) 的半张角, 于是

$$\cot\psi = +\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\widetilde{r}}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{240}$$

其中

$$\mathrm{d}\widetilde{r} = (1-2M/r)^{-1/2}\mathrm{d}r \tag{241}$$

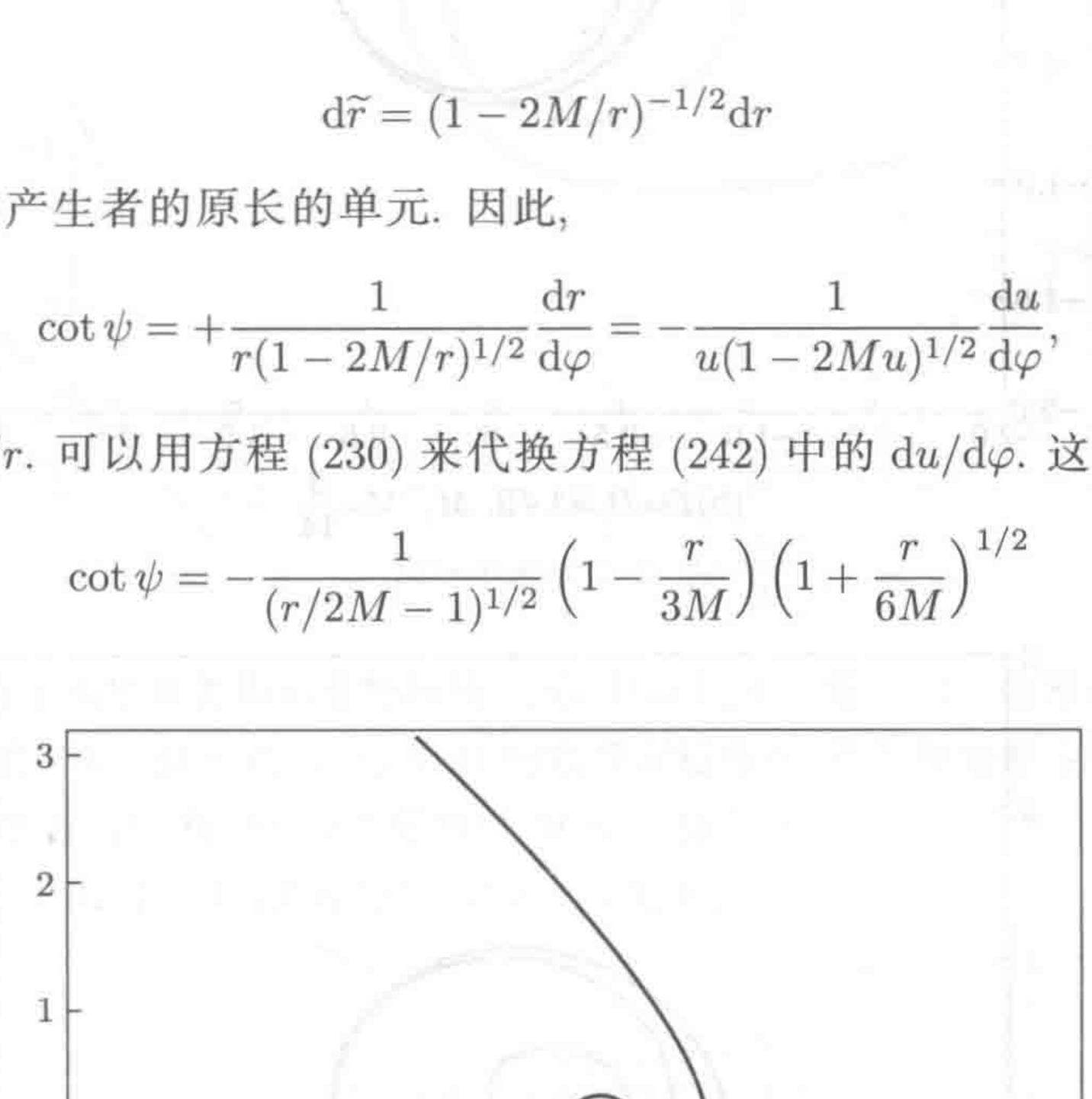
是沿着锥的产生者的原长的单元. 因此,

$$\cot\psi = +\frac{1}{r(1-2M/r)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{1}{u(1-2Mu)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}, \tag{242}$$

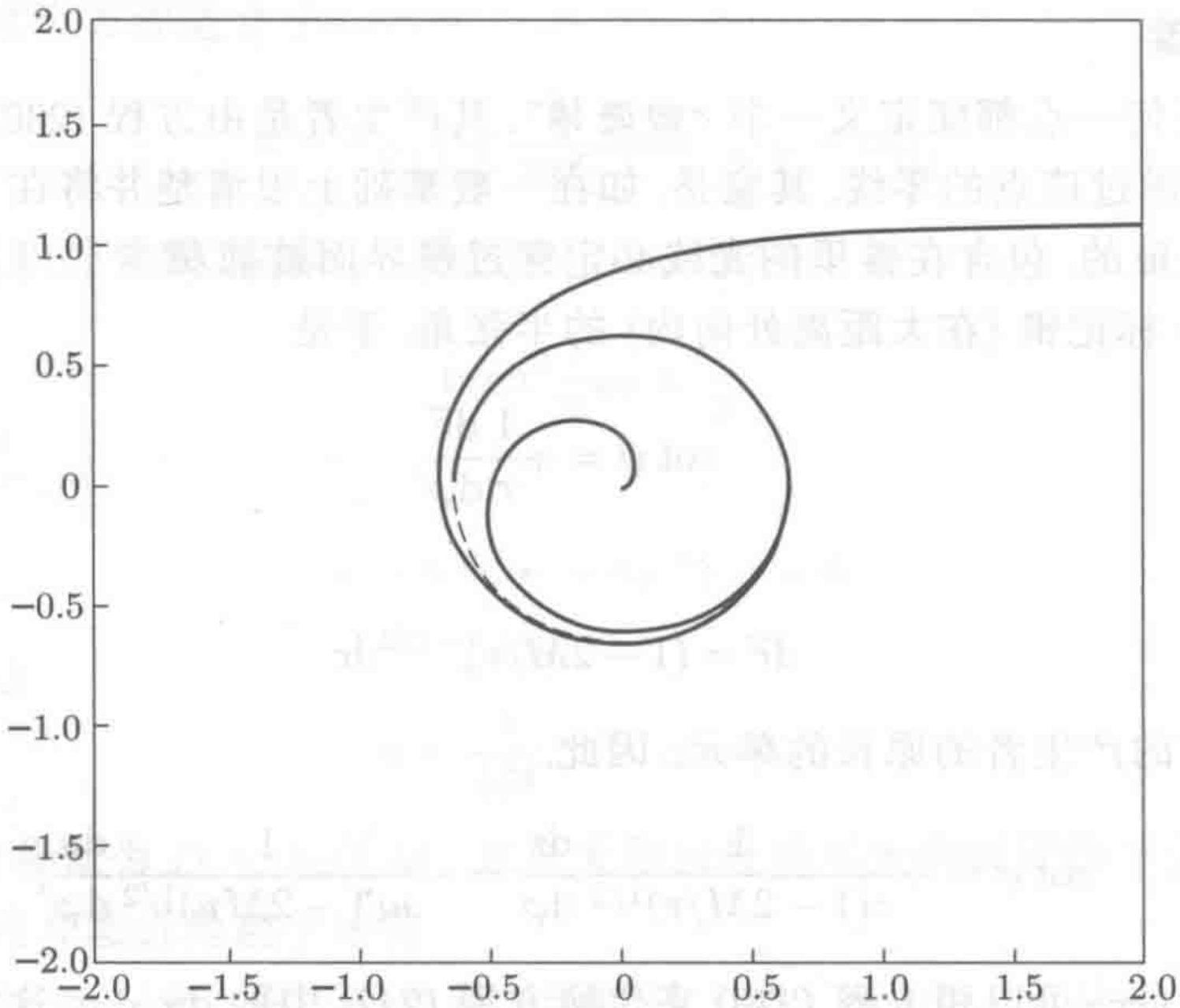
其中 $u=1/r$. 可以用方程 (230) 来代换方程 (242) 中的 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\varphi$. 这样就得到

$$\cot\psi = -\frac{1}{(r/2M-1)^{1/2}}\left(1-\frac{r}{3M}\right)\left(1+\frac{r}{6M}\right)^{1/2} \tag{243}$$

[128]

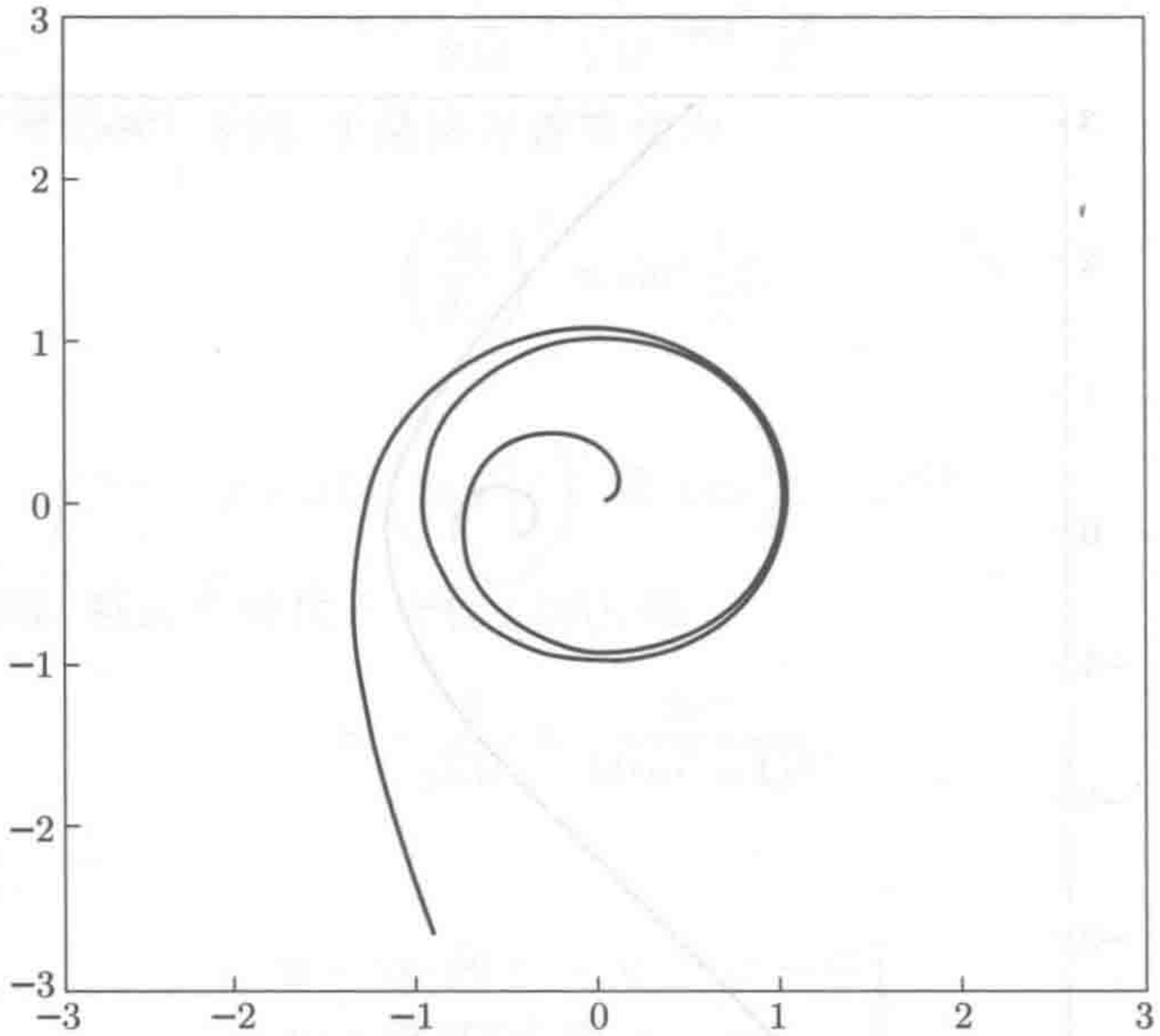


(a)P=1, M=$\frac{3}{14}$

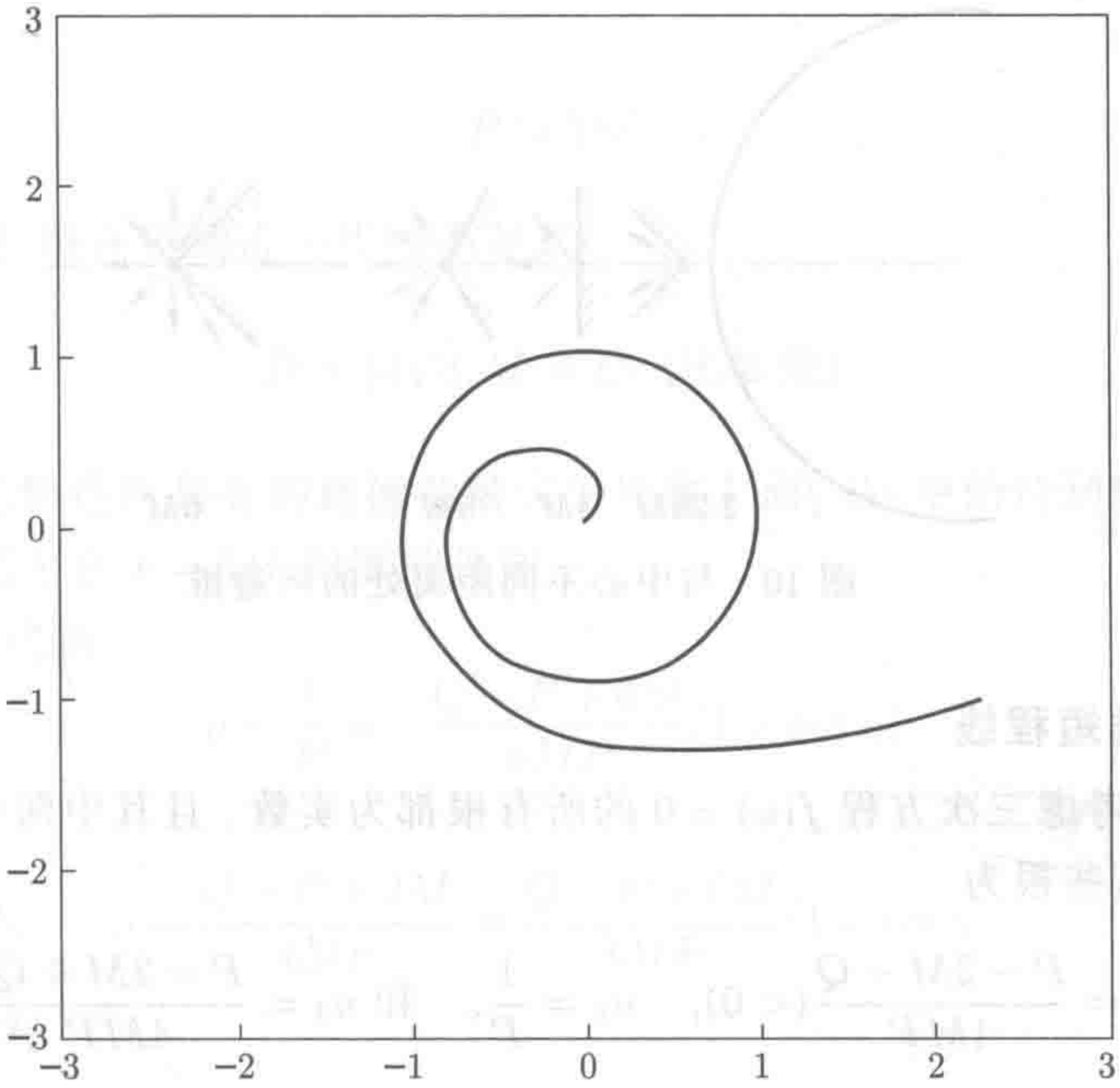


(b)$D=D_c=3\sqrt{3}.\ M,\ \ M=\dfrac{3}{14}$

[129]



(c)$e=0.001\mathrm{i}\ ,\ \ l=1,\ \ \ M=\dfrac{1}{3}$



(d)e=0.01i，l=1，M=$\frac{1}{3}$

图 9　史瓦西度规里各类型的零短程线: (a): $P=1$ (见方程 (251)) 的零短程线的第一和第二类轨道; (b): $D=D_c=3\sqrt{3}$. M 的临界零短程线, 两类轨道螺旋地朝向 $3M$ 上的不稳定圆轨道 ((a) 和 (b) 的坐标轴以 $M=3/14$ 为单位); (c)、(d): 虚偏心率轨道 ($e=0.001\mathrm{i}$ 和 $0.01\mathrm{i}, l=1$) (坐标轴以 $M=1/3$ 为单位).

或

$$\tan\psi=\frac{(r/2M-1)^{1/2}}{(r/3M-1)(r/6M+1)^{1/2}}. \tag{244}$$

由最后一个方程可得 .

$$\left.\begin{array}{l}\psi\sim\dfrac{3\sqrt{3}}{r}M \text{ 当 } r\to\infty;\psi=\dfrac{1}{2}\pi \text{ 对 } r=3M,\\ \text{和 } \psi=0 \text{ 对 } r=2M.\end{array}\right\} \tag{245}$$

所以, 回避锥是狭窄的, 在大距离上它的张角是一个半径为 $(3\sqrt{3})M$ 的圆盘的张角. 锥在 $r=3M$ 上完全张开; 对 $r<3M$, 它的指向朝外, 并随 $r\to 2M$ 而变得更窄; 而在 $r=2M$, 一切都被抹掉 (见图 10). [130]

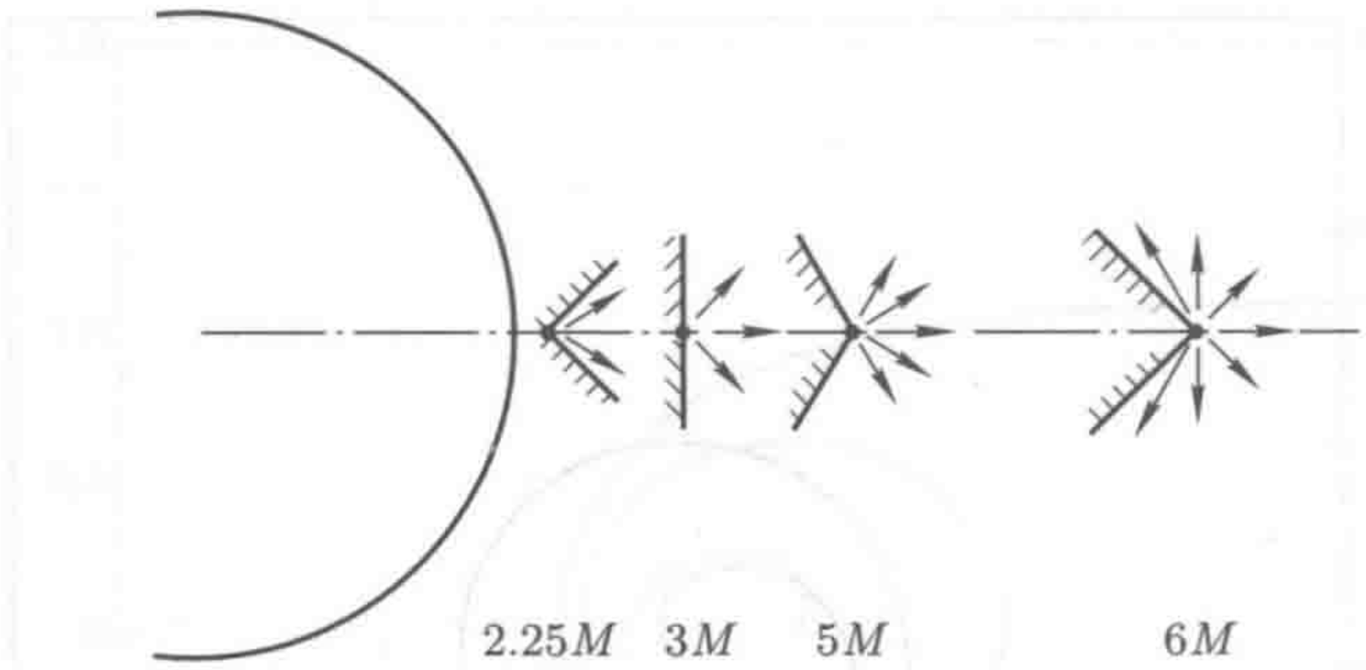


图 10 与中心不同距离处的回避锥

(c) 第一类短程线

现在考虑三次方程 $f(u)=0$ 的所有根都为实数、且其中两个正根不同的情形. 令这些根为

$$u_1=\frac{P-2M-Q}{4MP}(<0),\quad u_2=\frac{1}{P},\quad \text{和 } u_3=\frac{P-2M+Q}{4MP}, \tag{246}$$

其中 P 是近心距离, Q 是一个现在要来确定的常量. 这些根的和已被要求为等于 $1/2M$ (见方程 (226)). 还应注意, 根的顺序 $u_1<u_2<u_3$ 要求

$$Q+P-6M>0. \tag{247}$$

将方程 (246) 的 u_1、u_2 和 u_3 代入

$$f(u)=2M(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \tag{248}$$

并将结果与表示式 (225) 比较, 得关系

$$Q^2=(P-2M)(P+6M) \tag{249}$$

和

$$\frac{1}{D^2}=\frac{1}{8MP^3}[Q^2-(P-2M)^2]. \tag{250}$$

[131] 用这两个关系的第一个, 则第二个简化为

$$D^2=\frac{P^3}{P-2M}. \tag{251}$$

与关系式 (249) 结合, 不等式 (247) 给出

$$(P-2M)(P+6M)>(P-6M)^2, \tag{252}$$

或简化为

$$P > 3M. \tag{253}$$

由方程 (251), 现在得到进一步的不等式

$$D > (3\sqrt{3})M = D_c \text{ (比如说)}. \tag{254}$$

所以, 现在的轨道所具有的碰撞参量大于导致上面§ (b) 中的特别解的临界值. 而且, 它们完全在 $r = 3M$ 的圆的外面.

现在作代换

$$u - \frac{1}{P} = -\frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 + \cos\chi), \tag{255}$$

或等价地,

$$u + \frac{Q - P + 2M}{4MP} = \frac{Q - P + 6M}{8MP}(1 - \cos\chi). \tag{256}$$

由这个代换有

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{1}{P} \text{ 当 } \chi = \pi, \text{ 和} \\ u = 0 \text{ 和 } r \to \infty \text{ 当 } \sin^2\dfrac{1}{2}\chi = \dfrac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} = \sin^2\dfrac{1}{2}\chi_\infty \text{ (比如说)}. \end{array}\right\} \tag{257}$$

代换 (255) 和 (256) 还将方程 (214) 简化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{Q}{P}\left(1 - k^2\sin^2\frac{1}{2}\chi\right), \tag{258}$$

其中

$$k^2 = \frac{1}{2Q}(Q - P + 6M). \tag{259}$$

因此, φ 的解可用雅可比椭圆积分表示为

$$\varphi = 2\left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2}\left[K(k) - F\left(\frac{1}{2}\chi, k\right)\right], \tag{260}$$

其中 φ 的奇点已选为当 $\chi = \pi$ 时的近心点 (见方程 (257)). 当 $r \to \infty$ 时 φ 的 [132]
渐近值是

$$\varphi_\infty = 2\left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2}\left[K(k) - F\left(\frac{1}{2}\chi_\infty, k\right)\right], \tag{261}$$

其中的 χ_∞ 在 (257) 式中给出 (见图 9 (a)).

(i) $P \to 3M$ 和 $P/3M \gg 1$ 时 φ_∞ 的渐近行为

得出 $P \to 3M$ 和 $P/3M \to \infty$ 时 φ_∞ 的渐近行为是有意义的.

首先看到,

$$\left.\begin{array}{c} \text{当 } P = 3M, \text{ 有 } Q = 3M,\ D = (3\sqrt{3})M,\ k^2 = 1, \\ \sin^2\dfrac{1}{2}\chi_\infty = \dfrac{1}{3}, \text{ 和 } F\left(\dfrac{1}{2}\chi_\infty, 1\right) = \dfrac{1}{2}\lg\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}. \end{array}\right\} \tag{262}$$

其次, 由方程 (249)、(251) 和 (259) 可得

$$\text{若 } P = M(3+\delta), \text{ 有 } Q = M\left(3+\frac{5}{3}\delta\right),\ k'^2 = 1-k^2 = \frac{4}{9}\delta,$$

和

$$D = D_c + \delta D \text{ 其中 } \delta D = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) M\delta^2. \tag{263}$$

另外, 有已知的渐近关系,

$$K(k) \to \lg(4/k') = \lg 6 - \frac{1}{2}\lg\delta \quad (k' \to 0). \tag{264}$$

将这些关系代入方程 (261), 可得

$$\varphi_\infty = \frac{1}{2}\lg\left[\frac{6^4\sqrt{3}}{2}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}\right] - \frac{1}{2}\lg\frac{\delta D}{M}, \tag{265}$$

或

$$\frac{\delta D}{M} \to \frac{6^4\sqrt{3}}{2}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}e^{-2\varphi_\infty}. \tag{266}$$

令

$$\varphi_\infty = \frac{1}{2}(\pi + \Theta), \tag{267}$$

得到

$$\frac{\delta D}{M} = 648\sqrt{3}\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)^2}e^{-\pi}e^{-\Theta} = 3.4823e^{-\Theta}; \tag{268}$$

这就是所需的关系.

必须注意, 偏折了由方程 (268) 给出的角 Θ 的短程线, 不仅包括已经经历了这一偏折的那一条, 而且包括所有已经偏折了 $\Theta + 2n\pi (n = 1, 2, \cdots)$ 的那些: 它们具有碰撞参量

$$D_n = D_c + 3.4823Me^{-(\Theta+2n\pi)}. \tag{269}$$

通过类似的 (更简单的) 的论证可得, 对 $P \gg 3M$, 偏折角 Θ (由方程 (267)

定义) 是

$$\Theta \to \frac{4M}{D} \text{ 和 } D \to P\left(1+\frac{M}{P}\right). \tag{270}$$ [133]

上式中的第一个是很著名的, 正是它提供了广义相对论早期的 (和惊人的) 验证之一的基础.

(*d*) 第二类短程线

为得到范围为 $u_3 \leqslant u < \infty$ 的零短程线, 以代换

$$u = \frac{1}{P} + \frac{Q+P-6M}{4MP}\sec^2\frac{1}{2}\chi \tag{271}$$

代替 (255). 由这个代换,

$$\left.\begin{array}{l} \text{当 } u = u_3 = \dfrac{1}{4MP}(Q+P-2M) \text{ 和 } \chi = 0 \text{ 时 } u \text{ 在远心点} \\ \text{当 } \chi = \pi \text{ 时 } u \to \infty \text{ 和 } r \to 0. \end{array}\right\} \tag{272}$$

代换 (271) 将方程 (214) 简化为同样形式 (258), 并有着同样的 k^2 值; 现在可写出 (见方程 (260))

$$\varphi = 2\left(\frac{P}{Q}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}\chi, k\right), \tag{273}$$

其中 φ 的起点是在远心点.

(*e*) 虚偏心率和碰撞参量小于 $(3\sqrt{3})M$ 的轨道

最后, 考虑方程 $f(u)=0$ 有一个负的实根和一对共轭复数根的轨道. 如在§19 (*b*, iii) 中那样, 现在也借助于虚偏心率 ie 将根写成方程 (171) 那样的形式. 将得到的

$$f(u) = 2M\left(u - \frac{1}{2M} + \frac{2}{l}\right)\left[\left(u-\frac{1}{l}\right)^2 + \frac{e^2}{l^2}\right] \tag{274}$$

与方程 (214) 给出的 $f(u)$ 比较, 得出关系

$$l - M(3-e^2) = 0 \text{ 和 } \frac{1}{2MD^2} = \left(\frac{2}{l} - \frac{1}{2M}\right)\frac{1+e^2}{l^2} \tag{275}$$

或者也可以用 $\mu = M/l$, 有

$$e^2 = \frac{1}{\mu}(3\mu - 1) \text{ 和 } \frac{D^2}{M^2} = \frac{1}{\mu(4\mu-1)^2}. \tag{276}$$

这些关系要求 [134]

$$\mu > \frac{1}{3} \text{ 和 } D < (3\sqrt{3})M. \tag{277}$$

可见这些轨道的碰撞参量小于标志着上面§ (c) 中所考虑的轨道的值.

§19 (b, iii) 中的分析现在同样适用, 唯一的不同是 e^2 和 μ 不再是独立参量, 而是有关系: $e^2 = 3 - \mu^{-1}$. 由于这些轨道是开放的, φ 的解也如§19 (c, ii) 中那样由方程 (209) 给出. 特别是,

$$\varphi_\infty = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}[K(k) - F(\psi_\infty, k)], \tag{278}$$

其中 ψ_∞ (通过将 e^2 代之以现在的值 $3 - \mu^{-1}$) 现在由下式给出

$$\sin^2 \psi_\infty = \frac{\Delta + 1}{\Delta + 6\mu - 1}, \tag{279}$$

须记住其中的 $\mu > 1/3$; 并且

$$\Delta = (48\mu^2 - 16\mu + 1)^{1/2}. \tag{280}$$

由方程 (230)、(238)、(260)、(273) 和 (278) 给出的轨道的例子绘于图 9, (c) 和 (d).

这样就完成了有关史瓦西时空短程线的考虑.

21. 史瓦西时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述

对史瓦西时空的考虑将由其在纽曼 – 彭罗斯形式中的描述来结束. 为构造这一描述所需的零四次标架, 从表示径向零短程线的零矢量 (224) 开始. 精确地说, 对纽曼 – 彭罗斯形式的实数零矢量 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$, 取

$$\left.\begin{aligned} l^i &= (l^t, l^r, l^\theta, l^\varphi) = \frac{1}{\Delta}(r^2, +\Delta, 0, 0) \\ \text{和} \qquad n^i &= (n^t, n^r, n^\theta, n^\varphi) = \frac{1}{2r^2}(r^2, -\Delta, 0, 0), \end{aligned}\right\} \tag{281}$$

其中与 (224) 中 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$ 的负号相关联的矢量已乘以 $\Delta/2r^2$, 以满足所需的正交条件

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = 1. \tag{282}$$

[135] 因此, 与矢量 $\boldsymbol{l}$ 不同, 矢量 $\boldsymbol{n}$ 不是仿射参数化的. 现在通过将复数零矢量,

$$m^i = (m^t, m^r, m^\theta, m^\varphi) = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0, 0, 1, \mathrm{i}\operatorname{cosec}\theta), \tag{283}$$

与 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 搭配来完成四次基, 该矢量与 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 正交, 并满足归一化条件

$$\boldsymbol{m} \cdot \overline{\boldsymbol{m}} = -1. \tag{284}$$

逆变矢量 l^i、n^i、m^i 和 $\overline{m}^i$ 构成所需的基. 相应的协变矢量是

$$\left.\begin{aligned} l_i &= \left(1, -\frac{r^2}{\Delta}, 0, 0\right), \\ n_i &= \frac{1}{2r^2}(\Delta, +r^2, 0, 0), \\ m_i &= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0, 0, -r^2, -\mathrm{i}r^2 \sin\theta). \end{aligned}\right\} \tag{285}$$

对应于所选基的自旋系数 (由第 1 章的方程 (286) 定义) 能最便利地通过 λ 记号 (第 1 章方程 (266)) 来计算, 正如旋转系数 (对不同的基) 在第 2 章§14 中的计算. 现在得出非零的 λ 记号是

$$\lambda_{122} = -\frac{M}{r^2}, \quad \lambda_{243} = -\frac{r-2M}{2r^2}, \quad \lambda_{341} = -\frac{1}{r}, \quad \text{和 } \lambda_{334} = \frac{\cot\theta}{r\sqrt{2}}; \tag{286}$$

由此导出的自旋系数是

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \varepsilon = \pi = \tau = 0, \tag{287}$$

和

$$\rho = -\frac{1}{r}, \quad \beta = -\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{r}, \quad \mu = -\frac{r-2M}{2r^2}, \quad \text{和 } r = \frac{M}{2r^2}. \tag{288}$$

自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 为零的事实表明, 零短程线 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的迭合是无切变的, 这由这些球对称背景中零短程线的纯径向特征看来是显然的. 由这些迭合的无切变特征, 基于哥尔德伯 – 萨赫定理, 可得出史瓦西时空属于彼得罗夫 D 型的结论.

哥尔德伯 – 萨赫定理还导致结论: 在所选基里外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 为零, 唯一的非零标量是 Ψ_2. 这些结论能被直接验证, 办法是按照第 1 章方程 (294) 的外尔标量定义用矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 来收缩方程 (76) 所列的黎曼张量非零分量 (记住张量指标 0、1、2 和 3 分别对应于坐标指标 t、φ、r 和 θ). 容易验证 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 为零. 对标量 Ψ_2, 有 [136]

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= R_{ijkl} l^i m^j n^k \overline{m}^l \\ &= \frac{r^2}{2\Delta}(R_{0j0l} - e^{2\nu} R_{0j2l} - e^{2\nu} R_{2j0l} - e^{4\nu} R_{2j2l}) m^j \overline{m}^l \\ &= \frac{e^{-2\nu}}{4r^2}(R_{0101}\,\mathrm{cosec}^2\theta + R_{0303} - e^{4\nu} R_{2323} - e^{4\nu} R_{1212}\,\mathrm{cosec}^2\theta), \end{aligned} \tag{289}$$

代入方程 (76) 给的黎曼张量分量的值, 得

$$\Psi_2 = -Mr^{-3}. \tag{290}$$

有了对零基、自旋系数和外尔标量的确定, 就完成了对史瓦西时空的纽曼 – 彭罗斯形式的描述, 这是其特别的代数性质的例证.

文献注释

K. 史瓦西 (1873—1916) 的后来以其姓氏命名的解, 其最初的导出是发表于:

1. K. Schwarzschild, *Berliner Sitzungsbesichte (Phys. Math. Klasse)*, 189–96, 3 Feb. 1916 (Mitt. Jan. 13).

另见:

2. K. Schwarzschild, *Berliner Sitzungsbesichte (Phys. Math. Klasse)*, 424–34, 23 Mar. 1916 (Mitt. Feb. 24).

不会有一本关于广义相对论的书不包括对史瓦西解的叙述. 不过, 关于发现这个解的史诗般的故事却鲜有人知. 第一个公开的介绍 (据本书作者所知) 是在:

3. S. Chandrasekhar, *Notes and Records of the Royal Society of London*, 30, 249–60 (1976).

并重述于:

4. W. Sollivan, *Black Holes*, 61–2, Anchor Press, Doubleday, Garden City, New York, 1979.

由于这些讲述可能很容易被大多数相对论的学生忽略, 现对文献 3 中的相关部分摘要如下:

史瓦西得出他的解的文章是由爱因斯坦于 1916 年 1 月 13 日传达给柏林科学院的, 那是在爱因斯坦以短讯方式发表他的理论的基本方程之后仅仅大约两个月. 爱因斯坦在致信史瓦西告知收到了后者 1916 年 1 月 9 日的文稿时写道 (原文是德文): "我已以最大的兴趣读了您的文章. 我没有料到能如此简单地得出问题的严格解. 对问题的解析处理令我极为满意."

[137] 史瓦西得出其现在很著名的解的背景情况如下:

1915 年的春天和夏天, 史瓦西作为一名小技术员在东部前线的德国军队里服务. 他在那时得了一种致命的病 —— 天泡疮, 然后于 1916 年 5 月 11 日去世. 他关于相对论的两篇文章是在病中写出的 (他还有一篇关于玻尔 – 索末菲 (Bohr-Sommerfeld) 理论的基础性文章).

有许多涉及史瓦西解的书, 读者能从中找到极好讲述的是:

5. L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Classical Fields*, §100–1, §299-321, Pergamon Press, Oxford, 1975.

6. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. W. Wheeler, *Gravitation*, chapter 25, 655–78, and chapters 31–32, 819–41, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1970.

本书的图 3 和 5 是取自文献 6.

§17—§18. 通常 (例如在文献 5 和 6 中) 是在坐标系 $(t、r、\theta、\varphi)$ (§18) 里导出史瓦西解, 然后变换到 "爱丁顿 – 芬克勒斯坦 (Eddington-Finklestein)" 或 "克鲁斯卡尔" 坐标来证明在史瓦西半径 $R_s = 2GM/c^2$ 上其实没有奇异性, 并澄清 R_s 面作为事件视界的实质. 本书为更方便而倒转了通常的程序, 先在克鲁斯卡尔坐标里得出解, 然后变换到史瓦西坐标. 这种方式是出自辛格:

7. J. L. Synge, *Annali di Matematica pura ed Applicata*, 98, 239–55 (1974).

如辛格所言: "假如球对称的问题一开始就这样处理, 那就不会有谁产生这里 (即在 $r = R_s$) 有奇异性的想法." 但是, 关于史瓦西时空的性质能在零坐标系里最好地阐明的基本思想是出自:

8. A. S. Eddington, *Nature*, 113, 192 (1924).

9. D. Finklestein, *Phys. Rev.*, 110, 965–7 (1958).

10. M. D. Kruskal, ibid., 110, 1743–5 (1960).

更完整的相关参考文献见文献 6.

§19—§20. 自爱因斯坦首先用后牛顿近似计算球对称引力场中光线的偏折和开普勒轨道的进动以来, 史瓦西时空的短程线已在文献中被广泛讨论. 然而, 对短程线作为认识时空自身本质的途径的关注却是相对近期的事, 文献 5 和 6 中的讲述是充分的.

从纯解析的角度, 对短程线的非常完整的研究是在一篇早期的论文中:

11. Y. Hagihara, *Jap. J. Astron. Geophys*, 8, 67–175 (1931).

不过该文的处理比所需要的要复杂得多. 本书的讲述基本上是完成了由下列文献制订的方案:

12. C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 249, 180–94 (1958).

13. ——, ibid., 263, 39–50 (1961).

特别是, 通过将轨道分为 "第一类" 和 "第二类" 并允许偏心率为虚数, 就能够以连贯和统一的方式来处理所有情形. [138]

图 7、8 和 9 的短程线都是由 Garret Toomey 先生计算和绘制的, 作者对他特别感激.

有关史瓦西时空短程线的文献完整地列于:

14. N. A. Sharp, *General Relativity and Gravitation*, 10, 659–70 (1979).

对史瓦西黑洞及其明亮吸积盘的美妙图示可见:

15. J. P. Luminet, *Astron. Astrophys.*, 75, 228–35 (1979).

§21. 首先将纽曼 – 彭罗斯形式应用于研究史瓦西时空是由:

16. R. H. Price, *Phys. Rev. D*, 5, 2419–38 and 2439–54 (1972).

17. J. M. Bardeen and W. H. Press, *J.Math. Phys.*, 14, 7–19 (1972).

但这些论文中所考虑的应用其实是在下一章中讲述.

第四章

[139]

史瓦西黑洞的扰动

22. 引言

本章致力于对史瓦西黑洞扰动的研究. 从物理的角度, 此项研究的基本问题是入射到黑洞的引力波被散射和吸收的方式. 对这个问题的回答显然有着天体物理意义. 从理论的角度, 这个回答具有更超常的意义: 它以最简单、最纯粹的语言提供了对广义相对论所表达的时空的更深层次特征的洞察, 而且它显示了该理论的解析丰富性.

目前有两条探索时空扰动的途径. 一是通过对未扰动时空线性化的爱因斯坦或爱因斯坦 – 麦克斯韦方程来直接研究度规系数的扰动, 二是通过纽曼 – 彭罗斯形式的方程来研究外尔和麦克斯韦标量的扰动. 虽然后者看来特别适合于对黑洞周围时空扰动的研究 (由于其特别的代数特征), 但事实是沿这两条途径发展的理论在揭示一些内部关系时非常有效地互补, 不然的话这些关系将会被掩盖.

23. 非定常态、轴对称时空的里奇和爱因斯坦张量

在研究任何球对称系统的扰动时, 可以不失一般性地限于轴对称扰动模式. 这是因为, 由于在球对称背景中没有优先的轴, 对方位角 φ 有着 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 依赖关系的非轴对称扰动模式 (这里 m 是正或负的整数) 就能够通过适当的旋转由 $m=0$ 的轴对称扰动模式导出. 于是, 在球面上一点 (θ,φ) 对一个所选极轴计算的轴对称模式, 当在极轴方向为 (θ',φ') 的另一个坐标架里表示时, 将被赋予一个极角 Θ,

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi'-\varphi). \tag{1}$$

[140] 对所选的轴对称模式作此变换, 就将分解为非轴对称分量, 其中每一个都可被

视为表示不同的非轴对称模式; 这是由于基本扰动理论的线性性质所能做到的.

实际上, 上述的分解将由下面的途径发生. 支配球对称系统扰动的方程对所有 4 个变量 t、r、θ 和 φ 都是可分离的. 不管对 t 和 r 的依赖, 可以预期一个轴对称模式对 θ 角的依赖能由勒让德 (Legendre) 函数 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 来表示. 对一个属于特别的 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 的模式作变换 (1), 它变为

$$\mathrm{P}_l(\cos\Theta)=\sum_{m=-l}^{m=+l}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{P}_l^m(\cos\theta')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}, \tag{2}$$

其中 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)$ 是相关的勒让德函数. 于是, 一个属于特定 l 的轴对称模式就分解为有着角依赖关系 $\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}$ 的 $(2l+1)$ 个模式的完整集. 描述径向依赖的函数当然不受这个分解的影响. 正是同样的道理保证了, 一个在中心场中的电子的径向波函数与磁量子数 m 无关, 而只依赖于由 l 确定的轨道角动量.

对史瓦西黑洞扰动的考虑将遵循上面的说明, 限于含时的轴对称模式. 于是, 足够有效的做法是, 将史瓦西解视为适合于下列线元 (第 2 章方程 (38)) 的场方程的一个特别的、球对称和不含时的解,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2-e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t-q_2\mathrm{d}x^2-q_3\mathrm{d}x^3)^2\\&-e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2-e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2,\end{aligned} \tag{3}$$

并通过将场方程对史瓦西解的线性化来得到相关的扰动方程. 为此目的 (及其它目的), 便利的做法是得出当 ν、ψ、μ_2、μ_3、ω、q_2 和 q_3 只是 t、x^2 和 x^3 的函数时里奇和爱因斯坦张量对线元 (3) 的各个分量的明晰表示. 这些分量能容易地由黎曼张量的恰当收缩得到, 黎曼张量的分量 (当度规函数也依赖于 φ 时) 列于第 2 章 (方程 (75)). 这些收缩的结果如下.

$$\begin{aligned}-R_{00}=&e^{-2\nu}[(\psi+\mu_2+\mu_3)_{,0,0}+\psi_{,0}(\psi-\nu)_{,0}+\mu_{2,0}(\mu_2-\nu)_{,0}+\mu_{3,0}(\mu_3-\nu)_{,0}]\\&-e^{2\mu_2}[\nu_{,2,2}+\nu_{,2}(\psi+\nu-\mu_2+\mu_3)_{,2}]\\&-e^{-2\mu_3}[\nu_{,3,3}+\nu_{,3}(\psi+\nu+\mu_2-\mu_3)_{,3}]\\&+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}Q_{20}^2+e^{-2\mu_3}Q_{30}^2],\end{aligned}\qquad [141]\ \text{(a)}$$

$$\begin{aligned}-R_{11}=&e^{-2\mu_2}[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}(\psi+\nu+\mu_3-\mu_2)_{,2}]\\&+e^{-2\mu_3}[\psi_{,3,3}+\psi_{,3}(\psi+\nu+\mu_2-\mu_3)_{,3}]\\&-e^{-2\nu}[\psi_{,0,0}+\psi_{,0}(\psi-\nu+\mu_2+\mu_3)_{,0}]-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2\\&+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_3}Q_{30}^2+e^{-2\mu_2}Q_{20}^2],\end{aligned}\qquad \text{(b)}$$

$$-R_{22} = e^{-2\mu_2}[(\psi+\nu+\mu_3)_{,2,2} + \psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,2}$$
$$+\mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2} + \nu_{,2}(\nu-\mu_2)_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\mu_{2,3,3} + \mu_{2,3}(\psi+\nu+\mu_2-\mu_3)_{,3}]$$
$$-e^{-2\nu}[\mu_{2,0,0} + \mu_{2,0}(\psi-\nu+\mu_2+\mu_3)_{,0}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_2}[e^{-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-2\nu}Q_{20}^2], \tag{c}$$

$$-R_{01} = \frac{1}{2}e^{-2\psi-\mu_2-\mu_3}[(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}Q_{20})_{,2} + (e^{3\psi-\nu-\mu_3+\mu_2}Q_{30})_{,3}], \tag{d}$$

$$-R_{12} = \frac{1}{2}e^{-2\psi-\nu-\mu_3}[(e^{3\psi-\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{32})_{,3} - (e^{3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2}Q_{02})_{,0}], \tag{e}$$

$$-R_{02} = e^{-\mu_2-\nu}[(\psi+\mu_3)_{,2,0} + \psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,0} + \mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,0}$$
$$-(\psi+\mu_3)_{,0}\nu_{,2}] - \frac{1}{2}e^{2\psi-\nu-2\mu_3-\mu_2}Q_{23}Q_{30}, \tag{f}$$

$$-R_{23} = e^{-\mu_2-\mu_3}[(\psi+\nu)_{,2,3} - (\psi+\nu)_{,2}\mu_{2,3} - (\psi+\nu)_{,3}\mu_{3,2} + \psi_{,2}\psi_{,3}$$
$$+\nu_{,2}\nu_{,3}] - \frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{20}Q_{30}, \tag{g}$$

$$G_{00} = -e^{-2\mu_2}[(\psi+\mu_3)_{,2,2} + \psi_{,2}(\psi-\mu_2+\mu_3)_{,2} + \mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}]$$
$$-e^{-2\mu_3}[(\psi+\mu_2)_{,3,3} + \psi_{,3}(\psi-\mu_3+\mu_2)_{,3} + \mu_{2,3}(\mu_2-\mu_3)_{,3}]$$
$$+e^{-2\nu}[\psi_{,0}(\mu_2+\mu_3)_{,0} + \mu_{3,0}\mu_{2,0}] - \frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}Q_{20}^2 + e^{-2\mu_3}Q_{30}^2]$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2, \tag{h}$$

$$G_{11} = e^{-2\mu_2}[(\nu+\mu_3)_{,2,2} + \nu_{,2}(\nu-\mu_2+\mu_3)_{,2} + \mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[(\nu+\mu_2)_{,3,3} + \nu_{,3}(\nu-\mu_3+\mu_2)_{,3} + \mu_{2,3}(\mu_2-\mu_3)_{,3}]$$
$$-e^{-2\nu}[(\mu_2+\mu_3)_{,0,0} + \mu_{2,0}(\mu_2-\nu)_{,0} + \mu_{3,0}(\mu_3-\nu)_{,0} + \mu_{2,0}\mu_{3,0}]$$
$$+\frac{3}{4}e^{2\psi}[e^{-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-2\mu_2-2\nu}Q_{20}^2 - e^{-2\mu_3-2\nu}Q_{30}^2], \tag{i}$$

[142]

$$G_{22} = e^{-2\mu_3}[(\psi+\nu)_{,3,3} + (\psi+\nu)_{,3}(\nu-\mu_3)_{,3} + \psi_{,3}\psi_{,3}]$$
$$+e^{-2\mu_2}[\nu_{,2}(\psi+\mu_3)_{,2} + \psi_{,2}\mu_{3,2}]$$
$$-e^{-2\nu}[(\psi+\mu_3)_{,0,0} + (\psi+\mu_3)_{,0}(\mu_3-\nu)_{,0} + \psi_{,0}\psi_{,0}]$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi}[e^{-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 - e^{-2\mu_2-2\nu}Q_{20}^2 + e^{-2\mu_3-2\nu}Q_{30}^2], \tag{j}$$

(4)

其中

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A} \text{ 和 } Q_{A0} = q_{A,0} - \omega_{,A} \quad (A,B=2,3). \tag{5}$$

分量 R_{33}、R_{13}、R_{03} 和 G_{33} 没有列出; 它们可由已列出的分量 R_{22}、R_{12}、R_{02} 和 G_{22} 中指标 2 和 3 的互换得到.

24. 度规扰动

作为线元 (3) 的特别情形的史瓦西线元的度规系数是

$$e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = 1 - 2M/r = \Delta/r^2, \quad e^{\mu_3} = r, \quad e^{\psi} = r\sin\theta, \tag{6}$$

和

$$\omega = q_2 = q_3 = 0 \quad (\Delta = r^2 - 2Mr; x^2 = r; x^3 = \theta). \tag{7}$$

由此, 史瓦西黑洞的一般扰动将使

$$\omega、q_2 \text{ 和 } q_3 \tag{8}$$

成为一阶小量, 而函数 ν、μ_2、μ_3 和 ψ 有小增量

$$\delta\nu、\delta\mu_2、\delta\mu_3 \text{ 和 } \delta\psi. \tag{9}$$

显然, 导致 ω、q_2、q_3 非零值的扰动和导致 ν、μ_2、μ_3、ψ 增量的扰动属于很不同的类型: 前者引起惯性系的拖曳并加给黑洞一个转动, 而后者并不带来这种转动. 出于这个原因, 将它们分别称为*轴向和极向扰动*. 这些术语在考虑 φ 变号对度规的影响时得到验证. 极向扰动没有影响; 而对轴向扰动, 如果要度规保持不变, 则 ω、q_2 和 q_3 也必须变号. 由两类扰动的这些不同行为可以预期, 它们必定分离, 也就是能被相互独立地考虑. 将会看到的确如此.

[143]

(a) 轴向扰动

如已讲过的, 轴向扰动由 ω、q_2 和 q_3 的非零来表征. 支配这些量的方程是

$$R_{12} = R_{13} = 0. \tag{10}$$

例如, 由 R_{12} 的表示式 (4, e), 显然在方程 (10) 中可对 ν、μ_2、μ_3 和 ψ 代入其未扰动的值 (6). 得到的方程是

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{23})_{,3} = -e^{3\psi-\nu+\mu_3-\mu_2}Q_{02,0} \quad (\delta R_{12} = 0), \tag{11}$$

$$(e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{23})_{,2} = +e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{03,0} \quad (\delta R_{13} = 0). \tag{12}$$

令

$$Q(t, r, \theta) = \Delta Q_{23}\sin^3\theta = \Delta(q_{2,3} - q_{3,2})\sin^3\theta, \tag{13}$$

并对 ν、μ_2、μ_3 和 ψ 代入其未扰动值 (6), 可得一对方程,

$$\frac{1}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta} = -(\omega_{,2} - q_{2,0})_{,0}, \tag{14}$$

$$\frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial r} = +(\omega_{,3} - q_{3,0})_{,0}. \tag{15}$$

进一步假定扰动具有时间依赖

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}, \tag{16}$$

其中 σ 是一个常数 (一般为实数). 这个假定对应于扰动的傅里叶分析, 傅里叶分量的频率为 $-\sigma$. 对具有上述时间依赖因子的扰动的振幅保持同样的记号, 可将方程 (14) 和 (15) 重写为

和

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta} &= -\mathrm{i}\sigma\omega_{,2} - \sigma^2 q_2, \\ \frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial r} &= +\mathrm{i}\sigma\omega_{,3} + \sigma^2 q_3. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

从这些方程中消去 ω, 得

$$r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\partial Q}{\partial r}\right) + \sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right) + \sigma^2\frac{r^4}{\Delta}Q = 0. \tag{18}$$

[144] 方程 (18) 中的变量 r 和 θ 能由代换

$$Q(r,\theta) = Q(r)C_{l+2}^{-3/2}(\theta) \tag{19}$$

来分离, 其中 C_n^ν 是由下列方程支配的盖根鲍尔 (Gegenbauer) 函数,

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^{2\nu}\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} + n(n+2\nu)\sin^{2\nu}\theta\right]C_n^\nu(\theta) = 0. \tag{20}$$

盖根鲍尔函数 $C_{l+2}^{-3/2}(\theta)$ 是由下式与勒让德函数 $P_l(\theta)$ 相关联,

$$C_{l+2}^{-3/2}(\theta) = \sin^3\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}P_l(\theta)}{\mathrm{d}\theta}, \tag{21}$$①

或

$$C_{l+2}^{-3/2}(\theta) = (P_{l,\theta,\theta} - P_{l,\theta}\cot\theta)\sin^2\theta. \tag{22}$$

将 (19) 代入方程 (18), 得到径向方程

$$\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right) - \mu^2\frac{\Delta}{r^4}Q + \sigma^2 Q = 0, \tag{23}$$

其中

$$\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2) \tag{24}$$

① 由通常的盖根鲍尔和勒让德函数的归一化, 这个方程的右边还有一个因子 $3[(l-1)l(l+1)(l+2)]^{-1}$.

给定了相关的角依赖. 变换到变量 (见第 3 章方程 (219))

$$r_* = r + 2M \lg(r/2M - 1) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \frac{\Delta}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \right), \tag{25}$$

并进一步令

$$Q(r) = rZ^{(-)}, \tag{26}$$

可知 $Z^{(-)}$ 满足一维薛定谔波动方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2 \right) Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)}, \tag{27}$$

其中的势 $V^{(-)}$ 是

$$V^{(-)} = \frac{\Delta}{r^5}[(\mu^2 + 2)r - 6M]. \tag{28}$$

支配轴向扰动的方程 (27) 是由雷杰 (Regge) 和惠勒 (Wheeler) 首先导出的 (尽管是由完全不同的途径), 常被称为雷杰 – 惠勒方程.

表 I　对不同的 l 和 n 值的轴向扰动的势垒 $V^{(-)}$ [145]

r/M	$l=2;$ $n=2$	$l=3;$ $n=5$	$l=4;$ $n=9$	r/M	$l=2;$ $n=2$	$l=3;$ $n=5$	$l=4;$ $n=9$
2.0	0.	0.	0.	3.8	0.14503	0.34185	0.60428
2.1	0.03394	0.09872	0.18511	4.0	0.14063	0.32813	0.57813
2.2	0.06147	0.17417	0.32443	4.5	0.12803	0.29264	0.51212
2.3	0.08362	0.23156	0.42881	5.0	0.11520	0.25920	0.45120
2.4	0.10127	0.27488	0.50637	6.0	0.09259	0.20370	0.35185
2.5	0.11520	0.30720	0.56320	7.0	0.07497	0.16243	0.27905
2.6	0.12605	0.33087	0.60397	8.0	0.06152	0.13184	0.22559
2.7	0.13435	0.34773	0.63224	9.0	0.05121	0.10882	0.18564
2.8	0.14057	0.35923	0.65077	10.0	0.04320	0.09120	0.15520
2.9	0.14506	0.36647	0.66169	12.0	0.03183	0.06655	0.11285
3.0	0.14815	0.37037	0.66667	14.0	0.02436	0.05060	0.08559
3.2	0.15106	0.37079	0.66376	16.0	0.01923	0.03973	0.06708
3.4	0.15086	0.36458	0.64954	18.0	0.01555	0.03201	0.05396
3.6	0.14861	0.35437	0.62871	20.0	0.01283	0.02633	0.04433

下文中将看到, 引入下列算符是便利的,

$$\Lambda_\pm = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} \pm \mathrm{i}\sigma \text{ 和 } \Lambda^2 = \Lambda_+\Lambda_- = \Lambda_-\Lambda_+ = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2. \tag{29}$$

按这些记号, $Z^{(-)}$ 满足的方程是

$$\Lambda^2 Z^{(-)} = V^{(-)} Z^{(-)}. \tag{30}$$

表 I 简短地列出了 $l=2$、3、4 的势 $V^{(-)}$, 并由图 11 绘出.

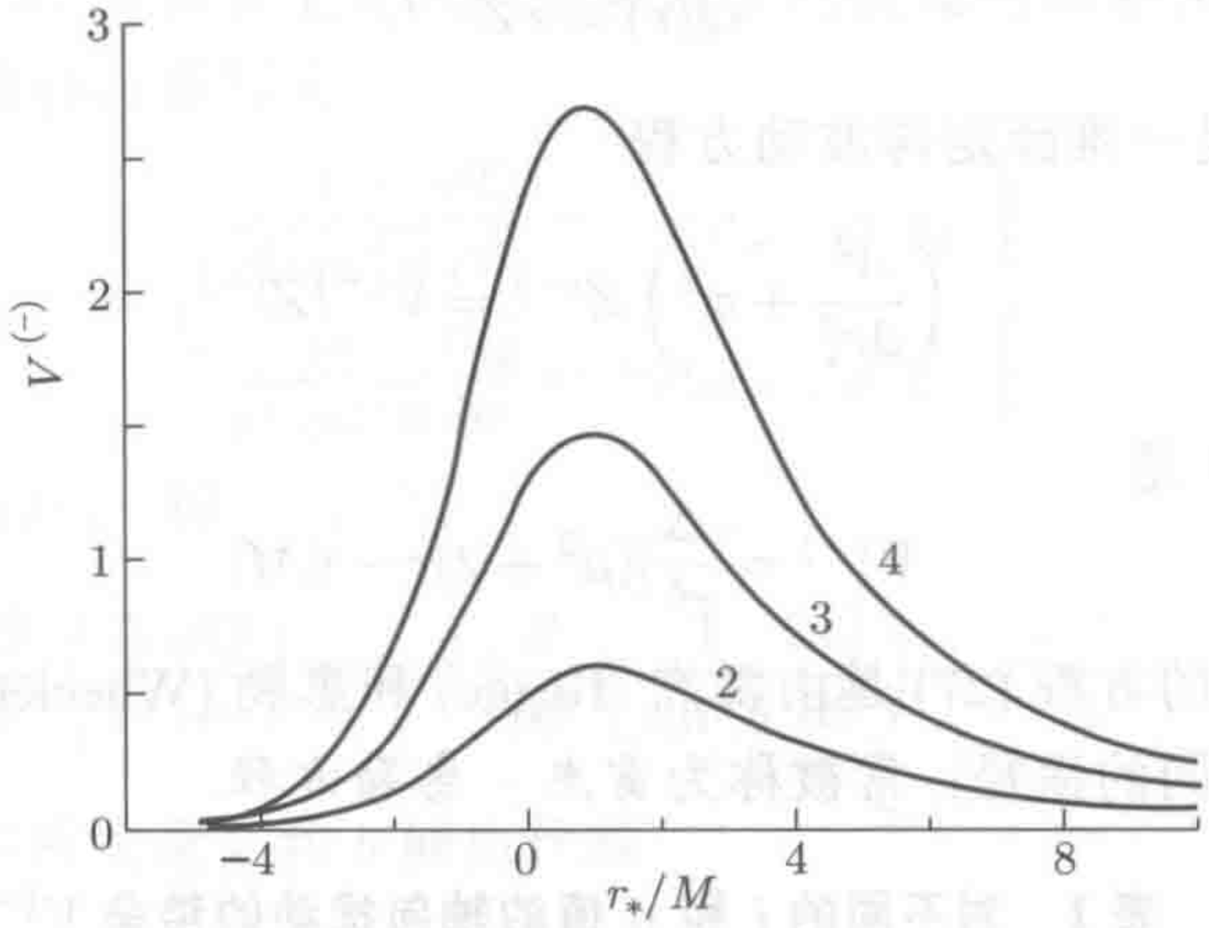


图 11 史瓦西黑洞周围的轴向扰动势垒. 曲线上的数字是相应的 l 值.

(b) 极向扰动

极向扰动由度规函数 ν、μ_2、μ_3 和 ψ 的非零增量表征. 检查 R_{02}、R_{23}、R_{11} 和 G_{22} 的表示式 ($4f$、g、b 和 j) 可以看到, Q_{AB} 在其中都以二次形式出现, 因而在线性扰动理论中可以忽略. 于是如所预期的, 支配轴向扰动和极向扰动的方程的确是解耦的.

将 R_{02}、R_{03}、R_{23}、R_{11} 和 G_{22} 的表示式对史瓦西值线性化, 得方程

$$(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}+\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)(\delta\psi+\delta\mu_3)-\frac{2}{r}\delta\mu_2=0 \quad (\delta R_{02}=0), \tag{31}$$

$$(\delta\psi+\delta\mu_2)_{,\theta}+(\delta\psi-\delta\mu_3)\cot\theta=0 \quad (\delta R_{03}=0), \tag{32}$$

[146]

$$(\delta\psi+\delta\nu)_{,r,\theta}+(\delta\psi-\delta\mu_3)_{,r}\cot\theta+\left(\nu_{,r}-\frac{1}{r}\right)\delta\nu_{,\theta}$$
$$-\left(\nu_{,r}+\frac{1}{r}\right)\delta\mu_{2,\theta}=0 \quad (\delta R_{23}=0), \tag{33}$$

$$e^{-2\mu_2}\left[\frac{2}{r}\delta\nu_{,r}+\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}-2\delta\mu_2\left(\frac{2}{r}\nu_{,r}+\frac{1}{r^2}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{r^2}[(\delta\psi+\delta\nu)_{,\theta,\theta}+(2\delta\psi+\delta\nu-\delta\mu_3)_{,\theta}\cot\theta+2\delta\mu_3]$$
$$-e^{-2\nu}(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,0,0}=0 \quad (\delta G_{22}=0), \tag{34}$$

和

$$e^{+2\nu}\left\{\delta\psi_{,r,r}+2\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)\delta\psi_{,r}+\frac{1}{r}(\delta\psi+\delta\nu-\delta\mu_2+\delta\mu_3)_{,r}-2\frac{\delta\mu_2}{r}\left(\frac{1}{r}+2\nu_{,r}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{r^2}\{\delta\psi_{,\theta,\theta}+(2\delta\psi+\delta\nu+\delta\mu_2-\delta\mu_3)_{,\theta}\cot\theta+2\delta\mu_3\}$$
$$-e^{-2\nu}\delta\psi_{,0,0}=0\quad(\delta R_{11}=0). \tag{35}$$

再次假定扰动有时间依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$, 于是 "$_{,0}$" 代之以因子 $\mathrm{i}\sigma$; 下面将隐去因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$.

方程 (31)—(35) 中的变量 r 和 θ 可由下列代换而分离 (由 J. Friedman), [147]

$$\delta\nu=N(r)P_l(\cos\theta), \tag{36}$$
$$\delta\mu_2=L(r)P_l(\cos\theta), \tag{37}$$
$$\delta\mu_3=[T(r)P_l+V(r)P_{l,\theta,\theta}], \tag{38}$$

和

$$\delta\psi=[T(r)P_l+V(r)P_{l,\theta}\cot\theta]. \tag{39}$$

按这些代换有

$$\delta\psi+\delta\mu_3=[2T-l(l+1)V]P_l, \tag{40}$$
$$\delta\psi_{,\theta}+(\delta\psi-\delta\mu_3)\cot\theta=(T-V)P_{l,\theta}, \tag{41}$$

和

$$\delta\psi_{,\theta,\theta}+(2\delta\psi-\delta\mu_3)_{,\theta}\cot\theta+2\delta\mu_3=[2-l(l+1)]TP_l=-2nTP_l. \tag{42}$$

回到方程 (31)—(35), 首先, 方程 (32) 经代换 (37) 和 (41) 导致关系

$$T-V+L=0\quad(\delta R_{03}=0). \tag{43}$$

相应地, 已定义的四个径向函数中只有三个是线性独立的. 选择 N、L 和 V 为独立函数.

用方程 (40) 和 (41), 场方程的 (0, 2) 和 (2, 3) 组分, 即方程 (31) 和 (33), 给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)[2T-l(l+1)V]-\frac{2}{r}L=0 \tag{44}$$

和

$$(T-V+N)_{,r}-\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)N-\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)L=0, \tag{45}$$

或在消去 T 后有

$$N_{,r} - L_{,r} = \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) N + \left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) L \tag{46}$$

和

$$L_{,r} + \left(\frac{2}{r} - \nu_{,r}\right) L = -\left[X_{,r} + \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) X\right], \tag{47}$$

其中已将 V 代之以

$$X = nV = \frac{1}{2}(l-1)(l+2)V. \tag{48}$$

[148] 类似地, 用方程 (40) 和 (42), 方程 (34) 给出

$$\frac{2}{r}N_{,r} + \left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right)[2T - l(l+1)V]_{,r} - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r}\right) L$$
$$-l(l+1)\frac{e^{-2\nu}}{r^2}N - 2n\frac{e^{-2\nu}}{r^2}T + \sigma^2 e^{-4\nu}[2T - l(l+1)V] = 0, \tag{49}$$

或在消去 T 后有

$$\frac{2}{r}N_{,r} - l(l+1)\frac{e^{-2\nu}}{r^2}N - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r}\right) L - 2\left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right)(L + nV)_{,r}$$
$$-2n\frac{e^{-2\nu}}{r^2}(V - L) - 2\sigma^2 e^{-4\nu}(L + nV) = 0. \tag{50}$$

最后考虑方程 (35), 它由 P_l 和 $\mathrm{P}_{l,\theta}\cot\theta$ 项组成. 这些项由于上述方程而分别为零, $\mathrm{P}_{l,\theta}\cot\theta$ 项给出

$$V_{,r,r} + 2\left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) V_{,r} + \frac{e^{-2\nu}}{r^2}(N + L) + \sigma^2 e^{-4\nu} V = 0. \tag{51}$$

如已述, 这个方程并不独立于方程 (46)、(47) 和 (50); 不过它在下面的简化中有用.

方程 (46)、(47) 和 (50) 提供了对三个径向函数 L、N 和 V (或 X) 的三个线性一阶方程. 通过适当组合, 可将这些函数的导数表示为函数自身的线性组合, 即有

$$N_{,r} = aN + bL + cX, \tag{52}$$
$$L_{,r} = \left(a - \frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) N + \left(b - \frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) L + cX, \tag{53}$$
$$X_{,r} = -\left(a - \frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) N - \left(b + \frac{1}{r} - 2\nu_{,r}\right) L - \left(c + \frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) X, \tag{54}$$

其中为简洁已记

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{n+1}{r-2M}, \quad \nu_{,r} = \frac{M}{r(r-2M)}, \\ b &= -\frac{1}{r} - \frac{n}{r-2M} + \frac{M}{r(r-2M)} + \frac{M^2}{r(r-2M)^2} + \sigma^2 \frac{r^3}{(r-2M)^2}, \\ c &= -\frac{1}{r} + \frac{1}{r-2M} + \frac{M^2}{r(r-2M)^2} + \sigma^2 \frac{r^3}{(r-2M)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

将会看到, 方程 (47) 和 (54) 的另一种形式是有用的: [149]

$$\begin{aligned} (L+X)_{,r} &= -\left(\frac{2}{r} - \nu_{,r}\right) L - \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) X \\ &= -\frac{1}{r(r-2M)}[(2r-5M)L + (r-3M)X] \end{aligned} \tag{56}$$

和

$$\begin{aligned} X_{,r} = &-\frac{nr+3M}{r(r-2M)} N - \left[\frac{1}{r-2M} - \frac{M}{r(r-2M)} + \frac{M^2+\sigma^2 r^4}{r(r-2M)^2}\right](L+X) \\ &+ \frac{n+1}{r-2M} L. \end{aligned} \tag{57}$$

(i) 方程组简化为单个一维波动方程

值得注意的是, 由方程 (52)—(54),

$$Z^{(+)} = \frac{r^2}{nr+3M}\left(\frac{3M}{nr} X - L\right), \tag{58}$$

满足一个与对 $Z^{(-)}$ 类似的一维波动方程. 三阶方程组 (52)—(54) 到单个二阶方程的这一简化是经验式地得到的. 方程 (52)—(54) 的基础中必定有更深刻的缘由. 下面的§25 中将对这种缘由的可能性予以阐述. 现在首先验证, 由方程 (58) 定义的 $Z^{(+)}$ 的确满足一维波动方程.

将 $Z^{(+)}$ 重写为

$$Z^{(+)} = rV - \frac{r^2}{nr+3M}(L+X), \tag{59}$$

对 r_* 求导并用方程 (56) 代换 $(L+X)_{,r}$, 得

$$\begin{aligned} Z^{(+)}_{,r_*} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) Z_{,r} \\ &= (r-2M)V_{,r} + \frac{3M(r-2M)}{r(nr+3M)} V + \frac{nr^2 - 3nMr - 3M^2}{(nr+3M)^2}(L+X). \end{aligned} \tag{60}$$

再对 r 求导并再次用方程 (56), 得

$$Z^{(+)}_{,r_*,r} = (r-2M)V_{,r,r} + V_{,r} + \frac{3M(r-2M)}{r(nr+3M)}V_{,r} + 3M\frac{-nr^2+4Mnr+6M^2}{r^2(nr+3M)^2}V + \frac{3Mn}{(nr+3M)^3}[(2+n)r-M](L+X) - \frac{nr^2-3Mnr-3M^2}{r(r-2M)(nr+3M)^2}[(2r-5M)L+(r-3M)X]. \tag{61}$$

[150] 用方程 (51) 代换 $V_{,r,r}$, 得到的表示式除 L、X 和 N 外只含有 V 的导数, 该导数可用方程 (57) 代换. 经过这些代换和简化 (过程省略), 得到的是

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2}+\sigma^2\right)Z^{(+)} = V^{(+)}Z^{(+)}, \tag{62}$$

其中

$$V^{(+)} = \frac{2\Delta}{r^5(nr+3M)^2}[n^2(n+1)r^3+3Mn^2r^2+9M^2nr+9M^3]. \tag{63}$$

方程 (62) 是由泽里立 (Zerilli) 首先导出的 (但由完全不同的途径), 常被称为泽里立方程.

可将方程 (62) 写为另一种形式 (见方程 (30)),

$$\Lambda^2 Z^{(+)} = V^{(+)}Z^{(+)}. \tag{64}$$

表 II 简短地列出了 $l=2$、3、4 的势 $V^{(+)}$, 并由图 12 绘出. 对 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 表格的比较显示, 它们对 r_* 的整个范围都相差非常之小, 尽管它们的解析式 (28) 和 (63) 是大不相同.

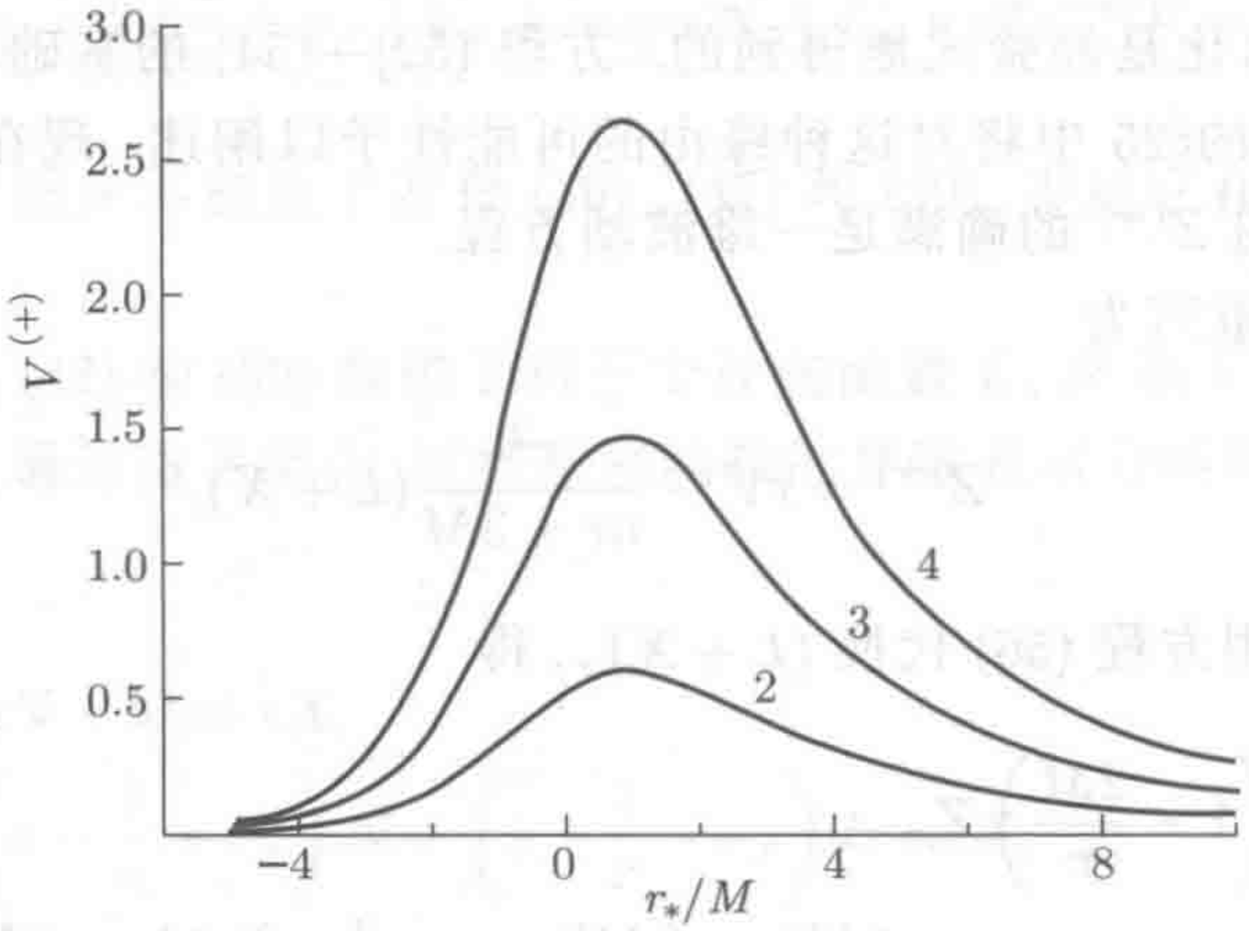


图 12 史瓦西黑洞周围的极向扰动势垒. 曲线上的数字是相应的 l 值.

(ii) 解的完成

有了三阶方程组 (52)—(54) 到对 $Z^{(+)}$ 的单个二阶方程 (61) 的简化, 对 L、X 和 N 的解显然就需要进一步积分. 于是, 将方程 (47) 重写为

表 II 对不同的 l 和 n 值的极向扰动的势垒 $V^{(+)}$

r/M	$l=2;$ $n=2$	$l=3;$ $n=5$	$l=4;$ $n=9$	r/M	$l=2;$ $n=2$	$l=3;$ $n=3$	$l=4;$ $n=9$
2.0	0.	0.	0.	3.8	0.13970	0.33866	0.60225
2.1	0.04183	0.10289	0.18766	4.0	0.13443	0.32458	0.57591
2.2	0.07311	0.18018	0.32809	4.5	0.12079	0.28876	0.50974
2.3	0.09647	0.23805	0.43272	5.0	0.10787	0.25542	0.44891
2.4	0.11383	0.28106	0.51004	6.0	0.08617	0.20054	0.34997
2.5	0.12660	0.31263	0.56639	7.0	0.06974	0.15993	0.27758
2.6	0.13584	0.33536	0.60656	8.0	0.05734	0.12988	0.22444
2.7	0.14235	0.35122	0.63420	9.0	0.04786	0.10728	0.18475
2.8	0.14673	0.36171	0.65211	10.0	0.04050	0.08997	0.15449
2.9	0.14946	0.36802	0.66246	12.0	0.03002	0.06575	0.11239
3.0	0.15089	0.37106	0.66691	14.0	0.02310	0.05005	0.08527
3.2	0.15094	0.37003	0.66314	16.0	0.01832	0.03934	0.06685
3.4	0.14848	0.36272	0.64827	18.0	0.01487	0.03172	0.05379
3.6	0.14452	0.35172	0.62355	20.0	0.01231	0.02611	0.04420

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2e^{-\nu}L) = -nr\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(re^{-\nu}V) \tag{65}$$ [151]

将 V 代之以

$$V = \frac{nr+3M}{3Mr}Z^{(+)} + \frac{r}{3M}L, \tag{66}$$

得方程

$$\left(1+\frac{nr}{3M}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2e^{-\nu}L) = -\frac{nr}{3M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[e^{-\nu}(nr+3M)Z^{(+)}]. \tag{67}$$

此方程给出积分关系

$$r^2e^{-\nu}L = -\int\frac{nr}{(nr+3M)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[e^{-\nu}(nr+3M)Z^{(+)}]\mathrm{d}r, \tag{68}$$

或经过分部积分有

$$r^2e^{-\nu}L = -nre^{-\nu}Z^{(+)} + 3Mn\int\frac{e^{-\nu}}{nr+3M}Z^{(+)}\mathrm{d}r. \tag{69}$$

[152] 定义

$$\Phi = ne^{\nu}\int \frac{e^{-\nu}Z^{(+)}}{nr+3M}\mathrm{d}r, \tag{70}$$

有解

$$L = -\frac{n}{r}Z^{(+)} + \frac{3M}{r^2}\Phi. \tag{71}$$

由 L 的这个解, 方程 (66) 给出

$$X = \frac{n}{r}(Z^{(+)} + \Phi). \tag{72}$$

于是有

$$L + X = \frac{1}{r^2}(nr+3M)\Phi. \tag{73}$$

为得到 N 的解, 回到方程 (60) 并用方程 (57) 的右边代换 $V_{,r}(= X_{,r}/n)$. 这样就得到

$$\begin{aligned} Z_{,r*} = \frac{1}{n}(r-2M)\left\{-\frac{nr+3M}{r(r-2M)}N - \left[\frac{1}{r-2M} - \frac{M}{r(r-2M)} + \frac{M^2+\sigma^2r^4}{r(r-2M)^2}\right]\right. \\ \left.\times(L+X) + \frac{n+1}{r-2M}L\right\} + \frac{3M(r-2M)}{nr(nr+3M)}X + \frac{nr^2-3Mnr-3M^2}{(nr+3M)^2}(L+X). \end{aligned} \tag{74}$$

将这个方程简化并对 L 和 $L+X$ 代入它们的解 (71) 和 (72), 得

$$\begin{aligned} N = -\frac{nr}{nr+3M}Z^{(+)}_{,r*} - \frac{n}{(nr+3M)^2}\left[\frac{6M^2}{r} + 3Mn + n(n+1)r\right]Z^{(+)} \\ + \left(M - \frac{M^2+\sigma^2r^4}{r-2M}\right)\frac{\Phi}{r^2}. \end{aligned} \tag{75}$$

这样就完成了基本方程的正式解. 在§26 和§27 中将回到对关于 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的波动方程的考虑.

25. 关于与线性微分方程组可简化性相联系的特殊积分的定理

在§24 对极向扰动的处理中看到, 支配 N、L 和 X 的三个线性方程 (方程 (52)—(54)) 的系统能简化为一个对这些变量的特别组合 $Z^{(+)}$ 的二阶方程. 方程组的这种可简化性是可验证的, 但却是一个经验地发现的事实; 鉴于对 $Z^{(+)}$ 的波动方程中势的复杂性, 这是一个掩盖在神秘抵销里的异常巧合. 本节试图找出这种神秘性的缘由.

[153] 原则上, 线性方程组简化为一个低阶方程本身并不奇怪: 如果预先对那些方程的某些特定解有所知晓, 那么这总是能做到的. 但是, §24 中的简化却

没有任何此种预先知识. 所产生的一般性问题是, 由对线性方程组向一个低阶方程的可简化性的知识, 是否有可能反过来, 找到一种方法来得出原先使简化成为可能的特定解. 这样一种方法最近已由山托珀罗斯 (Xanthopoulos) 得到. 由于此方法能应用于后面将要遇到的其它问题, 这里对它予以介绍.

考虑 n 个线性方程的系统,

$$\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x} = A_{jk}X_k \quad (j = 1, \cdots, n), \tag{76}$$

其中 A_{jk} 是 x 的某些已知函数, 采用对重复指标的求和. 用 $\boldsymbol{X}$ 表示列矢量 (分量为 X_j), $\boldsymbol{A}$ 表示 (n, n) 矩阵 (元为 A_{jk}), 可将方程 (76) 写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}. \tag{77}$$

由下式定义相关的伴随方程组,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{X}}}{\mathrm{d}x} = -\boldsymbol{A}^{\dagger}\widetilde{\boldsymbol{X}} \left(\text{或 } \frac{\mathrm{d}\widetilde{X}_j}{\mathrm{d}x} = -A_{kj}\widetilde{X}_k \right), \tag{78}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置.

如果 X_j 和 $\widetilde{\boldsymbol{X}}_j$ 是方程 (77) 和 (78) 的解, 立即可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(X_j\widetilde{X}_j) = 0 \text{ 或 } X_j\widetilde{X}_j = \text{常量}. \tag{79}$$

算符

$$\boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \text{ 和 } \boldsymbol{A}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \tag{80}$$

的伴随可按通常方式由

$$-A^{\dagger}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}A^{\dagger}}{\mathrm{d}x} \text{ 和 } A^{\dagger}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}A^{\dagger}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2A^{\dagger}}{\mathrm{d}x^2} \tag{81}$$

分别定义. 还会看到, 将方程 (76) 写成 [154]

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{I}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{X} = \left(\delta_{jk}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - A_{jk}\right)X_k = 0 \tag{82}$$

的形式是便利的, 其中 $\boldsymbol{I}$ 表示单位 (对角) 矩阵.

假定存在一个 X_j 的线性组合,

$$Z = L_jX_j = \boldsymbol{L}\boldsymbol{X}, \tag{83}$$

它由于方程 (77) 而满足二阶方程

$$OZ = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + C\right)L_jX_j = 0, \tag{84}$$

其中 B 和 C 是 x 的已知函数. 现在的问题是找到一种算法来得出方程 (77) 的能使这一简化成为可能的特定解.

更一般地, 可以假定有 m 个组合

$$Z_\alpha = L_{\alpha j} X_j \quad (\alpha = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n; 2m < n) \tag{85}$$

满足 m 个方程的集

$$\left(\delta_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + C_{\alpha\beta} \right) Z_\beta = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, m), \tag{86}$$

其中 $B_{\alpha\beta}$ 和 $C_{\alpha\beta}$ 是 x 的一定的已知函数. 但是, 这里仅限于只有一个组合来考虑的比较简单的情况. 对一般情况的处理并不需要本质上的新思想, 但必须设计出一套合适的标志法.

由于方程 (82) 而使方程 (84) 满足的事实意味着一个确定的算符等式, 可导出如下:

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_j X_j = \left(\frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}x} + L_k A_{kj} \right) X_j = \Gamma_j X_j (\text{比如说}), \tag{87}$$

其中

$$\Gamma_j = \frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}x} + L_k A_{kj}, \quad \text{或 } \Gamma = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} + LA. \tag{88}$$

对方程 (87) 求导, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_j}{\mathrm{d}x} + \Gamma_k A_{kj} \right) X_j. \tag{89}$$

以上述表示代换方程 (84) 中 Z 的导数, 有

$$OZ = \left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_j}{\mathrm{d}x} + \Gamma_k A_{kj} + B\Gamma_j + CL_j \right) X_j = 0; \tag{90}$$

[155] 于是得出等式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}}{\mathrm{d}x} + \boldsymbol{\Gamma A} + \boldsymbol{B\Gamma} + \boldsymbol{CL} = 0. \tag{91}$$

现在来寻找算符 $\boldsymbol{S}$, 它符合等式

$$\boldsymbol{SE} = \boldsymbol{OL}, \tag{92}$$

或更明白地写为

$$S_k \left(\delta_{kj} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - A_{kj} \right) X_j = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + C \right) L_j X_j. \tag{93}$$

为决定 $\boldsymbol{S}$, 计算当 X_j 满足下列非齐次方程时方程 (93) 的右边,

$$\frac{\mathrm{d}X_j}{\mathrm{d}x} = A_{jk}X_k + \Lambda_j. \tag{94}$$

于是有 (见方程 (87))

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}x} = \Gamma_j X_j + L_j\Lambda_j, \tag{95}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{\mathrm{d}\Gamma_j}{\mathrm{d}x} + \Gamma_k A_{kj}\right) X_j + \Gamma_k\Lambda_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(L_j\Lambda_j). \tag{96}$$

所以, 用等式 (91), 现在得到

$$\begin{aligned} OZ = OL_jX_j &= \left(\frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}x} + L_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + BL_j + \Gamma_j\right)\Lambda_j \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}L_j}{\mathrm{d}x} + L_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + BL_j + \Gamma_j\right)\left(\delta_{jk}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - A_{jk}\right)X_k. \end{aligned} \tag{97}$$

与方程 (92) 的比较显示

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}x} + B\boldsymbol{L} + \boldsymbol{\Gamma}. \tag{98}$$

此算符 $\boldsymbol{S}$ 的伴随是

$$\boldsymbol{S}^\dagger = -\boldsymbol{L}^\dagger\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + B\boldsymbol{L}^\dagger + \boldsymbol{\Gamma}^\dagger. \tag{99}$$

现在考虑

$$\widetilde{X}_j = S_j^\dagger\phi = -L_j\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} + (BL_j + \Gamma_j)\phi \quad (j = 1, \cdots, n), \tag{100}$$

其中 ϕ 是 x 的某个函数. 现在假定上面的 n 个方程唯一地决定 ϕ 和 $\phi_{,x}$. 使这一假定成为可能的唯一条件是, $(3, n)$ 矩阵

[156]

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & +L_1 & -(BL_1 + \Gamma_1) \\ \widetilde{X}_2 & +L_2 & -(BL_2 + \Gamma_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{X}_n & +L_n & -(BL_n + \Gamma_n) \end{bmatrix}, \tag{101}$$

或等价地, 矩阵

$$\begin{bmatrix} \widetilde{X}_1 & L_1 & \Gamma_1 \\ \widetilde{X}_2 & L_2 & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{X}_n & L_n & \Gamma_n \end{bmatrix} \tag{102}$$

的秩是 2, 也就是说, 从矩阵 (102) 选出的任何三行组成的三阶行列式

$$D_{ijk}=\begin{vmatrix}\widetilde{X}_i & L_i & \Gamma_i\\ \widetilde{X}_j & L_j & \Gamma_j\\ \widetilde{X}_k & L_k & \Gamma_k\end{vmatrix},\quad (i\neq j\neq k\neq i), \tag{103}$$

全都为零. 现在来证明, 这些行列式为零是由 $\widetilde{X}_j$ 按照下列伴随方程组而变化来维持的,

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{X}_j}{\mathrm{d}x}=-A_{kj}\widetilde{X}_k. \tag{104}$$

为此, 对行列式 D_{ijk} 求导, 并将对 $\widetilde{X}$、L 和 Γ 的导数分别用方程 (104)、(88) 和 (91) 来代换. 于是得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}D_{ijk}=&\begin{vmatrix}-A_{li}\widetilde{X}_l & L_i & \Gamma_i\\ -A_{lj}\widetilde{X}_l & L_j & \Gamma_j\\ -A_{lk}\widetilde{X}_l & L_k & \Gamma_k\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\widetilde{X}_i & (\Gamma_i-L_lA_{li}) & \Gamma_i\\ \widetilde{X}_j & (\Gamma_j-L_lA_{lj}) & \Gamma_j\\ \widetilde{X}_k & (\Gamma_k-L_lA_{lk}) & \Gamma_k\end{vmatrix}\\ &+\begin{vmatrix}\widetilde{X}_i & L_i & -(\Gamma_lA_{li}+B\Gamma_i+CL_i)\\ \widetilde{X}_j & L_j & -(\Gamma_lA_{lj}+B\Gamma_j+CL_j)\\ \widetilde{X}_k & L_k & -(\Gamma_lA_{lk}+B\Gamma_k+CL_k)\end{vmatrix}\\ =&-A_{li}\begin{vmatrix}\widetilde{X}_l & L_l & \Gamma_l\\ \widetilde{X}_j & L_j & \Gamma_j\\ \widetilde{X}_k & L_k & \Gamma_k\end{vmatrix}-A_{lj}\begin{vmatrix}\widetilde{X}_i & L_i & \Gamma_i\\ \widetilde{X}_l & L_l & \Gamma_l\\ \widetilde{X}_k & L_k & \Gamma_k\end{vmatrix}-A_{lk}\begin{vmatrix}\widetilde{X}_i & L_i & \Gamma_i\\ \widetilde{X}_j & L_j & \Gamma_j\\ \widetilde{X}_l & L_l & \Gamma_l\end{vmatrix}\\ &-BD_{ijk}.\end{aligned} \tag{105}$$

[157] 所以,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}D_{ijk}=-A_{li}D_{ljk}-A_{lj}D_{ilk}-A_{lk}D_{ijl}-BD_{ijk}. \tag{106}$$

结论是, 如果所有的三阶行列式 D_{ijk} 都为零, 那么它们的导数也为零.

不失一般性, 可假定 ϕ 和 $\phi_{,x}$ 由 (100) 中 $j=1$ 和 2 的第一对方程决定. 考虑 $(n-2)$ 个行列式

$$D_{12\alpha}\quad (\alpha=3,\cdots,n). \tag{107}$$

由于任何行列式 D_{ijk} 可被表示为 $D_{12\alpha}$ 的线性组合 (系数独立于 $\widetilde{X}_j$), 于是能将方程 (106) 重写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}D_{12\alpha}=\mathfrak{q}_{\alpha\beta}D_{12\beta}\quad (\alpha=3,\cdots,n), \tag{108}$$

其中 $\mathfrak{q}_{\alpha\beta}$ 是独立于 $\widetilde{X}_j$ 并且明确地已知的系数. 方程 (108) 保证了, 所有 $D_{12\alpha}$ 为零是由伴随方程组 (104) 来维持的.

方程 (108) 提供了对 $D_{12\alpha}$ 的 $(n-2)$ 个一阶方程的线性系统. 假定这些方程的积分因子能被得到, 解能被表示为如下形式,

$$\mathscr{D}_\alpha = k_{\alpha\beta}D_{12\beta} = C_\alpha = \text{常量} \quad (\alpha = 3, \cdots, n), \tag{109}$$

其中 $k_{\alpha\beta}$ 是已知函数. 由于行列式 $D_{12\beta}$ 本身是 $\widetilde{X}_j$ 的线性组合, 将解 (109) 借助于 $\widetilde{X}_j$ 明晰地写出来就会是

$$\mathscr{D}_\alpha = X_{(\alpha)j}\widetilde{X}_j = C_\alpha \quad (\alpha = 3, \cdots, n), \tag{110}$$

其中 $X_{(\alpha)j}$ 是 $k_{\alpha\beta}$ 的确定线性组合. 方程 (79) 现在可以给出结论, 对每个 $\alpha, X_{(\alpha)j}(j = 1, \cdots, n)$ 表示原初方程组 (77) 的一个特定解. 正是这些特定解的存在构成了系统的原初可简化性的基础. 所以, 原则上已经解决了设定的问题.

值得注意的是, 在一个可简化为单个二阶方程的原初三阶系统的特别情形, 方程 (106) 取特别简单的形式

$$\frac{\mathrm{d}D_{123}}{\mathrm{d}x} = -(B + A_{11} + A_{22} + A_{33})D_{123} \tag{111}$$

此方程允许立即积分.

[158]

(a) 方程组 (52)—(54) 的特定解

在§24 中已看到, 对 N、L 和 X 的方程组 (52)—(54) 可以约化为一个二阶方程, 是对

$$Z^{(+)} = \frac{r^2}{nr + 3M}\left(-L + \frac{3M}{nr}X\right). \tag{112}$$

为运用已发展出来的算法, 令

$$x \to r, \quad \text{和 } X_1, X_2, X_3 \to N, L, X. \tag{113}$$

按照这个对应,

$$L_1 = 0, \quad L_2 = -\frac{r^2}{nr + 3M}, \quad \text{和 } L_3 = \frac{r^2}{nr + 3M}\frac{3M}{nr}. \tag{114}$$

而且, 借助于变量 r 的、$Z^{(+)}$ 所满足的波动方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2Z^{(+)}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2M}{r(r-2M)}\frac{\mathrm{d}Z^{(+)}}{\mathrm{d}r} + \frac{r^2}{(r-2M)^2}(\sigma^2 - V^{(+)})Z^{(+)} = 0. \tag{115}$$

下面考虑方程 (111), 满足它的是

$$D_{123} = \frac{r^2}{nr + 3M}\begin{vmatrix} \widetilde{N} & 0 & \Gamma_1 \\ \widetilde{L} & -1 & \Gamma_2 \\ \widetilde{X} & 3M/nr & \Gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{116}$$

按照方程 (52)—(54) 和 (114),

$$A_{11}+A_{22}+A_{33}=a+b-c-\frac{2}{r}=\frac{5M-2r}{r(r-2M)}, \tag{117}$$

和

$$B=\frac{2M}{r(r-2M)}. \tag{118}$$

所以, 对 D_{123} 的方程变为

$$\frac{\mathrm{d}D_{123}}{\mathrm{d}r}=\frac{2r-7M}{r(r-2M)}D_{123}. \tag{119}$$

这个方程的积分形式是

$$\frac{e^{3\nu}}{r^2}D_{123}=\text{常量}\ (e^{2\nu}=1-2M/r). \tag{120}$$

还需借助于 $\widetilde{N},\widetilde{L},$ 和 $\widetilde{X}$ 来表示 D_{123}. 由方程 (116),

$$D_{123}=\frac{r^2}{nr+3M}\left\{-\left(\Gamma_3+\frac{3M}{nr}\Gamma_2\right)\widetilde{N}+\Gamma_1\left(\frac{3M}{nr}\widetilde{L}+\widetilde{X}\right)\right\}, \tag{121}$$

[159] 其中 (见方程 (88))

和

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_1&=L_2A_{21}+L_3A_{31},\\ \Gamma_2&=L_{2,r}+L_2A_{22}+L_3A_{32},\\ \Gamma_3&=L_{3,r}+L_2A_{23}+L_3A_{33}.\end{aligned}\right\} \tag{122}$$

上述方程中的系数 A_{21} 等可由方程 (52)—(54) 得出. 通过计算这各种表示, 最后得出

$$D_{123}=-\frac{e^{-2\nu}}{n^2}(p\widetilde{N}+3M\widetilde{L}+nr\widetilde{X}), \tag{123}$$

其中

$$p=M-\frac{M^2+\sigma^2r^4}{r-2M}. \tag{124}$$

积分 (120) 现在成为

$$\frac{e^{\nu}}{r^2}(p\widetilde{N}+3M\widetilde{L}+nr\widetilde{X})=\text{常量}. \tag{125}$$

所以

$$N=f=p\frac{e^{\nu}}{r^2},\quad L=g=3M\frac{e^{\nu}}{r^2},\quad \text{和 } X=h=nr\frac{e^{\nu}}{r^2} \tag{126}$$

表示方程 (52)—(54) 的特定解, 是由山托珀罗斯用这里所述的方法得出的.

借助于特定解 (126), 方程 (52)—(54) 可简化为一个二阶方程, 即用代换

$$N = f\nu, \quad L = g\lambda, \quad \text{和 } X = h\chi, \tag{127}$$

使它们变成

$$\left.\begin{aligned} \nu_{,r} &= A_{12}\frac{g}{f}(\lambda-\nu) + A_{13}\frac{h}{f}(\chi-\nu), \\ \lambda_{,r} &= A_{21}\frac{f}{g}(\nu-\lambda) + A_{23}\frac{h}{g}(\chi-\lambda), \\ \chi_{,r} &= A_{31}\frac{f}{h}(\nu-\chi) + A_{32}\frac{g}{h}(\lambda-\chi). \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

令

$$P = \nu - \lambda, \quad Q = \lambda - \chi, \quad \text{和 } R = \chi - \nu \quad (P+Q+R=0), \tag{129}$$

方程成为 [160]

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} &= -\left(A_{12}\frac{g}{f} + A_{21}\frac{f}{g}\right)P + A_{23}\frac{h}{g}Q + A_{13}\frac{h}{f}R, \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} &= -\left(A_{23}\frac{h}{g} + A_{32}\frac{g}{h}\right)Q + A_{31}\frac{f}{h}R + A_{21}\frac{f}{g}P, \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} &= -\left(A_{31}\frac{f}{h} + A_{13}\frac{h}{f}\right)R + A_{12}\frac{g}{f}P + A_{32}\frac{g}{h}Q; \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

而这些方程符合要求 (见方程 (129))

$$P + Q + R = 0. \tag{131}$$

方程组向一个二阶方程的可简化性现已显然.

由于

$$Z^{(+)} = \frac{r^2}{nr+3M}\left(\frac{3M}{nr}X - L\right) = \frac{r^2}{nr+3M}g(\chi-\lambda) = -\frac{3Me^{\nu}}{nr+3M}Q, \tag{132}$$

解就很清楚地能完成并由 $Z^{(+)}$ 及其 §24 (ii) 中所给方式的导数来表示.

26. $V^{(+)}$ 与 $V^{(-)}$ 之间和 $Z^{(+)}$ 与 $Z^{(-)}$ 之间的关系

在§24 里将支配极向扰动和轴向扰动的方程简化成了对具有势 $V^{(-)}$ 和 $V^{(+)}$ 的两个函数 $Z^{(-)}$ 和 $Z^{(+)}$ 的一维薛定谔方程. 引人注目的事实是, 不管表面如何, 由方程 (28) 和 (63) 给出的两个势 $V^{(-)}$ 和 $V^{(+)}$ 是很简单地相关的. 事实上, 它们被给为 (可以直接验证)

$$V^{(\pm)} = \pm\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f, \tag{133}$$

其中

$$\beta = 常量 = 6M, \kappa = 常量 = 4n(n+1) = \mu^2(\mu^2+2), \tag{134}$$

和

$$f = \frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r + 6M)} = \frac{\Delta}{2r^3(nr+3M)}. \tag{135}$$

须特别注意的是, 方程 (133) 中 β 和 κ 是常量, 而 f 是在视界 ($r = 2M$) 和无穷远处 (以反平方 r^{-2} 行为) 都为零的函数.

在现阶段还没有明显的理由认为已经预期 (或更确切地说是要预期) 势 $V^{(+)}$ 与 $V^{(-)}$ 是以这种方式简单地相关. 这种相关的缘由将在回到以§28 和§29 的纽曼 – 彭罗斯形式来处理扰动问题时显现. 暂且将关系 (133) 接受为一个可直接证实的事实, 并证明它导致解 $Z^{(+)}$ 与 $Z^{(-)}$ 之间的非常简单的关系.

[161] 相当一般地, 考虑两个波动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_1}{\mathrm{d}x^2} + \sigma^2 Z_1 = V_1 Z_1 = \left(+\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \beta^2 f^2 + \kappa f\right) Z_1 \tag{136}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_2}{\mathrm{d}x^2} + \sigma^2 Z_2 = V_2 Z_2 = \left(-\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} + \beta^2 f^2 + \kappa f\right) Z_2, \tag{137}$$

其中 β 和 κ 是实常量, 而 f 是任意平滑函数, 它及其所有各阶导数都对 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 为零, 且其对 x 的全范围积分是有限的. (为标记方便, 暂时用 x 代替 r_*, 用 Z_1 和 Z_2 代替 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$.)

显然没有限制来假定, 有了方程 (137) 的解 Z_2,

$$Z_1 = pZ_2 + qZ_2' \tag{138}$$

就是方程 (136) 的解, 其中 Z_2' 表示 Z_2 的导数 (对 x), 而 p 和 q 是一定的恰当选择的函数. 必定支配 p 和 q 而使由方程 (138) 给出的 Z_1 是方程 (136) 的解的方程可导出如下.

对方程 (138) 求导, 并用 Z_2 所满足的方程 (137), 得

$$Z_1' = [p' + q(V_2 - \sigma^2)]Z_2 + (p+q')Z_2'. \tag{139}$$

对此方程再次求导, 类似地得到

$$\begin{aligned} Z_1'' = {} & [p'' + (p+2q')(V_2 - \sigma^2) + qV_2']Z_2 \\ & + [p' + q(V_2 - \sigma^2) + p' + q'']Z_2'; \end{aligned} \tag{140}$$

这个表示必定与由方程 (136) 和 (138) 得出的一致, 即

$$Z_1'' = (pZ_2 + qZ_2')(V_1 - \sigma^2). \tag{141}$$

由方程 (140) 和 (141) 右边 Z_2 和 Z_2' 的系数相等, 得

$$q(V_1-\sigma^2)=2p'+q''+q(V_2-\sigma^2) \tag{142}$$

和

$$p(V_1-\sigma^2)=p''+(p+2q')(V_2-\sigma^2)+qV_2'; \tag{143}$$

或者也可以是

$$q(V_1-V_2)=2p'+q'' \tag{144}$$

和

$$p(V_1-V_2)=p''+2q'(V_2-\sigma^2)+qV_2'. \tag{145}$$

由这两个方程消去 (V_1-V_2), 得 [162]

$$2pp'+pq''-p''q-2qq'(V_2-\sigma^2)-q^2V_2'=0. \tag{146}$$

这个方程给出积分

$$p^2+(pq'-p'q)-q^2(V_2-\sigma^2)=\text{常量}=C^2\ (\text{比如说}). \tag{147}$$

方程 (144) 和 (147) 就是如果 pZ_2+qZ_2' 是方程 (136) 的解时 p 和 q 必定满足的方程. 一般 (即对任意给定的 V_1 和 V_2) 不能期待明晰地解出这些方程, 但对现在的情形能够! 确实, 对所给定形式的 V_1 和 V_2, 容易验证

$$q=2\beta(=\text{常量})\ \text{和}\ p=\kappa+2\beta^2 f \tag{148}$$

确实满足方程 (144) 和 (147), 且

$$C^2=\kappa^2+4\beta^2\sigma^2. \tag{149}$$

相应地, 方程 (136) 和 (137) 的 Z_1 和 Z_2 的解以下列方式相关,

$$(\kappa+2\mathrm{i}\sigma\beta)Z_1=(\kappa+2\beta^2 f)Z_2+2\beta Z_2', \tag{150}$$

其中已选择 Z_1 和 Z_2 的相对归一化, 以至同样归一化中的逆关系由下式给出,

$$(\kappa-2\mathrm{i}\sigma\beta)Z_2=(\kappa+2\beta^2 f)Z_1-2\beta Z_1'. \tag{151}$$

对 β、κ 和 f 由方程 (134) 和 (135) 给出时的 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的特定情形, 关系 (150) 和 (151) 取形式

$$[\mu^2(\mu^2+2)+12\mathrm{i}\sigma M]Z^{(+)}=\left[\mu^2(\mu^2+2)+72M^2\frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r+6M)}\right]Z^{(-)}+12MZ^{(-)}_{,r_*} \tag{152}$$

和

$$[\mu^2(\mu^2+2)-12\mathrm{i}\sigma M]Z^{(-)}=\left[\mu^2(\mu^2+2)+72M^2\frac{\Delta}{r^3(\mu^2r+6M)}\right]Z^{(+)}-12MZ^{(+)}_{,r_*}. \tag{153}$$

在§27 中将回到上述关系的应用和势为 (133) 形式时的进一步结果.

下面是关系 (152) 和 (153) 的一个有趣结果. 将 L、X 和 N 的解 (71)、(72) 和 (75) 代入表示式

$$\mathscr{L}=\frac{1}{r}(nr+3M)\left[N-\frac{(n+1)r}{3M}L\right]+\left[(n+1)-\frac{p}{r}\right](L+X), \tag{154}$$

[163] 可以看到 Φ 的项抵消 (这正是把 $\mathscr{L}$ 放在首位考虑的缘故), 于是有

$$\mathscr{L}=-nZ^{(+)}_{,r_*}+\left[\frac{n^2(n+1)}{3M}+3Mn\frac{r-2M}{r^2(nr+3M)}\right]Z^{(+)}. \tag{155}$$

所以,

$$\frac{12M}{n}\mathscr{L}=-12MZ^{(+)}_{,r_*}+\left[4n(n+1)+36M^2\frac{\Delta}{r^3(nr+3M)}\right]Z^{(+)}. \tag{156}$$

由这个方程与方程 (153) 的比较 (记住 $\mu^2=2n$) 可得结论, 由描述极向扰动的径向函数形成的 $\mathscr{L}$ 的表示将满足适合于轴向扰动的波动方程!

27. 反射和透射问题

回到 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 所满足的波动方程, 考虑这些方程的解的性质及其决定的物理上有兴趣的量.

首先看到, 势 $V^{(-)}$ 和 $V^{(+)}$ 是平滑函数, 在 r_* 的全范围 $(+\infty,-\infty)$ 可积, 且处处为正. 此外, 它们对 $r_*\to+\infty$ 有反平方行为, 随着趋于视界和 $r_*\to-\infty$ 而指数式地趋于零. 即有,

和

$$\left.\begin{aligned}&V^{(\pm)}\to 2(n+1)r^{-2}\ \text{当}\ r\to r_*\to+\infty\\&V^{(\pm)}\to(\text{常量})_{\pm}e^{r_*/2M}\ \text{当}\ r_*\to-\infty.\end{aligned}\right\} \tag{157}$$

由于当 $r_*\to\pm\infty$ 时 $V^{(\pm)}$ 下降得比 r_*^{-1} 更快, 解 $Z^{(\pm)}$ 对 $r_*\to\pm\infty$ 的渐近行为就由下式给出,

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma r_*}\quad(r_*\to\pm\infty). \tag{158}$$

所以, 对实的 σ, 解表示在 $\pm\infty$ 的内向和外向波. 于是, 潜在的物理问题就是入射波 (从 $+\infty$ 或 $-\infty$) 被一维势垒 $V^{(\pm)}$ 的反射和透射. 这是基础量子理论中

熟知的一维势垒贯穿问题. 精确地说, 对现在的问题, 必须寻找波动方程的适合下列边界条件的解,

$$\begin{aligned} Z^{(\pm)} &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} + R^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to +\infty), \\ &\to \qquad T^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to -\infty). \end{aligned} \tag{159}$$

这些边界条件对应着一个来自 $+\infty$ 的单位振幅的入射波, 它导致一个在 $+\infty$ 的振幅为 $R^{(\pm)}(\sigma)$ 的反射波和一个在 $-\infty$ 的振幅为 $T^{(\pm)}(\sigma)$ 的透射波. (注意, 按照物理上的要求, 所给的边界条件不允许波从视界脱出.) [164]

由于势是实的, 适合边界条件 (159) 的解的复数共轭将适合复数共轭边界条件,

$$\begin{aligned} Z^{(\pm)^*} &\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} + R^{(\pm)^*}(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \ (r_* \to +\infty), \\ &\to \qquad T^{(\pm)^*}(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \ (r_* \to -\infty). \end{aligned} \tag{160}$$

由于两个 (独立) 解 $Z^{(\pm)}$ 和 $Z^{(\pm)^*}$ 的朗斯基行列式,

$$[Z^{(\pm)}, Z^{(\pm)^*}] = Z^{(\pm)}_{,r_*} Z^{(\pm)^*} - Z^{(\pm)} Z^{(\pm)^*}_{,r_*}, \tag{161}$$

必是一个常量, 由在 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的计算就能得到,

$$-2\mathrm{i}\sigma(|R^{(\pm)}(\sigma)|^2 - 1) = +2\mathrm{i}\sigma|T^{(\pm)}(\sigma)|^2, \tag{162}$$

或,

$$\mathbb{R}^{(\pm)}(\sigma) + \mathbb{T}^{(\pm)}(\sigma) = 1, \tag{163}$$

其中

$$\mathbb{R}^{(\pm)}(\sigma) = |R^{(\pm)}(\sigma)|^2 \text{ 和 } \mathbb{T}^{(\pm)}(\sigma) = |T^{(\pm)}(\sigma)|^2 \tag{164}$$

是反射和透射系数.

(a) 轴向和极向扰动的反射和透射系数的相等性

相当一般地, 考虑与波动方程对 (136) 和 (137) 相关联的反射和透射问题. 据这两个方程的解的关系式 (150) 和 (151), 由 f 对 $x \to \pm\infty$ 趋于零的假定可得, 由具有渐近行为,

$$Z_2 \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} \text{ 和 } Z_2 \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} \quad (x \to \pm\infty) \tag{165}$$

的 Z_2 的解导出的 Z_1 的解分别具有渐近行为

$$Z_1 \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} \text{ 和} Z_1 \to \frac{\kappa - 2\mathrm{i}\sigma\beta}{\kappa + 2\mathrm{i}\sigma\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} \quad (x \to \pm\infty). \tag{166}$$

[165] **表 III** 对应 $l=2$ 和不同频率 (σ) 的轴向波和极向波的反射系数 $(\mathbb{R})$ 以及以弧度为单位的反射振幅 $\delta^{(+)}$、$\delta^{(-)}$ 的相位

σ/M	$\mathbb{R}$	$\delta^{(+)}$	$\delta^{(-)}$
0.10	1.0000	3.172	3.272
0.20	0.9991	2.462	2.661
0.30	0.9945	1.198	1.496
0.32	0.8895	0.854	1.171
0.34	0.7929	0.471	0.808
0.36	0.6491	0.057	0.413
0.38	0.4754	5.909	0.001
0.40	0.3102	5.482	5.877
0.42	0.1841	5.080	5.494
0.44	0.1027	4.710	5.143
0.46	0.05533	4.371	4.823
0.48	0.02935	4.061	4.532
0.50	0.01548	3.773	4.263
0.52	0.00817	3.504	4.013
0.54	0.00433	3.250	3.777
0.56	0.00230	3.007	3.553
0.58	0.00123	2.775	3.340
0.60	0.00065	2.552	3.135
0.62	0.00036	2.337	2.938
0.64	0.00019	2.127	2.746
0.66	0.00010	1.923	2.560
0.68	0.00006	1.724	2.379
0.70	0.00003	1.530	2.203

对 $l>2$ 的值的反射系数 $(\mathbb{R})$

$\sigma M/l$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$
0.130	0.9995			
0.140	0.9985			
0.150	0.9953			
0.160	0.9863	0.9973		
0.170	0.9604	0.9888		
0.180	0.8935	0.9563	0.9787	0.9886
0.190	0.7469	0.8471	0.8934	0.9192
0.200	0.5137	0.5890	0.6109	0.6064
0.210	0.2774	0.2745	0.2312	0.1768
0.220	0.1236	0.0924	0.0556	0.0296
0.230	0.0471	0.0272	0.0117	0.0046
0.240	0.0192	0.0074	0.0023	0.0008
0.250	0.0077	0.0018	0.0005	
0.260	0.0029	0.0009		

相应地, 对入射波被势垒 V_1 和 V_2 反射和透射的相关问题,

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma) \text{ 和 } R_1(\sigma) = \frac{\kappa - 2\mathrm{i}\sigma\beta}{\kappa + 2\mathrm{i}\sigma\beta} R_2(\sigma). \tag{167}$$

于是, 透射波振幅对两个势 V_1 和 V_2 是相等, 而反射振幅仅有相位的差异: [166]

$$R_1(\sigma) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} R_2(\sigma) \quad \text{其中 } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} = \frac{\kappa - 2\mathrm{i}\sigma\beta}{\kappa + 2\mathrm{i}\sigma\beta}. \tag{168}$$

反射系数与透射系数的相等性是来自这些事实.

对现在的 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的特定情形, 反射振幅的相位差由下式给出 (见方程 (134)),

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} = \frac{\mu^2(\mu^2+2) - 12\mathrm{i}\sigma M}{\mu^2(\mu^2+2) + 12\mathrm{i}\sigma M}. \tag{169}$$

表 Ⅲ 是反射和透射系数 (对轴向和极向扰动相同) 以及方程 (169) 给出的反射波相位差的简短表格.

须进一步注意, 由解 Z_1 和 Z_2 的关系 (150) 和 (151) 还可得出, 如果 V_1 允许离散态集 (解随 $x \to \pm\infty$ 而指数式下降), 那么 V_2 也将允许同样的离散态集. 但是, 由于势 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 是处处为正的, 它们不允许任何离散态.

28. 一维势散射理论要点和两个势产生相同透射振幅的必要条件

在§27 已看到势对 (133) 如何对所有 σ 产生相同的透射振幅. 问题是, 是否有一些必要的条件来表征具备这种性质的势. 与这个问题相关的是由孤子理论和柯特维格 – 德弗雷斯 (Korteweg-de Vries) 方程 (KdV 方程) 中 S 矩阵 (见下面方程 (178)) 及其分支的知识来决定势的 "逆散射" 理论. 另外, 问题还会在第 9 章对克尔黑洞的相关研究中出现, 在那里将处理复数势和有奇点的势的情形. 对这些情形还没有全面的理论. 因此, 这里只给出对现有理论的要点的简短讲述, 并得出两个势产生相同透射振幅的必要条件.

一维势散射理论涉及薛定谔波动方程,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \sigma^2\right) f = V f \quad (-\infty < x < +\infty) \tag{170}$$

的解, 其中 $V(x)$ 是 x 的平滑函数. 还假定, 由 V 及其各阶导数构造出的所有多项式都在 x 的整个范围 $(-\infty, +\infty)$ 可积. 按照对 V 的这些限制, 方程 (170) 的解对 $x \to \pm\infty$ 的渐近行为方式是 [167]

$$\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma x}. \tag{171}$$

现在考虑两个特定解 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_2(x,\sigma)$, 有渐近行为

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,\sigma) &\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} \quad (x \to +\infty) \\ f_2(x,\sigma) &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} \quad (x \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

和

现在 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_1(x,-\sigma)$ 是方程 (170) 的两个独立解, 这是由于它们的朗斯基行列式

$$\begin{aligned} [f_1(x,\sigma), f_1(x,-\sigma)] &= \{f_1'(x,\sigma)f_1(x,-\sigma) - f_1(x,\sigma)f_1'(x,-\sigma)\} = \text{常量} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma x}(-\mathrm{i}\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}(\mathrm{i}\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x}\} \\ &= -2\mathrm{i}\sigma \neq 0. \end{aligned} \tag{173}$$

类似地,

$$[f_2(x,\sigma), f_2(x,-\sigma)] = +2\mathrm{i}\sigma \quad (\neq 0); \tag{174}$$

而 $f_2(x,\sigma)$ 和 $f_2(x,-\sigma)$ 也是方程 (170) 的独立解. 相应地, 存在唯一的函数组 $R_1(\sigma), R_2(\sigma), T_1(\sigma)$, 和 $T_2(\sigma)$, 以至对 $\sigma \neq 0$ 有

$$f_2(x,\sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)} f_1(x,\sigma) + \frac{1}{T_1(\sigma)} f_1(x,-\sigma) \tag{175}$$

和

$$f_1(x,\sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)} f_2(x,\sigma) + \frac{1}{T_2(\sigma)} f_2(x,-\sigma). \tag{176}$$

由假定的 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_2(x,\sigma)$ 的渐近行为, 从上面的表示式可得

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x,\sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} + \frac{1}{T_1(\sigma)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} \tag{177}$$

和

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x,\sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} + \frac{1}{T_2(\sigma)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}. \tag{178}$$

相应地, $T_1(\sigma)f_2(x,\sigma)$ 对应于一个来自 $+\infty$ 的单位振幅的入射波 (见方程 (159)), 该波导致一个振幅为 $R_1(\sigma)$ 的反射波和一个振幅为 $T_1(\sigma)$ 的透射波. 类似地, $T_2(\sigma)f_1(x,\sigma)$ 对应于一个来自 $-\infty$ 的单位振幅入射波, 并导致振幅分别为 $R_2(\sigma)$ 和 $T_2(\sigma)$ 的反射波和透射波.

[168] 对 $\sigma \neq 0$ 定义

$$S(\sigma) = \begin{vmatrix} T_1(\sigma) & R_2(\sigma) \\ R_1(\sigma) & T_2(\sigma) \end{vmatrix}, \tag{179}$$

为散射矩阵或 S 矩阵.

由表示式 (175)、(176) 和关系式 (173)、(174) 可得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{T_1(\sigma)} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}[f_1(x,\sigma), f_2(x,\sigma)] = \frac{1}{T_2(\sigma)},\\
&\frac{R_1(\sigma)}{T_1(\sigma)} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}[f_2(x,\sigma), f_1(x,-\sigma)],\\
&\frac{R_2(\sigma)}{T_2(\sigma)} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}[f_2(x,-\sigma), f_1(x,\sigma)].
\end{aligned}\right\} \tag{180}$$

和

所以,

$$T_1(\sigma) = T_2(\sigma) = T(\sigma) \text{ (比如说)}, \tag{181}$$

$$\frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)} = -\frac{R_2(-\sigma)}{T(-\sigma)}, \quad \text{和} \ \frac{R_1(-\sigma)}{T(-\sigma)} = -\frac{R_2(\sigma)}{T(\sigma)}. \tag{182}$$

还有,

$$T^*(\sigma) = T(-\sigma), \quad R_1^*(\sigma) = R_1(-\sigma), \quad \text{和} \ R_2^*(-\sigma) = R_2(\sigma). \tag{183}$$

下一步, 将 $f_2(x,\sigma)$ 的表示式 (175) 代入 $f_1(x,\sigma)$ 的方程 (176), 在所得结果中将 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_1(x,-\sigma)$ 的系数相等 (可以这样做是因为 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_1(x,-\sigma)$ 是独立的解), 得

$$1 = \frac{R_2(\sigma)R_1(\sigma)}{T(\sigma)T(\sigma)} + \frac{1}{T(\sigma)T(-\sigma)}, \tag{184}$$

以作为关系 (182) 的补充. 用关系 (182) 和 (183), 可将方程 (184) 重写为另一形式,

$$|R_1(\sigma)|^2 + |T(\sigma)|^2 = |R_2(\sigma)|^2 + |T(\sigma)|^2 = 1. \tag{185}$$

由方程 (185) 可得

$$|R_1(\sigma)|, \quad |R_2(\sigma)|, \text{ 和 } |T(\sigma)| \text{ 是 } \leqslant 1; \tag{186}$$

而且 $R_1(\sigma)$ 和 $R_2(\sigma)$ 只能有相位的差异. 关系式 (181)、(182) 和 (183) 确立了 S 矩阵的对称性和幺正性.

(a) 约斯特函数及其满足的积分方程 [169]

在势散射理论中可定义约斯特函数,

$$m_1(x,\sigma) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma x} f_1(x,\sigma) \text{ 和 } m_2(x,\sigma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} f_2(x,\sigma), \tag{187}$$

它们适合边界条件 (见方程 (172)),

$$m_1(x,\sigma) \to 1 \text{ 当 } x \to +\infty \text{ 和 } m_2(x,\sigma) \to 1 \text{ 当 } x \to -\infty. \tag{188}$$

并令 σ 为 $\mathrm{Im}\sigma < 0$ 的复数变量, 以致由方程 (172) 定义的函数 $f_1(x,\sigma)$ 和 $f_2(x,\sigma)$ 分别当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时趋于零.

借助于约斯特函数, 可将方程 (175) 和 (176) 重写为

$$T(\sigma)m_2(x,\sigma) = R_1(\sigma)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sigma x}m_1(x,\sigma) + m_1(x,-\sigma) \tag{189}$$

和

$$T(\sigma)m_1(x,\sigma) = R_2(\sigma)\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\sigma x}m_2(x,\sigma) + m_2(x,-\sigma). \tag{190}$$

由行为 (188) 式特别有

$$m_2(x,\sigma) = \frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sigma x} + \frac{1}{T(\sigma)} + o(1) \text{ 当 } x \to +\infty \tag{191}$$

和

$$m_1(x,\sigma) = \frac{R_2(\sigma)}{T(\sigma)}\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\sigma x} + \frac{1}{T(\sigma)} + o(1) \text{ 当 } x \to -\infty. \tag{192}$$

还应注意, 约斯特函数满足微分方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 m_1}{\mathrm{d}x^2} - 2\mathrm{i}\sigma\frac{\mathrm{d}m_1}{\mathrm{d}x} = Vm_1, \\ \text{和} \\ \frac{\mathrm{d}^2 m_2}{\mathrm{d}x^2} + 2\mathrm{i}\sigma\frac{\mathrm{d}m_2}{\mathrm{d}x} = Vm_2. \end{aligned}\right\} \tag{193}$$

现在来得出对 $m_2(x,\sigma)$ 的积分方程. 令

$$f_2(x,\sigma) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma x} + \psi(x,\sigma) \cdot \ (\psi \to 0 \text{当 } x \to -\infty), \tag{194}$$

可得 ψ 满足微分方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \sigma^2\right)\psi = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma x} + \psi)V. \tag{195}$$

用格林函数来解这个方程,

$$G(x-x') = \frac{1}{\sigma}\sin\sigma(x-x')\theta(x-x'), \tag{196}$$

[170] 其中 $\theta(x-x')$ 是阶梯函数,

$$\theta(x-x') = 1 \text{ 对 } x > x' \text{ 和 } = 0 \text{ 对 } x < x', \tag{197}$$

可得 (记住 $\psi \to 0$ 当 $x \to -\infty$)

$$\psi(x,\sigma) = \frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{x}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma(x-x')} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma(x-x')}]V(x')[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma x'} + \psi(x',\sigma)]\mathrm{d}x'. \tag{198}$$

借助约斯特函数重写这个方程,

$$m_2(x,\sigma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}f_2(x,\sigma) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}\psi(x,\sigma), \tag{199}$$

得到

$$m_2(x,\sigma)=1-\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{x}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma(x'-x)}-1)V(x')m_2(x',\sigma)\mathrm{d}x'. \tag{200}$$

对 $\sigma\neq 0$, 方程 (200) 是对 $m_2(x,\sigma)$ 的沃尔特拉 (Volterra) 积分方程; 而且对 $\mathrm{Im}\,\sigma<0$, 它的由重复迭代得到的解对任何可积的平滑 V 都收敛. 也很明显, 这种迭代得到的解将 $m_2(x,\sigma)$ 展开为 σ 倒数的幂级数. 基于这些事实, 可以证明 $m_2(x,\sigma)$ 是下半复 σ 平面 (即对 $\mathrm{Im}\,\sigma<0$) 上的解析函数, 而且它对 $\mathrm{Im}\,\sigma<0(\sigma\neq 0)$ 是连续的.

由方程 (200) 可得

$$\begin{aligned}m_2(x,\sigma)&=-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sigma x}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\sigma x'}V(x')m_2(x',\sigma)\mathrm{d}x'\right]\\&\quad+\left[1+\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{x}V(x')m_2(x',\sigma)\mathrm{d}x'\right]\\&=-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\sigma x}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\sigma x'}V(x')m_2(x',\sigma)\mathrm{d}x'\right]\\&\quad+\left[1+\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}V(x')m_2(x',\sigma)\mathrm{d}x'\right]+o(1)\ \text{对}\ x\to\infty.\end{aligned} \tag{201}$$

将这个结果与方程 (191) 比较表明

$$\frac{R_1(\sigma)}{T(\sigma)}=-\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma x}V(x)m_2(x,\sigma)\mathrm{d}x \tag{202}$$

和

$$\frac{1}{T(\sigma)}=1+\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)m_2(x,\sigma)\mathrm{d}x. \tag{203}$$

对 $R_2(\sigma)/T(\sigma)$ 和 $1/T(\sigma)$ 显然可以用约斯特函数 $m_1(x,\sigma)$ 写出类似的方程.

从方程 (203) 可以得出一个重要结论. 对 $\mathrm{Im}\,\sigma<0$, 将约斯特函数 $m_2(x,\sigma)$ [171] 代之以它的由重复迭代从沃尔特拉积分方程 (200) 得到的解, 可得 $1/T(\sigma)$ 的收敛展开. 这样得到的 $1/T(\sigma)$ 的展开将是 σ 倒数的幂级数, 其系数只要 $V(x)$ 满足已给出的要求就是有限的, 而要求就是由 V 及其导数构造出的所有多项式积分的有限性. 特别地, 由方程 (203) 有

$$T(\sigma)=1-\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)\mathrm{d}x+O(\sigma^{-2}). \tag{204}$$

(*b*) $\lg T(\sigma)$ 展开为 σ^{-1} 的幂级数和不同的势产生相同透射振幅的条件

已经看到如何由方程 (200) 和 (203) 的结合而得出 $1/T(\sigma)$ 作为 σ^{-1} 的幂级数的展开. 但是为明晰地得出这个展开的系数, 看来更便利的是采用由法迪弗 (Faddeev) 找到的一条不同途径.

由代换

$$m_2(x,\sigma)=e^{w(x,\sigma)}, \tag{205}$$

$m_2(x,\sigma)$所满足的方程 (193) 变为

$$w''+2\mathrm{i}\sigma w'+(w')^2-V=0, \tag{206}$$

其中撇号表示对 x 的导数. 由当 $x\to-\infty$ 有 $m_2\to 1$ 的事实, 结果是

$$w\to 0 \text{ 当 } x\to-\infty. \tag{207}$$

从方程 (191) 也可类似地得到

$$w\to-\lg T(\sigma) \text{ 当 } x\to+\infty \text{ 对 } \operatorname{Im}\sigma<0. \tag{208}$$

现在令

$$w(x,\sigma)=\int_{-\infty}^{x}v(x',\sigma)\mathrm{d}x' \quad (w'=v), \tag{209}$$

得方程

$$v'+2\mathrm{i}\sigma v+v^2-V=0. \tag{210}$$

式 (208) 的要求现在给出

$$\lg T(\sigma)=-\int_{-\infty}^{+\infty}v(x,\sigma)\mathrm{d}x. \tag{211}$$

现在通过将 v 展开为 σ^{-1} 的幂级数来寻找方程 (210) 的解; 即

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(x)}{(2\mathrm{i}\sigma)^n}, \tag{212}$$

[172] 其中按方程 (204) 和 (211),

$$v_1=V. \tag{213}$$

将展开式 (212) 代入方程 (211), 得

$$\lg T(\sigma)=-\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sigma^{-n}, \tag{214}$$①

① 感谢 Roza Trautman 博士告诉我, 这个结果可由 V. E. Zakharov and L. D. Faddeev, *Funct. Anal. Appl.*, 5, 280 (1971) 作出的下列另一种对 $\lg T(\sigma)$ 的展开而直接得到:

$$\lg T(\sigma)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma^n}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma')^{n-1}\lg|T(\sigma')|^2\mathrm{d}\sigma'.$$

其中

$$(2\mathrm{i})^n c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} v_n(x)\mathrm{d}x. \tag{215}$$

现在将展开式 (212) 代入方程 (210) 并将 $1/\sigma$ 的不同幂的系数相等, 得到递推关系,

$$v_n = -v'_{n-1} - \sum_{l=1}^{n-1} v_1 v_{n-1-l}. \tag{216}$$

用这个递推关系就能够由下式开始而逐次地解出 v_n,

$$v_1 = V. \tag{217}$$

结果是

$$\left.\begin{aligned} &v_2 = -v'_1 = -V', \\ &v_3 = -v'_2 - v_1^2 = V'' - V^2, \\ &v_4 = -v'_3 - 2v_1 v_2 = -V'''' + 2(V^2)', \\ &v_5 = -v'_4 - 2v_1 v_3 - v_2^2 = V'''' - 3(V^2)'' + (V')^2 + 2V^3, \text{等.} \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

所以, 对 $\lg T(\sigma)$ 的展开中奇数级的系数 c_{2n+1} 是

$$2\mathrm{i}c_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} V\mathrm{d}x; \quad -(2\mathrm{i})^3 c_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2\mathrm{d}x;$$
$$(2\mathrm{i})^5 c_5 = \int_{-\infty}^{+\infty} (2V^3 + V'^2)\mathrm{d}x; \text{等,} \tag{219}$$

而所有偶数级的系数为零.

现在, 如果两个不同的势给出同样的 $T(\sigma)$, 那么对这两个势导出的对 $\lg T(\sigma)$ (对 $\mathrm{Im}\,\sigma < 0$ 收敛) 的级数展开必须逐项重合. 由此得出, 下列量的积分对两个势必定相等:

$$\left.\begin{aligned} &\text{(i) } V; \quad \text{(ii) } V^2; \quad \text{(iii) } 2V^3 + V'^2; \quad \text{(iv) } 5V^4 + 10VV'^2 + V''^2; \\ &\text{(v) } 14V^5 + 70V^2V'^2 + 14VV''^2 + V''''^2; \text{等.} \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

[173]

这里遇到的积分形式上与 KdV 方程的守恒量相同,

$$u_{,t} - 6uu_{,x} + u_{,x,x,x} = 0. \tag{221}$$

这个相同并非偶然, 但要讲述缘由就会离题太远. 有兴趣的读者可以参阅本章末 “文献注释” 中所列的相关文献.

(c) 对应于势 $V^{(\pm)} = \pm\beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f$ 的积分等式等级性的直接验证

对势 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ (由方程 (136) 和 (137) 给出) 要求的各个积分等式是能够被逐一地验证的, 方法是对下式来计算表达式 (220),

$$V = \beta f' + \beta^2 f^2 + \kappa f, \tag{222}$$

并证明 β 的奇数级项可以表示为 f 及其导数的组合的导数, 因而这些项的积分为零 (由于 f 及其所有导数对 $x \to \pm\infty$ 为零的假定).

例如, $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 的积分的相等性是来自 $\beta f'$ 的积分为零的事实.

再考虑 V^2, 对 β 的奇数级项, 有

$$2\beta(\beta^2 f^2 + \kappa f)f' = \frac{2}{3}\beta^3 (f^3)' + \kappa\beta (f^2)'. \tag{223}$$

这个表示的积分显然为零; 其余的项, β 偶数级的, 对 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 是相同的. 同样地, 在对 $2V^3 + V'^2$ 的表示里, β 的奇数级项能简化为

$$2\beta^3 (f f'^2)' + \kappa\beta (f'^2)' + 6\beta(\beta^2 f^2 + \kappa f)^2 f'; \tag{224}$$

而这个表示的积分也为零. (220) 式所列的其余两个量的积分的相等性也能类似地验证, 尽管其演算过程的复杂性快速地增长.

表示式 (220) 对适合于史瓦西黑洞的势 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 的积分的直接计算给出如下结果:

[174]

(i) $\dfrac{1}{4M}(2p-3)$;

(ii) $\dfrac{1}{480M^3}(5p^2 - 18p + 18)$;

(iii) $\dfrac{1}{26880M^5}(16p^3 - 83p^2 + 150p - 87)$;

(iv) $\dfrac{1}{128M^7}\left(\dfrac{1}{168}p^4 - \dfrac{53}{1386}p^3 + \dfrac{263}{2772}p^2 - \dfrac{147}{1430}p + \dfrac{444}{10010}\right)$;

(v) $\dfrac{1}{512M^9}\left(\dfrac{14}{6435}p^5 - \dfrac{41}{2574}p^4 + \dfrac{56}{1155}p^3 - \dfrac{2557}{34320}p^2 + \dfrac{1203}{19448}p - \dfrac{723}{38896}\right)$, (225)

其中 $p = 2(n+1)$.

29. 通过纽曼 – 彭罗斯形式处理的扰动

以上几节中对度规扰动的处理还留下一个令人困惑之点: 已经出现的关系的起源并不清楚. 例如, 为什么极向扰动和轴向扰动会给出相同的反射和透

射系数? 为什么描述它们的解会如此简单地相关联? 而又为什么势 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 由同一公式仅改变一项的符号就确能导出? 尽管这些关系的更深的物理起源仍然模糊, 但由通过纽曼 – 彭罗斯形式对扰动的处理中可以初见端倪. 现在就转向这一研究.

假定各个量的扰动对时间 (t) 和方位角 (φ) 的依赖关系是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma t+m\varphi)}, \tag{226}$$

其中 σ 是一个常数, m 是正、负整数或零. 第 3 章 (方程 (281)) 中建立的沿基零矢量的方向导数 D、Δ、δ 和 δ^*, 当作用于有 (226) 式所示的 t 和 φ 依赖关系的函数时成为

$$\left.\begin{aligned} &l=D=\mathscr{D}_0, \quad n=\Delta=-\frac{\Delta}{2r^2}\mathscr{D}_0^\dagger, \\ &m=\delta=\frac{1}{r\sqrt{2}}\mathscr{L}_0^\dagger, \quad \text{和 } \overline{m}=\delta^*=\frac{1}{r\sqrt{2}}\mathscr{L}_0, \end{aligned}\right\} \tag{227}$$

其中 [175]

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{D}_n=\partial_r+\frac{\mathrm{i}r^2\sigma}{\Delta}+2n\frac{r-M}{\Delta}, \quad \mathscr{L}_n=\partial_\theta+n\cot\theta+m\,\mathrm{cosec}\,\theta, \\ &\mathscr{D}_n^\dagger=\partial_r-\frac{\mathrm{i}r^2\sigma}{\Delta}+2n\frac{r-M}{\Delta}, \quad \text{和 } \mathscr{L}_n^\dagger=\partial_\theta+n\cot\theta-m\,\mathrm{cosec}\,\theta. \end{aligned}\right\} \tag{228}$$

将会看到, $\mathscr{D}_n$ 和 $\mathscr{D}_n^\dagger$ 是纯径向算符, 而 $\mathscr{L}_n$ 和 $\mathscr{L}_n^\dagger$ 是纯角向算符.

已经定义的微分算符 (228) 满足一些将会看到是有用的等式, 即

$$\left.\begin{aligned} &\mathscr{D}_n^\dagger=(\mathscr{D}_n)^*; \quad \mathscr{L}_n^\dagger(\theta)=-\mathscr{L}_n(\pi-\theta), \\ &\Delta\mathscr{D}_{n+1}=\mathscr{D}_n\Delta, \quad \sin\theta\mathscr{L}_{n+1}=\mathscr{L}_n\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{229}$$

与史瓦西时空的 D 型特征 (如在第 3 章§21 中已直接验证的) 一致, 外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3、Ψ_4 和自旋系数 κ、σ、λ、ν 在背景中为零. 唯一的非零外尔标量是 Ψ_2, 其值是 (第 3 章, 方程 (290))

$$\Psi_2=-Mr^{-3}; \tag{230}$$

而非零自旋系数的值是 (第 3 章, 方程 (288))

$$\rho=-\frac{1}{r}, \quad -\alpha=\beta=\frac{\cot\theta}{r2\sqrt{2}}, \quad \mu=-\frac{\Delta}{2r^3}, \quad \gamma=\mu+\frac{r-M}{2r^2}=\frac{M}{2r^2}. \tag{231}$$

(*a*) 已经线性化的方程及其简化

在列于第 1 章 (§8 (*c*)、(*d*) 和 (*e*)) 的纽曼 – 彭罗斯形式的诸方程中, 有 6 个方程, 即 4 个比安基恒等式 (第 1 章方程 (321) (a)、(d)、(e) 和 (h)) 和 2 个里奇恒等式 (第 1 章 (310) (b) 和 (j)), 对在背景中为零的量是线性和齐次的. 这些方程是

$$\left.\begin{aligned}(\delta^*-4\alpha+\pi)\Psi_0-(D-2\varepsilon-4\rho)\Psi_1&=3\kappa\Psi_2,\\(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0-(\delta-4\tau-2\beta)\Psi_1&=3\sigma\Psi_2,\\(D-\rho-\rho^*-3\varepsilon+\varepsilon^*)\sigma-(\delta-\tau+\pi^*-\alpha^*-3\beta)\kappa&=\Psi_0;\end{aligned}\right\}\tag{232}$$

和

$$\left.\begin{aligned}(D+4\varepsilon-\rho)\Psi_4-(\delta^*+4\pi+2\alpha)\Psi_3&=-3\lambda\Psi_2,\\(\delta+4\beta-\tau)\Psi_4-(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3&=-3\nu\Psi_2,\\(\Delta+\mu+\mu^*+3\gamma-\gamma^*)\lambda-(\delta^*+3\alpha+\beta^*+\pi-\tau^*)\nu&=-\Psi_4.\end{aligned}\right\}\tag{233}$$

它们已经是线性化的, 因为 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3、Ψ_4、κ、σ、λ 和 ν 作为扰动量被认为是一阶小量 (有着由 (226) 给出的 t 和 φ 依赖). 相应地, 可以将方程中出现的所有其它量 (包括基矢, 从而方向导数) 代之以它们的由方程 (227)、(230) 和 (231) 给出的未扰动值. 于是得到

[176]

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0+2\cot\theta)\Psi_0-\left(\mathscr{D}_0+\frac{4}{r}\right)\Psi_1&=-\frac{3M}{r^3}\kappa,\\-\frac{\Delta}{2r^2}\left(\mathscr{D}_0^\dagger+\frac{4(r-M)}{\Delta}-\frac{3}{r}\right)\Psi_0-\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0^\dagger-\cot\theta)\Psi_1&=-\frac{3M}{r^3}\sigma,\\\left(\mathscr{D}_0+\frac{2}{r}\right)\sigma-\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0^\dagger-\cot\theta)\kappa&=\Psi_0;\end{aligned}\right\}\tag{234}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\left(\mathscr{D}_0+\frac{1}{r}\right)\Psi_4-\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0-\cot\theta)\Psi_3&=+\frac{3M}{r^3}\lambda,\\\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0^\dagger+2\cot\theta)\Psi_4+\frac{\Delta}{2r^2}\left(\mathscr{D}_0^\dagger-\frac{2(r-M)}{\Delta}+\frac{6}{r}\right)\Psi_3&=+\frac{3M}{r^3}\nu,\\-\frac{\Delta}{2r^2}\left(\mathscr{D}_0^+-\frac{2(r-M)}{\Delta}+\frac{4}{r}\right)\lambda-\frac{1}{r\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0-\cot\theta)\nu&=-\Psi_4.\end{aligned}\right\}\tag{235}$$

这些方程在用下列变量写出时成为简单和对称的形式,

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0=\Psi_0,\quad \Phi_1=\Psi_1 r\sqrt{2},\quad k=\frac{\kappa}{r^2\sqrt{2}},\quad s=\frac{\sigma}{r};\\\Phi_4=\Psi_4 r^4,\quad \Phi_3=\Psi_3\frac{r^3}{\sqrt{2}},\quad l=\frac{1}{2}\lambda r,\quad n=\frac{1}{\sqrt{2}}\nu r^2.\end{aligned}\right\}\tag{236}$$

这样就能得到下列基本方程组:

$$\mathscr{L}_2\Phi_0 - \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right)\Phi_1 = -6Mk, \tag{237}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)\Phi_0 + \mathscr{L}_{-1}^\dagger\Phi_1 = +6Ms, \tag{238}$$

$$\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right)s - \mathscr{L}_{-1}^\dagger k = \frac{\Phi_0}{r}; \tag{239}$$

和

$$\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{r}\right)\Phi_4 - \mathscr{L}_{-1}\Phi_3 = 6Ml, \tag{240}$$

$$\mathscr{L}_2^\dagger\Phi_4 + \Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r}\right)\Phi_3 = 6Mn, \tag{241}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r}\right)l + \mathscr{L}_{-1}n = \frac{\Phi_4}{r}. \tag{242}$$

通过将算符 $\mathscr{L}_{-1}^\dagger$ 和 $(\mathscr{D}_0 + 3/r)$ 分别作用于方程 (237) 和 (238) 并相加, 可 [177]
在这两个方程中消去 Φ_1. 所得方程的右边, 除一个因子 $6M$ 外, 精确地就是方程 (239) 左边出现的量. 于是得到解耦方程

$$\left[\mathscr{L}_{-1}^\dagger\mathscr{L}_2 + \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right)\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)\right]\Phi_0 = \frac{6M}{r}\Phi_0. \tag{243}$$

类似地, 由方程 (240)—(242) (通过消去 Φ_3) 得到解耦方程

$$\left[\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_2^\dagger + \Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r}\right)\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{r}\right)\right]\Phi_4 = \frac{6M}{r}\Phi_4. \tag{243'}$$

等式,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\mathscr{D}_1 + \frac{3}{r}\right)\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right) - \frac{6M}{r} &= \Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger + \frac{6}{r}[-\mathrm{i}r^2\sigma + (r-M)] - \frac{6\Delta}{r^2} - \frac{6M}{r} \\ &= \Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger - 6\mathrm{i}\sigma r,\end{aligned} \tag{244}$$

将方程 (243) 简化为

$$[\mathscr{L}_{-1}^\dagger\mathscr{L}_2 + (\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger - 6\mathrm{i}\sigma r)]\Phi_0 = 0. \tag{245}$$

方程 (243') 类似地简化为

$$[\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_2^\dagger + (\Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma r)]\Phi_4 = 0. \tag{246}$$

方程 (245) 和 (246) 允许变量分离. 通过代换

$$\Phi_0 = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta) \text{ 和 } \Phi_4 = R_{-2}(r)S_{-2}(\theta), \tag{247}$$

其中 $R_{\pm 2}$ 和 $S_{\pm 2}$ 分别只是 r 和 θ 的函数, 得到两对方程,

$$\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\mathscr{L}_2 S_{+2} = -\mu^2 S_{+2}, \tag{248}$$

$$(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^{\dagger} - 6\mathrm{i}\sigma r)R_{+2} = +\mu^2 R_{+2}; \tag{249}$$

和

$$\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_2^{\dagger} S_{-2} = -\mu^2 S_{-2}, \tag{250}$$

$$(\Delta\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma r)R_{-2} = +\mu^2 R_{-2}, \tag{251}$$

其中 μ^2 是分离常量.

注意, 由方程 (245) 和 (246) 导出的分离常量并无区分. 理由如下: 考虑方
[178] 程 (248), 首先看到 μ^2 是一个特征值参量, 由 $S_{+2}(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 无奇异的要求来确定. 另一方面, 由于作用于方程 (250) 左边 S_{-2} 上的算符与作用于方程 (248) 中 S_{+2} 上的算符是相同的, 如果用 $\pi - \theta$ 取代 θ, 那么方程 (248) 的属于特征值 μ^2 的固有解 $S_{+2}(\theta;\mu^2)$, 在 $S_{+2}(\theta;\mu^2)$ 中用 $\pi - \theta$ 取代 θ 后, 就成为方程 (250) 的属于同样值 μ^2 的固有解. 换句话说, 方程 (248) 和 (250) 确定 μ^2 的同一组特征值.

不失一般性, μ^2 的特征值可由考虑 $m = 0$ 的情形来确定. (理由与限于原初球对称系统的轴对称扰动是一样的.) 将支配 S_{+2} 的方程对 $m = 0$ 展开, 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 S_{+2}}{\mathrm{d}\theta^2} + \cot\theta\frac{\mathrm{d}S_{+2}}{\mathrm{d}\theta} - 2(\cot^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta)S_{+2} = -\mu^2 S_{+2}. \tag{252}$$

由代换,

$$S_{+2}(\theta) = C(\theta)\,\mathrm{cosec}^{\,2}\theta, \tag{253}$$

方程变为

$$\sin^3\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\theta} + \mu^2 C = 0. \tag{254}$$

与方程 (20) 和 (21) 的比较表明

$$C(\theta) = C_{l+2}^{-3/2}(\theta) \text{ 和 } \mu^2 = 2n = (l-1)(l+2). \tag{255}$$

所以,

$$\begin{aligned} S_{+2}(\theta) = C_{l+2}^{-3/2}(\theta)\,\mathrm{cosec}^{\,2}\theta &= \sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l}{\mathrm{d}\theta} \\ &= \mathrm{P}_{l,\theta,\theta} - \mathrm{P}_{l,\theta}\cot\theta \quad (m=0), \end{aligned} \tag{256}$$

其中 P_l 与通常一样标记勒让德函数. 当 $m \neq 0$ 时, $S_{+2}(\theta)$ 变为 "自旋加权" 的球谐函数, 但 μ^2 的值不受影响.

回到径向方程 (249), 可以看到 $\Delta^2 R_{+2}$ 满足方程

$$(\Delta \mathscr{D}_{-1} \mathscr{D}_0^\dagger - 6\mathrm{i}\sigma r)\Delta^2 R_{+2} = \mu^2 (\Delta^2 R_{+2}); \tag{257}$$

这是 R_{-2} 所满足的方程 (251) 的复数共轭.

现在将方程 (257) 变换为理论中的标准回归形式. 首先看到

$$\mathscr{D}_0 = \frac{r^2}{\Delta}\Lambda_+ \text{ 和 } \mathscr{D}_0^\dagger = \frac{r^2}{\Delta}\Lambda_- \tag{258}$$

其中 (见方程 (29)) [179]

$$\Lambda_\pm = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} \pm \mathrm{i}\sigma \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}. \tag{259}$$

相应地,

$$\Delta \mathscr{D}_{-1} \mathscr{D}_0^\dagger = \Delta^2 \mathscr{D}_0 \frac{1}{\Delta} \mathscr{D}_0^\dagger = r^2 \Delta \Lambda_+ \left(\frac{r^2}{\Delta^2} \Lambda_- \right). \tag{260}$$

再将 $\Delta^2 R_{+2}$ 代之以

$$Y_{+2} = r^{-3}\Delta^2 R_{+2}, \tag{261}$$

可将方程 (257) 重写为

$$\Lambda_+ \left[\frac{r^2}{\Delta^2} \Lambda_- (r^3 Y_{+2}) \right] - 6\mathrm{i}\sigma \frac{r^2}{\Delta} Y_{+2} = \mu^2 \frac{r}{\Delta} Y_{+2}. \tag{262}$$

进一步简化, 可使方程 (262) 成为

$$\Lambda^2 Y_{+2} + P\Lambda_- Y_{+2} - QY_{+2} = 0, \tag{263}$$

其中

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} \lg \frac{r^8}{\Delta^2} = \frac{4}{r^2}(r - 3M) \tag{264}$$

和

$$Q = \frac{\Delta}{r^5}(\mu^2 r + 6M). \tag{265}$$

方程 (263) 是本书中用得最多的对 Ψ_0 的方程的形式, 也是下文将频繁遇到的形式.

支配 R_{-2} 的方程 (251) 的类似简化将导致方程 (263) 的复数共轭. 用代换

$$Y_{-2} = r^{-3} R_{-2}, \tag{266}$$

可得

$$\Lambda^2 Y_{-2} + P\Lambda_+ Y_{-2} - QY_{-2} = 0. \tag{267}$$

有了满足同一方程的 Y_{+2} 和 Y^*_{-2}, 容易推出

$$\frac{r^8}{\Delta^2}(Y^*_{-2}\Lambda_- Y_{+2} - Y_{+2}\Lambda_- Y^*_{-2}) = \text{常量}. \tag{268}$$

由于

$$Y^*_{-2}\Lambda_- Y_{+2} - Y_{+2}\Lambda_- Y^*_{-2} = Y_{+2,r_*}Y^*_{-2} - Y_{+2}Y^*_{-2,r_*}, \tag{269}$$

可得解 Y_{+2} 和 Y^*_{-2} 的朗斯基行列式 $[Y_{+2}, Y^*_{-2}]$ 由下式给出,

$$[Y_{+2}, Y^*_{-2}] = \text{常量}\ r^{-8}\Delta^2; \tag{270}$$

[180] 或, 由 (261) 和 (266) 的代换,

$$[\Delta^2 R_{+2}, R^*_{-2}] = \text{常量} r^{-2}\Delta^2. \tag{271}$$

最后这个关系必定很清楚地意味着一个 "守恒定律", 正如朗斯基行列式 $[Z^{(\pm)}, Z^{(\pm)*}]$ 的不变性导致方程 (163) 中的守恒定律那样. 的确, 在§32 中将看到, 方程 (271) 的含意与方程 (163) 是同样的.

(*b*) 方程组 (237)—(242) 解的完成和影子规范

本章并不追求纽曼 – 彭罗斯形式的所有相关方程的完备解, 那将在第 9 章里在更一般的克尔黑洞的意义上来进行; 但是这里将完成方程 (237)—(242) 的解, 因为它们在第 5 章的一些讨论中是需要的.

两个初步的观察: 首先, 只有 6 个方程却涉及 8 个未知量, 这意味着解必定包含 2 个任意函数; 其次, 支配 Φ_0、Φ_1、k、s 的方程 (237)—(239) 和支配 Φ_4、Φ_3、l、n 的方程 (240)—(242) 是解耦的. 这两组方程的解耦有着更深远的含义, 但也将推迟到第 9 章中考虑.

回到方程 (237)—(242), 已经讲过这些方程如何导致对 Φ_0 和 Φ_4 的两个独立方程. 对其余量的解显然必定包含两个任意函数. 这种任意性的缘由是清楚的. 由第 1 章 (§8 (*g*)) 关于各个纽曼 – 彭罗斯量的四次旋转效应的讨论可以得出, Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 在其中为零的背景的四次基的一级无穷小旋转对 Ψ_0 和 Ψ_4 的影响只是二级的. 但对 Ψ_1 和 Ψ_3 却不是如此: 它们在一级上被影响 (特别参见第 1 章方程 (342) 和 (346)). 换句话说, 在线性扰动理论里, Ψ_0 和 Ψ_4 是规范不变量, 而 Ψ_1 和 Ψ_3 不是. 相应地, 比如说, 可以选择一个规范 (例如, 使四次基受一个无穷小转动), Ψ_1 和 Ψ_3 在其中为零 (不影响 Ψ_0 和 Ψ_4).

如果选择了 Ψ_1 和 Ψ_3 为零的规范, 对 k、s、l 和 n 的对应的解就能从方程 (237)、(238)、(240) 和 (241) 直接得出,

$$\left.\begin{aligned} -6Mk = R_{+2}\mathscr{L}_2 S_{+2}, \quad 6Ms = S_{+2}\Delta(\mathscr{D}_2^\dagger - 3/r)R_{+2}; \\ +6Mn = R_{-2}\mathscr{L}_2^\dagger S_{-2}, \quad 6Ml = S_{-2}(\mathscr{D}_0 - 3/r)R_{-2}. \end{aligned}\right\} \tag{272}$$

和

但是有一个重要的信息在上面的解中失去了: 仍然不知道径向函数 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 的相对归一化. 这个信息将在§32 中得到. [181]

还能作出 Ψ_1 和 Ψ_3 在其中为零的规范以外的其它选择, 特别是有一个能给方程 (237)—(242) 带来它们本不具有的一种对称性. 考虑方程 (237)—(239), 这些方程对 Φ_0、k 和 s 的对称性对 Φ_1、k 和 s 只是部分地存在. 例如, 方程 (239) 是一个 "正确" 的方程, 允许在方程 (237) 和 (238) 中消去 Φ_1 后得出 Φ_0 的解耦方程. 但类似的对 Φ_0 的消去却不能导致 Φ_1 的解耦方程, 因为没有一个 "正确" 的第四方程. 但是, 运用给予四次标架一个无穷小转动的自由权, 可以通过提供 (特定地?) 所需的第四方程来改变状况. 也就是, 由附加方程,

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)k + \mathscr{L}_2 s = \frac{2}{r}\Phi_1, \tag{273}$$

就能在方程 (237) 和 (238) 中消去 Φ_0 而得到解耦方程

$$\left[\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right) + \mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger\right]\Phi_1 = 12\frac{M}{r}\Phi_1. \tag{274}$$

对这个方程的展开给出

$$[(\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0 - 6\mathrm{i}\sigma r) + \mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger]\Phi_1 = 0. \tag{275}$$

类似地, 对方程 (240)—(242) 附加一个方程

$$\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{r}\right)n - \mathscr{L}_2^\dagger l = \frac{2}{r}\Phi_3, \tag{276}$$

并在方程 (240) 和 (241) 中消去 Φ_4, 得解耦方程

$$[(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_{-1}^+ + 6\mathrm{i}\sigma r) + \mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}]\Phi_3 = 0. \tag{277}$$

方程 (275) 和 (277) 显然是可分离的: 由代换

$$\Phi_1 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \text{ 和 } \Phi_3 = R_{-1}(r)S_{-1}(\theta) \tag{278}$$

—— 现在用下标 +1 和 –1 来标记这些函数 —— 得到方程对

$$(\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0 - 6\mathrm{i}\sigma r)R_{+1} = +\mu^2 R_{+1}, \quad \mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger S_{+1} = -\mu^2 S_{+1}; \tag{279}$$

和

$$(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}+6\mathrm{i}\sigma r)R_{-1}=+\mu^2R_{-1},\quad \mathscr{L}_2^{\dagger}\mathscr{L}_{-1}S_{-1}=-\mu^2S_{-1}. \tag{280}$$

[182] 注意, 在方程 (279) 和 (280) 中已经用了与方程 (248) 和 (250) 中同样的分离常量 μ^2. 理由是, 函数 S_{+1} 和 S_{-1} 是与函数 S_{+2} 和 S_{-2} 简单地相关联. 如果这些函数被恰当地归一化, 则下面的关系显然成立:

$$\mathscr{L}_2S_{+2}=+\mu S_{+1},\quad \mathscr{L}_{-1}^{\dagger}S_{+1}=-\mu S_{+2}; \tag{281}$$

和

$$\mathscr{L}_2^{\dagger}S_{-2}=-\mu S_{-1},\quad \mathscr{L}_{-1}S_{-1}=+\mu S_{-2}; \tag{282}$$

而 $S_{\pm2}$ 在 $\theta=0$ 和 π 的正常性保证了 $S_{\pm1}$ 的同样正常性.

将会看到 (见第 5 章§46), 方程 (278)—(280) 定义的函数 Φ_1 和 Φ_3 描述史瓦西几何里的麦克斯韦场①. 于是, 通过找到规范来修复方程 (237)—(242) 对其中所出现的量的被截去的对称性, 实际上就已经导出了麦克斯韦方程 (适合于自旋为 ±1 的光子). 相关的径向和角向函数由下标 ±1 的标记因此被证明为合理.

由于史瓦西几何对麦克斯韦场存在的貌似隐藏的 "察觉", 因而将方程 (273) 和 (276) 在其中成立的规范称为影子规范.

最后注意到, 在影子规范中自旋系数的解是

$$\left.\begin{aligned}
-6Mk&=S_{+1}[+\mu R_{+2}-(\mathscr{D}_0+3/r)R_{+1}],\\
+6Ms&=S_{+2}[-\mu R_{+1}+\Delta(D_2^{\dagger}-3/r)R_{+2}],\\
+6Ml&=S_{-2}[-\mu R_{-1}+(\mathscr{D}_0-3/r)R_{-2}],\\
+6Mn&=S_{-1}[-\mu R_{-2}+\Delta(\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}+3/r)R_{-1}].
\end{aligned}\right\} \tag{283}$$

由关系式 (281) 和 (282), 上面对自旋系数的解继续对 r 和 θ 可分离. 这个可分离性将在第 5 章对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞扰动的处理中起重要作用.

30. 变换理论

上一节已经讲述纽曼 – 彭罗斯形式如何导致对径向函数 Δ^2R_{+2} 和 R_{-2} 的一对复数共轭方程. 如将在§32 详细看到的, 与方程 (263) 和 (267) 以及朗斯基行列式 (271) 相关联, 有一个入射引力波的反射和投射问题, 它同与支配 $Z^{(\pm)}$ 的方程和导致守恒定律 (163) 的朗斯基行列式相关联的问题有着相同的

[183] 物理内涵. 的确, 沿两个途径发展出来的理论, 即纽曼 – 彭罗斯形式和线性化的爱因斯坦方程. 相互一致的要求, 才是轴向扰动和极向扰动确定出相同反射

① 第 8 章里将在更一般的克尔几何的意义上处理麦克斯韦方程.

和投射系数的终极原因. 此论断的一个推论是, 用函数 $Y_{\pm 2}$ 和 $Z^{(\pm)}$ 相互明晰地表示对方应该是可能的. 这个可能性, 或者甚至是确定性, 即方程 (263) 的解 Y_{+2} 能被同时变换来给出支配 $Z^{(+)}$ 或 $Z^{(-)}$ 的方程的解, 意味着方程 (263) 有一个特别性质来使之成为可能. 现在就来找出这个特性是什么.

问题是把一个如下形式方程,

$$\Lambda^2 Y + P\Lambda_- Y - QY = 0 \tag{284}$$

的解用一个一维波动方程,

$$\Lambda^2 Z = VZ \tag{285}$$

的解来表示, 其中

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\lg \frac{r^8}{\Delta^2}\right), \tag{286}$$

而 Q 和 V 是现在作为未定的函数.

由于 Y 和 Z 都满足二阶方程, 就没有限制来假定 Y 是 Z 及其导数的线性组合. 但是这里不像 §26 中考虑类似问题时那样简单地作出这个假定, 而是另外假定

$$Y = f\Lambda_+\Lambda_+ Z + W\Lambda_+ Z, \tag{287}$$

或等价地,

$$Y = fVZ + (W + 2\mathrm{i}\sigma f)\Lambda_+ Z, \tag{288}$$

其中 f 和 W 是 r_* 的待定函数. 也许看似有点奇怪, 作为 Z 及其导数线性组合的 Y 的表示会是这样转弯抹角的样子. 但这个表示对方程 (284) 和 (285) 而言是最恰当的, 下面的 §31 里将在一个不同意义上看到.

将算符 Λ_- 作用于方程 (287) 的两边, 并用 Z 已被假定为满足方程 (285) 的事实, 得

$$\Lambda_- Y = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(fV) + WV\right] Z + \left[fV + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(W + 2\mathrm{i}\sigma f)\right]\Lambda_+ Z; \tag{289}$$

或者, 用定义,

$$-\beta\frac{\Delta^2}{r^8} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(fV) + WV \tag{290}$$

和 [184]

$$R = fV + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(W + 2\mathrm{i}\sigma f), \tag{291}$$

写为

$$\Lambda_- Y = -\beta\frac{\Delta^2}{r^8} Z + R\Lambda_+ Z. \tag{292}$$

下一步, 将算符 Λ_- 作用于方程 (292), 得 (再次用 Z 满足的方程)

$$\Lambda_-\Lambda_-Y = -\beta\frac{\Delta^2}{r^8}(\Lambda_+ - 2\mathrm{i}\sigma)Z - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*}\frac{\Delta^2}{r^8}Z - \beta Z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\Delta^2}{r^8}\right) + RVZ + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r_*}\Lambda_+Z. \tag{293}$$

另一方面, 由方程 (284),

$$\Lambda_-\Lambda_-Y = -(P + 2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_-Y + QY, \tag{294}$$

或由方程 (287) 和 (292) 来代换 Y 和 Λ_-Y, 有 (见方程 (286))

$$\Lambda_-\Lambda_-Y = -\left(2\mathrm{i}\sigma + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg\frac{r^8}{\Delta^2}\right)\left(-\beta\frac{\Delta^2}{r^8}Z + R\Lambda_+Z\right) + Q[\mathfrak{f}VZ + (W + 2\mathrm{i}\sigma\mathfrak{f})\Lambda_+Z]. \tag{295}$$

由于方程 (293) 和 (295) 的右边必定是一样的, 故可将 Z 和 Λ_+Z 的系数相等. 这样就得到

$$RV - \frac{\Delta^2}{r^8}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*} = Q\mathfrak{f}V \tag{296}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r_*} - \beta\frac{\Delta^2}{r^8} = Q(W + 2\mathrm{i}\sigma\mathfrak{f}) - \left(2\mathrm{i}\sigma + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg\frac{r^8}{\Delta^2}\right)R. \tag{297}$$

将方程 (296) 和 (297) 重写为

$$-\frac{\Delta^2}{r^8}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*} = (Q\mathfrak{f} - R)V \tag{298}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{r^8}{\Delta^2}R\right) = \frac{r^8}{\Delta^2}[Q(W + 2\mathrm{i}\sigma\mathfrak{f}) - 2\mathrm{i}\sigma R] + \beta. \tag{299}$$

现在可以验证, 方程 (290)、(291)、(298) 和 (299) 允许积分

$$\frac{r^8}{\Delta^2}R\mathfrak{f}V + \beta(W + 2\mathrm{i}\sigma\mathfrak{f}) = K = \text{常量}. \tag{300}$$

[185] 这个积分是§26 中在类似意义上得到的积分 (147) 的对应物.

积分 (300) 使得能将关系式 (288) 和 (292) 的逆形式写为

$$\left.\begin{aligned} KZ &= \frac{r^8}{\Delta^2}RY - \frac{r^8}{\Delta^2}(W + 2\mathrm{i}\sigma\mathfrak{f})\Lambda_-Y, \\ K\Lambda_+Z &= \beta Y + \frac{r^8}{\Delta^2}\mathfrak{f}V\Lambda_-Y. \end{aligned}\right\} \tag{301}$$

(a) $f=1$ 和 $\beta=$ 常数的变换存在的条件; 双重变换

可以在形式上将 5 个方程 (290)、(291)、(298)—(300) 中的任意 4 个作为支配 5 个函数 β、f、R、V 和 W 的方程. 现在来求得变换方程与下列要求相符的条件,

$$\beta=\text{常量和 } f=1. \tag{302}$$

将会看到, 与要求 (302) 相符的变换只有当 Q 满足某个对 β 的非线性二阶微分方程时才有可能. 由这个事实又会得出, 精确地就是要求 (302) 允许支配 Y 的方程同时地变换为支配 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ (具有§26 (方程 (133)) 所给形式的 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$) 的方程之一.

当 β 是常数和 $f=1$ 时, 方程 (298) 要求

$$R=Q. \tag{303}$$

方程 (291) 于是给出

$$V=Q-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r_*}. \tag{304}$$

其余的方程 —— 可取为 (299) 和 (300)—— 是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{r^8}{\Delta^2}R\right)=\left(\frac{r^8}{\Delta^2}Q\right)W+\beta \tag{305}$$

和

$$\left(\frac{r^8}{\Delta^2}Q\right)V+\beta W=K-2\mathrm{i}\sigma\beta=\text{常量}=\kappa(\text{比如说}). \tag{306}$$

令

$$F=\frac{r^8}{\Delta^2}Q, \tag{307}$$

可将方程 (305) 和 (306) 重写为 [186]

$$W=\frac{1}{F}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}-\beta\right) \tag{308}$$

和

$$FV+\beta W=F\left(Q-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r_*}\right)+\beta W=\kappa. \tag{309}$$

由这两个方程消去 W, 得

$$FQ-F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}-\frac{\beta}{F}\right)+\frac{\beta}{F}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}-\beta\right)=\kappa, \tag{310}$$

或经过一些简化后, 有

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}\right)^2-\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r_*^2}+\frac{\Delta^2}{r^8}F^2=\frac{\beta^2}{F}+\kappa. \tag{311}$$

由于 F 必须被假设为给定, 所以方程 (311) 就是变换方程与要求 (302) 相符的必要和充分条件: 必须存在常数 β 和 κ 以使方程 (311) 被所给的 $Q=\Delta^2F/r^8$ 满足. 由于 β 在方程 (311) 中是以 β^2 出现, 当方程被满足时, 与 $+\beta$ 和 $-\beta$ 相关联的两个变换都是可能的. 这里称为双重变换, 并如即将验证的, 它们直接导致支配轴向扰动和极向扰动的方程.

用下标 (±) 区分与 $+\beta$ 和 $-\beta$ 相关联的变换, 可写出

$$W^{(\pm)}=\frac{1}{F}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}\mp\beta\right) \tag{312}$$

和

$$V^{(\pm)}=Q-\frac{\mathrm{d}W^{(\pm)}}{\mathrm{d}r_*}. \tag{313}$$

将最后这个方程重写为

$$V^{(\pm)}=Q-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{1}{F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}\mp\frac{\beta}{F}\right), \tag{314}$$

并用方程 (310), 得

$$V^{(\pm)}=\frac{\kappa}{F}\mp\frac{\beta}{F^2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}\mp\beta\right). \tag{315}$$

令

$$f=F^{-1}, \tag{316}$$

[187] 得公式

$$V^{(\pm)}=\pm\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_*}+\beta^2f^2+\kappa f. \tag{317}$$

相关变换的明晰形式是

$$\left.\begin{aligned} Y&=V^{(\pm)}Z^{(\pm)}+(W^{(\pm)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+Z^{(\pm)},\\ \Lambda_-Y&=\mp\beta\frac{\Delta^2}{r^8}Z^{(\pm)}+Q\Lambda_+Z^{(\pm)}, \end{aligned}\right\} \tag{318}$$

和

$$\left.\begin{aligned} K^{(\pm)}Z^{(\pm)}&=\frac{r^8}{\Delta^2}[QY-(W^{(\pm)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_-Y],\\ K^{(\pm)}\Lambda_+Z^{(\pm)}&=\pm\beta Y+\frac{r^8}{\Delta^2}V^{(\pm)}\Lambda_-Y, \end{aligned}\right\} \tag{319}$$

其中

$$K^{(\pm)}=\kappa\pm2\mathrm{i}\sigma\beta. \tag{320}$$

最后注意, 用关系 (318) 和 (319), 可以连接对 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的解. 也就是, 令 $Z^{(-)}$ 表示有势 $V^{(-)}$ 的波动方程的解, 它可由方程 (319) 的第一个用 Y 和

$\Lambda_- Y$ 来表示, 再借助方程 (318) 用 $Z^{(+)}$ 和 $\Lambda_+ Z^{(+)}$ 来表示这些. 由这个程序, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^2}{r^8}K^{(-)}Z^{(-)} &= QY-(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_- Y\\ &= Q[V^{(+)}Z^{(+)}+(W^{(+)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ Z^{(+)}]\\ &\quad -(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\left[-\beta\frac{\Delta^2}{r^8}Z^{(+)}+Q\Lambda_+ Z^{(+)}\right];\end{aligned}\tag{321}$$

或经对各项的重组, 有

$$\begin{aligned}K^{(-)}Z^{(-)} &= \left[\frac{r^8}{\Delta^2}QV^{(+)}+\beta(W^{(+)}+2\mathrm{i}\sigma)+\beta(W^{(-)}-W^{(+)})\right]Z^{(+)}\\ &\quad +F(W^{(+)}-W^{(-)})\Lambda_+ Z^{(+)}.\end{aligned}\tag{322}$$

方程 (322) 的右边可用方程 (306)、(312)、(316) 和 (320) 来简化, 即有

$$(\kappa-2\mathrm{i}\sigma\beta)Z^{(-)}=(\kappa+2\beta^2 f)Z^{(+)}-2\beta\frac{\mathrm{d}Z^{(+)}}{\mathrm{d}r_*}.\tag{323}$$

这个关系的逆是

$$(\kappa+2\mathrm{i}\sigma\beta)Z^{(+)}=(\kappa+2\beta^2 f)Z^{(-1)}+2\beta\frac{\mathrm{d}Z^{(-)}}{\mathrm{d}r_*}.\tag{324}$$

于是就重新得到了关系 (150) 和 (151), 以前是由直接连接方程 (136) 和 (137) 的解的变换来导出的. [188]

(*b*) **支配 F 的方程的验证以及 κ 和 β^2 的值**

对现在的情形, Q 是在方程 (265) 中定义的. 所以,

$$F=\frac{r^8}{\Delta^2}Q=\frac{r^3}{\Delta}(\mu^2 r+6M)=\frac{1}{f},\tag{325}$$

现在来验证, F 的这个表示对 β^2 和 κ 的某些定值满足方程 (311). 考虑方程 (311) 的左边, 可得

$$\begin{aligned}-F\left[\frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\lg F\right)-\frac{\Delta^2}{r^8}F\right] &= \mu^2(\mu^2+2)+36M^2\frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r+6M)}\\ &= \mu^2(\mu^2+2)+\frac{36M^2}{F};\end{aligned}\tag{326}$$

这必定等于 $\kappa+\beta^2/F$. 所以, 由方程 (325) 定义的 F 的确满足方程 (311), 只要

$$\beta^2=36M^2 \text{ 和 } \kappa=\mu^2(\mu^2+2).\tag{327}$$

于是, 支配 Y 的方程 (263) 允许上面 § (a) 中所讲的双重变换: 有 $\beta = 6M$ 的对 $V^{(\pm)}$ 的表示 (317) 和由方程 (325) 所定义的 f 正是 §26 中所列的方程 (133)—(135). 此外, 由现在定义的 κ、β 和 F, 关系 (323) 和 (324) 与前面由假定 $V^{(+)}$ 和 $V^{(-)}$ 具有现在为它们导出的形式所推出的关系是相同的.

最后注意到, 对由方程 (325) 给出的 F,

$$W^{(-)} = \frac{2}{r^2}(r - 3M) \text{ 和 } W^{(+)} = 2\frac{\mu^2 r^2 - 3\mu^2 M r - 6M^2}{r^2(\mu^2 r + 6M)}. \tag{328}$$

31. 借助于度规扰动对 Ψ_0 的直接计算

上一节中, 已经通过显示如何能由方程 (318) 和 (319) 中的双重变换来用 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 表示函数 Y_{+2}, 而将外尔标量,

$$\Psi_0 = \frac{r^3}{\Delta^2} Y_{+2}(r) S_{+2}(\theta), \tag{329}$$

与度规扰动相联系. 现在通过用度规扰动直接计算 Ψ_0 来完成整个循环.

由定义,

[189]

$$\Psi_0 = R_{(p)(q)(r)(s)} l^{(p)} m^{(q)} l^{(r)} m^{(s)}. \tag{330}$$

已在第 2 章中 (§21) 证明, Ψ_0(Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 也是) 如其 D 型特征所要求的对史瓦西时空为零. 所以在计算 Ψ_0 的扰动值时, 用未扰动的基矢来收缩扰动的黎曼张量就够了, 因为由于未扰动外尔张量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 为零, 用扰动的基矢 l 和 m (反过来又表示为未扰动基矢的线性组合) 收缩未扰动黎曼张量的贡献为零. 于是可写出

$$\Psi_0 = -\delta R_{(p)(q)(r)(s)} l^{(p)} m^{(q)} l^{(r)} m^{(s)}, \tag{331}$$

其中已将指标放在括号中来强调, 它们是表示第 2 章 (方程 (75)) 用以计算黎曼张量的标架中的四次分量.

基矢的四次分量可以通过将下面的变换作用于张量分量 (第 3 章方程 (281) 给出) 而得到,

$$e^{(a)}{}_i = \begin{bmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \tag{332}$$

其中 $e^{2\nu}=\Delta/r^2=(1-2M/r)$. 于是有

$$\left.\begin{aligned} l^{(p)}&=(l^{(t)},l^{(\varphi)},l^{(r)},l^{(\theta)})=(e^{-\nu},0,e^{-\nu},0),\\ n^{(p)}&=(n^{(t)},n^{(\varphi)},n^{(r)},n^{(\theta)})=\frac{1}{2}(e^{+\nu},0,-e^{+\nu},0),\\ m^{(p)}&=(m^{(t)},m^{(\varphi)},m^{(r)},m^{(\theta)})=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\mathrm{i},0,1). \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

用这些矢量对黎曼张量的收缩给出

$$\begin{aligned}\Psi_0=&-\mathrm{i}e^{-2\nu}(\delta R_{0301}+\delta R_{2321}+\delta R_{2301}+\delta R_{0321})\\ &-\frac{1}{2}e^{-2\nu}(\delta R_{0303}+2\delta R_{0323}+\delta R_{2323}\\ &-\delta R_{0101}-2\delta R_{0121}-\delta R_{2121}).\end{aligned} \tag{334}$$

将会看到, Ψ_0 分解成一个轴向部分和一个极向部分, 前者是各项的第一组, 指标 1 为奇数, 符号随 φ 的符号逆转而逆转; 后者是第二项组, 指标 1 为偶数, φ 的符号逆转时不变.

[190]

(a) Ψ_0 的轴向部分

包括在 Ψ_0 轴向部分的黎曼张量的相关扰动分量可从第 2 章的表中直接读出, 即有

$$\begin{aligned}\delta R_{0301}&=\frac{1}{2}e^{\psi-2\nu-\mu_3}Q_{03,0}-\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}\nu_{,r},\\ \delta R_{2321}&=e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}\left[\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{2}\nu_{,r}\right)Q_{23}+\frac{1}{2}Q_{23,r}\right],\\ \delta R_{2301}&=\frac{1}{2}e^{\psi-\nu-\mu_2-\mu_3}\left[Q_{03,2}-Q_{02,3}+Q_{03}\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)-Q_{02}\cot\theta\right],\\ \delta R_{0321}&=-\frac{1}{2}e^{\psi-\nu-\mu_2-\mu_3}\left[Q_{20,3}+Q_{20}\cot\theta-Q_{23,0}+Q_{30}\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)\right],\end{aligned} \tag{335}$$

这里应记得是限于轴对称扰动 (如在 §23 中已说明的, 这样并不失一般性). 将表示式 (335) 代入方程 (334) 中有 $-\mathrm{i}$ 因子的项, 得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\Psi_0=\Big\{&\frac{Q_{23}}{r}+\frac{1}{2}Q_{23,r}+\frac{1}{2}e^{-2\nu}Q_{23,0}\\ &+\frac{1}{2}e^{-2\nu}\left[Q_{03,r}+2\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)Q_{03}\right]+\frac{1}{2}e^{-4\nu}Q_{03,0}\Big\}\sin\theta.\end{aligned} \tag{336}$$

另一方面, 按照方程 (13)、(14)、(15) 和 (19),

$$Q_{23}=\frac{Q(r)C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\Delta\sin^3\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} \tag{337}$$

和

$$Q_{03,0}=\frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}Q_{,r}C_{l+2}^{-3/2}(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}. \tag{338}$$

代入方程 (336), 得

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\Psi_0=&\left\{\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Q}{\Delta}\right)+\frac{Q}{r\Delta}+\frac{\mathrm{i}\sigma r^2}{2\Delta^2}Q+\frac{1}{2\Delta}Q_{,r}\right.\\&\left.+\frac{r^2}{2\mathrm{i}\sigma\Delta}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right)+2\frac{\Delta}{r^4}\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)Q_{,r}\right]\right\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta},\end{aligned} \tag{339}$$

其中已隐去了共同因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$. 用方程 (23) 将上式简化, 得

[191]

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\Psi_0=&\left\{\mathrm{i}\sigma\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Q}{\Delta}\right)+\frac{Q}{r\Delta}+\frac{1}{2\Delta}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right]-\sigma^2\frac{r^2}{\Delta^2}Q\right.\\&\left.+\frac{n}{r^2\Delta}Q+\frac{r-3M}{r^2\Delta}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\mathrm{i}\sigma\sin^2\theta}\\=&\left\{\mathrm{i}\sigma\left[\frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}+\frac{Q}{r\Delta}-\frac{r-M}{\Delta^2}Q\right]-\sigma^2\frac{r^2}{\Delta^2}Q\right.\\&\left.+\frac{n}{r^2\Delta}Q+\frac{r-3M}{r^2\Delta}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\mathrm{i}\sigma\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{340}$$

现在如方程 (26) 中一样令

$$Q=rZ^{(-)}, \tag{341}$$

方程 (340) 在进一步简化后成为

$$\begin{aligned}-\mathrm{Im}\,\Psi_0=&\left\{\frac{r}{\Delta}\left(\mathrm{i}\sigma+\frac{r-3M}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}Z^{(-)}}{\mathrm{d}r}\right.\\&\left.+\left[\frac{(\mu^2+2)r-6M}{2r^2\Delta}+\mathrm{i}\sigma\frac{r(r-3M)}{\Delta^2}-\sigma^2\frac{r^3}{\Delta^2}\right]Z^{(-)}\right\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\mathrm{i}\sigma\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{342}$$

记取定义 (27) 和 (328), 即

$$W^{(-)}=\frac{2}{r^2}(r-3M)\text{ 和 }V^{(-)}=\frac{\Delta}{r^5}[(\mu^2+2)r-6M], \tag{343}$$

现在可将方程 (342) 重写为

$$\begin{aligned}-2\mathrm{i}\sigma\mathrm{Im}\,\Psi_0=&\frac{r^3}{\Delta^2}\left[(2\mathrm{i}\sigma+W^{(-)})\frac{\mathrm{d}Z^{(-)}}{\mathrm{d}r_*}\right.\\&\left.+(V^{(-)}+\mathrm{i}\sigma W^{(-)}-2\sigma^2)Z^{(-)}\right]\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta},\end{aligned} \tag{344}$$

或等价地,

$$-2\mathrm{i}\sigma\mathrm{Im}\,\Psi_0=\frac{r^3}{\Delta^2}[V^{(-)}Z^{(-)}+(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+Z^{(-)}]\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}. \tag{345}$$

由于代换 (256) 和 (261), 上面的方程与通过纽曼 – 彭罗斯形式和变换理论达到的方程 (318) 完全一致.

(*b*) **Ψ_0 的极向部分** [192]

包含在方程 (334) 中 Ψ_0 的极向部分里的黎曼张量的相关扰动分量, 可由将第 2 章所列的相应分量对未扰动的史瓦西度规线性化来得到. 即有

$$\begin{aligned}
-\delta R_{0303}&=-2\delta\mu_2\frac{e^{2\nu}}{r}\nu_{,r}+e^{2\nu}\left(\frac{\delta\nu_{,r}}{r}+\nu_{,r}\delta\mu_{3,r}\right)+\frac{1}{r^2}\delta\nu_{,\theta,\theta}+e^{-2\nu}\sigma^2\delta\mu_3,\\
-\delta R_{0101}&=-2\delta\mu_2\frac{e^{2\nu}}{r}\nu_{,r}+e^{2\nu}\frac{\delta\nu_{,r}}{r}+e^{2\nu}\nu_{,r}\delta\psi_{,r}+\frac{\cot\theta}{r^2}\delta\nu_{,\theta}+\sigma^2e^{-2\nu}\delta\psi,\\
-\delta R_{2323}&=-\frac{1}{r^2}\delta\mu_{2,\theta,\theta}+2\delta\mu_2e^{2\nu}\frac{\nu_{,r}}{r}-e^{2\nu}\left[\delta\mu_{3,r,r}+\left(\frac{2}{r}+\nu_{,r}\right)\delta\mu_{3,r}-\frac{\delta\mu_{2,r}}{r}\right],\\
-\delta R_{1212}&=2\delta\mu_2\frac{e^{2\nu}}{r}\nu_{,r}-e^{2\nu}\left[\delta\psi_{,r,r}+\left(\frac{2}{r}+\nu_{,r}\right)\delta\psi_{,r}-\frac{\delta\mu_{2,r}}{r}\right]-\frac{\cot\theta}{r^2}\delta\mu_{2,\theta},\\
-\delta R_{0323}&=-\mathrm{i}\sigma\left[\delta\mu_{3,r}+\frac{1}{r}(\delta\mu_3-\delta\mu_2)-\nu_{,r}\delta\mu_3\right],\\
-\delta R_{0121}&=+\mathrm{i}\sigma\left[-\delta\psi_{,r}+\frac{1}{r}(\delta\mu_2-\delta\psi)+\nu_{,r}\delta\psi\right].
\end{aligned} \tag{346}$$

将这些表示代入方程 (334) 中有因子 $-\frac{1}{2}e^{-2\nu}$ 的项, 得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\Psi_0=\frac{1}{2}e^{-2\nu}\Bigg\{&\left[e^{2\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+2\mathrm{i}\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)\right](\delta\psi-\delta\mu_3)\\
&-\sigma^2e^{-2\nu}(\delta\psi-\delta\mu_3)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\delta\nu-\delta\mu_2)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{347}$$

据方程 (36)—(39), 对上面的方程代入

$$\left.\begin{aligned}
\delta\psi-\delta\mu_3&=-V(P_{l,\theta,\theta}-P_{l,\theta}\cot\theta)=-V\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}\\
\delta\nu-\delta\mu_2&=(N-L)P_l.
\end{aligned}\right\} \tag{348}$$

和

于是得到

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Re}\,\Psi_0=\frac{1}{2}\Bigg\{&\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+2\mathrm{i}\sigma e^{-2\nu}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)-e^{-4\nu}\sigma^2\right]V\\
&-\frac{e^{-2\nu}}{r^2}(N-L)\Bigg\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta};
\end{aligned} \tag{349}$$

[193] 或者, 用方程 (51) 并重整各项, 有

$$-\mathrm{Re}\,\Psi_0 = \left\{ -\left(\nu_{,r} V_{,r} + \sigma^2 e^{-4\nu} V + \frac{e^{-2\nu}}{r^2} N \right) + \mathrm{i}\sigma e^{-2\nu} \left[V_{,r} + \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r} \right) V \right] \right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}. \tag{350}$$

用方程 (57) 来简化第一项组 (没有因子 $\mathrm{i}\sigma$ 的), 得

$$\begin{aligned} -\mathrm{Re}\,\Psi_0 = \Bigg\{ & \frac{\mathrm{i}\sigma r}{r-2M} \left[V_{,r} + \frac{r-3M}{r(r-2M)} V \right] \\ & + \frac{\sigma^2 r^2}{(r-2M)^2} \left[\frac{M}{n(r-2M)} (L+X) - V \right] \\ & - \frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{nr^2(r-2M)^2} N - \frac{M[nr^2 - M(2n-1)r - 3M^2]}{nr^2(r-2M)^3} L \\ & + \frac{M(r^2 - 3Mr + 3M^2)}{r^2(r-2M)^3} V \Bigg\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}. \end{aligned} \tag{351}$$

在用方程 (57) 和 (60) 来作进一步简化后, 上面的方程成为

$$\begin{aligned} -\mathrm{Re}\,\Psi_0 = \frac{1}{2\Delta} \Bigg\{ & \frac{2n^2(n+1)r^3 + 6Mn^2r^2 + 18M^2nr + 18M^3}{r^2(nr+3M)^2} Z \\ & + \left[2\mathrm{i}\sigma \frac{r^2}{r-2M} + 2\frac{nr^2 - 3Mnr - 3M^2}{(r-2M)(nr+3M)} \right] (Z_{,r_*} + \mathrm{i}\sigma Z) \Bigg\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}, \end{aligned} \tag{352}$$

或, 记取 $V^{(+)}$ 和 $W^{(+)}$ 的定义 (63) 和 (328), 有

$$-\mathrm{Re}\,\Psi_0 = \frac{r^3}{\Delta^2} [V^{(+)} Z^{(+)} + (W^{(+)} + 2\mathrm{i}\sigma) \Lambda_+ Z^{(+)}] \frac{C_{l+2}^{-3/2}(\theta)}{\sin^2\theta}, \tag{353}$$

再次与前面由纽曼 – 彭罗斯形式和变换理论导出的结果完全一致.

现在完成了整个循环.

32. 理论的物理含义

[194] 开头 (§22) 就已讲过, 从物理的角度, 扰动研究中主要关心的是阐明入射引力波被黑洞反射和吸收的方式. 尽管一般地看来, 由支配 $Z^{(\pm)}$ 的方程导出的反射 ($\mathbb{R}$) 和透射 ($\mathbb{T}$) 系数精确地就是所寻找的量, 但是问题仍需澄清, 因为在分析或论证中没有机会来提及引力波的入射. 而且问题也并不是很简单: 它要求在比迄今已做的更深层次上涉及以线性化爱因斯坦方程和纽曼 – 彭罗斯形式为基础所发展出来的理论.

首先看到, 朗斯基关系 (270) 中的 "常量" 简单地与朗斯基行列式 $[Z, Z^*]$ 相关联, 后者的守恒性导致 §27 中的守恒定律 $\mathbb{R}+\mathbb{T}=1$. 考虑方程 (285) 的任何两个独立解 Z_1 和 Z_2 的朗斯基行列式,

$$K^2[Z_1, Z_2] = K^2(Z_2\Lambda_+ Z_1 - Z_1\Lambda_+ Z_2), \tag{354}$$

由方程 (301) 代入 KZ 和 $K\Lambda_+$, 并用积分 (300), 得到

$$\begin{aligned} K^2[Z_1, Z_2] &= \frac{r^8}{\Delta^2}\left[\frac{r^8}{\Delta^2}Rf V + \beta(W + 2\mathrm{i}\sigma f)\right](Y_2\Lambda_- Y_1 - Y_1\Lambda_- Y_2) \\ &= \frac{r^8}{\Delta^2}K[Y_1, Y_2]. \end{aligned} \tag{355}$$

相应地,

$$\frac{r^8}{\Delta^2}[Y_1, Y_2] = K[Z_1, Z_2] = \text{常量}. \tag{356}$$

最后这个关系清楚地显示, 必定能够由支配 Y_{+2} 和 Y_{-2} 的方程 (或等价地由支配 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 的方程) 来决定反射和透射系数. 但是, 由现有的知识还不能从朗斯基行列式 $[Y_{+2}, Y^*_{-2}]$ 得到任何有用的信息, 因为 Y_{+2} 和 Y_{-2} 满足独立的方程, 这个事实在 §29 (b) 中已被注意到. 在第 9 章将看到, 在克尔黑洞的更一般的意义上, 迄今尚未考虑过的纽曼 – 彭罗斯形式的方程确实决定着函数 Y_{+2} 和 Y_{-2} 的相对归一化, 以至于 Y_{+2} 和 Y^*_{-2} 的朗斯基行列式的确能用来决定 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$. 而现在的解决办法是, 直接由 §30 的变换理论提供的方程来得到必需的关系.

已经知道, $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的解对 $r_* \to +\infty$ 和 $r_* \to -\infty$ 都有渐近行为 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma r_*}$. 可以用这个知识, 并借助方程 (318) 和 (319) 及其复数共轭, 来得出 Y_{+2} 和 Y_{-2} 的相关渐近行为.

记住 $V^{(\pm)}$、$W^{(\pm)}$ 和 Q 对 $r_* \to +\infty$ 都为零, 由每个方程对 (318) 和 (319) 的第一个方程可得, 对 [195]

$$Z^{(\pm)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \text{ 和 } Z^{(\pm)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to +\infty), \tag{357}$$

Y_{+2} 和 Y_{-2} 的渐近行为是

$$\left.\begin{aligned} Y_{+2} &\to -4\sigma^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, & Y_{-2} &\to -\frac{K^{(\pm)*}}{4\sigma^2}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^4}, \\ Y_{+2} &\to -\frac{K^{(\pm)}}{4\sigma^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^4}, & Y_{-2} &\to -4\sigma^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}. \end{aligned}\right\} \tag{358}$$

类似地, 记住 $V^{(\pm)}$ 和 Q 在视界上为零以及 (见方程 (328))

$$W^{(\pm)} \to -(2M)^{-1} \text{ 对 } r = 2M, \tag{359}$$

得到, 对

$$Z^{(\pm)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \text{ 和 } Z^{(\pm)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to -\infty), \tag{360}$$

Y_{+2} 和 Y_{-2} 的行为是

$$\begin{aligned} Y_{+2} &\to 4\mathrm{i}\sigma(\mathrm{i}\sigma - 1/4M)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}; \quad Y_{-2} \to \frac{K^{(\pm)*}\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{(2M)^8 4(\mathrm{i}\sigma + 1/2M)(\mathrm{i}\sigma + 1/4M)} \\ Y_{+2} &\to \frac{K^{(\pm)}\Delta^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{(2M)^8 4(\mathrm{i}\sigma - 1/2M)(\mathrm{i}\sigma - 1/4M)}; \quad Y_{-2} \to 4\mathrm{i}\sigma(\mathrm{i}\sigma + 1/4M)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}. \end{aligned} \tag{361}$$

运用 Y_{+2} 和 Y_{-2} 的渐近行为, 可写下外尔标量的边界条件,

$$\Phi_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} R_{+2} S_{+2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} \frac{r^3}{\Delta^2} Y_{+2} S_{+2} \quad (= \Psi_0) \tag{362}$$

和

$$\Phi_4 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} R_{-2} S_{-2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} r^3 Y_{-2} S_{-2} \quad (= r^4 \Psi_4), \tag{363}$$

对应着边界条件 (见方程 (159))

$$\left.\begin{aligned} Z^{(\pm)} &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} + R^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to +\infty) \\ &\to \qquad T^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to -\infty), \end{aligned}\right\} \tag{364}$$

后者适合于决定反射和透射振幅 $R^{(\pm)}(\sigma)$ 和 $T^{(\pm)}(\sigma)$; 于是有

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} S_{+2}(\theta) \left(Y_{+2}^{(\mathrm{in})} \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r} + Y_{+2}^{(\mathrm{ref})} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^5} \right) \quad (r_* \to +\infty) \\ &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} S_{+2}(\theta) Y_{+2}^{(\mathrm{tr})} \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{\Delta^2} \qquad\qquad (r_* \to -\infty) \end{aligned}\right\} \tag{365}$$

[196] 和

$$\left.\begin{aligned} \Phi_4 &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} S_{-2}(\theta) \left(Y_{-2}^{(\mathrm{in})} \frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r} + Y_{-2}^{(\mathrm{ref})} r^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \right) \quad (r_* \to +\infty) \\ &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t + \mathrm{i}m\varphi} S_{-2}(\theta) Y_{-2}^{(\mathrm{tr})} \Delta^2 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \qquad\qquad (r_* \to -\infty), \end{aligned}\right\} \tag{366}$$

其中

$$\begin{aligned} Y_{+2}^{(\mathrm{in})} &= -4\sigma^2; \quad Y_{+2}^{(\mathrm{ref})} = -\frac{K^{(\pm)}}{4\sigma^2} R^{(\pm)}(\sigma); \\ Y_{-2}^{(\mathrm{in})} &= -\frac{K^{(\pm)^*}}{4\sigma^2}; \quad Y_{-2}^{(\mathrm{ref})} = -4\sigma^2 R^{(\pm)}(\sigma); \\ Y_{+2}^{(\mathrm{tr})} &= (2M)^3 4\mathrm{i}\sigma(\mathrm{i}\sigma - 1/4M)T(\sigma); \\ Y_{-2}^{(\mathrm{tr})} &= \frac{K^{(\pm)^*} T(\sigma)}{(2M)^5 4(\mathrm{i}\sigma + 1/2M)(\mathrm{i}\sigma + 1/4M)}. \end{aligned} \tag{367}$$

现在清楚, 外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_4 对无穷远的渐近展开中有着 r^{-1} 行为的主导项的系数将决定向内和向外引力波的能量流. 相关关系在第 9 章中 (98 (b)) 建立. 得到的结果是, 向内 (入射) 和向外 (反射) 波中单位时间、单位立体角 (Ω) 的能流是由下式给出,

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{in})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{(S_{+2})^2}{2\pi}\frac{1}{2\sigma^2}|Y_{+2}^{(\mathrm{in})}|^2 \tag{368}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{(S_{-2})^2}{2\pi}\frac{1}{2\sigma^2}|Y_{-2}^{(\mathrm{ref})}|^2, \tag{369}$$

其中角函数 S_{+2} 和 S_{-2} 被假定已归化为 1. 由方程 (367) 给出的表示可得, 与方程 (368) 和 (369) 一致,

$$\mathbb{R}=|R^{(\pm)}(\sigma)|^2=\left|\frac{Y_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{Y_{+2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2=\left|\frac{Y_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{Y_{-2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2=\left|\frac{Y_{-2}^{(\mathrm{ref})}Y_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{Y_{+2}^{(\mathrm{in})}Y_{-2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2, \tag{370}$$

或

$$\mathbb{R}=\frac{256\sigma^8}{|K^{(\pm)}|^2}\left|\frac{Y_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{Y_{+2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2=\frac{|K^{(\pm)}|^2}{256\sigma^8}\left|\frac{Y_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{Y_{-2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2. \tag{371}$$

方程 (371) 对 $\mathbb{R}$ 的表示能用来直接从支配 Y_{+2} 或 Y_{-2} 的方程 (或等价地从支配 R_{+2} 或 R_{-2} 的方程) 确定反射系数, 并且当然将与由支配 $Z^{(\pm)}$ 的方程确定的一致.

透射系数 $\mathbb{T}$ 的相应表示是 [197]

$$\begin{aligned}\mathbb{T}&=\frac{\sigma^2}{(2M)^6(\sigma^2+1/16M^2)}\left|\frac{Y_{+2}^{(\mathrm{tr})}}{Y_{+2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2\\&=\frac{(2M)^{10}}{\sigma^4}\left(\sigma^2+\frac{1}{16M^2}\right)\left(\sigma^2+\frac{1}{4M^2}\right)\left|\frac{Y_{-2}^{(\mathrm{tr})}}{Y_{-2}^{(\mathrm{in})}}\right|^2\\&=(2M)^2\left|\frac{Y_{+2}^{(\mathrm{tr})}Y_{-2}^{(\mathrm{tr})}}{Y_{+2}^{(\mathrm{in})}Y_{-2}^{(\mathrm{in})}}\right|\frac{(\sigma^2+1/4M^2)^{1/2}}{\sigma}.\end{aligned} \tag{372}$$

虽然由守恒定律 $\mathbb{R}+\mathbb{T}=1$ 可见, $\mathbb{T}$ 作为被黑洞吸收的入射能流部分的物理意义是明显的, 但是直接的证明需要一些精巧的论证, 也推迟到第 9 章.

(a) 散射矩阵幺正性的应用

§28 确立的散射矩阵 (179) 幺正性的要求之一是, 适合边界条件

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{Z}&\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}+R(-\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}\ (r_*\to-\infty)\\&\to\qquad T(-\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}\ (r_*\to+\infty)\end{aligned}\right\} \tag{373}$$

的 Z 的解决定着与适合边界条件 (364) 的解同样的反射和透射系数 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$. 利用同样的关系 (358) 和 (361), 可得外尔标量 Φ_0 和 Φ_4 的对应边界条件是

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t+\mathrm{i}m\varphi}S_{+2}\left(\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}+\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{+2}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{\Delta^2}\right)\ (r_*\to-\infty),\\ &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t+\mathrm{i}m\varphi}S_{+2}\left(\widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{+2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^5}\right)\qquad\qquad (r_*\to+\infty),\end{aligned}\right\}\tag{374}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\Phi_4 &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t+\mathrm{i}m\varphi}S_{-2}(\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{-2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}+\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{-2}\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*})\ (r_*\to-\infty),\\ &\to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t+\mathrm{i}m\varphi}S_{-2}(\widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{-2}r^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*})\qquad\qquad (r_*\to+\infty),\end{aligned}\right\}\tag{375}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{+2}=\frac{K}{(2M)^5 4(\mathrm{i}\sigma-1/2M)(\mathrm{i}\sigma-1/4M)};\qquad \widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{+2}=-\frac{K}{4\sigma^2}T(-\sigma),\\ &\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{-2}=(2M)^3 4\mathrm{i}\sigma(\mathrm{i}\sigma-1/4M);\qquad\qquad \widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{-2}=-4\sigma^2T(-\sigma),\\ &\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{+2}=(2M)^3 4\mathrm{i}\sigma(\mathrm{i}\sigma-1/4M)R(-\sigma);\\ &\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{-2}=\frac{K^*R(-\sigma)}{(2M)^5 4(\mathrm{i}\sigma+1/2M)(\mathrm{i}\sigma+1/4M)}.\end{aligned}\right\}\tag{376}$$

[198] 由这些关系得到

$$\begin{aligned}|R(-\sigma)|^2&=\left|\frac{\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{-2}}{\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{+2}}\right|^2=\left|\frac{\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{+2}}{\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{+2}}\right|^2\frac{|K|^2}{(2M)^{16}256\sigma^2(\sigma^2+1/16M^2)^2(\sigma^2+1/4M^2)}\\ &=\left|\frac{\widetilde{Y}^{(\mathrm{ref})}_{-2}}{\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{-2}}\right|^2\frac{256}{|K|^2}(2M)^{16}\sigma^2(\sigma^2+1/16M^2)^2(\sigma^2+1/4M^2)\end{aligned}\tag{377}$$

$$\begin{aligned}|T(-\sigma)|^2&=\left|\frac{\widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{+2}}{\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{+2}}\right|^2\frac{\sigma^4}{(2M)^{10}(\sigma^2+1/16M^2)(\sigma^2+1/4M^2)}\\ &=\left|\frac{\widetilde{Y}^{(\mathrm{tr})}_{-2}}{\widetilde{Y}^{(\mathrm{in})}_{-2}}\right|^2\frac{(2M)^6(\sigma^2+1/16M^2)}{\sigma^2}.\end{aligned}\tag{378}$$

33. 对扰动理论的一些观察

以上各节讲述的史瓦西黑洞扰动理论, 有着如此之多的纠结线路, 以至于很难解开而获得一个清楚的图像. 但是图像的一些要素确已浮现.

图像的中心看来是由纽曼 – 彭罗斯形式给出的、对属于外尔标量 Ψ_0 (或 Ψ_4) 的径向函数 Y_{+2} (或 Y_{-2}) 的方程. 如在 §32 已看到的, 能够借助于函数 Y_{+2}

(或 Y_{-2}) 来毫不含糊地决定入射引力波的反射和透射系数. 而理论的每个线路都必须导致同样的系数.

当转到度规扰动时, 它们分离成轴向和极向部分是一个直接的明显的特征, 这个特征是隐藏在纽曼 – 彭罗斯形式中的.

轴向扰动是由满足具有势 $V^{(-)}$ 的一维薛定谔波动方程 (即雷杰 – 惠勒方程) 的单个标量函数 $Z^{(-)}$ 描述. 由这个方程用基本方法导出的反射和透射系数, 当然必须与由支配 Y_{+2} 的方程导出的一致. 很清楚, 必定存在一个变换来连接 Y_{+2} 和 $Z^{(-)}$.

描述极向扰动的是三个径向函数 L、N 和 X, 它们满足三个一阶线性方程的耦合系统. 由于这些方程必定也提供关于入射引力波反射和透射的信息, 它们就必定能简化为一个二阶波动方程. 可简化性必须由方程的一个特定积分的存在来保证, 这就是山托珀罗斯积分 (126). 但是, 如果简化有保证, 它就能由许多方式实现. 例如, 存在组合 $Z^{(+)}$ (由方程 (59) 给出), 它满足具有势 $V^{(+)}$ 的波动方程, 即泽里立方程. 但是, 存在另一个线性组合$\mathscr{L}$ (由方程 (154) 给出), 满足雷杰 – 惠勒方程. 这种两可性是一个必然的结果, 无论由什么波动方程来推导极向扰动, 都必须导致与用雷杰 – 惠勒方程来做出的同样的反射和透射系数; 因而所得的解必须能明晰地表示为 $Z^{(-)}$ 及其导数的线性组合. [199]

能够据以上所述来除去支配 $Z^{(+)}$ 的波动方程吗? 看来不能. 因为当寻找连接对 Y_{+2} 和对 $Z^{(-)}$ 的解的变换时会发现, 它是具有以下势 (见方程 133)) 的双对之一,

$$V^{(\pm)} = \pm\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f \ (\beta \text{ 和 } \kappa \text{ 是常量}), \tag{379}$$

其中负号导致雷杰 – 惠勒势, 正号导致泽里立势. 此外, 势的形式显然保证了反射和透射系数的等同性, 并提供了对 $Z^{(+)}$ 和 $Z^{(-)}$ 的解之间的简单倒数关系.

理论中还有一条更深入的线路. 纽曼 – 彭罗斯形式起初并不涉及外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_4 分解为其轴向和极向部分. 分解成为可能只是在用黎曼张量的扰动分量来明晰地表示它们之时. 分解做到了, 两个部分就必定解耦. 于是两个部分就必须满足同一方程, 事实正是如此!

扰动理论中还有一个组分将在第十章中考虑. 但是现在看来, 理论的两个基本点是支配 Ψ_0 的方程对双重变换的可接受性, 还有与之相关联的扰动向轴向和极向部分的分解.

34. 史瓦西黑洞的稳定性

史瓦西黑洞对外部扰动 (这是唯一需要考虑的类型) 的稳定性, 已经是广泛讨论的课题. 在这个意义上提出的问题是: 给出任意一个限于 r_* 的有限区域 (即 "致密支持") 的初始扰动, 扰动将在其演化的所有时间保持束缚态吗?

已经看到, 扰动是由单个一维波动方程,

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2 Z = VZ \tag{380}$$

[200] 支配, 方程有着平滑实势, 独立于 σ, 属于窄范围 (即有束缚积分). 于是量子理论的标准定理就能应用. 这些定理保证, 属于任何观测现象的波函数形成完整的集, 任何能够描述系统一个态的平方可积函数可用它们来展开; 更进一步, 任何态函数的绝对平方的积分必定对时间保持恒定.

对现在的问题, 方程 (380) 对实 σ 的、适合边界条件 (159) 的解 $Z(r_*, \sigma)$ 提供了波函数的基础完全集; 任何平滑的、限于 r_* 的有限区域的初始扰动都能表示为覆盖函数 $Z(r_*, \sigma)$ 的积分,

$$\psi(r_*; 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\sigma; 0) Z(r_*; \sigma) \mathrm{d}\sigma; \tag{381}$$

而扰动在后来的演化由下式给出,

$$\psi(r_*, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\sigma; 0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t} Z(r_*; \sigma) \mathrm{d}\sigma. \tag{382}$$

于是保证了

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r_*; 0)|^2 \mathrm{d}r_* = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(\sigma; 0)|^2 \mathrm{d}\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(r_*; t)|^2 \mathrm{d}r_*. \tag{383}$$

而且 $\psi(r_*, t)$ 对所有 $t > 0$ 的束缚性可直接由比较方程 (381) 和 (382) 得出.

一个较弱、但引起广泛兴趣的结果来自方程 (380) 的含时版本, 即

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial r_*^2} - VZ. \tag{384}$$

(应该在 §24 就已经导出了这个方程, 但却没有, 即用 $\mathrm{i}\sigma$ 取代 $\partial/\partial t$, 与扰动的时间依赖由因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$ 表示的假定 (16) 一致.) 将方程 (384) 乘以 $\partial Z^*/\partial t$, 经分部积分后得到,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial Z^*}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \frac{\partial Z}{\partial r_*} \frac{\partial^2 Z^*}{\partial t \partial r_*} + VZ \frac{\partial Z^*}{\partial t} \right) \mathrm{d}r_* = 0, \tag{385}$$

条件是各个积分都收敛. 对方程 (385) 加上其复数共轭, 得到能量积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left|\frac{\partial Z}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial Z}{\partial r_*}\right|^2+V|Z|^2\right)\mathrm{d}r_*=\text{常量}. \tag{386}$$

这个能量积分的存在束缚了 $|\partial Z/\partial t|^2$ 的积分, 因而排除了方程 (383) 的任何束缚解的指数式增长. [201]

35. 史瓦西黑洞的准正则模式

本章最后一节要考虑的是, 什么才可以被视为黑洞的纯正音调? 面临的情况如下.

除引力波的入射外, 黑洞还能以多种方式被扰动: 落入其中的物体, 或其周围物质的吸积. 或者, 考虑黑洞由恒星朝向史瓦西解描述的终态、稍稍偏离球对称的坍缩而形成的过程. 在所有这些情况, 扰动 —— 如果能被认为 "很小" —— 的演化原则上都能表示为 §34 中的基本解 $Z(r_*;\sigma)$ 的叠合. 但是, 一般说来可以预期, 任何初始扰动在其最后阶段将以黑洞特有的方式衰减, 而与原初起因无关. 换句话说, 可以预期在真正最后的阶段, 黑洞将以其特征的衰减频率和速率发射引力波, 就像一只钟发出最后死亡的纯正音调. 这些考虑就是黑洞的准正则模式概念形成的基础.

精确地讲, 准正则模式定义为扰动方程的解, 属于复数特征频率, 满足适合于无穷远处单纯出射波和视界上单纯入射波的边界条件. 于是问题就成为寻找支配 $Z^{(\pm)}$ 的方程的解, 满足边界条件

$$\left.\begin{aligned} Z^{(\pm)} &\to A^{(\pm)}(\sigma)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r} \quad (r_*\to+\infty),\\ &\to \qquad\quad \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}\ (r_*\to-\infty). \end{aligned}\right\} \tag{387}$$

这清楚地是一个对 σ 的特征值问题, 属于不同特征值的解定义准正则模式.

首先可见, 有着 $\mathrm{Im}\,\sigma<0$ 的指数式增长的不稳定准正则模式被能量积分 (386) 排除. 因为, 如果这种模式存在, 满足边界条件 (387) 的解将随 $r_*\to\pm\infty$ 而指数式地趋于零, 方程 (386) 中对 r_* 的积分收敛, 这就会导致矛盾. 所以就只能有衰减的稳定准正则模式, 但属于它们的解将随 $r_*\to\pm\infty$ 而发散, 这是一个必须接受为对应于关于遥远过去的 "无穷大" 扰动的暗含假定的事实.

其次看到, 特征频率 σ 对 $Z^{(-)}$ 和 $Z^{(+)}$ 是一样的: 因为, 如果 σ 是一个特征频率而 $Z^{(-)}(\sigma)$ 是属于它的解, 那么按照关系 (152) 由 $Z^{(-)}(\sigma)$ 导出的解 $Z^{(+)}(\sigma)$ 将满足边界条件 (387) 而有 (见方程 (169)) [202]

$$A^{(+)}(\sigma)=A^{(-)}(\sigma)\frac{\mu^2(\mu^2+2)-12\mathrm{i}\sigma M}{\mu^2(\mu^2+2)+12\mathrm{i}\sigma M}. \tag{388}$$

于是, 仅考虑支配 $Z^{(-)}$ 的方程就已足够.

令

$$Z^{(-)} = \exp\left(\mathrm{i}\int^{r_*} \phi \mathrm{d}r_*\right), \tag{389}$$

可得必须解出的方程是

$$\mathrm{i}\phi_{,r_*} + \sigma^2 - \phi^2 - V^{(-)} = 0; \tag{390}$$

而适当的边界条件是

$$\phi \to -\sigma \text{ 当 } r_* \to +\infty \quad \text{和} \quad \phi \to +\sigma \text{ 当 } r_* \to -\infty. \tag{391}$$

方程 (390) 的满足边界条件 (391) 的解仅当 σ 取值为离散集之一时存在. 一般说来并不知道特征值的集是有限的还是一种可数的无限.

由积分方程 (390) 并用边界条件 (391) 而得到的一个有用等式是 (见方程 (225))

$$-2\mathrm{i}\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma^2 - \phi^2)\mathrm{d}r_* = \int_{-\infty}^{+\infty} V^{(-)}\mathrm{d}r_* = \frac{1}{2M}\left(\mu^2 + \frac{1}{2}\right). \tag{392}$$

表 IV 列出对不同 l 值的复数特征频率 σ.

表 IV 属于史瓦西黑洞准正则模式的复数特征频率 (σ 以 $(2M)^{-1}$ 为单位表示)

l	$2M\sigma$	l	$2M\sigma$
2	0.74734+0.17792i	4	1.61835+0.18832i
	0.69687+0.54938i		1.59313+0.56877i
3	1.19889+0.18541i		1.12019+0.84658i
	1.16402+0.56231i	5	2.02458+0.18974i
	0.85257+0.74546i	6	2.42402+0.19053i

($l = 2$、3 和 4 的不同行给出属于不同模式的特征值.)

[203] 关于尘埃云的稍稍偏离球对称的坍缩和有限质量粒子沿短程线落入黑洞的详细计算, 的确显示出具有这些准正则模式的衰减频率和速率的黑洞钟响现象.

文献注释

史瓦西时空扰动的理论是由雷杰和惠勒在其经典论文中首创的:

1. T. Regge and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, 108, 1063–9 (1957).

此后, 沿同样方向的一些研究在 20 世纪 70 年代早期发表, 例如:

2. C. V. Vishveshwara, *Phys. Rev. D*, 1, 2870-9 (1970).

3. F. J. Zerilli, ibid., 2, 2141–60 (1970).

4. ——, *Phys. Rev. Letters*, 24, 737–8 (1970).

5. J. M. Bardeen and W. H. Press, *J. Math. Phys.*, 14, 7–19 (1972).

但是理论的某些基本方面尚未被认识到: 例如, 甚至不知道轴向扰动和极向扰动 (或如当时所称的 "奇" 和 "偶" 性扰动) 是由同样的反射和透射系数来表征. 许多其它关系只是在克尔黑洞的意义上才逐渐地和时常地出现. 由于这个原因, 本章将分散在下列论文中的结果和方法集中成为一个关于史瓦西黑洞扰动理论的自容、连贯和统一的表述:

6. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 343, 289–98 (1975).

7. —— and S. Detweiler, ibid., 344, 441–52 (1975).

8. ——, ibid., 345, 145–67 (1975).

9. S. Chandrasekhar, ibid., 358, 421–39 (1978).

10. ——, ibid., 441–65 (1978).

11. ——, ibid., 365, 453–65 (1979).

12. —— and B. C. Xanthopoulos, ibid., 367, 1–14 (1979).

13. ——, ibid., 369, 425–33 (1980).

还可见:

14. S. Chandrasekhar in *General Relativity—An Einstein Centenary Survey*, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979.

§24. 本节的处理基本上与文献 6 相同. 能使变量分离的基本关系 (36)— (39) 是由弗雷德曼发现的:

15. J. L. Friedman, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 335, 163–90 (1973).

§25. 本节给出的是比起下面文献中的理论有所简化的版本:

16. B. C. Xanthopoulos, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 378, 61–71 (1981).

§26—§27. 这两节所讲述的关系只是逐渐地显现的. 它们第一次明晰地出现是在文献 13 中; 但对它们的一些相关特征更早就部分地知道. 见文献 7、11 和

17. J. Heading, *J. Phys. A. Math. Gen.*, 10, 885–97 (1977).

§28. 逆散射理论及其对柯特维格 – 德弗雷斯方程理论的分支的内容太广, 不可能在分配给它的简短一节里给予充分讲述. 但是已经得到的 $V^{(+)}$ 与 $V^{(-)}$ 的关系 (以及下面各章在雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞和克尔黑洞意义上将得出的类似关系) 却很重要而不能简单地忽略. 本节 (包括§ (a)) 在很大程度上是基于下列文献:

18. P. Deift and E. Trubowitz, *Communications on Pure and Applied Math.*, 32, 121–251 (1979). [204]

我感谢 Deift 教授对本节的批评性评论.

§ (*b*) 密切地参照:

19. L. D. Faddeev, *Soviet Physics Dokl.*, 3, 747–51 (1958).

关于比方程 (220) 所列更高阶关系的明晰形式, 见:

20. R. M. Miura, C. S. Gardner, and M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, 9, 1204–9 (1968).

特别地, 关于孤子和柯特维格 – 德弗雷斯方程的经典理论的普遍性文献是:

21. G. B. Whitham, *Linear and Non-Linear Waves*, §§16.14–16.16 and 17.2–17.4, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974.

22. A. C. Scott, F. Y. F. Chu, and D. W. McLaughlin, *Proc. IEEE*, 61, 1443–83 (1973).

23. R. M. Miura, *SIAM Rev.*, 18, 412–59 (1976).

§29. 本节将文献 9 在克尔时空意义上的处理改写到史瓦西时空.

§30. 变换理论的最初建立是在文献 8 (以及这里未列出的后继文献) 中, 在克尔黑洞扰动的意义上. 这里也改写到史瓦西时空. 基本思想暗含在文献 6 中.

§31. Ψ_0 的极向部分是由弗雷德曼 (文献 15) 计算的; 轴向部分是在这里计算以实现完整.

§34. 对史瓦西黑洞稳定性的其它处理见:

24. V. Moncrief, *Ann. Phys.*, 88, 323–42 (1973).

25. R. M. Wald, *J. Math. Phys.*, 20, 1056–8 (1979).

对正文中运用的基本定理的讲述见:

26. L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*, §21, 60–3, Pergamon Press, Oxford, 1977.

§35. 本节对准正则模式的处理取自文献 7. 表 Ⅳ 中, 文献 7 的数值结果由下列文献中的一些进一步结果补充:

27. D. L. Gunter, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* A, 296, 497–526 (1980).

对恒星坍缩最后阶段这些准正则模式的出现的研究见:

28. C. T. Cunningham, R. H. Price, and V. Moncrief, *Astrophys. J.*, 224, 643–67 (1978).

29. ——, ibid., 230, 870–92 (1979).

第五章

雷斯纳 – 诺兹特朗解

36. 引言

[205]

爱因斯坦和麦克斯韦耦合方程的球对称解是雷斯纳 – 诺兹特朗解. 它表示有着质量 M 和电荷 Q_* 的黑洞. 由于不能期待任何宏观物体带有净电荷, 对带电黑洞的考虑似乎超出了真实的范围. 但是, 对雷斯纳 – 诺兹特朗解的研究有助于对时空性质的理解. 将会看到, 入射电磁波和引力波被雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的散射是由四阶的对称幺正散射矩阵描述, 并允许一种能量 (电磁的或引力的) 部分地转换成其它种能量. 此外, 雷斯纳 – 诺兹特朗解为在第四章研究史瓦西解时得到的许多惊人的解析结果提供了更广泛的框架. 最后, 雷斯纳 – 诺兹特朗解有着两个视界, 即一个外部的事件视界和一个内部的 "柯西 (Cauchy) 视界", 这个事实又成为后继各章对克尔解研究的便利桥梁.

37. 雷斯纳 – 诺兹特朗解

由于雷斯纳 – 诺兹特朗解也像史瓦西解那样表示球对称时空, 所以就能如第三章中那样将线元写成下列两种形式之一 (第三章方程 (3) 和 (5)),

$$\mathrm{d}s^2 = 4f\mathrm{d}u\mathrm{d}v - e^{2\mu_3}[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2\sin^2\theta], \tag{1}$$

或

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\mu_2}[(\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2] - e^{2\mu_3}[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2\sin^2\theta], \tag{2}$$

其中 $f = e^{2\mu_2}$ 和 μ_3 只是 u 和 v (或等价地 x^0 和 x^2) 的函数. 相应地, 第三章方程 (10) 给出的黎曼张量 (适于度规 (2)) 非零 (四次) 分量的表示继续成立. 但是, 由于现在考虑的不是真空场, 而是有着电磁场, 所以就不能像第三章方程

(11)—(14) 那样将里奇张量设为零. 现在必须设

$$R_{ab} = -2\left(\eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{ef}F^{ef}\right), \tag{3}$$

[206] 其中 F_{ab} 表示必须由麦克斯韦方程决定的麦克斯韦张量的 (四次) 分量. (方程 (3) 中 η_{ab} 表示所选正交四次标架的闵可夫斯基度规.)

(*a*) 麦克斯韦方程的解

很明显, 在假定的球对称条件下, 麦克斯韦张量的轴向分量, 即 F_{01}、F_{12} 和 F_{13}, 必定为零; 而支配极向分量 F_{02}、F_{03} 和 F_{23} 的方程不难通过改写第 2 章中适于度规 (2) 的方程 (方程 (95), (e)、(g)、(f) 和 (h)) 得到, 即有

$$\begin{aligned}
&(e^{2\mu_3}F_{02})_{,2} + e^{\mu_2+\mu_3}F_{03}\cot\theta = 0,\\
&(e^{2\mu_3}F_{02})_{,0} + e^{\mu_2+\mu_3}F_{23}\cot\theta = 0,\\
&(e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,2} - (e^{\mu_2+\mu_3}F_{03})_{,0} = 0,
\end{aligned} \tag{4}$$

和

$$(e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,0} - (e^{\mu_2+\mu_3}F_{03})_{,2} = 0.$$

由于麦克斯韦张量的分量都不依赖于 θ (由球对称假定), 从上述方程有

$$F_{03} = F_{23} = 0, \tag{5}$$

和

$$(e^{2\mu_3}F_{02})_{,2} = (e^{2\mu_3}F_{02})_{,0} = 0. \tag{6}$$

所以, 麦克斯韦张量唯一的非零分量是 F_{02}, 它必定取形式

$$F_{02} = -Q_* e^{-2\mu_3}, \tag{7}$$

其中 Q_* 是常量.

由 $F_{03} = F_{23} = 0$ 和方程 (7) 所给的 F_{02}, 容易得出

$$-R_{44} = R_{00} = R_{11} = -R_{22} = R_{33} = Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \text{ 和 } R_{42} = 0. \tag{8}$$

(*b*) 爱因斯坦方程的解

由方程 (8) 给出的里奇张量的非零分量, 第 3 章的方程 (11)—(15) 现在必须代之以下式,

$$2R_{1212} + R_{2424} = +Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \tag{9}$$

$$2R_{1414} + R_{2424} = +Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \tag{10}$$

$$R_{1212} + R_{1313} + R_{1414} = -Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \tag{11}$$

$$R_{1313} + R_{2323} + R_{3434} = -Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \tag{12}$$

和 [207]

$$R_{2114} + R_{2334} = R_{24} = 0. \tag{13}$$

由方程 (9) 和 (10) 可得

$$R_{1212} + R_{1010} = 0; \tag{14}$$

而由方程 (13) 和第 3 章的方程 (10b) 可得

$$R_{1210} = 0. \tag{15}$$

下一步, 将方程 (9) 和 (10) 相加, 得

$$R_{1212} - R_{1010} - R_{2020} = +Q_*^2 e^{-4\mu_3}; \tag{16}$$

并将方程 (11) 重写为

$$R_{1212} + R_{1313} - R_{1010} = -Q_*^2 e^{-4\mu_3}, \tag{17}$$

此方程与方程 (16) 结合给出

$$R_{1313} + R_{2020} = -2Q_*^2 e^{-4\mu_3}. \tag{18}$$

可见方程 (14) 和 (15) 与第 3 章方程 (19) 的第一对方程相同, 而方程 (17) 和 (18) 取代了第二对. 以同样方式处理这些方程, 就得到基本方程集,

$$fZ_{,u,u} - Z_{,u}f_{,u} = 0, \tag{19}$$

$$fZ_{,v,v} - Z_{,v}f_{,v} = 0, \tag{20}$$

$$f\left(1 - \frac{Q_*^2}{Z^2}\right) + ZZ_{,u,v} + Z_{,u}Z_{,v} = 0, \tag{21}$$

和

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{f_{,u}}{f}\right) + \frac{Z_{,u,v}}{Z} = -\frac{Q_*^2}{Z^4}f. \tag{22}$$

方程 (19)—(22) 取代了第 3 章的方程 (31)—(34), 它们的解也能以类似方式得到. 方程 (19) 和 (20) 能与以前一样给出

$$f = A(u)Z_{,v} \text{ 和 } f = B(v)Z_{,u}, \tag{23}$$

其中 $A(u)$ 和 $B(v)$ 只是所给自变量的函数. 再将方程 (21) 写为另一种形式,

$$\left[A(u)\left(Z + \frac{Q_*^2}{Z}\right) + ZZ_{,u}\right]_{,v} = 0 \tag{24}$$

和

$$\left[B(v)\left(Z+\frac{Q_*^2}{Z}\right)+ZZ_{,v}\right]_{,u}=0, \tag{25}$$

[208] 可推出

$$Z_{,u}=-A(u)\left(1+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right)+\frac{F(u)}{Z} \tag{26}$$

和

$$Z_{,v}=-B(v)\left(1+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right)+\frac{G(v)}{Z}, \tag{27}$$

其中 $F(u)$ 和 $G(v)$ 也是所给自变量的任意函数.

方程 (23)、(26) 和 (27) 可结合给出

$$\begin{aligned} Z_{,u}Z_{,v}&=-f\left(1+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right)+\frac{F(u)Z_{,v}}{Z}\\ &=-f\left(1+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right)+\frac{G(v)Z_{,u}}{Z}. \end{aligned} \tag{28}$$

所以,

$$\frac{Z_{,u}}{Z_{,v}}=\frac{F(u)}{G(v)}=\frac{A(u)}{B(v)}; \tag{29}$$

结果是

$$\frac{F(u)}{A(u)}=\frac{G(v)}{B(v)}=\text{常量}=2M\ (\text{比如说}). \tag{30}$$

于是得到解

$$\left.\begin{aligned} Z_{,u}&=-A(u)\left(1-\frac{2M}{Z}+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right),\\ Z_{,v}&=-B(v)\left(1-\frac{2M}{Z}+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

和

$$f=-A(u)B(v)\left(1-\frac{2M}{Z}+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right). \tag{32}$$

现在能验证, 由方程 (31) 和 (32) 表示的方程 (19)—(21) 的解满足余下的方程 (22).

方程 (31) 给出的 Z 的解的意义在下列形式中变得更清楚,

$$\mathrm{d}Z=-\left(1-\frac{2M}{Z}+\frac{Q_*^2}{Z^2}\right)[A(u)\mathrm{d}u+B(v)\mathrm{d}v]; \tag{33}$$

如在第 3 章 17 (b) 中一样, 这种解的形式再次确认, 耦合的爱因斯坦 – 麦克斯韦方程的球对称解必定是静态的 (在事件视界以外), 这是伯克霍夫定理的推广.

最后注意, 度规自身的解是 [209]

$$\mathrm{d}s^2 = -4\left(1 - \frac{2M}{Z} + \frac{Q_*^2}{Z^2}\right) A(u)B(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v - Z^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{34}$$

方程 (34) 中两个任意函数 $A(u)$ 和 $B(v)$ 的出现 (如第 3 章方程 (48) 对史瓦西度规的相应解一样), 是与作为 U_2 中的坐标来定义 u 和 v, 或者 u 的某个函数和 v 的某个函数, 所具有的选择自由完全一致的.

38. 时空的性质

按照惯常的用法, 将 Z 代之以 r, 意义是 "光度距离", 并将方程 (33) 和 (34) 写为

$$\mathrm{d}r = -\frac{\Delta}{r^2}[A(u)\mathrm{d}u + B(v)\mathrm{d}v] \tag{35}$$

和

$$\mathrm{d}s^2 = -4\frac{\Delta}{r^2}A(u)B(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{36}$$

其中

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*^2. \tag{37}$$

令

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q_*^2} \text{ 和 } r_- = M - \sqrt{M^2 - Q_*^2}, \tag{38}$$

为 $\Delta = 0$ 的根. 两根当 $M^2 > Q_*^2$ 时为实的和不相等的. 这里假定这个不等性存在. 由于

$$\Delta > 0 \text{ 对 } r > r_+ \text{ 和 } 0 < r < r_-$$

$$\Delta < 0 \text{ 对 } r_- < r < r_+, \tag{39}$$

显然就必须区分三个区域:

$$A : 0 < r < r_-; \quad B : r_- < r < r_+; \quad \text{和} \quad C : r > r_+. \tag{40}$$

将看到, 面 $r = r_+$ 是与史瓦西时空的事件视界 $r = 2M$ 同样意义的事件视界, 而面 $r = r_-$ 是一个不同意义的 "视界", 现在予以阐明.

将方程 (35) 重写为下列形式是便利的,

$$\mathrm{d}r_* = -[A(u)\mathrm{d}u + B(v)\mathrm{d}v] \tag{41}$$

其中

$$r_* = \int \frac{r^2}{\Delta}\mathrm{d}r = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-}\lg|r_- r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-}\lg|r_- r_-|. \tag{42}$$

[210] 如定义的,

$$-\infty < r_* < +\infty \text{ 对 } r_+ < r < +\infty$$

和

$$+\infty > r_* > -\infty \text{ 对 } r_- < r < r_+. \tag{43}$$

为阐明度规 (36) 所描述的时空的性质, 对函数 $A(u)$ 和 $B(u)$ 在区域 A、C 和区域 B 作不同的选择. 在区域 A 和 C 选择

$$A(u) = -B(v) = \frac{1}{2}, \tag{44}$$

并令

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u + \mathrm{d}v). \tag{45}$$

于是,

$$u = t - r_* \text{ 和 } v = t + r_*; \tag{46}$$

而度规取形式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{r^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{47}$$

或等价地,

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{r^2}(\mathrm{d}t)^2 - \frac{r^2}{\Delta}(\mathrm{d}r)^2 - r^2[(\mathrm{d}\theta)^2 + (\mathrm{d}\varphi)^2\sin^2\theta]. \tag{48}$$

这就是雷斯纳 – 诺兹特朗度规一般所写的, 和通常所知道的形式.

在区域 B, 另选

$$A(u) = B(v) = -\frac{1}{2}, \tag{49}$$

并令

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\mathrm{d}u - \mathrm{d}v). \tag{50}$$

于是有

$$u = r_* + t \text{ 和 } v = r_* - t, \tag{51}$$

和

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{|\Delta|}{r^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v - r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{52}$$

由上述选择, 流形在三个区域中的部分能由图 13 中对角坐标 θ 和 φ 为恒值的 “板块” 来表示. 板块边缘的识别已标明. 另外, 对区域 A、B 和 C 还有对应的区域 A'、B' 和 C', 由运用变换 $u \to -u$ 和 $v \to -v$ 得到, 是对光锥结构的倒转. 雷斯纳 – 诺兹特朗解的最大解析延伸于是就能由这六个板块的复制品以解析方式拼接在一起而得到, 以至于重叠的边缘由一个 $u(r)$ 或 $v(r)$ 坐标系

[213] 覆盖 (每个板块的角除外). 所得的 “梯子” 如图 14 所示, 它可以在两个方向上

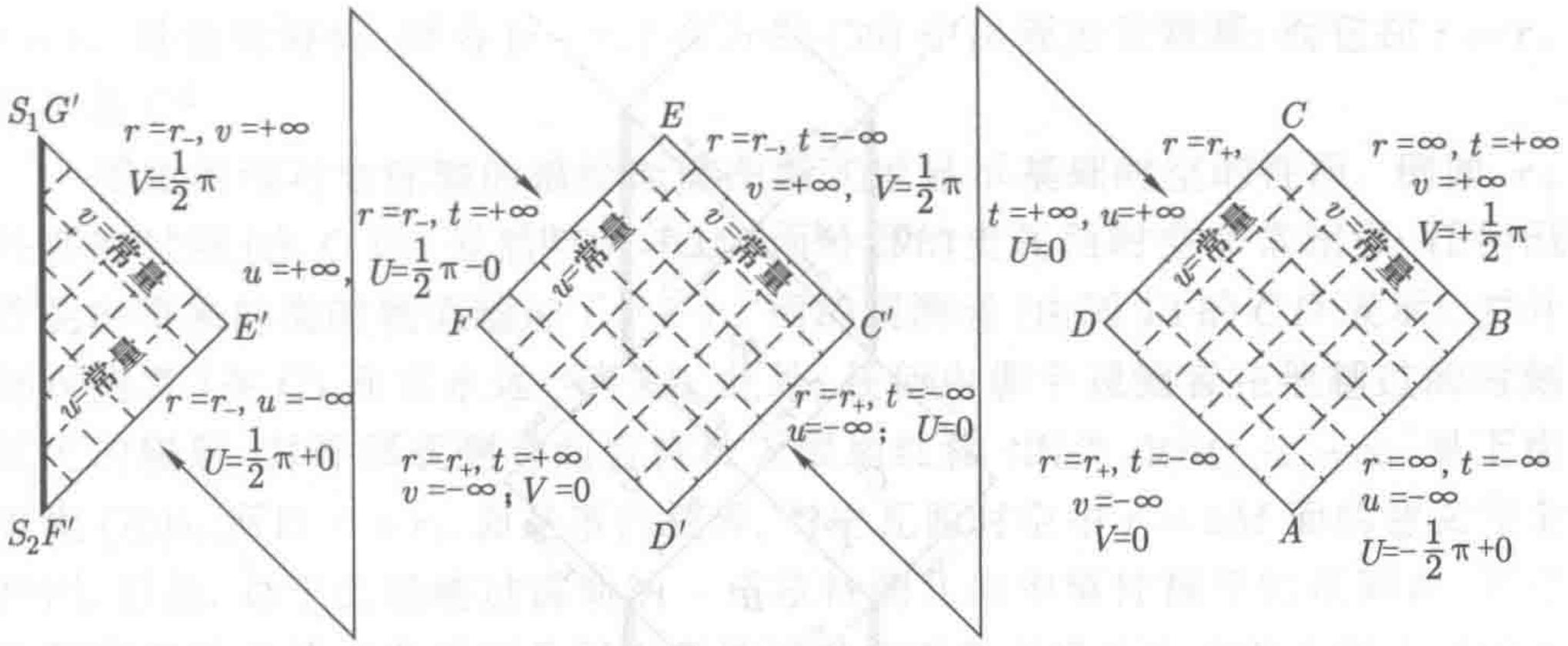


图 13　雷斯纳 – 诺兹特朗时空的不同区域. 详见正文. [211]

无限地延伸. 这种延伸的原则依据是使流形短程线式地完整, 即保证所有短程线, 除终结在奇点上的以外, 在过去和将来两个方向都有无限的仿射长度.

最大延伸时空的解析表示能如下得出. 在区域 A 和 C, 设

$$\begin{aligned}\tan U &= -e^{-\alpha u} = -e^{-\alpha(t-r_*)} \\ &= -e^{-\alpha t}\{e^{+\alpha r}|r-r_+|^{1/2}|r-r_-|^{-\beta/2}\} \qquad (53)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\tan V &= +e^{+\alpha v} = +e^{+\alpha(t+r_*)} \\ &= +e^{+\alpha t}\{e^{+\alpha r}|r-r_+|^{1/2}|r-r_-|^{-\beta/2}\}, \qquad (54)\end{aligned}$$

其中

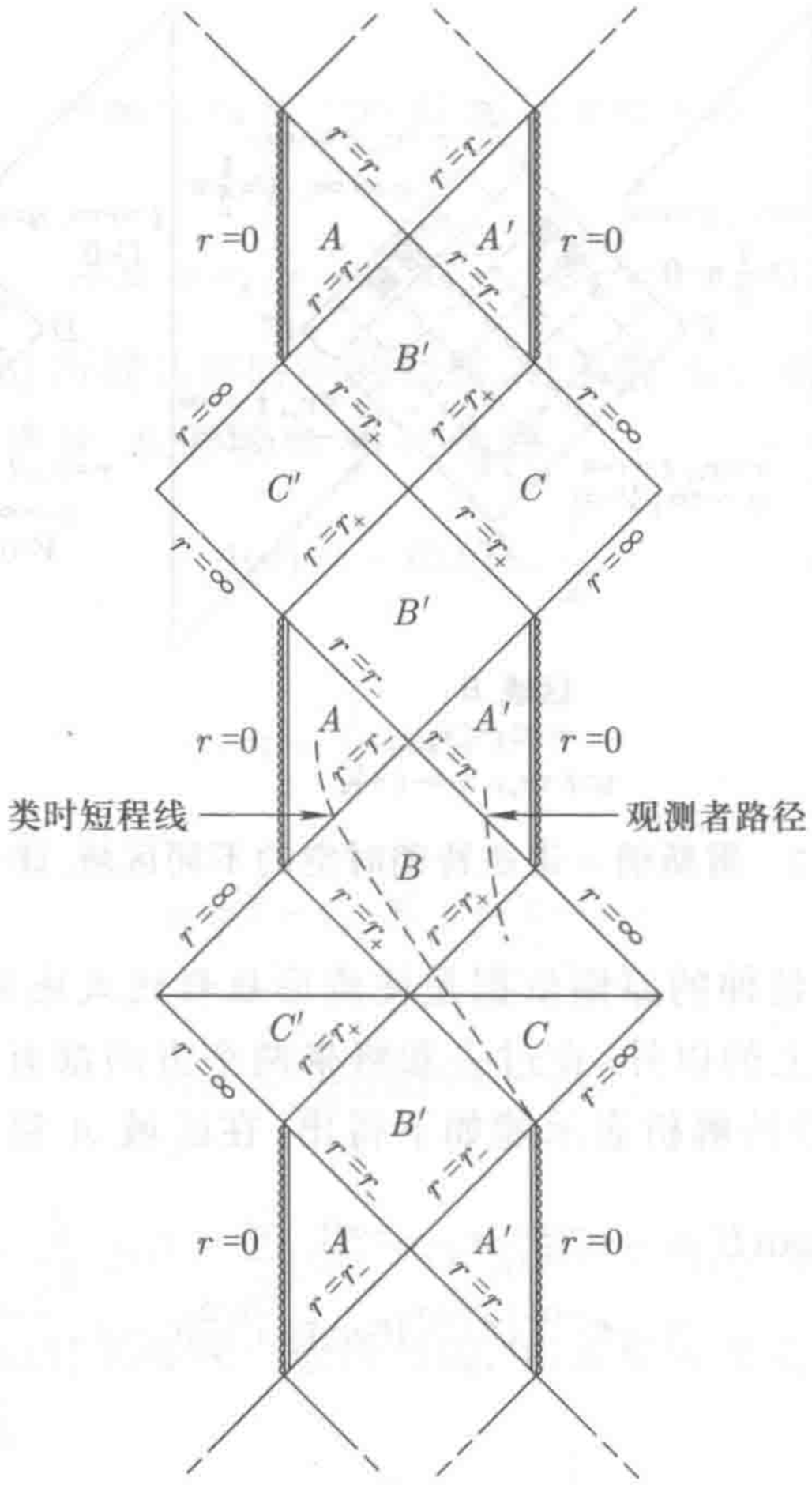
$$\alpha=(r_+-r_-)/2r_+^2 \text{ 和 } \beta=r_-^2/r_+^2(>0 \text{ 和 } <1). \qquad (55)$$

在区域 B 设

$$\begin{aligned}\tan U &= +e^{+\alpha u} = +e^{+\alpha(t+r_*)} \\ &= +e^{+\alpha t}\{e^{+\alpha r}|r-r_+|^{1/2}|r-r_-|^{-\beta/2}\} \qquad (56)\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\tan V &= +e^{+\alpha v} = +e^{+\alpha(-t+r_*)} \\ &= +e^{-\alpha t}\{e^{+\alpha r}|r-r_+|^{1/2}|r-r_-|^{-\beta/2}\}. \qquad (57)\end{aligned}$$



[212] 图 14 雷斯纳 – 诺兹特朗时空的最大解析延伸. 图 13 中的不同区域 A、B 和 C 被拼接在一起, 区域 A'、B' 和 C' 通过变换 $u \to -u$ 和 $v \to -v$ 由 A、B 和 C 得到. 完整延伸的得到是通过把这六个板块的复制品拼接在一起, 以至于重叠的边缘由一条 $u(r)$ 或 $v(r)$ 线覆盖. 图中还显示了一条来自区域 C 的穿过两个视界的类时短程线, 和一个从过去解放的观测者可能经历的类时路径.

由这些代换, 度规取 “普适” 形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{4}{\alpha^2}|r-r_+||r-r_-|\mathrm{cosec}\,2U\,\mathrm{cosec}\,2V\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V - r^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{58}$$

其中 r 由 U 和 V 而内含地定义,

$$\begin{aligned}\tan U\tan V &= -e^{2\alpha r}|r-r_+||r-r_-|^{-\beta} \quad (r>r_+ \text{ 和 } 0<r<r_-)\\ &= +e^{2\alpha r}|r-r_+||r-r_-|^{-\beta} \quad (r_-<r<r_+).\end{aligned} \tag{59}$$

沿图 13 中板块不同边缘的 U 和 V 的值已标出. 方程 (58) 定义的度规除在

$r = r_-$ 外处处解析, 因为 $|r - r_-|$ 在方程 (59) 中出现为负数幂; 而它在 $r = r_-$ 至少是 C^2.

零短程线对坐标轴的描绘能够图画式地显示基础时空的性质. 例如, r_+ 外部的时空 (在 C 区) 显然与 $r = 2M$ 面外部的史瓦西时空非常相似: 任何沿着朝向将来的类时轨道越过了 $r = r_+$ 面的观测者 (由图 13 的 CD 表示), 对外部观测者 (在 C) 而言永远 "消失". 此外, 任何由那个观测者在他越过的时刻发出的辐射, 对外部观测者而言将被无限地红移 (因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \to +\infty$, 见下面方程 (70)). 所以 $r = r_+$ 面是事件视界, 与史瓦西时空中 $r = 2M$ 面的意义完全 [214]
相同. 但是, 对于已经越过雷斯纳 – 诺兹特朗几何中事件视界的观测者, 其经历却有着对于越过史瓦西几何中事件视界的观测者绝不存在的无限丰富的可能性. 对后者, 如已看到的, 除被无情地吸向 $r = 0$ 的奇点外别无选择. 与之相反, 在雷斯纳 – 诺兹特朗几何的 B 区的观测者, 比如说, 就有机会沿着朝向将来的类时轨道越过 $r = r_-$ 面 (由 $C'E$ 表示) 进入 A' 区. 在越过的瞬间, 那个人将通过沿 $BCC'E$ 方向来到的无限蓝移的 (因为对 $r \to r_- + 0$ 有 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \to -\infty$, 见下面方程 (70)) 的零线而目击外部世界整个历史全景的闪现. 一旦到了 A' 区, 那个人的将来就不再由他 (或她) 的过去历史决定: A' 区是在图 14 中延伸越过 C 和 C' 区的空间片 $\mathscr{S}$ 的依存领地之外. 由此缘故, $r = r_-$ 上的面被称为 "柯西" 视界.

另一种可能性, B 区的观测者沿着类时短程线越过 r_- 面 (由 $EF = E'F'$ 表示) 进入 A 区. 所有这样的短程线 (除纯径向零短程线外) 都避开 $r = 0$ 的奇点, 越过 $r = r_-$ 面 (越过 $E'G'$), 而最终进入 "美妙的" 新的渐近平坦宇宙. 很清楚, 越过了事件视界 $r = r_+$ 的观测者的所有这些丰富多彩的前途, 本质上都是 $r = 0$ 奇点的类时特征的结果 (与史瓦西几何中奇点的类空特征相反). 但是警告一句: 越过柯西视界是充满危险的 (在§49 中将看到).

39. 雷斯纳 – 诺兹特朗度规的另一种导出

与第 3 章§18 中史瓦西度规的导出类似, 可以给出雷斯纳 - 诺兹特朗度规的另一种导出. 由第 3 章方程 (62) 的度规形式, 就有对黎曼张量非零分量的同样表示 (第 3 章方程 (64)). 进一步, 由于 (见方程 (8))

$$R_{42} = 0 \text{ 和 } R_{22} - R_{44} = 0, \tag{60}$$

第 3 章方程 (67) 和 (72) 的结论现在继续成立. 但是, 代替第 3 章的方程 (73), 现在有 (见方程 (8))

$$2\mu_{2,r}\frac{e^{-2\mu_2}}{r} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{-2\mu_2}) = R_{33} = \frac{Q_*^2}{r^4}. \tag{61}$$

[215] 这个方程的解是

$$e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q_*^2}{r^2} \left(= e^{2\nu} = \frac{\Delta}{r^2} \right); \tag{62}$$

即重新获得了方程 (48) 所给的标准形式的解.

由方程 (62) 的 μ_2 和 ν 解, 得出黎曼张量的非零分量是 (见第 3 章方程 (75))

$$-R_{(1)(3)(1)(3)} = \frac{2Mr - Q_*^2}{r^4}; \quad R_{(2)(0)(2)(0)} = \frac{2Mr - 3Q_*^2}{r^4}; \tag{63}$$

和

$$R_{(1)(2)(1)(2)} = R_{(2)(3)(2)(3)} = -R_{(1)(0)(1)(0)} = -R_{(3)(0)(3)(0)} = \frac{Mr - Q_*^2}{r^4},$$

其中已将指标放在括号里以强调是局域惯性坐标里的四次分量. 由这些表示可见, $r = 0$ 的确是真正的时空奇点. 对应的张量分量是 (见第 3 章方程 (76))

和

$$\left.\begin{aligned}
R_{0101} &= +R_{t\varphi t\varphi} = -\frac{Mr - Q_*^2}{r^2} e^{2\nu} \sin^2\theta, \\
R_{0303} &= +R_{t\theta t\theta} = -\frac{Mr - Q_*^2}{r^2} e^{2\nu}, \\
R_{1212} &= +R_{\varphi r\varphi r} = +\frac{Mr - Q_*^2}{r^2} e^{-2\nu} \sin^2\theta, \\
R_{2323} &= +R_{r\theta r\theta} = +\frac{Mr - Q_*^2}{r^2} e^{-2\nu}, \\
R_{1313} &= +R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -(2Mr - Q_*^2) \sin^2\theta, \\
R_{0202} &= +R_{trtr} = +\frac{2Mr - 3Q_*^2}{r^4},
\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

其中 $e^{2\nu} = \Delta/r^2$.

40. 雷斯纳 – 诺兹特朗时空的短程线

由于雷斯纳 – 诺兹特朗度规与史瓦西度规的区别只是 "视界函数" Δ 的定义, 所以支配短程线运动的基本方程在对 Δ 重新定义后就与第 3 章 §18 和 §19 中的相同. 支配类时短程线的方程是 (第 3 章方程 (85)、(90) 和 (91))

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2}\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2; \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E\frac{r^2}{\Delta}; \quad \text{和} \ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{L}{r^2}, \tag{65}$$

[216] 其中

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q_*^2. \tag{66}$$

将 r 视为 φ 的函数, 并用 $u = 1/r$ 代替 r 作为独立变量, 得方程 (见第 3 章方程 (94))

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = -Q_*^2u^4 + 2Mu^3 - u^2\left(1 + \frac{Q_*^2}{L^2}\right) + \frac{2M}{L^2}u - \frac{1 - E^2}{L^2} = f(u) \text{ (比如说)}. \tag{67}$$

相应的支配零短程线的方程是 (见第 3 章方程 (212)—(215))

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + L^2\frac{\Delta}{r^4} = E^2; \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E\frac{r^2}{\Delta}; \quad \text{和 } \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{L}{r^2}; \tag{68}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = -Q_*^2u^4 + 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{D^2} = f(u) \text{ (比如说)}, \tag{69}$$

其中 $D(=L/E)$ 与以前一样是碰撞参量.

方程 (67) 和 (69) 与第 3 章中方程的区别在于 $f(u)$ 是四次而不是三次的. 将会看到, 这个事实造成的实质性差别只对穿越 $r = r_+$ 视界的轨道, 也就是在史瓦西几何里终结于 $r = 0$ 奇点的轨道; 而这是由于史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗几何里各自的事件视界内部的差别.

(a) 零短程线

如在史瓦西时空中一样, 雷斯纳 – 诺兹特朗几何里的径向零短程线也提供了构造纽曼 – 彭罗斯形式采用的零四次标架的基. 支配径向零短程线的方程可由对方程 (68) 取 $L = 0$ 得到, 即

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm E, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{r^2}{\Delta}E, \quad \text{和 } \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = 0. \tag{70}$$

相应地,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm\frac{\Delta}{r^2}. \tag{71}$$

这个方程的解是

$$t = \pm r_* + \text{常量}, \tag{72}$$

其中 r_* 在方程 (42) 中定义. 所以, 对进入的零线, 坐标时间 t 随着 r 从 $+\infty$ 减小到 r_+ 而从 $-\infty$ 增大到 $+\infty$, 随着 r 进一步从 r_+ 减小到 r_- 而从 $+\infty$ 减小到 $-\infty$, 又随着 r 从 r_- 减小到零而再次从 $-\infty$ 增大到一个有限极值. 而原时却始终以恒定速率 E 减小 (光本应如此!). 从有限距离 $r > r_+$ 开始, 共动观测者将在有限原时里到达奇点. (即将看到, 这是仅有的终结于奇点的短程线类型, 所有其它类型都避开奇点.) 还应注意, 由于 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ 随 $r \to r_+ + 0$ 而趋于 $+\infty$, 随 $r \to r_- + 0$ 而趋于 $-\infty$, 任何来自无限远处 (在 C 区) 的辐射在穿越事件视界时将表现为无限红移, 在穿越柯西视界时无限蓝移. [217]

转到对方程 (69) 和零短程线的一般考虑, 首先看到, 四次方程 $f(u) = 0$ 总有两个实根: 一个为负 (没有物理意义), 一个为正 (可证明对 $r < r_-$ 存在). 这里只关心其余两个根要么都为实数 (不同或相同)、要么是一对复数共轭的情况. 将使 $f(u) = 0$ 有重根的碰撞参量 D 的值记为 D_c. 于是对所有 $D > D_c$ 的

值, 将有两类轨道 (如在史瓦西时空一样): 第一类轨道完全在事件视界之外, 来自 $+\infty$ 并在经过近心点后又退到 $+\infty$; 而第二类轨道有着两个转折点, 一个在事件视界之外, 一个在柯西视界之内. 对碰撞参量 $D < D_c$ 的值 (当 $f(u) = 0$ 只允许一个沿正的实 u 轴的 $> 1/r_-$ 的实根), 来自 $+\infty$ 的轨道将越过两个视界并对一个有限值 $r < r_-$ 有转折点. 于是, 所有这些轨道都避开 $r = 0$ 的奇点. 但是, 由 §39 的说明可知, 在柯西视界之内有转折点的轨道不能被认为是在沿着系统地反射的时间逆转轨道继续, 而应该被认为是继续沿着图 14 的 "梯子" 向上: 例如 $A \to B' \to C$ (其中 C 现在是一个不同的渐近平坦宇宙).

使 $f(u) = 0$ 有重根的碰撞参量值由下列方程决定,

$$f(u) = \frac{1}{D^2} - u^2(Q_*^2 u^2 - 2Mu + 1) = 0 \tag{73}$$

和

$$f'(u) = -2u(1 - 3Mu + 2Q_*^2 u^2) = 0. \tag{74}$$

除 $u = 0$ 外, 方程 (74) 还有根

$$u = \frac{3M}{4Q_*^2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{8Q_*^2}{9M^2}\right)^{1/2}\right]. \tag{75}$$

[218] 对这两根中较大的那个, $f(u)$ 有极大值. 所寻找的重根必定存在于 $f(u)$ 的极小值处, 即

$$u = \frac{3M}{4Q_*^2}\left[1 - \left(1 - \frac{8Q_*^2}{9M^2}\right)^{1/2}\right] = u_c \text{ (比如说)}. \tag{76}$$

对应的 r 值是

$$r_c = 1.5M[1 + (1 - 8Q_*^2/9M^2)^{1/2}]. \tag{77}$$

在这个半径 r_c 上, 短程线方程显然允许一个不稳定圆轨道.

与重根 r_c 相关联的碰撞参量 D_c 的值可由方程 (73) 得出:

$$D_c = r_c^2/\sqrt{\Delta_c}, \quad \Delta_c = r_c^2 - 2Mr_c + Q_*^2 = Mr_c - Q_*^2. \tag{78}$$

当 $D = D_c$,

$$f(u) = (u - u_c)^2[-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + u_c(M - Q_*^2 u_c)]; \tag{79}$$

而对 φ 的解是

$$\varphi = \pm \int [-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + u_c(M - Q_*^2 u_c)]^{-1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u - u_c}. \tag{80}$$

代换,

$$\xi = (u - u_c)^{-1}, \tag{81}$$

将 φ 简化为基本积分,

$$\varphi = \mp \int \frac{\mathrm{d}\xi}{(-Q_*^2 + b\xi + c\xi^2)^{1/2}}, \tag{82}$$

其中

$$b = 2(M - 2Q_*^2 u_c) \text{ 和 } c = u_c(3M - 4Q_*^2 u_c). \tag{83}$$

于是得到解

$$\mp\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{c}} \lg\{2[c(-Q_*^2 + b\xi + c\xi^2)]^{1/2} + 2c\xi + b\} & (c > 0) \\ \dfrac{-1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1}\left\{\dfrac{2c\xi + b}{(4Q_*^2 c + b^2)^{1/2}}\right\}. & (c < 0) \end{array} \right\}. \tag{84}$$

两类轨道由这同一个解对下列范围的自变量值来描述:

$$\infty > r > r_c, \quad 0 \leqslant u \leqslant u_c \text{ 和 } -u_c^{-1} > \xi > -\infty, \tag{85}$$

对第一类轨道, 而

$$r_c > r > r_{\min}, \quad u_c < u \leqslant u_{\max}(= 1/r_{\min}),$$

和

$$+\infty > \xi > \xi_{\min}(= (u_{\min} - u_c)^{-1}), \tag{86}$$

对第二类轨道, 其中 $r_{\min}$ 是方程的正根 (见方程 (79)), [219]

$$u_c(M - Q_*^2 u_c)r^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)r - Q_*^2 = 0. \tag{87}$$

这两类轨道螺旋式地围绕 $r = r_c$ 的不稳定圆轨道转动无数圈, 从相反两侧渐近地趋于该不稳定轨道.

方程 (84) 解的一例示于图 15 (参见图 9 (b) 所示史瓦西时空的相应解). 具有其它碰撞参量值的零短程线的性质也容易显示.

(*b*) 类时短程线

首先考虑径向短程线, 支配方程是

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = E^2 - \frac{\Delta}{r^2} \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = E\frac{r^2}{\Delta}. \tag{88}$$

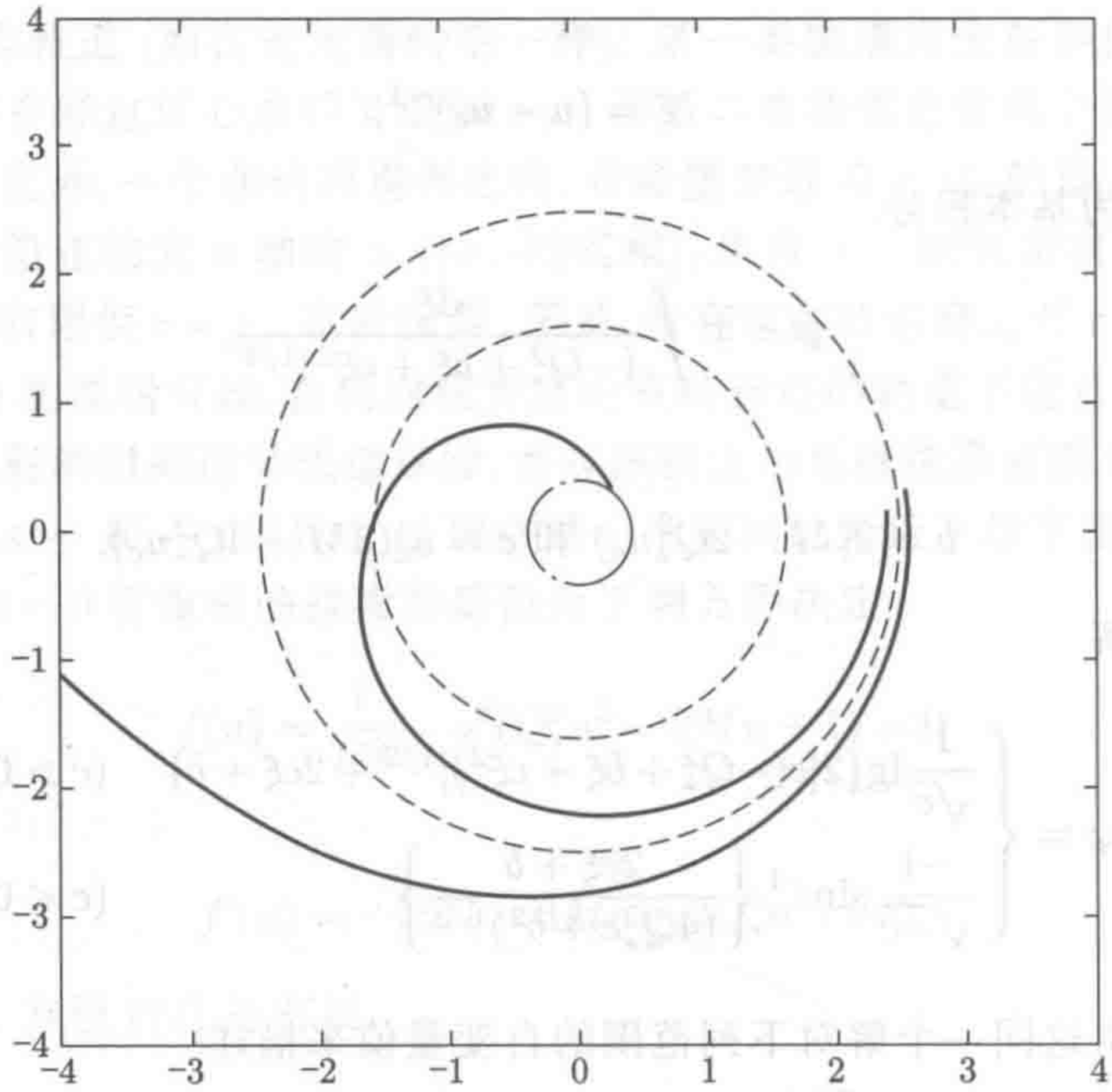


图 15 对应于方程 (78) 给出的临界碰撞参量 D_c 和 $Q_* = 0.8$ 的零短程线. 内、外视界由虚线圆圈表示, 点线圆圈表示不稳定圆轨道. 轨道实际上越过内视界, 但所示仅是它终结之前. 沿坐标轴的长度单位是 M.

[220] 由于在区间 $0 \leqslant r < r_-$ 有 $\Delta > 0$, 显然 $(E^2r^2 - \Delta)$ 将对 $0 < r < r_-$ 的某个有限值为零. 结果是轨道在柯西视界内将有一个转折点. 就是说, 即使是径向类时短程线也不到达奇点 $r = 0$, 而是避开奇点而出现在其它世界. 由方程 (88) 也很清楚, 坐标时间 t 随 r 的变化将对 $r \to r_+(\pm 0)$ 和 $r \to r_-(\pm 0)$ 都出现奇异性, 与这些面的视界特征一致.

方程 (88) 的形式解可以借助于基本积分得到. 这里不拟写出这些解, 因为它们太复杂了, 无法表示为由对方程的简单考察就能得出的更明显的样式.

再转到方程 (67) 来一般地考虑类时短程线, 可以像第 3 章§19 对史瓦西几何那样来分类和分析不同情形. 但是很清楚, 雷斯纳 – 诺兹特朗和史瓦西两种几何的基本差别在于穿越事件视界的轨道: 在史瓦西几何里所有这样的轨道都必定终结于奇点, 而在雷斯纳 – 诺兹特朗几何里却是形式上终结于柯西视界内部的某个点. 由此带来的差异可由考虑与稳定和不稳定圆轨道相关联的第二类轨道来充分地阐明.

圆轨道存在的条件是

$$f(u) = -Q_*^2 u^4 + 2Mu^3 - (1 + Q_*^2/L^2)u^2 + [2Mu - (1 - E^2)]/L^2 = 0, \quad (89)$$

和

$$f'(u) = -4Q_*^2 u^3 + 6Mu^2 - 2(1 + Q_*^2/L^2)u + 2M/L^2 = 0. \quad (90)$$

从这些方程得出, 半径为 $r_c = 1/u_c$ 的圆轨道的能量 E 和角动量 L 是

$$E^2 = \frac{(1 - 2Mu_c + Q_*^2 u_c^2)^2}{1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2}. \quad (91)$$

和

$$L^2 = \frac{M - Q_*^2 u_c}{u_c(1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2)}. \quad (92)$$

这些方程特别地要求

$$1 - 3Mu_c + 2Q_*^2 u_c^2 > 0. \quad (93)$$

这个不等式与方程 (74) 的比较表明, 类时圆轨道的最小半径是不稳定圆光子轨道的半径. 图 16 呈现了 E 和 L 对圆轨道半径的依赖关系.

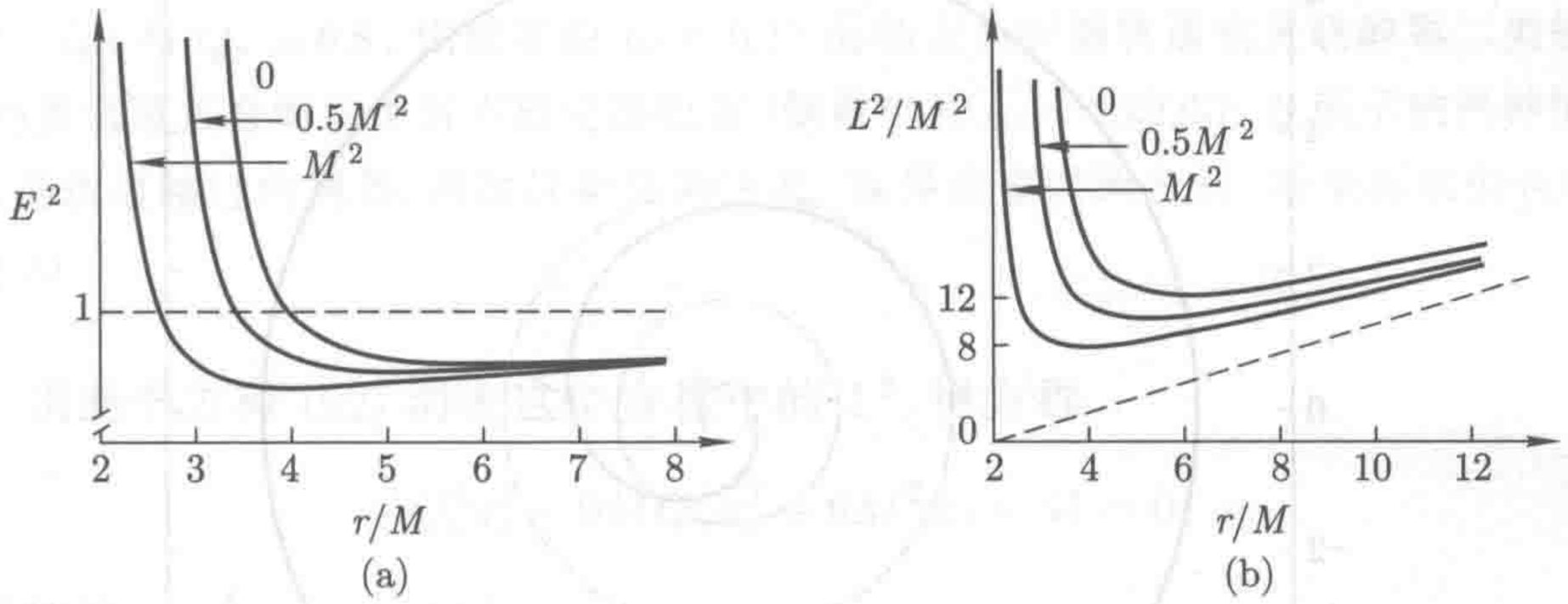


图 16 E^2 (图 (a)) 和 L^2 (图 (b)) 随圆轨道半径的变化. 曲线由所属的 Q_*^2 值标记.

当 E 和 L 有着适合于半径为 $r_c = 1/u_c$ 的圆轨道的值 (91) 和 (92) 时, 方 [221]
程 (67) 成为 (见方程 (79))

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = (u-u_c)^2[-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + (M - Q_*^2 u_c - M/L^2 u_c^2)u_c]. \quad (94)$$

所以, 除半径为 $r_c = 1/u_c$ 的圆轨道外, 方程 (94) 还给出一个由下式决定的第二类轨道 (见方程 (80)),

$$\varphi = \pm \int [-Q_*^2 u^2 + 2(M - Q_*^2 u_c)u + (M - Q_*^2 u_c - M/L^2 u_c^2)u_c]^{-1/2} \frac{\mathrm{d}u}{u - u_c}. \quad (95)$$

用代换

$$\xi = (u - u_c)^{-1} \tag{96}$$

可得同样的解 (84), 但有

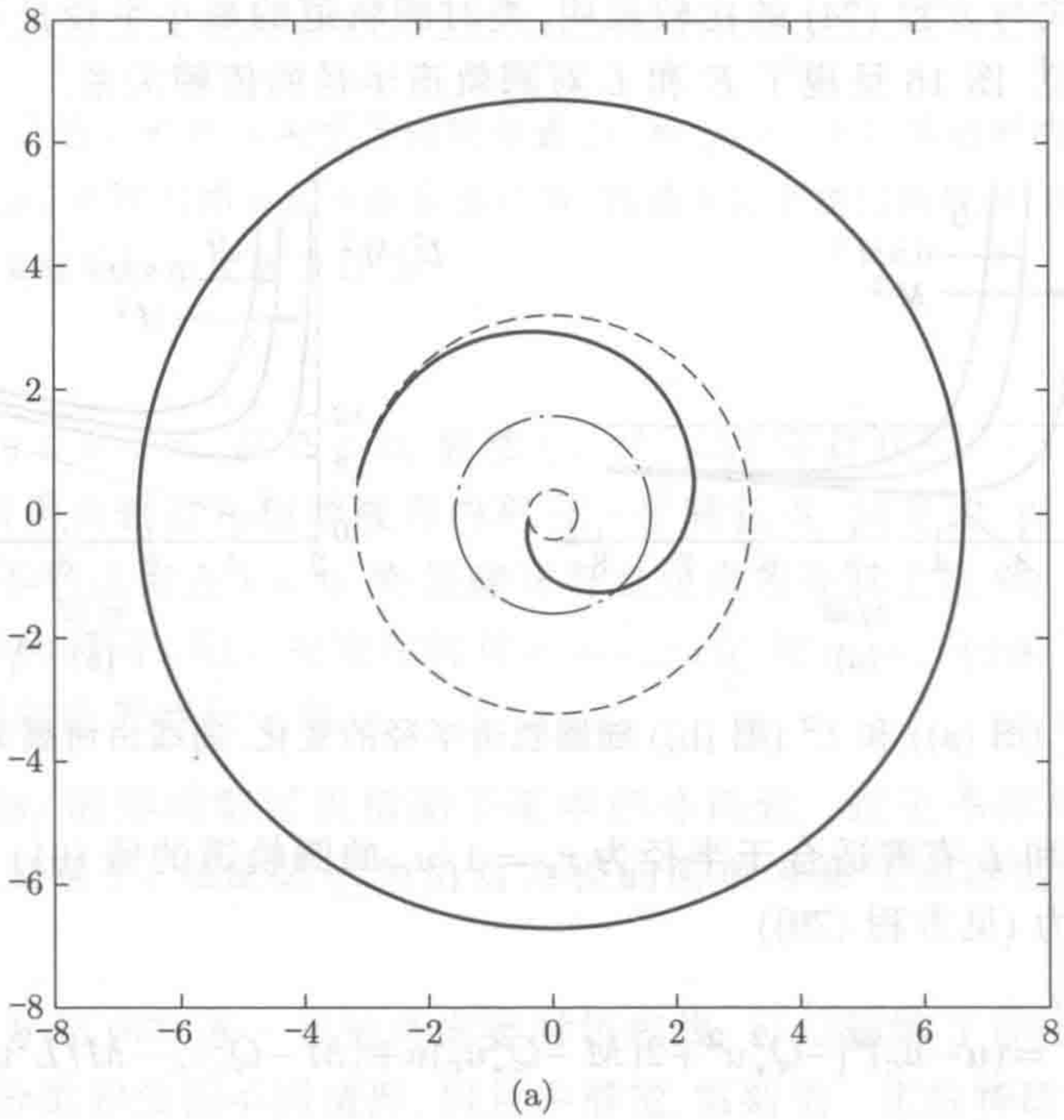
$$b = 2(M - 2Q_*^2 u_c) \text{ 和 } c = u_c(3M - 4Q_*^2 u_c - M^2/L^2 u_c^2). \tag{97}$$

与稳定圆轨道相关联的第二类轨道的一个例子示于图 17(a). 对不稳定圆轨道, 两类轨道都能由同一公式 (84) 导出 ($c < 0$ 的情形). 这样的轨道的一例示于图 17(b).

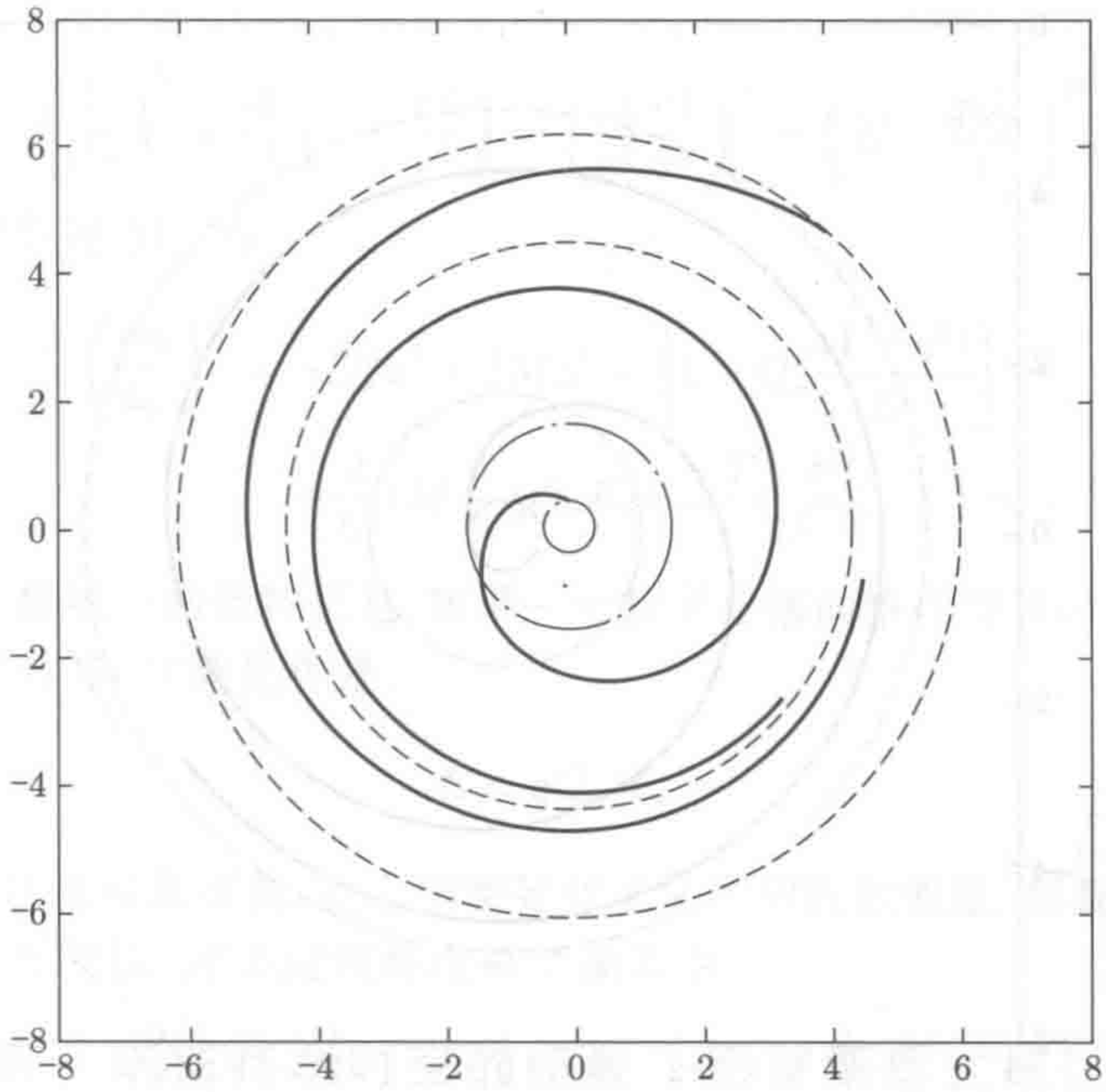
稳定圆轨道的最小半径出现于函数 $f(u)$ 的拐点, 也就是必须对方程 (89) 和 (90) 附加一个方程,

$$f''(u) = -12Q_*^2 u^2 + 12Mu - 2(1 + Q_*^2/L^2) = 0. \tag{98}$$

[222]



(a)



(b)

图 17 (a) 与 $Q_* = 0.8$、倒数半径 $u_c = 0.15$ 的稳定类时圆轨道相关联的第二类轨道. (b) 两类轨道接合时的类时不稳定圆轨道 (倒数半径 $u_c = 0.2225$). 在所示的两种情形, 第二类轨道越过内视界, 再次仅是终结之前. 视界由虚线圆表示. 沿坐标轴的长度单位为 M.

借助于方程 (92) 消去这个方程中的 L^2, 得方程 [223]

$$4Q_*^4u_c^3 - 9MQ_*^2u_c^2 + 6M^2u_c - M = 0, \tag{99}$$

或等价地,

$$r_c^3 - 6Mr_c^2 + 9Q_*^2r_c - 4Q_*^4/M = 0. \tag{100}$$

(注意这里的方程 (100) 对 $Q_*^2 = 0$ 给出 $r_c = 6M$, 与对史瓦西几何的值一致.)

当所有三个方程 (89)、(90) 和 (98) 都满足时, 方程 (67) 取形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = (u - u_c)^3(2M - 3Q_*^2u_c - Q_*^2u); \tag{101}$$

这个方程的解是 (见第 3 章方程 (165))

$$u = u_c + \frac{2(M - 2Q_*^2u_c)}{(M - 2Q_*^2u_c)^2(\varphi - \varphi_0)^2 + Q_*^2}. \tag{102}$$

这种轨道的一例示于图 18.

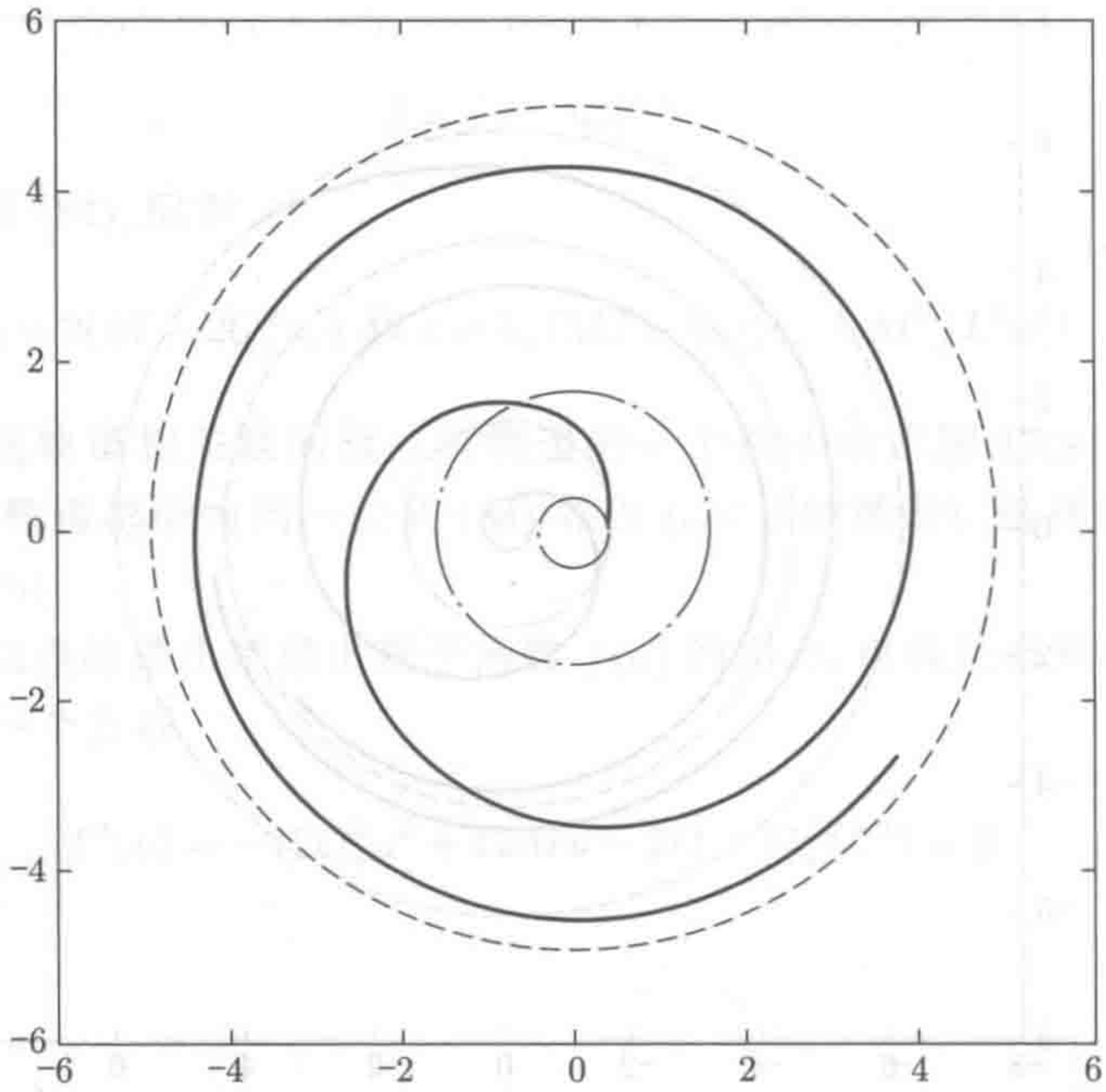


图 18 对 $Q_* = 0.8$ 的最后类时不稳定圆轨道出现于半径 $4.89M$ 处. 视界由虚线圆表示. 沿坐标轴的长度单位是 M.

[224]

(c) 带电粒子的运动

带有净电荷的检验粒子当然不会描绘出雷斯纳 – 诺兹特朗几何的短程线. 由于在这种几何里矢量势的唯一非零分量是 $A_0(= Q_*/r)$, 检验粒子的运动将变为由拉格朗日量决定,

$$2\mathscr{L} = \left[\frac{\Delta}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - \frac{r^2}{\Delta}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 - (r^2\sin^2\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right] + 2\frac{qQ_*}{r}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \tag{103}$$

其中 q 表示检验例子每单位质量的电荷. 容易写出来自这个拉格朗日量的运动方程. 它们是 (见方程 (65))

$$p_t = \frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{qQ_*}{r} = E = 常量, \quad r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = L = 常量, \tag{104}$$

① 拉格朗日量的这种表示来自洛伦兹运动方程, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}\tau^2} = qF^i_m\frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}\tau}.$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\frac{\Delta}{r^2}\left(1+\frac{L^2}{r^2}\right)=\left(\frac{\Delta}{r^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=\left(E-\frac{qQ_*}{r}\right)^2; \tag{105}$$

而现在代替方程 (67) 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2=-Q_*^2u^4+2Mu^3-\left[1+Q_*^2\frac{(1-q^2)}{L^2}\right]u^2 +\frac{2}{L^2}(M-qQ_*E)u-\frac{1-E^2}{L^2}. \tag{106}$$

这些方程唯一的新特征是, 如果一个粒子在落向事件视界时有转折点, 那么按照方程 (105) 其能量将是

$$E=qQ_*/r_+; \tag{107}$$

如果 $qQ_*<0$ 这将是负值. 这个事实导致了从黑洞提取能量, 即提取与电荷相关的能量的可能性. 此类过程将在第 7 章考虑.

41. 雷斯纳 – 诺兹特朗时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述

为构造以纽曼 – 彭罗斯形式描述雷斯纳 – 诺兹特朗时空的零四次标架, 从径向零短程线给定的矢量 (70) 开始. 精确地, 取

和

$$\left.\begin{aligned} l^i&=(l^t,l^r,l^\theta,l^\varphi)=\frac{1}{\Delta}(r^2+\Delta,0,0),\\ n^i&=(n^t,n^r,n^\theta,n^\varphi)=\frac{1}{2r^2}(r^2,-\Delta,0,0),\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

[225]

作为基的两个实数零矢量, 并给它们搭配复数零矢量,

$$m^i=(m^t,m^r,m^\theta,m^\varphi)=\frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,\mathrm{i}\operatorname{cosec}\theta) \tag{109}$$

垂直于 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$. 这些矢量满足所要求的归一化条件

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=1 \text{ 和 } \boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=-1. \tag{110}$$

基矢 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}})$ 与在史瓦西时空里的 (第 3 章方程 (281)—(283)) 差别仅在于 Δ 的定义. 自旋系数的计算过程与以前几乎一样, 仅有的小改变是来自现在的 Δ 定义. 现在有 (见第 3 章方程 (287) 和 (288))

$$\kappa=\sigma=\lambda=\nu=\varepsilon=\pi=\tau=0 \tag{111}$$

和

$$\rho=-\frac{1}{r},\quad \beta=-\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\cot\theta}{r},\quad \mu=-\frac{\Delta}{2r^3},$$

和

$$\gamma = \mu + \frac{r-M}{2r^2} = \frac{Mr - Q_*^2}{2r^3}. \tag{112}$$

自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 为零的事实证实了时空的 D 型特征. 所以, 外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 必定在所选基里为零, 也的确能通过按照标量的定义收缩黎曼张量 (其非零分量列于方程 (64)) 来直接验证. 但是外尔标量 Ψ_2 并不为零, 而是有 (见第 3 章方程 (289))

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= R_{pqrs}l^p m^q n^r \overline{m}^s \\ &= \frac{e^{-2\nu}}{4r^2}(R_{0101}\mathrm{cosec}^2\theta + R_{0303} - e^{4\nu}R_{2323} - e^{4\nu}R_{1212}\mathrm{cosec}^2\theta),\end{aligned} \tag{113}$$

代入方程 (64) 给出的黎曼张量分量的值, 有

$$\Psi_2 = -(Mr - Q_*^2)r^{-4}. \tag{114}$$

[226] 注意到唯一非零麦克斯韦标量的值是由下式给出, 则雷斯纳 – 诺兹特朗几何的纽曼 – 彭罗斯形式描述完成,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}F_{pq}(l^p n^q + \overline{m}^p \overline{m}^q) = \frac{1}{2}F_{tr}(l^t n^r - l^r n^t) \\ &= \frac{1}{2}Q_* r^{-2}.\end{aligned} \tag{115}$$

42. 雷斯纳 – 诺兹特朗解的度规扰动

如史瓦西解的情形那样, 雷斯纳 – 诺兹特朗解的度规系数扰动也能通过对适于非定常态、轴对称度规的爱因斯坦和麦克斯韦方程关于这个解线性化来分析,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {} & e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t - q_2\mathrm{d}x^2 - q_3\mathrm{d}x^3)^2 \\ & - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2.\end{aligned} \tag{116}$$

但与第 4 章§24 的史瓦西扰动处理不同, 现在还必须考虑麦克斯韦方程的线性化. 且从麦克斯韦方程开始.

(a) 线性化的麦克斯韦方程

第 2 章 (方程 (95)) 所列的麦克斯韦方程, 具体到比较简单的情形 (116)

时的形式是

$$\left.\begin{aligned}
&(e^{\psi+\mu_2}F_{12})_{,3}+(e^{\psi+\mu_3}F_{31})_{,2}=0,\\
&(e^{\psi+\nu}F_{01})_{,2}+(e^{\psi+\mu_2}F_{12})_{,0}=0,\\
&(e^{\psi+\nu}F_{01})_{,3}+(e^{\psi+\mu_3}F_{13})_{,0}=0,\\
&(e^{\mu_2+\mu_3}F_{01})_{,0}+(e^{\nu+\mu_3}F_{12})_{,2}+(e^{\nu+\mu_2}F_{13})_{,3}\\
&=e^{\psi+\mu_3}F_{02}Q_{02}+e^{\psi+\mu_2}F_{03}Q_{03}-e^{\psi+\nu}F_{23}Q_{23}
\end{aligned}\right\}\tag{117}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&(e^{\psi+\mu_3}F_{02})_{,2}+(e^{\psi+\mu_2}F_{03})_{,3}=0,\\
&-(e^{\psi+\nu}F_{23})_{,2}+(e^{\psi+\mu_2}F_{03})_{,0}=0,\\
&+(e^{\psi+\nu}F_{23})_{,3}+(e^{\psi+\mu_3}F_{02})_{,0}=0,\\
&(e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{,3}-(e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{,2}+(e^{\mu_2+\mu_3}F_{23})_{,0}\\
&=e^{\psi+\nu}F_{01}Q_{23}+e^{\psi+\mu_2}F_{12}Q_{03}-e^{\psi+\mu_3}F_{13}Q_{02},
\end{aligned}\right\}\tag{118}$$

其中

$$Q_{AB}=q_{A,B}-q_{B,A}\text{ 和 }Q_{A0}=q_{A,0}-\omega_{,A}\quad(A,B=2,3).\tag{119}$$

可以看到, 第一组方程 (117) 只含有当 φ 变成 $-\varphi$ 时其符号反转的量 (或其乘积), 而第二组方程 (118) 只含有当 φ 变号时不变的量. 它们分别对应着第 4 章§24 已予描述的轴向量和极向量. 此外, 在每组方程中还能免去第一个方程, 因为它只是提供后面两个方程的可积条件. [227]

记住 $F_{02}(=-Q_*r^{-2})$ 是麦克斯韦张量的唯一非零分量, Q_{AB} 是一阶小量, 不难得出方程 (117) 和 (118) 的线性化形式是 (免去其中第一个方程)

$$(re^{\nu}F_{01}\sin\theta)_{,r}+re^{-\nu}F_{12,0}\sin\theta=0,\tag{120}$$

$$re^{\nu}(F_{01}\sin\theta)_{,\theta}+r^2F_{13,0}\sin\theta=0,\tag{121}$$

$$re^{-\nu}F_{01,0}+(re^{\nu}F_{12})_{,r}+F_{13,\theta}=-Q_*(\omega_{,2}-q_{2,0})\sin\theta,\tag{122}$$

和

$$re^{-\nu}F_{03,0}=(re^{\nu}F_{23})_{,r}\tag{123}$$

$$\delta F_{02,0}-\frac{Q_*}{r^2}(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,0}+\frac{e^{\nu}}{r\sin\theta}(F_{23}\sin\theta)_{,\theta}=0,\tag{124}$$

$$\left[\delta F_{02}-\frac{Q_*}{r^2}(\delta\nu+\delta\mu_2)\right]_{,\theta}+(re^{\nu}F_{30})_{,r}+re^{-\nu}F_{23,0}=0.\tag{125}$$

(*b*) 里奇张量的扰动

与史瓦西时空不同, 在对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的处理中不能将里奇张量的扰动分量设为零, 而是必须设

$$\delta R_{(a)(b)} = -2[\eta^{(n)(m)}(\delta F_{(a)(n)}F_{(b)(m)} + F_{(a)(n)}\delta F_{(b)(m)}) - \eta_{(a)(b)}Q_*\delta F_{02}/r^2]. \tag{126}$$

由这个方程得

和

$$\left.\begin{aligned} &\delta R_{00} = \delta R_{11} = -\delta R_{22} = \delta R_{33} = -2\frac{Q_*}{r^2}\delta F_{02}, \\ &\delta R_{01} = -2\frac{Q_*}{r^2}F_{12}, \quad \delta R_{03} = +2\frac{Q_*}{r^2}F_{23}, \\ &\delta R_{12} = +2\frac{Q_*}{r^2}F_{01}, \quad \delta R_{23} = +2\frac{Q_*}{r^2}F_{03}, \\ &\delta R_{02} = \delta R_{13} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

[228]

(*c*) 轴向扰动

来自由爱因斯坦方程关于雷斯纳 – 诺兹特朗解的线性化的扰动方程, 能如第 4 章§24 中对史瓦西扰动的处理完全一样地得出. 特别地, 轴向扰动能独立于极向扰动来处理.

如对史瓦西解那样, 雷斯纳 – 诺兹特朗解的轴向扰动是由非零的 ω、q_2 和 q_3 来表征; 代替第 4 章的方程 (11) 和 (12), 现在有

$$(r^2e^{2\nu}Q_{23}\sin^3\theta)_{,3} + r^4Q_{02,0}\sin^3\theta = 2(r^3e^{\nu}\sin^2\theta)\delta R_{12} = 4Q_*re^{\nu}F_{01}\sin^2\theta, \tag{128}$$

和

$$(r^2e^{2\nu}Q_{23}\sin^3\theta)_{,2} - r^2e^{-2\nu}Q_{03,0}\sin^3\theta = -2(r^2\sin^2\theta)\delta R_{13} = 0, \tag{129}$$

其中已经代入了方程 (127) 的 δR_{12} 和 δR_{13}.

方程 (128) 和 (129) 必须由方程 (120)—(122) 来补充. 后面这些方程可以通过借助于方程 (120) 和 (121) 从方程 (122) 中消去 F_{12} 和 F_{13} 而简化为关于 F_{01} 的单个方程. 于是得到

$$\begin{aligned}&[e^{2\nu}(re^{\nu}B)_{,r}]_{,r} + \frac{e^{\nu}}{r}\left(\frac{B_{,\theta}}{\sin\theta}\right)_{,\theta}\sin\theta - re^{-\nu}B_{,0,0} \\ &= Q_*(\omega_{,2,0} - q_{2,0,0})\sin^2\theta,\end{aligned} \tag{130}$$

其中

$$B = F_{01}\sin\theta. \tag{131}$$

用代换 (见第 4 章方程 (13)—(15)),

$$Q(r,\theta,t)=r^2e^{2\nu}Q_{23}\sin^3\theta=\Delta(q_{2,3}-q_{3,2})\sin^3\theta, \tag{132}$$

方程 (128) 和 (129) 取形式

$$\frac{1}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta}=-(\omega_{,2}-q_{2,0})_{,0}+\frac{4Q_*}{r^3\sin^2\theta}e^{\nu}B \tag{133}$$

和

$$\frac{\Delta}{r^4\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial r}=+(\omega_{,3}-q_{3,0})_{,0}. \tag{134}$$

从这些方程消去 ω, 并假定 (总是如此) 扰动有时间依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$, 得方程 (见第 4 章 方程 (18))

[229]

$$r^4\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+\sin^3\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin^3\theta}\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right)+\sigma^2\frac{r^4}{\Delta}Q$$

$$=4Q_*e^{\nu}r\left(\frac{B}{\sin^2\theta}\right)_{,\theta}\sin^3\theta. \tag{135}$$

类似地, 用方程 (133) 从方程 (130) 消去 $(\omega_{,2}-q_{2,0})_{,0}$, 得方程

$$[e^{2\nu}(re^{\nu}B)_{,r}]_{,r}+\frac{e^{\nu}}{r}\left(\frac{B_{,\theta}}{\sin\theta}\right)_{,\theta}\sin\theta+\left(\sigma^2re^{-\nu}-4\frac{Q_*^2}{r^3}e^{\nu}\right)B$$

$$=-Q_*\frac{Q_{,\theta}}{r^4\sin\theta}. \tag{136}$$

方程 (135) 和 (136) 中的变量 r 和 θ 能通过下列代换来分离 (见第 4 章方程 (19) 和 (20)),

$$Q(r,\theta)=Q(r)C_{l+2}^{-3/2}(\theta), \tag{137}$$

和

$$B(r,\theta)=\frac{B(r)}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}C_{l+2}^{-3/2}}{\mathrm{d}\theta}=3B(r)C_{l+1}^{-1/2}(\theta), \tag{138}$$

其中在写 $B(r,\theta)$ 的另一个形式时已经用了递推关系,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}C_n^{\nu}}{\mathrm{d}\theta}=-2\nu C_{n-1}^{\nu+1}. \tag{139}$$

利用葛根包尔函数 $C_{l+2}^{-3/2}$ 和 $C_{l+1}^{-1/2}$ 所满足的方程, 将 (137) 和 (138) 代入方程 (135) 和 (136) 得出径向方程 (见第 4 章方程 (23))

$$\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right)-\mu^2\frac{\Delta}{r^4}Q+\sigma^2Q=-\frac{4Q_*\mu^2}{r^3}\Delta e^{\nu}B \tag{140}$$

和

$$[e^{2\nu}(re^{\nu}B)_{,r}]_{,r}-(\mu^2+2)\frac{e^{\nu}}{r}B+\left(\sigma^2re^{-\nu}-\frac{4Q_*^2}{r^3}e^{\nu}\right)B=-Q_*\frac{Q}{r^4}, \tag{141}$$

其中

$$\mu^2=2n=(l-1)(l+2). \tag{142}$$

转变到变量 r_* (方程 (42) 中定义) 并进一步令

$$Q(r)=rH_2^{(-)} \text{ 和 } re^{\nu}B=-\frac{H_1^{(-)}}{2\mu}, \tag{143}$$

[230] 可得 $H_2^{(-)}$ 和 $H_1^{(-)}$ 满足耦合方程对,

$$\Lambda^2H_2^{(-)}=\frac{\Delta}{r^5}\left\{\left[(\mu^2+2)r-3M+4\frac{Q_*^2}{r}\right]H_2^{(-)}-3MH_2^{(-)}+2Q_*\mu H_1^{(-)}\right\}, \tag{144}$$

$$\Lambda^2H_1^{(-)}=\frac{\Delta}{r^5}\left\{\left[(\mu^2+2)r-3M+4\frac{Q_*^2}{r}\right]H_1^{(-)}+2Q_*\mu H_2^{(-)}+3MH_1^{(-)}\right\}, \tag{145}$$

其中, 与标准用法一致,

$$\Lambda^2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2}+\sigma^2. \tag{146}$$

方程 (144) 和 (145) 可由下列代换解耦,

$$Z_1^{(-)}=+q_1H_1^{(-)}+(-q_1q_2)^{1/2}H_2^{(-)} \tag{147}$$

和

$$Z_2^{(-)}=-(-q_1q_2)^{1/2}H_1^{(-)}+q_1H_2^{(-)}, \tag{148}$$

其中

$$q_1=3M+\sqrt{9M^2+4Q_*^2\mu^2} \text{ 和 } q_2=3M-\sqrt{9M^2+4Q_*^2\mu^2}. \tag{149}$$

可得 $Z_1^{(-)}$ 和 $Z_2^{(-)}$ 满足一维薛定谔型波动方程,

$$\Lambda^2Z_i^{(-)}=V_i^{(-)}Z_i^{(-)}\quad(i=1,2), \tag{150}$$

其中

$$V_i^{(-)}=\frac{\Delta}{r^5}\left[(\mu^2+2)r-q_j\left(1+\frac{q_i}{\mu^2r}\right)\right]\quad(i,j=1,2;i\neq j) \tag{151}$$

$$q_1+q_2=6M,\quad \text{和}\ -q_1q_2=4Q_*^2\mu^2. \tag{152}$$

支配轴向扰动的方程简化为一维波动方程对 (150), 是由蒙克里弗 (Moncrief) 和由泽里立 (Zerilli) 首先做到的 (虽然是由大不相同的途径).

可以看到, 在极限 $Q_*=0$, 有 $q_1=6M$ 和 $q_2=0$, 支配 $Z_2^{(-)}$ 的方程简化为雷杰 – 惠勒方程 (第 4 章方程 (27) 和 (28)).

(*d*) 极向扰动

极向扰动由度规函数 ν、μ_2、μ_3 和 ψ 的非零增量来表征. 将第 4 章 (方程 (4)) 所给的对 R_{02}、R_{03}、R_{23}、R_{11} 和 G_{22} 的表示线性化, 并由方程 (127) 代换这些量的扰动, 得到代替第 4 章方程 (31)—(35) 的结果是 [231]

$$(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}+\left(\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)(\delta\psi+\delta\mu_3)-\frac{2}{r}\delta\mu_2=-\delta R_{02}=0, \tag{153}$$

$$[(\delta\psi+\delta\mu_2)_{,\theta}+(\delta\psi-\delta\mu_3)\cot\theta]_{,0}=-e^{\nu+\mu_3}\delta R_{03}=-2Q_*\frac{e^{\nu}}{r}F_{23}, \tag{154}$$

$$\begin{aligned}&(\delta\psi+\delta\nu)_{,r,\theta}+(\delta\psi-\delta\mu_3)_{,r}\cot\theta+\left(\nu_{,r}-\frac{1}{r}\right)\delta\nu_{,\theta}\\&\quad-\left(\nu_{,r}+\frac{1}{r}\right)\delta\mu_{2,\theta}=-e^{\mu_2+\mu_3}\delta R_{23}=-2Q_*\frac{e^{-\nu}}{r}F_{03},\end{aligned} \tag{155}$$

$$\begin{aligned}&e^{2\nu}\left[\frac{2}{r}\delta\nu_{,r}+\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,r}-2\left(\frac{1}{r^2}+2\frac{\nu_{,r}}{r}\right)\delta\mu_2\right]\\&\quad+\frac{1}{r^2}[(\delta\psi+\delta\nu)_{,\theta,\theta}+(2\delta\psi+\delta\nu-\delta\mu_3)_{,\theta}\cot\theta+2\delta\mu_3]\\&\quad-e^{-2\nu}(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,0,0}=\delta G_{22}=\delta R_{22}=2\frac{Q_*}{r^2}\delta F_{02}\end{aligned} \tag{156}$$

和

$$\begin{aligned}&e^{2\nu}\left[\delta\psi_{,r,r}+2\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)\delta\psi_{,r}+\frac{1}{r}(\delta\psi+\delta\nu+\delta\mu_3-\delta\mu_2)_{,r}-2\left(\frac{1}{r}+2\nu_{,r}\right)\frac{\delta\mu_2}{r}\right]\\&\quad+\frac{1}{r^2}[\delta\psi_{,\theta,\theta}+\delta\psi_{,\theta}\cot\theta+(\delta\psi+\delta\nu-\delta\mu_3+\delta\mu_2)_{,\theta}\cot\theta+2\delta\mu_3]\\&\quad-e^{-2\nu}\delta\psi_{,0,0}=-\delta R_{11}=2\frac{Q_*}{r^2}\delta F_{02}.\end{aligned} \tag{157}$$

这些方程必须与由麦克斯韦方程线性化所得的方程 (123)—(125) 一起考虑.

方程 (123)—(125) 和 (153)—(157) 中的变量 r 和 θ 能由下列代换分离,

$$\left.\begin{aligned}&\delta\nu=N(r)P_l(\theta);\quad \delta\mu_2=L(r)P_l(\theta);\\&\delta\mu_3=[T(r)P_l+V(r)P_{l,\theta,\theta}],\\&\delta\psi=[T(r)P_l+V(r)P_{l,\theta}\cot\theta],\end{aligned}\right\} \tag{158}$$

$$\delta F_{02} = \frac{r^2 e^{2\nu}}{2Q_*} B_{02}(r) P_l, \quad F_{03} = -\frac{r e^{\nu}}{2Q_*} B_{03}(r) P_{l,\theta}, \tag{159}$$

和

$$F_{23} = -\mathrm{i}\sigma \frac{r e^{-\nu}}{2Q_*} B_{23}(r) P_{l,\theta}, \tag{160}$$

[232] 当然需要将第 4 章方程 (40)—(42) 的关系恰当地运用. 于是得到下列关于已引入的各个径向函数的方程:

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right)\right][2T - l(l+1)V] - \frac{2}{r}L = 0, \tag{161}$$

$$(T - V + L) = B_{23}, \tag{162}$$

$$(T - V + N)_{,r} - \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) N - \left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) L = B_{03}, \tag{163}$$

$$\frac{2}{r} N_{,r} + \left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right)[2T - l(l+1)V] - \frac{2}{r}\left(\frac{1}{r} + 2\nu_{,r}\right) L$$

$$- \frac{l(l+1)}{r^2} e^{-2\nu} N - \frac{2n}{r^2} e^{-2\nu} T + \sigma^2 e^{-4\nu}[2T - l(l+1)V] = B_{02} \tag{164}$$

$$B_{03} = \frac{1}{r^2}(r^2 B_{23})_{,r} = B_{23,r} + \frac{2}{r} B_{23}, \tag{165}$$

$$r^4 e^{2\nu} B_{02} = 2Q_*^2[2T - l(l+1)V] - l(l+1) r^2 B_{23}, \tag{166}$$

和

$$(r^2 e^{2\nu} B_{03})_{,r} + r^2 e^{2\nu} B_{02} + \sigma^2 r^2 e^{-2\nu} B_{23} = 2Q_*^2 \frac{N + L}{r^2}. \tag{167}$$

这些方程中的两个 (即方程 (162) 和 (166)) 是代数方程.

用便利的写法

$$X = nV = \frac{1}{2}(l-1)(l+2)V, \tag{168}$$

相应地有 (由方程 (162))

$$2T - l(l+1)V = -2(L + X - B_{23}). \tag{169}$$

用最后这个关系, 可将方程 (161) 重写为

$$(L + X - B_{23})_{,r} = -\left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right)(L + X - B_{23}) - \frac{1}{r} L. \tag{170}$$

类似地, 结合方程 (162)、(163) 和 (165) 可得

$$N_{,r} - L_{,r} = \left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right) N + \left(\frac{1}{r} + \nu_{,r}\right) L + \frac{2}{r} B_{23}. \tag{171}$$

最后注意, 用代换 (158) 来分离方程 (157) 中的变量, 可导致方程

$$V_{,r,r}+2\left(\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)V_{,r}+\frac{e^{-2\nu}}{r^2}(N+L)+\sigma^2e^{-4\nu}V=0. \tag{172}$$

可见这个方程与对史瓦西扰动所得到的 (第 4 章方程 (51)) 是一样的. [233]

方程 (164)、(170) 和 (171) 是对三个函数 L、N 和 $V(=X/n)$ 的三个线性一阶方程. 适当地组合这些方程, 可将它们表示为 L、N、V、B_{23} 和 B_{03} 的线性组合, 即有 (见第 4 章方程 (52)—(55))

$$N_{,r}=aN+bL+c(X-B_{23}), \tag{173}$$

$$L_{,r}=\left(a-\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)N+\left(b-\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)L+c(X-B_{23})-\frac{2}{r}B_{23}, \tag{174}$$

$$X_{,r}=-\left(a-\frac{1}{r}+\nu_{,r}\right)N-\left(b+\frac{1}{r}-2\nu_{,r}\right)L-\left(c+\frac{1}{r}-\nu_{,r}\right)(X-B_{23})+B_{03}, \tag{175}$$

其中

$$a=\frac{n+1}{r}e^{-2\nu}, \tag{176}$$

$$\begin{aligned}b&=-\frac{1}{r}-\frac{n}{r}e^{-2\nu}+\nu_{,r}+r\nu_{,r}^2+\sigma^2re^{-4\nu}-2\frac{Q_*^2}{r^3}e^{-2\nu}\\&=-\frac{1}{r}-\frac{n}{r}e^{-2\nu}+\frac{M}{r^2}e^{-2\nu}+\frac{M^2}{r^3}e^{-4\nu}+\sigma^2re^{-4\nu}-\frac{Q_*^2}{r^3}(1+2e^{2\nu})e^{-4\nu},\end{aligned} \tag{177}$$

$$\begin{aligned}c&=-\frac{1}{r}+\frac{e^{-2\nu}}{r}+r\nu_{,r}^2+\sigma^2re^{-4\nu}-2\frac{Q_*^2}{r^3}e^{-2\nu}\\&=-\frac{1}{r}+\frac{e^{-2\nu}}{r}+\frac{M^2}{r^3}e^{-4\nu}+\sigma^2re^{-4\nu}-\frac{Q_*^2}{r^3}(1+e^{2\nu})e^{-4\nu}.\end{aligned} \tag{178}$$

方程 (175) 还有另外的形式:

$$\begin{aligned}X_{,r}=&-\frac{1}{r^2}\left(nr+3M-2\frac{Q_*^2}{r}\right)e^{-2\nu}N\\&+\left[-\frac{1}{r}e^{-2\nu}+\frac{M}{r^2}e^{-2\nu}-\frac{1}{r^3}(M^2-Q_*^2)e^{-4\nu}-\sigma^2re^{-4\nu}\right](L+X-B_{23})\\&+aL+B_{03}.\end{aligned} \tag{179}$$

引人注目的是, 由方程 (165)—(167) 和 (173)—(175) 表示的五阶方程组能够简化为两个独立的二阶方程. 可以直接验证, 如下定义的函数 $H_2^{(+)}$ 和 $H_1^{(+)}$ (见第 4 章方程 (59)),

$$H_2^{(+)}=\frac{r}{n}X-\frac{r^2}{\varpi}(L+X-B_{23}), \tag{180}$$

[234] 和

$$H_1^{(+)} = -\frac{1}{Q_*\mu}\left[r^2 B_{23} + 2Q_*^2\frac{r}{\overline{\omega}}(L + X - B_{23})\right]$$
$$= -\frac{1}{Q_*\mu}\left[r^2 B_{23} + 2\frac{Q_*^2}{r}\left(\frac{r}{n}X - H_2^{(+)}\right)\right], \tag{181}$$

其中

$$\overline{\omega} = nr + 3M - 2Q_*^2/r \tag{182}$$

满足方程对 (见方程 (144) 和 (145)),

$$\Lambda^2 H_2^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5}[UH_2^{(+)} + W(-3MH_2^{(+)} + 2Q_*\mu H_1^{(+)})], \tag{183}$$

$$\Lambda^2 H_1^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5}[UH_1^{(+)} + W(+2Q_*\mu H_2^{(+)} + 3MH_1^{(+)})], \tag{184}$$

其中

和

$$\left.\begin{aligned} U &= (2nr + 3M)W + (\overline{\omega} - nr - M) - \frac{2n\Delta}{\overline{\omega}} \\ W &= \frac{\Delta}{r\overline{\omega}^2}(2nr + 3M) + \frac{1}{\overline{\omega}}(nr + M). \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

曾用于对轴向扰动所得方程 (144) 和 (145) 解耦的代换 (147) 和 (148) 也可用于对方程 (183) 和 (184) 解耦. 也就是说, 函数

$$Z_1^{(+)} = +q_1 H_1^{(+)} + (-q_1 q_2)^{1/2} H_2^{(+)} \tag{186}$$

和

$$Z_2^{(+)} = -(-q_1 q_2)^{1/2} H_1^{(+)} + q_1 H_2^{(+)}, \tag{187}$$

其中对 q_1 和 q_2 的定义不变, 满足一维波动方程

$$\Lambda^2 Z_i^{(+)} = V_i^{(+)} Z_i^{(+)} \quad (i = 1, 2), \tag{188}$$

其中

$$V_1^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5}\left[U + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)W\right] \text{ 和 } V_2^{(+)} = \frac{\Delta}{r^5}\left[U - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)W\right]. \tag{189}$$

这些解耦方程首先由蒙克里弗和泽里立导出 (虽然是用了很不同的方法).

还可验证, 在极限 $Q_* = 0$, 支配 $Z_2^{(+)}$ 的方程简化为泽里立方程 (第 4 章方程 (62) 和 (63)).

(i) 解的完成

由第 4 章 (§25) 关于支配史瓦西黑洞极向扰动的方程简化为泽里立方程 [235]
的讨论可知, 现在的五阶方程组向方程对 (183) 和 (184) 的可简化性必定是方程组允许一个特定解的结果. 当线性微分方程组简化为多于一个二阶方程已实现时, 通过将第 4 章§25 所描述的算法扩展到更一般的情形, 山托珀罗斯发现现在的方程组 (165)、(167)和 (173)—(175) 允许特定解 (见第 4 章方程 (126))

$$\left.\begin{aligned} &N^{(0)}=r^{-2}e^{\nu}\left[M-\frac{r}{\Delta}(M^2-Q_*^2+\sigma^2r^4)-2\frac{Q_*^2}{r}\right],\\ &L^{(0)}=r^{-3}e^{\nu}(3Mr-4Q_*^2),\quad X^{(0)}=ne^{\nu}r^{-1},\\ &B_{23}^{(0)}=-2Q_*^2r^{-3}e^{\nu},\quad \text{和 } B_{03}^{(0)}=2Q_*^2r^{-6}e^{-\nu}(2Q_*^2+r^2-3Mr). \end{aligned}\right\} \tag{190}$$

借助于特定解 (190) 对其余径向函数解的完成是相对地直截了当的. 山托珀罗斯得到

$$N=N^{(0)}\Phi+2n\frac{e^{2\nu}}{\overline{\omega}}H_2^{(+)}-\frac{e^{2\nu}}{\overline{\omega}}(nrH_2^{(+)}+Q_*\mu H_1^{(+)}),$$

$$+\frac{1}{r\overline{\omega}^2}[e^{2\nu}(\overline{\omega}-2nr-3M)-(n+1)\overline{\omega}](nrH_2^{(+)}+Q_*\mu H_1^{(+)}), \tag{191}$$

$$L=L^{(0)}\Phi-\frac{1}{r^2}(nrH_2^{(+)}+Q_*\mu H_1^{(+)}), \tag{192}$$

$$X=X^{(0)}\Phi+\frac{n}{r}H_2^{(+)}, \tag{193}$$

$$B_{23}=B_{23}^{(0)}\Phi-\frac{Q_*\mu}{r^2}H_1^{(+)}, \tag{194}$$

$$B_{03}=B_{03}^{(0)}\Phi-\frac{Q_*\mu}{r^2}H_{1,r}^{(+)}-2\frac{Q_*^2}{r^4\overline{\omega}}(nrH_2^{(+)}+Q_*\mu H_1^{(+)}), \tag{195}$$

其中

$$\Phi=\int(nrH_2^{(+)}+Q_*\mu H_1^{(+)})\frac{e^{-\nu}}{\overline{\omega}r}\mathrm{d}r. \tag{196}$$

注意, 在极限 $Q_*=0$, 由方程 (196) 定义的 Φ 与第 4 章方程 (70) 定义的 Φ 相差一个 $e^{-\nu}$ 因子.

43. $V_i^{(+)}$ 与 $V_i^{(-)}$ 之间和 $Z_i^{(+)}$ 与 $Z_i^{(-)}$ 之间的关系

如在史瓦西扰动的情形那样, 与极向和轴向扰动相关的势 $V_i^{(\pm)}(i=1、2)$ [236]
是以保证由支配 $Z_i^{(\pm)}$ 的方程决定的反射和透射系数相等性的方式相联系. 可以验证 (如将在后面§45 中推导的), 实际上势由下式给出,

$$V_i^{(\pm)}=\pm\beta_i\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}r_*}+\beta_i^2f_i^2+\kappa f_i, \tag{197}$$

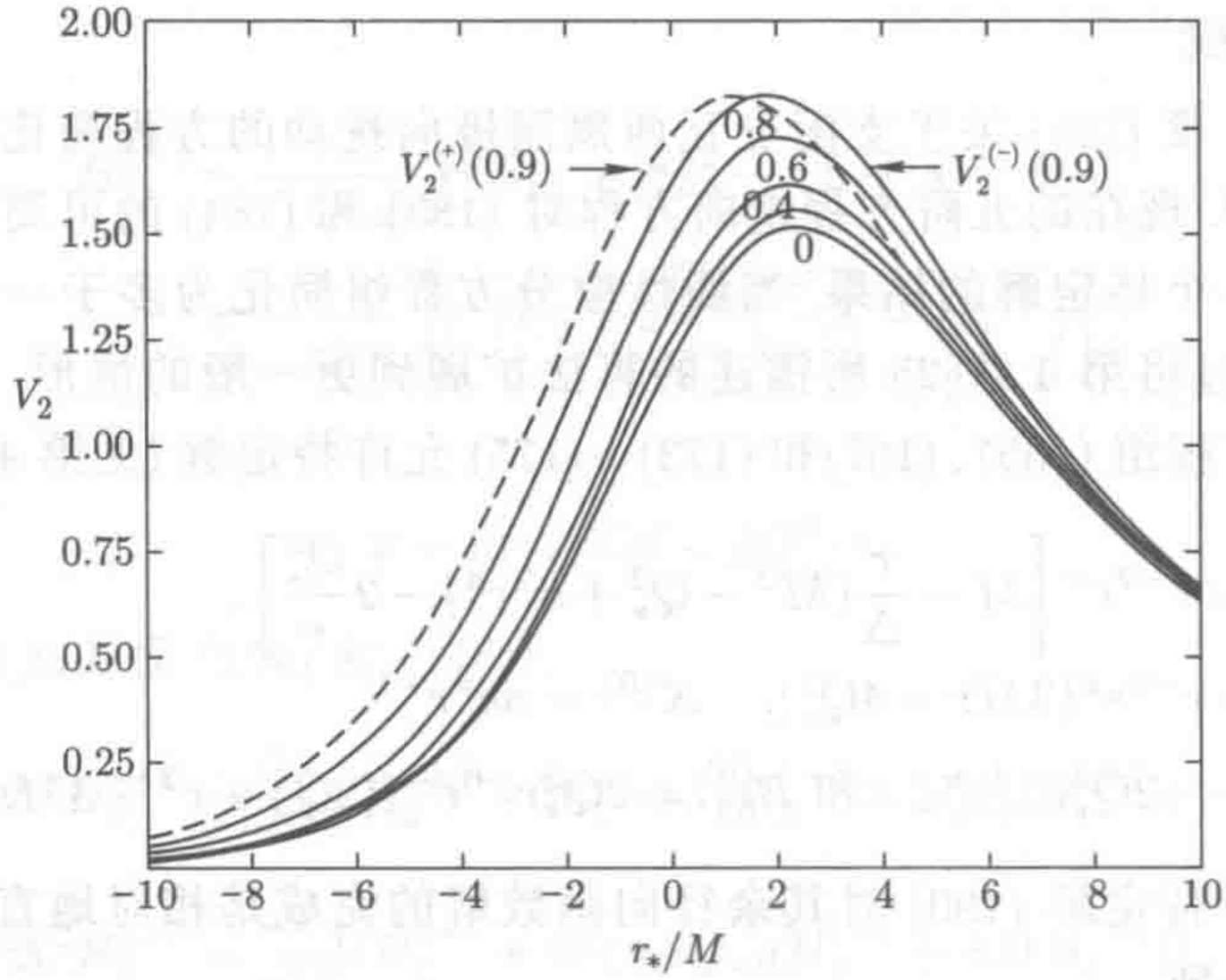


图 19 雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞周围的势垒 $V_2^{(\pm)}$: 实线是对 $Q_* = 0$、0.4、0.6、0.8 和 0.9 的轴向扰动, 都由对应的 Q_* 标记. 对极向扰动的势垒与对轴向扰动的相差很小: 见对 $Q_* = 0.9$ 的分别属于轴向和极向扰动的相邻实线和虚线.

其中

$$\kappa = \mu^2(\mu^2+2), \quad \beta_i = q_j, \quad \text{和 } f_i = \frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r + q_j)} \quad (i,j=1,2; i\neq j), \tag{198}$$

而 q_j 的意义不变. 所以, 各自方程的 $Z_i^{(+)}$ 和 $Z_i^{(-)}$ 解是以如下方式相联系 (见第 4 章方程 (152) 和 (153)),

[237]

$$[\mu^2(\mu^2+2) \pm 2\mathrm{i}\sigma q_j] Z_i^{(\pm)} = \left[\mu^2(\mu^2+2) + \frac{2q_j^2\Delta}{r^3(\mu^2 r + q_j)}\right] Z_i^{(\mp)} \pm 2q_j \frac{\mathrm{d}Z_i^{(\mp)}}{\mathrm{d}r_*} \quad (i,j=1,2; i\neq j). \tag{199}$$

正是这个关系的存在保证了由支配 $Z_i^{(+)}$ 和 $Z_i^{(-)}$ 的波动方程决定的反射和透射系数的相等性. 在 §47 中将考虑这些方程的解对同时入射到雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞上的引力波和电磁波的发射和透射问题的应用. 现在且由图 19 和图 20 来显示对一些 Q_* 值的势 $V_i^{(\pm)}$.

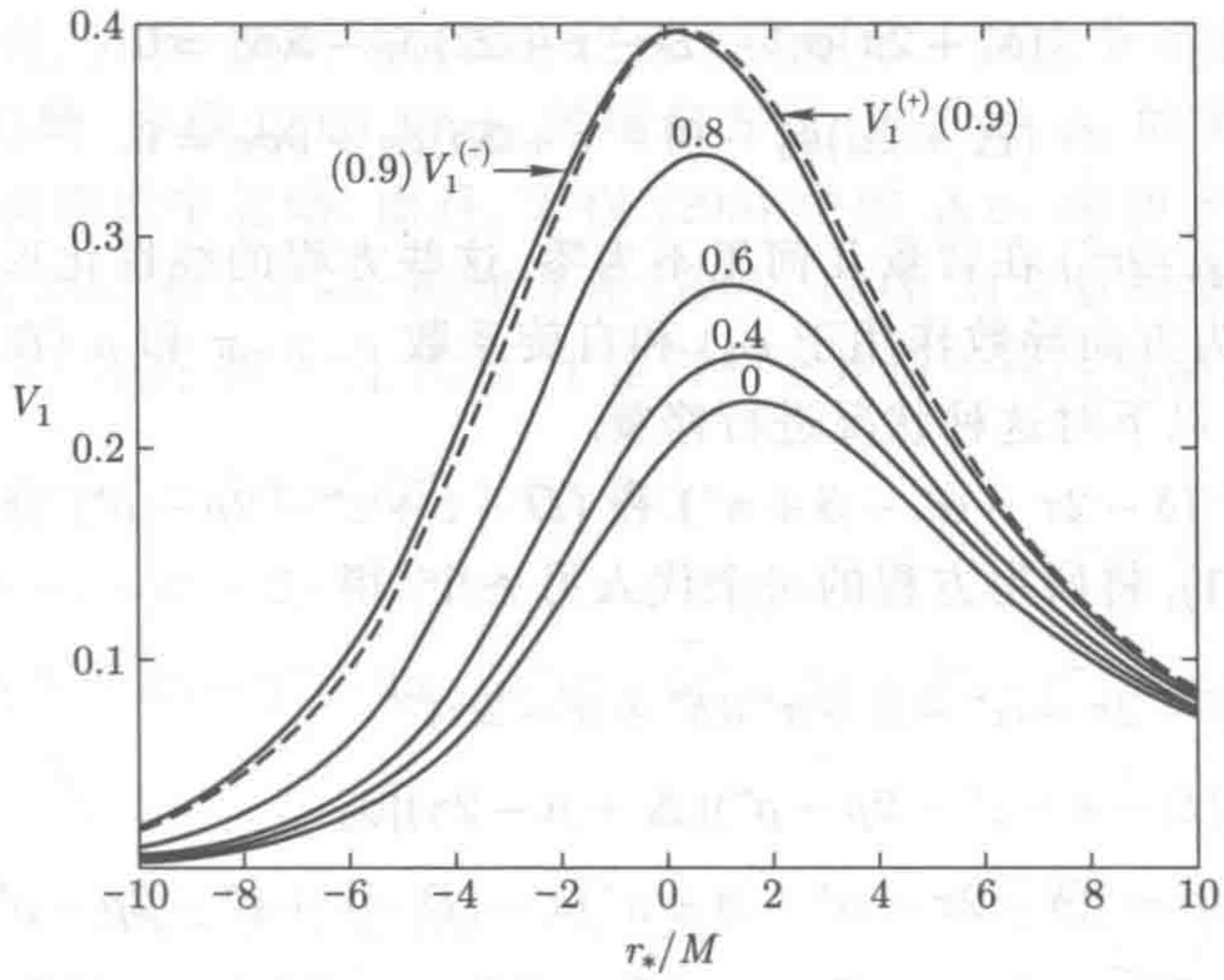


图 20　雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞周围的势垒 $V_1^{(\pm)}$: 实线是对 $Q_* = 0$、0.4、0.6、0.8 和 0.9 的轴向扰动, 都由对应的 Q_* 标记. 对极向扰动的势垒与对轴向扰动的在图中尺度不能区分: 见对 $Q_* = 0.9$ 的分属于轴向和极向扰动的相邻实线和虚线.

44. 通过纽曼 – 彭罗斯形式处理的扰动 [238]

在史瓦西扰动中通过纽曼 – 彭罗斯形式的外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_4 的解之所以可能, 只是因为四个比安基恒等式和两个里奇恒等式 (列于第 4 章方程 (232) 和 (233)) 已经线性化, 即对在背景几何里为零的量是齐次的 (由于其 D 型特征). 这个事实意味着这些方程能够无需关于基矢扰动的知识来考虑, 即是一个完全不同量级的问题 (如将在第 9 章看到的). 虽然这种有利的状况对雷斯纳 – 诺兹特朗几何的比安基和里奇恒等式 (再次由于其 D 特征) 而言仍然保持, 但却并不存在于麦克斯韦方程 (见下面方程 (200)—(203)), 后者包含麦克斯韦标量 ϕ_1 的项, 在背景中并不为零. 但是在与比安基和里奇恒等式同样意义上已经线性化的方程是能够导出的. 且从推导这些方程开始.

(a) 已经线性化的麦克斯韦方程

纽曼 – 彭罗斯形式中支配麦克斯韦标量 ϕ_0、ϕ_1 和 ϕ_2 的方程是 (第 1 章方程 (330)—(333))

$$(D - 2\rho)\phi_1 - (\delta^* + \pi - 2\alpha)\phi_0 + \kappa\phi_2 = 0, \tag{200}$$

$$(\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - 2\gamma)\phi_0 + \sigma\phi_2 = 0, \tag{201}$$

$$(\delta^* + 2\pi)\phi_1 - (D - \rho + 2\varepsilon)\phi_2 - \lambda\phi_0 = 0, \tag{202}$$

$$(\Delta + 2\mu)\phi_1 - (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - \nu\phi_0 = 0. \tag{203}$$

由于 $\phi_1(= Q_*/2r^2)$ 在背景几何里不为零, 这些方程的线性化形式将包含基矢的扰动 (作为方向导数作用于 ϕ_1) 和自旋系数 ρ、τ、π 和 μ (在背景中也不为零) 的扰动. 以下对这种状况进行修复.

将算符 $(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)$ 和 $(D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)$ 分别作用于方程 (200) 和 (201), 将所得方程的一个代入另一个, 得

$$\begin{aligned}
&[(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) \\
&-(D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma)]\phi_0 \\
&\quad = [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)\kappa - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)\sigma]\phi_2 \\
&\qquad +\kappa\delta\phi_2 - \sigma D\phi_2 + (\delta D - D\delta)\phi_1 - (2\delta\rho)\phi_1 + (2D\tau)\phi_1 \\
&\qquad -(\alpha^* + \beta - \pi^*)D\phi_1 + 2\rho(\alpha^* + \beta - \pi^*)\phi_1 \\
&\qquad -(-\varepsilon + \varepsilon^* - \rho^*)\delta\phi_1 + 2\tau(-\varepsilon + \varepsilon^* - \rho^*)\phi_1.
\end{aligned} \tag{204}$$

[239] 在此方程的右边, 将作用于 ϕ_1 的交换算符 $(\delta D - D\delta)$ 代之以第 1 章方程 (304) 给的值, 并由里奇恒等式 (第 1 章方程 (310), (c) 和 (k), 分别地) 代换 $D\tau$ 和 $\delta\rho$. 经过大量的简化工作后得到

$$\begin{aligned}
&[(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)(\delta^* + \pi - 2\alpha) \\
&\quad -(D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)(\Delta + \mu - 2\gamma)]\phi_0 \\
&= [(\delta - 2\tau - \alpha^* - \beta + \pi^*)\kappa - (D - \varepsilon + \varepsilon^* - 2\rho - \rho^*)\sigma]\phi_2 + \kappa\delta\phi_2 - \sigma D\phi_2 \\
&\quad +2\phi_1[(\Delta - 3\gamma - \gamma^* - \mu + \mu^*)\kappa - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - \pi)\sigma] \\
&\quad +4\phi_1\Psi_1 + \kappa\Delta\phi_1 - \sigma\delta^*\phi_1.
\end{aligned} \tag{205}$$

类似地, 将算符 $-(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)$ 和 $+(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)$ 作用于方程 (202) 和 (203), 相加, 继以简化, 得到方程

$$\begin{aligned}
&[(\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)(\delta - \tau + 2\beta) \\
&\quad -(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)(D - \rho + 2\varepsilon)]\phi_2 \\
&= [(\Delta + \mu^* - \gamma^* + \gamma + 2\mu)\lambda - (\delta^* - \tau^* + \alpha + \beta^* + 2\pi)\nu]\phi_0 \\
&\quad +\lambda\Delta\phi_0 - \nu\delta^*\phi_0 \\
&\quad +2\phi_1[-(D + 3\varepsilon + \varepsilon^* - \rho + \rho^*)\nu + (\delta + \pi^* + \tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda] \\
&\quad +4\phi_1\Psi_3 - \nu D\phi_1 + \lambda\delta\phi_1.
\end{aligned} \tag{206}$$

可以看到, 方程 (205) 和 (206) 已经 "线性化", 在这个术语所一直使用的意义上. 的确, 方程 (205) 中 ϕ_2 的项和方程 (206) 中 ϕ_0 的项是二阶小量, 可在线性扰动理论中忽略. 而且, 方程 (205) 中的 $\Delta\phi_1$ 项和 $\delta^*\phi_1$ 项以及方程 (206) 中的 $D\phi_1$ 和 $\delta\phi_1$ 项, 能如方程 (200)—(203) 对背景所要求的, 分别由 $-2\mu\phi_1$、$-2\pi\phi_1$、$2\rho\phi_1$ 和 $2\tau\phi_1$ 代换. 于是得到下列适于线性扰动理论的方程:

$$\begin{aligned}&[(\delta-2\tau-\alpha^*-\beta+\pi^*)(\delta^*+\pi-2\alpha)\\&\quad-(D-\varepsilon+\varepsilon^*-2\rho-\rho^*)(\Delta+\mu-2\gamma)]\phi_0\\&=2\phi_1[(\Delta-3\gamma-\gamma^*-2\mu+\mu^*)\kappa-(\delta^*-3\alpha+\beta^*-\tau^*-2\pi)\sigma+2\Psi_1]\end{aligned}\tag{207}$$

和

$$\begin{aligned}&[(\delta^*-\tau^*+\alpha+\beta^*+2\pi)(\delta-\tau+2\beta)\\&\quad-(\Delta+\mu^*-\gamma^*+\gamma+2\mu)(D-\rho+2\varepsilon)]\phi_2\\&=2\phi_1[(\delta+\pi^*+2\tau-\alpha^*+3\beta)\lambda-(D+3\varepsilon+\varepsilon^*-2\rho+\rho^*)\nu+2\Psi_3].\end{aligned}\tag{208}$$

(*b*) **"影子" 规范** [240]

方程 (207) 和 (208), 当与从比安基和里奇恒等式导出的其它方程联立时, 考虑起来显然并非易事. 将能明显地对方程予以可观简化的一种规范是

$$\phi_0=\phi_2=0.\tag{209}$$

因为在这种规范里, 方程 (207) 和 (208) 简单地变为联系自旋系数 κ、σ、λ、ν 与外尔标量 Ψ_1、Ψ_3 的方程, 即有

$$(\Delta-3\gamma-\gamma^*-2\mu+\mu^*)\kappa-(\delta^*-3\alpha+\beta^*-\tau^*-2\pi)\sigma+2\Psi_1=0\tag{210}$$

和

$$(\delta+\pi^*+2\tau-\alpha^*+3\beta)\lambda-(D+3\varepsilon+\varepsilon^*-2\rho+\rho^*)\nu+2\Psi_3=0.\tag{211}$$

值得注意的事实是, 方程 (210) 和 (211) 即使对极限 $\phi_1=0$ 也成立; 对 $\phi_1=0$, 它们可被视为描述 "影子规范". 事实上它正是第 4 章§29 (*b*) 中的影子规范 (见下面的方程 (217) 和 (218)).

从第 1 章 (§8 (*g*)) 关于四次旋转对各标量和自旋系数影响的讨论可知, 能够选择 ϕ_0 和 ϕ_2 为零的规范. 例如, 一个 Ⅱ 类无限小转动, 将按下列方式以 b 的一阶来改变外尔和麦克斯韦标量 (见第 1 章方程 (345) 和 (346)),

$$\begin{aligned}&\Psi_0\to\Psi_0+4b\Psi_1,\quad \Psi_1\to\Psi_1+3b\Psi_2,\quad \Psi_2\to\Psi_2+2b\Psi_3,\quad \Psi_3\to\Psi_3+b\Psi_4,\\&\Psi_4\to\Psi_4;\quad \phi_0\to\phi_0+2b\phi_1,\quad \phi_1\to\phi_1+b\phi_2,\quad \text{和 } \phi_2\to\phi_2.\end{aligned}\tag{212}$$

由于 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3、Ψ_4、ϕ_0 和 ϕ_2 在未扰动的雷斯纳 – 诺兹特朗时空为零, 显然 Ψ_0、Ψ_2、Ψ_3、Ψ_4、ϕ_1 和 ϕ_2 在一阶上不受无限小转动影响. 但是 Ψ_1 和 ϕ_0 不是如此: 它们在 b 的一阶被影响, 因为 Ψ_2 和 ϕ_1 在背景中不为零. 但应附加说明, 尽管不能选择 Ψ_1 和 ϕ_1 同时为零的规范, 但对无限小转动, 组合

$$2\Psi_1\phi_1 - 3\phi_0\Psi_2 \text{ 在一阶不变.} \tag{213}$$

以类似的方式, ϕ_2 或 Ψ_3 为零的规范可供选择.

回到方程 (210) 和 (211), 对非零自旋系数代入方程 (112) 给的值, 得

$$\frac{\Delta}{2r^2}\left(\eth_2^\dagger - \frac{5}{r}\right)\kappa + \frac{1}{r\sqrt{2}}\mathscr{L}_2\sigma = 2\Psi_1 \tag{214}$$

[241] 和

$$\frac{1}{r\sqrt{2}}\mathscr{L}_2^\dagger\lambda - \left(\eth_0 - \frac{1}{r}\right)\nu = -2\Psi_3, \tag{215}$$

其中算符 $\eth_n$、$\eth_n^\dagger$、$\mathscr{L}_n$ 和 $\mathscr{L}_n^\dagger$ 有着与第 4 章方程 (228) 中同样的意义, 差异只在 Δ 的定义. 借助于变量 (见第 4 章方程 (236))

$$\left.\begin{aligned} &\kappa = (r^2\sqrt{2})k, \quad \sigma = sr, \quad \lambda = 2l/r, \quad \nu = n\sqrt{2}/r^2, \\ &\Psi_1 = \Phi_1/r\sqrt{2}, \quad \text{和 } \Psi_3 = \Phi_3\sqrt{2}/r^3, \end{aligned}\right\} \tag{216}$$

方程 (214) 和 (215) 变为更简单的形式,

$$\Delta\left(\eth_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)k + \mathscr{L}_2 s = 2\frac{\Phi_1}{r} \tag{217}$$

和

$$\left(\eth_0 - \frac{3}{r}\right)n - \mathscr{L}_2^\dagger l = 2\frac{\Phi_3}{r}. \tag{218}$$

可见方程 (217) 和 (218) 精确地就是第 4 章中引进来修复该章中方程 (237)—(242) 的 "被截对称性" 的方程 (方程 (273) 和 (276)), 它们事实上表示影子规范.

(c) 基本方程

将要考虑的里奇和比安基恒等式与对史瓦西扰动所考虑过的相同, 即第 1 章的方程 (310), (b)、(j) 和方程 (321), (a)、(e)、(d)、(h). 里奇恒等式在现在的意义上也相同: 它们在都有三个方程的两组中都是第三个 (第 4 章方程 (232) 和 (233)). 但是在表示比安基恒等式的第一对方程中必须包括第 1 章方程 (339) 所列的 "里奇项". 在所选规范 $\phi_0 = \phi_2 = 0$ 中, 这些附加项分别是

$$-4\kappa\phi_1\phi_1^*, (\text{a}); \quad 4\sigma\phi_1\phi_1^*, (\text{e}); \quad -4\lambda\phi_1\phi_1^*, (\text{d}); \quad \text{和 } 4\nu\phi_1\phi_1^* (\text{h}). \tag{219}$$

通过包括这些项, 第 4 章方程 (232) 和 (233) 的第一对方程的右边变为:

$$\left.\begin{aligned} +\kappa(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= -\kappa(3Mr - 2Q_*^2)r^{-4}, \\ +\sigma(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= -\sigma(3Mr - 4Q_*^2)r^{-4}, \\ -\lambda(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= +\lambda(3Mr - 4Q_*^2)r^{-4}, \\ -\nu(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= +\nu(3Mr - 2Q_*^2)r^{-4}, \end{aligned}\right\} \tag{220}$$

其中已对 Ψ_2 和 ϕ_1 代入方程 (114) 和 (115) 所给的值, 即 [242]

$$\Psi_2 = -(Mr - Q_*^2)r^{-4} \text{ 和 } \phi_1 = Q_*/2r^2. \tag{221}$$

有了右边项 (220), 现在的基本方程组 (包括方程 (217) 和 (218)) 是 (见第 4 章方程 (237)—(242))

$$\mathscr{L}_2\Phi_0 - \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right)\Phi_1 = -2k\left(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}\right), \tag{222}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{r}\right)\Phi_0 + \mathscr{L}_{-1}^\dagger\Phi_1 = +2s\left(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}\right), \tag{223}$$

$$\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right)s - \mathscr{L}_{-1}^\dagger k = \frac{\Phi_0}{r}, \tag{224}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^+ - \frac{3}{r}\right)k + \mathscr{L}_2 s = 2\frac{\Phi_1}{r} \tag{225}$$

和

$$\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{r}\right)\Phi_4 - \mathscr{L}_{-1}\Phi_3 = +2l\left(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}\right), \tag{226}$$

$$\mathscr{L}_2^\dagger\Phi_4 + \Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r}\right)\Phi_3 = 2n\left(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}\right) \tag{227}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{r}\right)l + \mathscr{L}_{-1}n = \frac{\Phi_4}{r}, \tag{228}$$

$$\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{r}\right)n - \mathscr{L}_2^\dagger l = \frac{2}{r}\Phi_3, \tag{229}$$

其中

$$\Phi_0 = \Psi_0 \text{ 和 } \Phi_4 = \Psi_4 r^4, \tag{230}$$

而其余变量已在方程 (216) 中定义.

(*d*) 变量的分离和方程的解耦及简化

第一组方程 (222)—(225) 的变量可由下列代换分离 (见第 4 章方程 (247)、(278) 和 (283)),

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_0(r,\theta) = R_{+2}(r)S_{+2}(\theta); \quad \Phi_1(r,\theta) = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta); \\ &k(r,\theta) = k(r)S_{+1}(\theta); \qquad s(r,\theta) = s(r)S_{+2}(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{231}$$

其中角向函数 $S_{+2}(\theta)$ 和 $S_{+1}(\theta)$ 是下列方程的归一化固有解,

[243]

$$\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\mathscr{L}_2 S_{+2} = -\mu^2 S_{+2} \text{ 和 } \mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^{\dagger} S_{+1} = -\mu^2 S_{+1}, \tag{232}$$

其中

$$\mu^2 = 2n = (l-1)(l+2). \tag{233}$$

函数 $S_{+2}(\theta)$ 和 $S_{+1}(\theta)$ 还以下列方式相联系 (见第 4 章方程 (281) 和 (282))

$$\mathscr{L}_2 S_{+2} = \mu S_{+1} \text{ 和 } \mathscr{L}_{-1}^{\dagger} S_{+1} = -\mu S_{+2}. \tag{234}$$

代换 (231) 由于角向函数之间的关系 (234) 而导致方程 (222)—(225) 的变量分离, 并给出下列关于已定义的径向函数的耦合方程组:

$$\mu R_{+2} - \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right) R_{+1} = -2k\left(3M - 2\frac{Q_*^2}{r}\right), \tag{235}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^{\dagger} - \frac{3}{r}\right) R_{+2} - \mu R_{+1} = +2s\left(3M - 4\frac{Q_*^2}{r}\right), \tag{236}$$

$$\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right) s + \mu k = \frac{R_{+2}}{r}, \tag{237}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^{\dagger} - \frac{3}{r}\right) k + \mu s = 2\frac{R_{+1}}{r}. \tag{238}$$

方程组 (235)—(238) 可被解耦而给出一对独立的二阶方程, 途径是考虑函数

$$\left.\begin{aligned} F_{+1} &= R_{+2} + q_1 k/\mu; \quad G_{+1} = R_{+1} + q_1 s/\mu, \\ F_{+2} &= R_{+2} + q_2 k/\mu; \quad G_{+2} = R_{+1} + q_2 s/\mu, \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

其中 q_1 和 q_2 的意义与§42 中 (方程 (149)) 相同. 将方程 (238) 乘以 q_1/μ 再加上方程 (236), 得

$$\begin{aligned} \Delta\left(\mathscr{D}_2^{\dagger} - \frac{3}{r}\right) F_{+1} &= \mu R_{+1} + 2s\left(3M + \frac{q_1 q_2}{\mu^2 r}\right) - q_1 s + 2\frac{q_1}{\mu r} R_{+1} \\ &= \mu R_{+1} + q_2 s + \frac{2q_1}{\mu r}\left(R_{+1} + \frac{q_2}{\mu} s\right) \\ &= \mu\left(1 + \frac{2q_1}{\mu^2 r}\right)\left(R_{+1} + \frac{q_2}{\mu} s\right) = \mu\left(1 + \frac{2q_1}{\mu^2 r}\right) G_{+2}, \end{aligned} \tag{240}$$

在简化过程中已经用了 q_1 与 q_2 的关系 (152). 将方程 (240) 中的指标 1 和 2 互换所得的关系显然也成立. 这两个关系都能用单个方程表示:

[244]

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^{\dagger} - \frac{3}{r}\right) F_{+i} = \mu\left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) G_{+j} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j). \tag{241}$$

i 和 j 取值 1 和 2 但 $i \neq j$ 的惯例将在本章剩余部分严格遵守, 而不是每次都重述.

将方程 (235) 和 (237) 以类似方式结合, 得方程

$$\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{r}\right) G_{+i} = \mu \left(1 + \frac{q_i}{\mu^2 r}\right) F_{+j}. \tag{242}$$

现在令

$$F_{+i} = \frac{r^3}{\Delta^2} Y_{+i} \text{ 和 } G_{+i} = \frac{1}{r^3} X_{+i}, \tag{243}$$

则方程 (241) 和 (242) 变为

$$\mathscr{D}_0^\dagger Y_{+i} = \mu \frac{\Delta}{r^6} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) X_{+j} \tag{244}$$

和

$$\mathscr{D}_0 X_{+j} = \mu \frac{r^6}{\Delta^2} \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right) Y_{+i}. \tag{245}$$

由于

$$\frac{\Delta}{r^2} \mathscr{D}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma = \Lambda_+ \text{ 和 } \frac{\Delta}{r^2} \mathscr{D}_0^\dagger = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma = \Lambda_-, \tag{246}$$

可将方程 (244) 和 (245) 重写为

$$\Lambda_- Y_{+i} = \mu \frac{\Delta^2}{r^8} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) X_{+j} \tag{247}$$

和

$$\Lambda_+ X_{+j} = \mu \frac{r^4}{\Delta} \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right) Y_{+i}. \tag{248}$$

最后, 消去 X 而留下 Y, 就得到基本方程对,

$$\Lambda^2 Y_{+i} + P_i \Lambda_- Y_{+i} - Q_i Y_{+i} = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{249}$$

其中

$$P_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} \lg\left(\frac{r^8}{D_i}\right), \quad D_i = \Delta^2 \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right), \tag{250}$$

和

$$Q_i = \mu^2 \frac{\Delta}{r^4} \left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right) \left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right). \tag{251}$$

通过类似的简化顺序, 可由第二组方程 (226)—(229) 得到共轭方程对, [245]

$$\Lambda^2 Y_{-i} + P_i \Lambda_+ Y_{-i} - Q_i Y_{-i} = 0, \tag{252}$$

其中需通过代换

$$\left.\begin{aligned}\Phi_4(r,\theta)=R_{-2}(r)S_{-2}(\theta),\quad \Phi_3(r,\theta)=R_{-1}(r)S_{-1}(\theta),\\ n(r,\theta)=n(r)S_{-1}(\theta),\quad l(r,\theta)=l(r)S_{-2}(\theta),\end{aligned}\right\}\tag{253}$$

$$F_{-i}=r^3Y_{-i},\quad \text{和 } G_{-i}=\frac{\Delta}{r^3}X_{-i}.\tag{254}$$

角向函数 $S_{-1}(\theta)$ 和 $S_{-2}(\theta)$ 现在由 “伴随方程” 定义,

$$\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_2^\dagger S_{-2}=-\mu^2S_{-2}\text{ 和 }\mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}S_{-1}=-\mu^2S_{-1};\tag{255}$$

它们以下列方式相关联,

$$\mathscr{L}_2^\dagger S_{-2}=-\mu S_{-1}\text{ 和 }\mathscr{L}_{-1}S_{-1}=+\mu S_{-2}.\tag{256}$$

于是, 支配着描述雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞扰动的外尔和麦克斯韦标量的纽曼 – 彭罗斯方程, 就已经被简化为与第 4 章中对史瓦西黑洞而言同样的标准方程.

45. 变换理论

上一节中纽曼 – 彭罗斯方程简化成的方程对 (249) 和 (252) 与§30 中考虑的方程 (第 4 章方程 (284) 及其复数共轭) 的差别只是并不重要的一点: P_i 定义中的 Δ^2 被代之以 D_i. 于是, §30 中建立的变换理论现在只需很小的修改就能应用.

现在的问题是将方程 (249) 和 (252) 变换成一对一维波动方程,

$$\Lambda^2Z_i=V_iZ_i,\tag{257}$$

方程是对某个恰当定义的势.

首先仅限于考虑方程 (249) 的变换. 为方便, 将 Y_{+i} 改写为 Y_i. 适于方程 (252) 的分析也将沿完全一样的路线进行, 仅有的差别是 σ 的符号必须改变, 特别是所有的 Λ_- 必须换成 Λ_+, 反之亦然.

[246] 如在§30 中那样, 由下列变换开始 (见第 4 章方程 (287)),

$$Y_i=\text{ð}_iV_iZ_i+(W_i+2\mathrm{i}\sigma\,\text{ð}_i)\Lambda_+Z_i,\tag{258}$$

得到方程 (见第 4 章方程 (290)—(292))

$$\Lambda_-Y_i=-\frac{D_i}{r^8}\beta_iZ_i+R_i\Lambda_+Z_i,\tag{259}$$

$$-\frac{D_i}{r^8}\beta_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(\text{ð}_iV_i)+W_iV_i,\tag{260}$$

和

$$R_i = f_i V_i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}(W_i + 2\mathrm{i}\sigma f_i). \tag{261}$$

方程 (249) 和 (257) 的一致性于是导致方程 (见第 4 章方程 (298)—(300))

$$-\frac{D_i}{r^8}\frac{\mathrm{d}\beta_i}{\mathrm{d}r_*} = (Q_i f_i - R_i)V_i, \tag{262}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{r^8}{D_i}R_i\right) = \frac{r^8}{D_i}[Q_i W_i + 2\mathrm{i}\sigma(Q_i f_i - R_i)] + \beta_i, \tag{263}$$

和积分

$$\frac{r^8}{D_i}R_i f_i V_i + \beta_i(W_i + 2\mathrm{i}\sigma f_i) = K_i = \text{常量}. \tag{264}$$

(a) 双重变换的可接受性

现在来验证, 如史瓦西扰动的情形一样, 对

$$\beta_i = \text{常量 和 } f_i = 1, \tag{265}$$

方程 (260)—(264) 是一致的, 并允许对 β_i 的有着相反符号的两个值的双重变换.

如§30 (第 4 章方程 (307) 和 (311)), 双重变换存在的条件是,

$$F_i = r^8\frac{Q_i}{D_i} = \frac{r^3}{\Delta}(\mu^2 r + q_j) \quad (i,j = 1,2; i \neq j) \tag{266}$$

满足微分方程

$$\frac{1}{F_i}\left(\frac{\mathrm{d}F_i}{\mathrm{d}r_*}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2 F_i}{\mathrm{d}r_*^2} + \frac{D_i}{r^8}F_i^2 = \frac{\beta_i^2}{F_i} + \kappa_i, \tag{267}$$

这是对某些适当选择的常量,

$$\beta_i^2 \text{ 和 } \kappa_i = K_i - 2\mathrm{i}\sigma\beta_i. \tag{268}$$

可以看到, 方程 (266) 定义的 F_i 的确满足方程 (267), 只要有 [247]

$$\beta_i^2 = q_j^2 \quad (i,j = 1,2; i \neq j) \text{ 和 } \kappa_i = \kappa = \mu^2(\mu^2 + 2). \tag{269}$$

与属于 $\pm q_j$ 的双重变换相关联的势 $V_i^{(\pm)}$ 是 (第 4 章方程 (317))

$$V_i^{(\pm)} = \pm q_j\frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}r_*} + q_j^2 f_i^2 + \kappa f_i \quad (i,j = 1,2; i \neq j), \tag{270}$$

其中

$$f_i = \frac{1}{F_i} = \frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r + q_j)} \quad (i,j = 1,2; i \neq j). \tag{271}$$

与方程 (197) 的比较表明, 势 (270) 实际上与在决定轴向和极向扰动的波动方程中出现的是同样的.

还可注意 (见第 4 章方程 (312)),

$$W_i^{(\pm)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg f_i \mp q_j f_i, \tag{272}$$

或更明白地,

$$W_i^{(-)} = W^{(-)} = \frac{2}{r^2}\left(r - 3M + 2\frac{Q_*^2}{r}\right) \tag{273}$$

和

$$W_i^{(+)} = W^{(-)} - 2q_j\frac{\Delta}{r^3(\mu^2 r + q_j)} \quad (i,j = 1,2; i \neq j). \tag{274}$$

相关变换的明晰形式是 (见第 4 章方程 (318) 和 (319))

$$Y_i = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (W_i^{(\pm)} + 2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ Z_i^{(\pm)}, \tag{275}$$

$$\Lambda_- Y_i = \mp\frac{D_i}{r^8} q_j Z_i^{(\pm)} + Q_i \Lambda_+ Z_i^{(\pm)}, \tag{276}$$

$$K_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = \frac{r^8}{D_i} Q_i Y_i - \frac{r^8}{D_i}(W_i^{(\pm)} + 2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_- Y_i, \tag{277}$$

$$K_i^{(\pm)}\Lambda_+ Z_i^{(\pm)} = \pm q_j Y_i + \frac{r^8}{D_i} V_i^{(\pm)}\Lambda_- Y_i, \tag{278}$$

其中已采用

$$Q_i = \mu^2\frac{\Delta}{r^4}\left(1 + \frac{2q_i}{\mu^2 r}\right)\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right) = \mu^2\frac{D_i}{r^4\Delta}\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right), \tag{279}$$

和

$$K_i^{(\pm)} = \mu^2(\mu^2 + 2) \pm 2\mathrm{i}\sigma q_j. \tag{280}$$

[248] 用方程 (247), 从方程 (276) 和 (277) 得出进一步的关系

$$\mu X_j = \mp q_j Z_i^{(\pm)} + \mu^2\frac{r^4}{\Delta}\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right)\Lambda_+ Z_i^{(\pm)}, \tag{281}$$

$$K_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = \mu^2\frac{r^4}{\Delta}\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r}\right) Y_i - (W_i^{(\pm)} + 2\mathrm{i}\sigma)\mu X_j. \tag{282}$$

如前已述, 上述方程中已将 Y_{+i} 和 X_{+j} 写为 Y_i 和 X_j. 为得到对应的将 Y_{-i} 和 X_{-j} 与 $Z_i^{(\pm)}$ 联系的方程, 只需改变 σ 的符号, 并将所有 Λ_- 换成 Λ_+, 反之亦然.

(*b*) $Y_{\pm i}$ 和 $X_{\pm j}$ 的渐近行为

势 $V_i^{(\pm)}$ 的窄范围特征保证了解 $Z_i^{(\pm)}$ 对 $r_* \to +\infty$ 和 $r_* \to -\infty$ 有渐近行为 $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sigma r_*}$ (见下面 §47). 可以用这个知识 (如在 §32 类似地做过的), 借助于方程 (275)—(278)、(281) 和 (282) 来导出 $Y_{\pm i}$ 和 $X_{\pm j}$ 的相关渐近行为. 在进行这些推导时, 仅需知道

$$V_i^{(\pm)}, Q_i, f_i, \text{ 和 } D_i \text{ 对 } r_* \to \pm\infty \text{ 都趋于零,} \tag{283}$$

和

$$\left.\begin{aligned} W_i^{(\pm)} &\to 0 \text{ 对 } r_* \to +\infty \\ W_i^{(\pm)} &\to -\frac{2}{r_+^3}(Mr_+ - Q_*^2) \text{ 对 } r_* \to -\infty. \end{aligned}\right\} \tag{284}$$

注意, $W_i^{(\pm)}$ 在视界的极限值独立于 i 和区分上标 (±).

为避免 "±" 既作为上标 (在 $Z_i^{(\pm)}$ 中区分轴向和极向)、又作为下标 (区分 Y_{+i} 与满足复数共轭方程的 Y_{-i}) 的易混淆性, 现在明晰地写出适于 $Z_i^{(+)}$ 的关系并去掉区分上标, 即:

$$\begin{aligned}
&r_* \to +\infty: \\
&Z_i \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \to -4\sigma^2 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}; \quad X_{+j} \to 2\mathrm{i}\sigma\mu r^2 \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&\qquad\qquad Y_{-i} \to -\frac{K_i^*}{4\sigma^2}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^4}; \quad X_{-j} \to \frac{K_i^*}{2\mathrm{i}\sigma\mu}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&Z_i \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \to -\frac{K_i}{4\sigma^2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^4}; \quad X_{+j} \to -\frac{K_i}{2\mathrm{i}\sigma\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&\qquad\qquad Y_{-i} \to -4\sigma^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}; \quad X_{-j} \to -2\mathrm{i}\sigma\mu r^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*},
\end{aligned} \tag{285}$$

和 [249]

$$\begin{aligned}
&r_* \to -\infty: \\
&Z_i \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \to 4\mathrm{i}\sigma[\mathrm{i}\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&\qquad\qquad Y_{-i} \to \frac{\Delta^2}{r_+^8}\frac{K_i^*(1+2q_i/\mu^2 r_+)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{4[\mathrm{i}\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3][\mathrm{i}\sigma + 2(r_+ - M)/r_+^2]}, \\
&\qquad\qquad X_{+j} \to 2\mathrm{i}\sigma\mu\frac{r_+^4}{\Delta}\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r_+}\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&\qquad\qquad X_{-j} \to \frac{K_i^*\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{2\mu[\mathrm{i}\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]}; \\
&Z_i \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}, \quad Y_{+i} \to \frac{\Delta^2}{r_+^8}\frac{K_i(1+2q_i/\mu^2 r_+)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{4[\mathrm{i}\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3][\mathrm{i}\sigma - 2(r_+ - M)/r_+^2]}, \\
&\qquad\qquad Y_{-i} \to 4\mathrm{i}\sigma[\mathrm{i}\sigma + (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}, \\
&\qquad\qquad X_{+j} \to -\frac{K_i\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{2\mu[\mathrm{i}\sigma - (Mr_+ - Q_*^2)/r_+^3]}, \\
&\qquad\qquad X_{-j} \to -2\mathrm{i}\sigma\mu\frac{r_+^4}{\Delta}\left(1 + \frac{q_j}{\mu^2 r_+}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}.
\end{aligned} \tag{286}$$

为得到适于 $Z_i^{(-)}$ 的关系, 按照方程 (280), 只需将 K_i 换为 K_i^*, 反之亦然.

46. 借助于度规扰动对外尔和麦克斯韦标量的直接计算

如已讲过的, 雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞扰动研究的主要目的之一, 是确定入射的电磁波和引力波如何被黑洞散射和吸收. 为将以上各节中建立的扰动理论应用于此目的, 有必要首先将理论中定义的函数与两类波的振幅联系起来. 函数 $Z_i^{(\pm)}$ 必须以某种直接的方式来确定入射、反射和透射波的振幅, 因为对极限 $Q_* \to 0$, 支配 $Z_2^{(\pm)}$ 的方程简化为泽里立和雷杰 – 惠勒方程. 一般而言, 可以预期所需的振幅是函数 $Z_1^{(+)}$ 和 $Z_2^{(+)}$ 的, 类似地也是函数 $Z_1^{(-)}$ 和 $Z_2^{(-)}$ 的, 某些线性组合. 问题是: 什么线性组合? 通过§44 中纽曼 – 彭罗斯方程的解来回答这个问题也并非直截了当 (如同第 4 章§32 中那样), 因为方程已在一个特别规范中被求解; 而且作为结果, 已用来表示解的函数 $R_{\pm 2}$ 和 $R_{\pm 1}$ 没有简单的物理解释. 由于这些缘故, 只好从头开始由黎曼和麦克斯韦张量的知识来计算外尔标量 Ψ_0、Ψ_4 和麦克斯韦标量 ϕ_0、ϕ_2.

[250] 由于史瓦西度规和雷斯纳 – 诺兹特朗度规的差别只在于视界函数 Δ (两者中都 $= r^2 e^{2\nu}$) 的定义, §31 中的许多分析仍能保留. 特别地, 第 4 章方程 (334)、(339) 和 (350) 所给的 Ψ_0 的表示现在仍然成立.

从第 4 章方程 (339) 开始, 考虑 Ψ_0 的轴向部分 $\mathrm{Im}\,\Psi_0$:

$$-\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \left\{ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Q}{\Delta}\right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\sigma\frac{r^2}{\Delta^2}Q + \frac{1}{2}\frac{Q_{,r}}{\Delta} + \frac{r^2}{2\mathrm{i}\sigma\Delta}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right) + 2\frac{\Delta}{r^4}\left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right]\right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}. \quad (287)$$

将这个方程右边方括号里的第一项代之以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{r^4}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\mu^2\Delta}{r^4}Q - \sigma^2 Q + 2\frac{Q_*\mu}{r^4}\Delta H_1^{(-)}\right). \quad (288)$$

(这就是方程 (140), 其中 B 已按照方程 (143) 中的定义被 $H_1^{(-)}$ 代换.) 代换并对各项重整后可得

$$-\mathrm{i}\sigma\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \left\{ \mathrm{i}\sigma\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{Q}{\Delta}\right) + \frac{Q}{r\Delta} + \frac{1}{2\Delta}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r}\right] - \sigma^2\frac{r^2}{\Delta^2}Q + \frac{\mu^2}{2r^2\Delta}Q + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \nu_{,r}\right)\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}r} + \frac{Q_*\mu}{r^2\Delta}H_1^{(-)}\right\} \frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}, \quad (289)$$

其中

$$\frac{1}{r} - \nu_{,r} = \frac{1}{r\Delta}(r^2 - 3Mr + 2Q_*^2). \quad (290)$$

现在如在方程 (143) 中那样令

$$Q = rH_2^{(-)}, \tag{291}$$

经进一步简化, 方程 (289) 右边花括号中的项变成

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\sigma\left[\frac{r}{\Delta}\frac{\mathrm{d}H_2^{(-)}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{\Delta^2}(r^2-3Mr+2Q_*^2)H_2^{(-)}\right]-\sigma^2\frac{r^3}{\Delta^2}H_2^{(-)}\\
&+\frac{\mu^2}{2r\Delta}H_2^{(-)}+\frac{Q_*\mu}{r^2\Delta}H_1^{(-)}+\frac{1}{r^3\Delta}(r^2-3Mr+2Q_*^2)\left(r\frac{\mathrm{d}H_2^{(-)}}{\mathrm{d}r}+H_2^{(-)}\right).
\end{aligned} \tag{292}$$

将对 r 的导数代之以对 r_* 的导数, 并记取 (见方程 (273))

[251]

$$W^{(-)} = \frac{2}{r^3}(r^2-3Mr+2Q_*^2), \tag{293}$$

可将 (292) 中的项重组为

$$\begin{aligned}
&\frac{r^3}{2\Delta^2}(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\frac{\mathrm{d}H_2^{(-)}}{\mathrm{d}r_*}+\frac{Q_*\mu}{r^2\Delta}H_1^{(-)}\\
&+\left[\left(\frac{\mu^2}{2r\Delta}+\frac{r^2-3Mr+2Q_*^2}{r^3\Delta}\right)+\mathrm{i}\sigma\frac{r^3}{2\Delta^2}(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\right]H_2^{(-)}.
\end{aligned} \tag{294}$$

回到方程 (289), 现可写为

$$\begin{aligned}
-\mathrm{i}\sigma\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \frac{r^3}{2\Delta^2}\Bigg\{&(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+H_2^{(-)}+\frac{\Delta}{r^5}\left[(\mu^2+2)r-6M+4\frac{Q_*^2}{r}\right]H_2^{(-)}\\
&+\frac{\Delta}{r^5}(2Q_*\mu)H_1^{(-)}\Bigg\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta};
\end{aligned} \tag{295}$$

或, 由 $H_2^{(-)}$ 所满足的方程 (144),

$$-\mathrm{i}\sigma\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \frac{r^3}{2\Delta^2}\{(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ + \Lambda^2\}H_2^{(-)}\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}. \tag{296}$$

现在通过求解方程 (147) 和 (148) 来将 $H_2^{(-)}$ 表示为 $Z_1^{(-)}$ 和 $Z_2^{(+)}$ 的线性组合. 将这些方程重写为

$$\left.\begin{aligned}
Z_1^{(-)} &= [q_1(q_1-q_2)]^{1/2}(H_1^{(-)}\cos\psi + H_2^{(-)}\sin\psi),\\
\text{和}\qquad Z_2^{(-)} &= [q_1(q_1-q_2)]^{1/2}(H_2^{(-)}\cos\psi - H_1^{(-)}\sin\psi),
\end{aligned}\right\} \tag{297}$$

其中

$$\sin 2\psi = \frac{2(-q_1q_2)^{1/2}}{q_1-q_2} = \frac{2Q_*\mu}{\sqrt{9M^2+4Q_*^2\mu^2}} \tag{298}$$

有解

$$\left.\begin{aligned}[q_1(q_1-q_2)]^{1/2}H_1^{(-)} &= Z_1^{(-)}\cos\psi - Z_2^{(-)}\sin\psi,\\ [q_1(q_1-q_2)]^{1/2}H_2^{(-)} &= Z_1^{(-)}\sin\psi + Z_2^{(-)}\cos\psi.\end{aligned}\right\} \tag{299}$$

和

将最后这个方程中的 $H_2^{(-)}$ 代入方程 (296), 得

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\sigma[q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \frac{r^3}{2\Delta^2}\{&(W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ + \Lambda^2\}\\ &\times(Z_2^{(-)}\cos\psi + Z_1^{(-)}\sin\psi)\times\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta},\end{aligned} \tag{300}$$

[252] 或, 由 $Z_i^{(-)}$ 满足的方程, 有 (见第 4 章方程 (345))

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\sigma[q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,\Psi_0 = \frac{r^3}{2\Delta^2}\{&[V_2^{(-)}Z_2^{(-)} + (W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ Z_2^{(-)}]\cos\psi\\ &+[V_1^{(-)}Z_1^{(-)} + (W^{(-)}+2\mathrm{i}\sigma)\Lambda_+ Z_1^{(-)}]\sin\psi\}\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{301}$$

用变换理论的方程 (275), 最后得到重要关系

$$\begin{aligned}-2\mathrm{i}\sigma[q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,\Psi_0 &= \frac{r^3}{\Delta^2}(Y_{+2}\cos\psi + Y_{+1}\sin\psi)\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}\\ &= (F_{+2}\cos\psi + F_{+1}\sin\psi)\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{302}$$

类似地, 可得到

$$\begin{aligned}-2\mathrm{i}\sigma[q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,r^4\Psi_4 &= \frac{1}{4}r^3(Y_{-2}\cos\psi + Y_{-1}\sin\psi)\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}\\ &= \frac{1}{4}(F_{-2}\cos\psi + F_{-1}\sin\psi)\frac{C_{l+2}^{-3/2}}{\sin^2\theta}.\end{aligned} \tag{303}$$

对 $\mathrm{Re}\,\Psi_0$ 可做类似计算, 但并无必要, 因为不难看出将得到同样的关系, 不同的只是方程 (302) 的左边的 $2\mathrm{i}\sigma$ 因子将消失 (见第 4 章方程 (345) 和 (353)).

(*a*) **麦克斯韦标量 ϕ_0 和 ϕ_2**

由定义,

$$\phi_0 = F_{(p)(q)}l^{(p)}m^{(q)}, \tag{304}$$

其中已将指标放入括号, 以强调它们是表示方程 (117) 和 (118) 借以写出的四次标架的分量. 四次标架的基零矢量由第 4 章方程 (333) 给出; 用这些矢量来收缩, 得到

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\nu}[\mathrm{i}(F_{01}+F_{21}) + (F_{03}+F_{23})]. \tag{305}$$

可见 ϕ_0 再次分解为轴向和极向部分.

先考虑轴向部分,

$$\mathrm{Im}\,\phi_0 = \frac{e^{-\nu}}{\sqrt{2}}(F_{01}+F_{21}) = \frac{e^{-2\nu}}{(r\sin\theta)\sqrt{2}}(re^{\nu}F_{01}\sin\theta + re^{\nu}F_{21}\sin\theta), \tag{306}$$

用方程 (120) 将含 F_{21} 的项写为 [253]

$$\mathrm{i}\sigma re^{\nu}F_{21}\sin\theta = e^{2\nu}(re^{\nu}F_{01}\sin\theta)_{,r} = (re^{\nu}F_{01}\sin\theta)_{,r_*}. \tag{307}$$

于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,\phi_0 &= \frac{r}{(\mathrm{i}\sigma\Delta\sin\theta)\sqrt{2}}\Lambda_+(re^{\nu}F_{01}\sin\theta)\\ &= \frac{r}{(\mathrm{i}\sigma\Delta\sin\theta)\sqrt{2}}\Lambda_+(re^{\nu}B),\end{aligned} \tag{308}$$

其中, 按照方程 (131), 已将 $F_{01}\sin\theta$ 写为 B. 由方程 (138) 和 (143) 来代换 $re^{\nu}B$, 得

$$-(2\sqrt{2})\mathrm{i}\sigma\mu\mathrm{Im}\,\phi_0 = \frac{r}{\Delta}\Lambda_+H_1^{(-)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}C_{l+2}^{-3/2}}{\mathrm{d}\theta}, \tag{309}$$

其中, 由葛根包尔函数满足的递推关系,

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}C_{l+2}^{-3/2}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{3}{\mu^2+2}P_{l,\theta}. \tag{310}$$

现在由方程 (299) 来代换 $H_1^{(-)}$, 有

$$\frac{2}{3}\mathrm{i}\sigma\mu(\mu^2+2)[2q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,\phi_0 = \frac{r}{\Delta}\Lambda_+(Z_1^{(-)}\cos\psi - Z_2^{(-)}\sin\psi)P_{l,\theta}, \tag{311}$$

注意其中由方程 (281),

$$\frac{r}{\Delta}\Lambda_+Z_i^{(-)} = \frac{1}{r^2(\mu^2 r+q_j)}(\mu X_j - q_jZ_i^{(-)}). \tag{312}$$

类似地, 考虑表示式

$$\phi_2 = F_{(p)(q)}\overline{m}^{(p)}n^{(q)} = \frac{e^{\nu}}{2\sqrt{2}}[\mathrm{i}(F_{01}+F_{21})+(F_{03}+F_{23})], \tag{313}$$

得

$$\frac{2}{3}\mathrm{i}\sigma\mu(\mu^2+2)[2q_1(q_1-q_2)]^{1/2}\mathrm{Im}\,\phi_2 = \frac{1}{2r}\Lambda_-(Z_1^{(-)}\cos\psi - Z_2^{(-)}\sin\psi)P_{l,\theta}. \tag{314}$$

其中

$$\frac{1}{r}\Lambda_-Z_i^{(-)} = \frac{\Delta}{r^4(\mu^2 r+q_j)}(\mu X_{-j}-q_jZ_i^{(-)}). \tag{315}$$

下面考虑 ϕ_0 的极向部分 $\mathrm{Re}\,\phi_0$, 由方程 (159) 和 (165) 代换 F_{03} 和 F_{23}, 得

$$\mathrm{Re}\,\phi_0 = -\frac{r}{2\Delta Q_*\sqrt{2}}\Lambda_+(r^2 B_{23})P_{l,\theta}. \tag{316}$$

[254] 另一方面, 由方程 (181)、(190) 和 (193),

$$\begin{aligned} r^2 B_{23} &= -Q_*\mu H_1^{(+)} - \frac{2Q_*^2}{r}\left(\frac{r}{n}X - H_2^{(+)}\right) \\ &= -Q_*\mu H_1^{(+)} - \frac{2Q_*^2}{r}e^{\nu}\Phi. \end{aligned} \tag{317}$$

所以,

$$(2\sqrt{2})\mathrm{Re}\,\phi_0 = \mu\frac{r}{\Delta}\Lambda_+\left(H_1^{(+)} + \frac{2Q_*}{\mu r}\Phi\right)P_{l,\theta}. \tag{318}$$

可以再次将上面方程中的 $H_1^{(+)}$ 项代之以

$$\frac{r}{\Delta}\Lambda_+ H_1^{(+)} = \frac{r}{\Delta}[q_1(q_1-q_2)]^{-1/2}\Lambda_+(Z_1^{(+)}\cos\psi - Z_2^{(+)}\sin\psi), \tag{319}$$

其中由方程 (281),

$$\frac{r}{\Delta}\Lambda_+ Z_i^{(+)} = \frac{1}{r^2(\mu^2 r + q_j)}(\mu X_j + q_j Z_i^{(+)}). \tag{320}$$

47. 反射和透射问题; 散射矩阵

现在转到黑洞扰动理论提出的基本问题: 黑洞与各种类型入射波相互作用的方式.

首先记取, 轴向和极向扰动各自已被简化为一对具有正实数势的一维波动方程, 势对 $r_* \to +\infty$ 有反平方行为, 对 $r_* \to -\infty$ 有指数衰减行为. 由于势的这种窄范围特征, 对每个方程的问题都是一个势垒穿透问题, 即必须寻找方程的符合下列标准边界条件的解,

$$\left.\begin{aligned} Z_i^{(\pm)} &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} + R_i^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \ (r_* \to +\infty), \\ &\to \qquad\qquad T_i^{(\pm)}(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \ (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{321}$$

如在§43 中所示, (197) 形式的势 $V_i^{(\pm)}$ 已能如在方程 (199) 中那样, 将解 $Z_i^{(+)}$ 表示为 $Z_i^{(-)}$ 及其导数的线性组合, 反之亦然; 由方程 (199), 从§27 的分析可得 (见第 4 章方程 (168) 和 (169))

$$R_i^{(+)}(\sigma) = R_i^{(-)}(\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i} \text{ 和 } T_i^{(+)}(\sigma) = T_i^{(-)}(\sigma), \tag{322}$$

其中

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_i} = \frac{\mu^2(\mu^2+2) - 2\mathrm{i}\sigma q_j}{\mu^2(\mu^2+2) + 2\mathrm{i}\sigma q_j} \quad (i,j = 1,2; i \neq j). \tag{323}$$

鉴于属于两类扰动的反射波和透射波振幅之间的这些非常简单的关系, 在本节剩余部分将略去区分上标, 而下面的分析将被理解为等价地适用于 $Z_i^{(+)}$ 和 $Z_i^{(-)}$. [255]

现在, 对于两个势 $V_i(i=1、2$, 略去了区分上标!) 的每一个的散射, 可定义散射矩阵 (第 4 章, §28)

$$\boldsymbol{S}_i = \begin{vmatrix} T_i(\sigma) & \widetilde{R}_i(\sigma) \\ R_i(\sigma) & T_i(\sigma) \end{vmatrix} \quad (i=1,2), \tag{324}$$

其元素 (表示反射和透射振幅) 满足幺正化要求 (第 4 章方程 (181)—(186))

$$R_i(\sigma)T_i^*(\sigma) + T_i(\sigma)\widetilde{R}_i^*(\sigma) = 0, \quad |R_i(\sigma)| = |\widetilde{R}_i(\sigma)|, \tag{325}$$

和

$$|R_i(\sigma)|^2 + |T_i(\sigma)|^2 = 1. \tag{326}$$

(这里用 $\widetilde{R}(\sigma)$ 来代替 §28 中的 $R_2(\sigma)$.) 由关系式 (325) 和 (326),

$$\boldsymbol{S}_i(\sigma)\widetilde{\boldsymbol{S}}_i(\sigma) = 1, \tag{327}$$

其中 $\widetilde{\boldsymbol{S}}_i$ 表示 $\boldsymbol{S}_i$ 的共轭转置矩阵.

散射矩阵有一个关于 "时间可逆性" 的重要性质: 如果 $\overleftarrow{Z}_i^{(r)}$ 和 $\overrightarrow{Z}_i^{(l)}$ 是从右边和左边入射到势垒上的波的振幅 (见图 21), 那么向左和向右反射的波的振幅 $\overleftarrow{Z}_i^{(l)}$ 和 $\overrightarrow{Z}_i^{(r)}$ 由下式给出,

$$\boldsymbol{S}_i \begin{vmatrix} \overleftarrow{Z}_i^{(r)} \\ \overrightarrow{Z}_i^{(l)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{Z}_i^{(l)} \\ \overrightarrow{Z}_i^{(r)} \end{vmatrix}, \tag{328}$$

以至于由幺正性,

$$\begin{vmatrix} \overleftarrow{Z}_i^{(r)} \\ \overrightarrow{Z}_i^{(l)} \end{vmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{S}}_i \begin{vmatrix} \overleftarrow{Z}_i^{(l)} \\ \overrightarrow{Z}_i^{(r)} \end{vmatrix}. \tag{329}$$

现在的问题是将散射矩阵 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 联系到一个散射矩阵 (四阶), 它将类似地描述同时入射到雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的电磁和引力波的反射和透射. 为了这个目标, 必须将两类波的振幅与函数 Z_1 和 Z_2 相联系. 因此考虑由满足下列边界条件的 Z_i 的解导出的 Y_{+i} 和 Y_{-i} 的解所满足的边界条件,

$$\left.\begin{aligned} Z_i \to Z_i^{(\infty)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} + Z_i^{(\infty)}R_i(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad & (r_* \to +\infty) \\ \to \qquad\qquad Z_i^{(\infty)}T_i(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad & (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{330}$$

将由解 Z_i 导出的 $Y_{\pm i}$ 的解的渐近行为写成如下形式, [256]

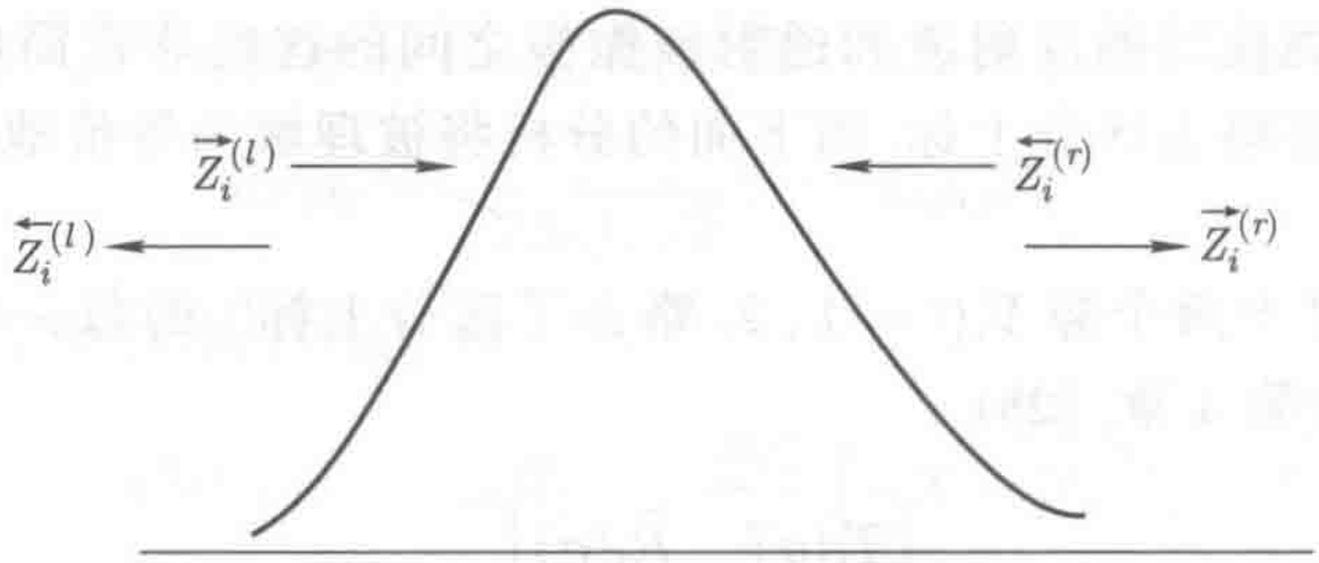


图 21 从 $\pm\infty$ 向内和向外的波被势垒反射为向外和向内的波. 散射矩阵 (方程 (328)) 将入射到势垒的波的振幅与被势垒反射的波的振幅相联系.

$$\left.\begin{aligned} \frac{r^3}{\Delta^2}Y_{+i} &\to Y_{+i}^{(\mathrm{in})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r}+Y_{+i}^{(\mathrm{ref})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}}{r^5} \quad (r_*\to+\infty),\\ &\to Y_{+i}^{(\mathrm{tr})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{\Delta^2} \quad (r_*\to-\infty), \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

$$\left.\begin{aligned} r^3Y_{-i} &\to Y_{-i}^{(\mathrm{in})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}}{r}+Y_{-i}^{(\mathrm{ref})}r^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_*\to+\infty),\\ &\to Y_{-i}^{(\mathrm{tr})}\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_*\to-\infty), \end{aligned}\right\} \tag{332}$$

由方程 (285) 和 (286) 所列渐近行为的对应性得出结论

$$\left.\begin{aligned} Y_{+i}^{(\mathrm{in})} &= -4\sigma^2 Z_i^{(\infty)}; \qquad Y_{-i}^{(\mathrm{in})} = -\frac{K_i^*}{4\sigma^2}Z_i^{(\infty)},\\ Y_{+i}^{(\mathrm{ref})} &= -\frac{K_i}{4\sigma^2}Z_i^{(\infty)}R_i(\sigma); \qquad Y_{-i}^{(\mathrm{ref})} = -4\sigma^2 Z_i^{(\infty)}R_i(\sigma); \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_{+i}^{(\mathrm{tr})} &= 4i\sigma[i\sigma-(Mr_+-Q_*^2)/r_+^3](r_+)^3 Z_i^{(\infty)}T_i(\sigma),\\ Y_{-i}^{(\mathrm{tr})} &= \frac{1}{(r_+)^5}\left(1+\frac{2q_i}{\mu^2 r_+}\right)\frac{K_i^* Z_i^{(\infty)}T_i(\sigma)}{4[i\sigma+(Mr_+-Q_*^2)/r_+^3][i\sigma+2(r_+-M)/r_+^2]}. \end{aligned}\right\} \tag{334}$$

首先考虑入射和反射引力波的能流, 记得它们是分别由表示向内和向外波的 Ψ_0 和 Ψ_4 的渐近行为的主导 r^{-1} 项决定. 由 Ψ_0 和 Ψ_4 的表示式 (302) 和 (303) 可推出 (见第 4 章方程 (368) 和 (369))

[257]

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{gr.}}^{(\mathrm{in})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{(S_{+2})^2}{2\pi}\frac{1}{2\sigma^2}|Y_{+2}^{(\mathrm{in})}\cos\psi + Y_{+1}^{(\mathrm{in})}\sin\psi|^2 \tag{335}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{gr.}}^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{(S_{-2})^2}{2\pi}\frac{1}{2\sigma^2}|Y_{-2}^{(\mathrm{ref})}\cos\psi + Y_{-1}^{(\mathrm{ref})}\sin\psi|^2. \tag{336}$$

由方程 (333) 给出的 $Y_{+i}^{(\mathrm{in})}$ 和 $Y_{-i}^{(\mathrm{ref})}$ 表示可得出, 入射引力波的反射系数是

$$\mathbb{R}_{\mathrm{gr.}} = \frac{|Z_{+2}^{(\infty)}R_2(\sigma)\cos\psi + Z_{+1}^{(\infty)}R_1(\sigma)\sin\psi|^2}{|Z_{+2}^{(\infty)}\cos\psi + Z_{+1}^{(\infty)}\sin\psi|^2}. \tag{337}$$

由这个表示明显可见, 引力波的振幅 H_2 是 (不计一个比例常量)

$$H_2 = Z_2 \cos\psi + Z_1 \sin\psi, \tag{338}$$

这精确地就是满足耦合方程对 (144)、(145) 和 (183)、(184) 的同一个量 (在这些方程解偶成关于 Z_1 和 Z_2 的方程之前, 见方程 (299)).

(a) 麦克斯韦场的能量 – 动量张量和电磁能量流

借助于标量 ϕ_0、ϕ_1 和 ϕ_2 来明晰地写出的麦克斯韦场的能量 – 动量张量是

$$\begin{aligned} 4\pi T_{ij} = \{&\phi_0\phi_0^* n_i n_j + \phi_2\phi_2^* l_i l_j + 2\phi_1\phi_1^*[l_{(i}n_{j)} + m_{(i}\overline{m}_{j)}] \\ &-4\phi_0^*\phi_1 n_{(i}m_{j)} - 4\phi_1^*\phi_2 l_{(i}m_{j)} + 2\phi_2\phi_0^* m_i m_j\} \\ &+\text{复数共轭项}. \end{aligned} \tag{339}$$

在雷斯纳 – 诺兹特朗背景里, 唯一的非零标量是 $\phi_1(= Q_*/2r^2)$. 假定由 ϕ_0、ϕ_2 和 $\delta\phi_1$ 表示的场的扰动至少以 $1/r$ 的速度趋于零, 可以验证, 对扰动的 T_{ij} 的计算并不要求基矢扰动的知识; 忽略减小得比 r^{-2} 更快的项, 有

$$\begin{aligned} 4\pi T_{ij} = \{&\phi_0\phi_0^* n_i n_j + \phi_2\phi_2^* l_i l_j + 2\delta\phi_1\delta\phi_1^*[l_{(i}n_{j)} + m_{(i}\overline{m}_{j)}] \\ &-4\phi_0^*\delta\phi_1 n_{(i}m_{j)} - 4\delta\phi_1^*\phi_2 l_{(i}m_{j)} + 2\phi_2\phi_0^* m_i m_j\} \\ &+\text{复共轭项} + O(r^{-3}) \quad (r\to\infty). \end{aligned} \tag{340}$$

由方程 (108) 所给的基矢, 从上面方程得出每单位时间每单位立体角的能量流是 [258]

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{ele}}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \lim_{r\to\infty}(r^2 T^r{}_t) = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{4\pi}\left(-\frac{1}{4}|\phi_0|^2 + |\phi_2|^2\right). \tag{341}$$

从方程 (311) 和 (314) 所给的 ϕ_0 和 ϕ_2 的表示可得, 不计同一个比例常量, 对向内波 $Z_i^{(\infty)}\exp(+\mathrm{i}\sigma r_*)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{ele}}^{(\mathrm{in})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi}(P_{l,\theta})^2(16\sigma^4)|Z_1^{(\infty)}\cos\psi - Z_2^{(\infty)}\sin\psi|^2; \tag{342}$$

而对反射波 $Z_i^{(\infty)}R_i(\sigma)\exp(-\mathrm{i}\sigma r_*)$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_{\mathrm{ele}}^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi}(P_{l,\theta})^2(16\sigma^4)|Z_1^{(\infty)}R_1(\sigma)\cos\psi - Z_2^{(\infty)}R_2(\sigma)\sin\psi|^2. \tag{343}$$

相应地, 入射电磁波的反射系数是

$$\mathbb{R}_{\mathrm{ele}} = \frac{|Z_1^{(\infty)}R_1(\sigma)\cos\psi - Z_2^{(\infty)}R_2(\sigma)\sin\psi|^2}{|Z_1^{(\infty)}\cos\psi - Z_2^{(\infty)}\sin\psi|^2}. \tag{344}$$

由这个表示显然有, 电磁波的振幅 H_1 是 (不计一个比例常量)

$$H_1 = Z_1 \cos\psi - Z_2 \sin\psi, \tag{345}$$

这精确地就是满足解耦成关于 Z_1 和 Z_2 的方程之前的耦合方程 (183) 和 (184) 的同一个量.

得出 (344) 和 (345) 结果的另一种方式是, 将问题简化为这样, 就是对 $X_{\pm j}$ 的解的渐近行为起着与对 $Y_{\pm i}$ 的解的行为在处理引力波中所起的同样作用. 但是相关的论证并不那么直接.

(*b*) **散射矩阵**

现在来显示, 黑洞对电磁和引力波的散射和吸收的一般过程, 如何能由一个具有时间可逆性的四阶对称幺正散射矩阵来描述.

如已看到的, 电磁和引力的 (类波) 扰动 (有着某种特定频率) 的振幅 H_1 和 H_2 与函数 Z_1 和 Z_2 的关系是

和
$$\left.\begin{aligned} H_1 &= Z_1 \cos\psi - Z_2 \sin\psi \\ H_2 &= Z_2 \cos\psi + Z_1 \sin\psi, \end{aligned}\right\} \tag{346}$$

[259] 其中应记得, 区分轴向和极向扰动的上标 (±) 已略去. 与 (346) 相逆的关系是

和
$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= H_1 \cos\psi + H_2 \sin\psi \\ Z_2 &= H_2 \cos\psi - H_1 \sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{347}$$

现在假定一个振幅为 $\overleftarrow{H}_1^{(r)}$ 的纯电磁波从右方入射到黑洞上. 于是 $\overleftarrow{H}_2^{(r)} = 0$ 且

$$\overleftarrow{Z}_1^{(r)} = \overleftarrow{H}_1^{(r)} \cos\psi \text{ 和 } \overleftarrow{Z}_2^{(r)} = -\overleftarrow{H}_1^{(r)} \sin\psi. \tag{348}$$

这些入射 Z 场的每一个都将导致下列的反射和透射振幅,

$$\overrightarrow{Z}_i^{(r)} = \overleftarrow{Z}_i^{(r)} R_i(\sigma) \text{ 和 } \overrightarrow{Z}_i^{(l)} = \overleftarrow{Z}_i^{(r)} T_i(\sigma); \tag{349}$$

这些振幅按照方程 (346) 重新组合后, 将给出电磁和引力波两者的反射和透射振幅, 即有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H}_1^{(r)} &= \overleftarrow{H}_1^{(r)}(R_1 \cos^2\psi + R_2 \sin^2\psi), && \text{(a)} \\ \overleftarrow{H}_1^{(l)} &= \overleftarrow{H}_1^{(r)}(T_1 \cos^2\psi + T_2 \sin^2\psi), && \text{(b)} \\ \overrightarrow{H}_2^{(r)} &= \overleftarrow{H}_1^{(r)}(R_1 - R_2) \sin\psi \cos\psi, && \text{(c)} \\ \overleftarrow{H}_2^{(l)} &= \overleftarrow{H}_1^{(r)}(T_1 - T_2) \sin\psi \cos\psi. && \text{(d)} \end{aligned} \tag{350}$$

另一方面, 如果一个振幅为 $\overleftarrow{H}_2^{(r)}$ 的纯引力波从右方入射到黑洞上, 于是 $\overleftarrow{H}_1^{(r)}=0$ 且

$$\overleftarrow{Z}_1^{(r)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}\sin\psi \text{ 和 } \overleftarrow{Z}_2^{(r)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}\cos\psi. \tag{351}$$

这些入射 Z 场在重组后的反射和透射将导致 (以类似方式) 下列电磁和引力波的反射和透射振幅:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{H}_1^{(r)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}(R_1-R_2)\sin\psi\cos\psi, && \text{(a)}\\
&\overleftarrow{H}_1^{(l)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}(T_1-T_2)\sin\psi\cos\psi, && \text{(b)}\\
&\overrightarrow{H}_2^{(r)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}(R_1\sin^2\psi+R_2\cos^2\psi), && \text{(c)}\\
&\overleftarrow{H}_2^{(l)}=\overleftarrow{H}_2^{(r)}(T_1\sin^2\psi+T_2\cos^2\psi). && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{352}$$

方程 (350) (c)、(d) 和 (352) (a)、(b) 的比较表明, 一种类型的入射能量转变为另一种类型的反射和透射能量, 对两种类型是完全对称地进行的, 这很清楚地是时间可逆性的结果.

现在转到图 22 所描绘的情形, 描述变换

$$(\overleftarrow{H}_1^{(r)},\overrightarrow{H}_1^{(l)};\overleftarrow{H}_2^{(r)},\overrightarrow{H}_2^{(l)})\to(\overleftarrow{H}_1^{(l)},\overrightarrow{H}_1^{(r)};\overleftarrow{H}_2^{(l)},\overrightarrow{H}_2^{(r)}) \tag{353}$$

的散射矩阵能借助于方程 (350) 和 (351) 而容易地写出, 即 [260]

$$\boldsymbol{S}\begin{vmatrix}\overleftarrow{H}_1^{(r)}\\ \overrightarrow{H}_1^{(l)}\\ \overleftarrow{H}_2^{(r)}\\ \overrightarrow{H}_2^{(l)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}T_{11}&\widetilde{R}_{11}&T_{21}&\widetilde{R}_{21}\\ R_{11}&T_{11}&R_{21}&T_{21}\\ T_{12}&\widetilde{R}_{12}&T_{22}&\widetilde{R}_{22}\\ R_{12}&T_{12}&R_{22}&T_{22}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\overleftarrow{H}_1^{(r)}\\ \overrightarrow{H}_1^{(l)}\\ \overleftarrow{H}_2^{(r)}\\ \overrightarrow{H}_2^{(l)}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overleftarrow{H}_1^{(l)}\\ \overrightarrow{H}_1^{(r)}\\ \overleftarrow{H}_2^{(l)}\\ \overrightarrow{H}_2^{(r)}\end{vmatrix}, \tag{354}$$

其中

$$\begin{aligned}
&R_{11}=R_1\cos^2\psi+R_2\sin^2\psi;\quad R_{22}=R_1\sin^2\psi+R_2\cos^2\psi,\\
&T_{11}=T_1\cos^2\psi+T_2\sin^2\psi;\quad T_{22}=T_1\sin^2\psi+T_2\cos^2\psi,\\
&R_{12}=R_{21}=(R_1-R_2)\sin\psi\cos\psi,\\
&T_{12}=T_{21}=(T_1-T_2)\sin\psi\cos\psi.
\end{aligned} \tag{355}$$

容易验证, 由于 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 的幺正性, 方程 (354) 定义的散射矩阵 $\boldsymbol{S}$ 本身也是幺正的:

$$\boldsymbol{S}\widetilde{\boldsymbol{S}}=1. \tag{356}$$

特别地, 由能量守恒所要求的等式

和

$$\left.\begin{aligned}
&|T_{11}|^2+|R_{11}|^2+|T_{12}|^2+|R_{21}|^2=1\\
&|T_{11}|^2+|R_{11}|^2=|T_{22}|^2+|R_{22}|^2
\end{aligned}\right\} \tag{357}$$

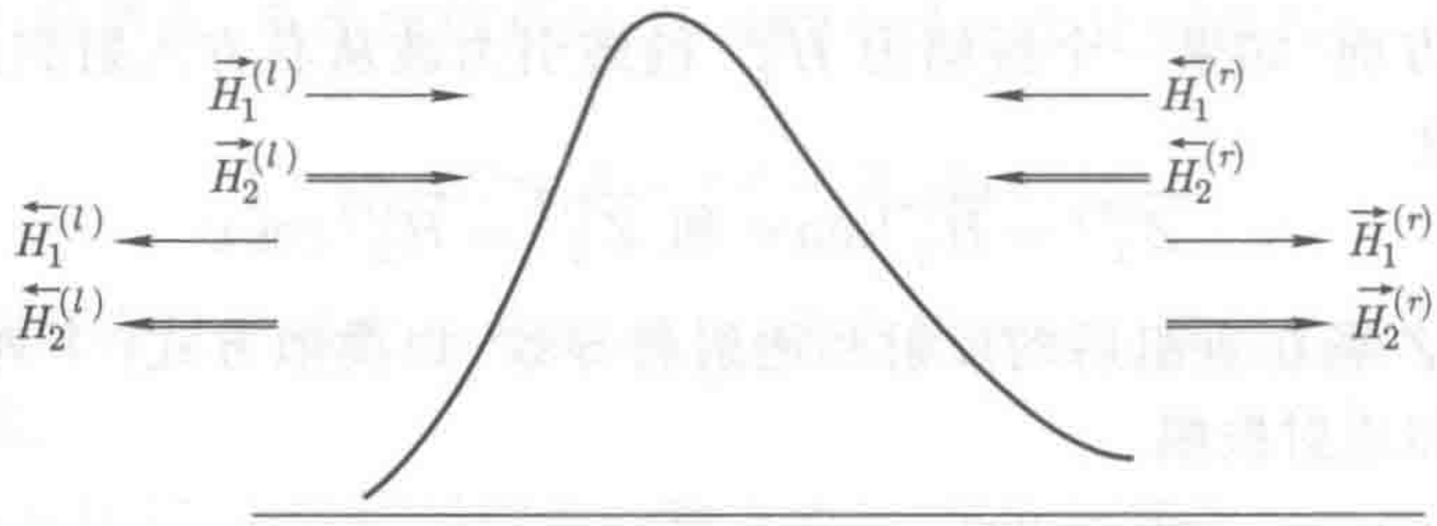


图 22 对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞, 来自 $\pm\infty$ 的同时从相反两侧入射到势垒的电磁和引力波被反射到 $\mp\infty$; 需要一个四阶散射矩阵来描述这个过程.

是满足的.

图 23 所示为 $l=2$ 时转变因子 $\mathbb{C}=|R_{12}^{(\pm)}|^2$ 对 Q_* 和 σ 的依赖关系.

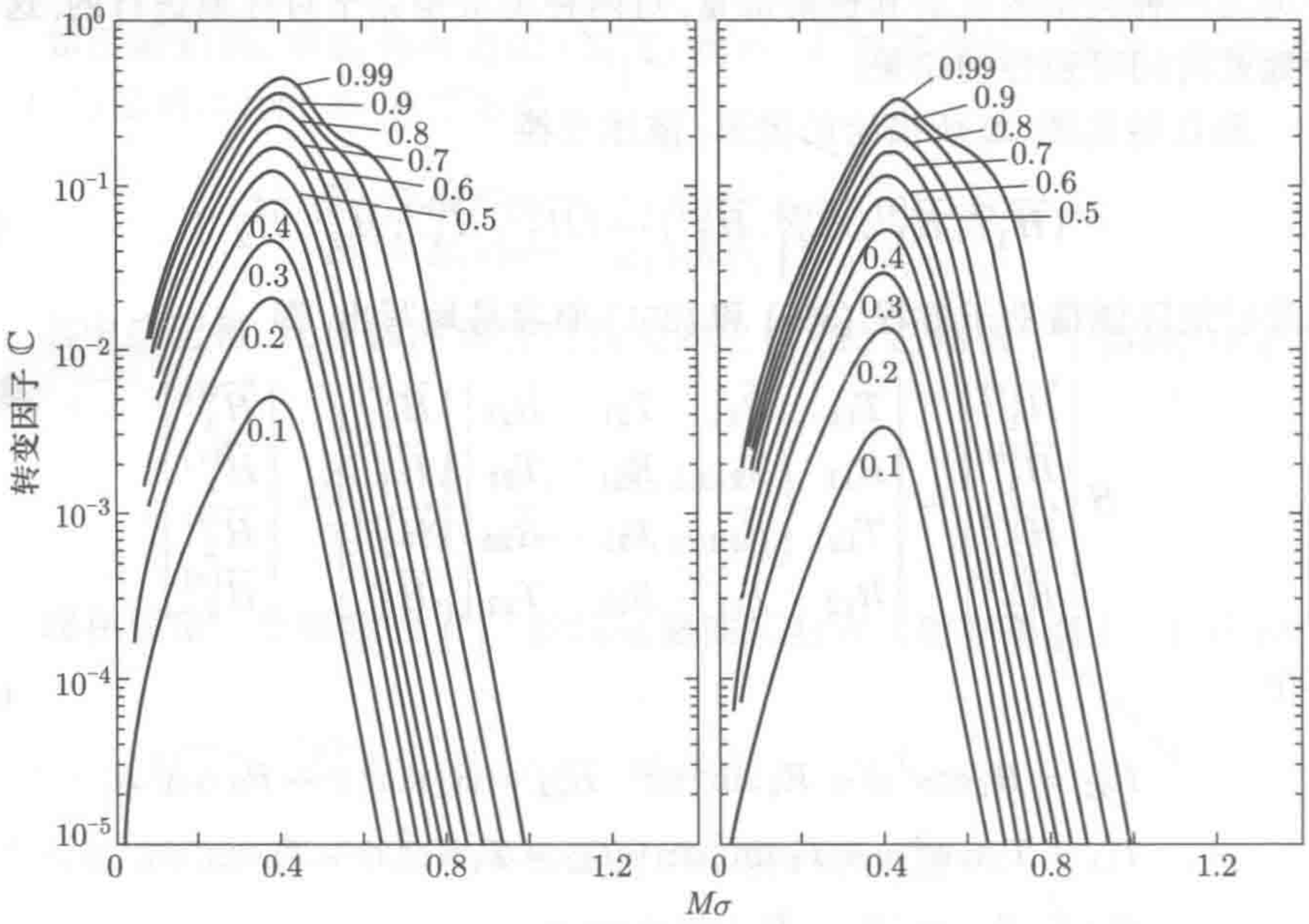


图 23 对 $l=2$ 的轴向和极向扰动的转变因子 $\mathbb{C}^{(+)}$ (左图) 和 $\mathbb{C}^{(-)}$ (右图). 每条曲线都由对应的 Q_* 值标记.

[261]

48. 雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的准正则模式

表征雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的准正则模式, 与第 4 章 §35 中针对史瓦西黑洞的满足同样的边界条件并具有同样的意义. 但是有一个重要的差别: 准正则模式可以对支配 $Z_i^{(\pm)}(i=1,2)$ 的方程的每一个来定义. 由于势 $V_i^{(\pm)}$ 是实数的和正的 (在事件视界外部的空间), 所以准正则模式的复数特征频率的虚部

是正的. 而且, 由于对轴向和极向扰动的解之间的关系 (199), 特征频率对 $Z_i^{(+)}$ 和 $Z_i^{(-)}$ 将是相同的. 还应注意, 没有纯电磁或纯引力的准正则模式: 按照方程 (346), 振荡的任何准正则模式将伴随着电磁和引力的两种辐射.

表 V 列出了对不同 Q_* 和 l 值的准正则模式的复数特征频率 σ_1 和 σ_2 (分属于 $Z_1^{(\pm)}$ 和 $Z_2^{(\pm)}$).

表 V　属于 Z_1 和 Z_2 的准正则模式的复数特征频率 (σ 以单位 M^{-1} 表示) [262]

	Z_1				Z_2			
Q_*	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
0	0.24828	0.45760	0.65690	0.85310	0.11252	0.37367	0.59944	0.80918
	+0.09250i	+0.09500i	+0.09562i	+0.09586i	+0.10040i	+0.08896i	+0.09270i	+0.09416i
0.2	0.25150	0.46296	0.66437	0.86260	0.11320	0.37475	0.60103	0.81134
	+0.09291i	+0.09537i	+0.09597i	+0.09621i	+0.10061i	+0.08907i	+0.09279i	+0.09425i
0.4	0.26194	0.47993	0.68728	0.89100	0.11537	0.37844	0.60705	0.82020
	+0.09416i	+0.09644i	+0.09697i	+0.09716i	+0.10123i	+0.08940i	+0.09306i	+0.09453i
0.6	0.28276	0.51201	0.72919	0.94192	0.11957	0.38622	0.62066	0.84056
	+0.09619i	+0.09802i	+0.09837i	+0.09845i	+0.10206i	+0.08981i	0.9341i	+0.09493i
0.8	0.32349	0.57013	0.80284	1.03039	1.12712	0.40122	0.64755	0.88057
	+0.09827i	+0.09907i	+0.09911i	+0.09903i	+0.10198i	+0.08964i	+0.09312i	+0.09467i
0.9	0.36082	0.61939	0.86375	1.10286	0.13276	0.41357	0.67002	0.91396
	+0.09744i	+0.09758i	+0.09752i	+0.09742i	+0.09980i	+0.08833i	+0.09164i	+0.09314i
0.95	0.38927	0.65476	0.90668	1.1535	0.13540	0.42169	0.68519	0.93664
	+0.09442i	+0.09460i	+0.09469i	+0.09467i	+0.09675i	+0.08666i	+0.08978i	+0.09117i
0.999	0.43031	0.70310	0.96434	1.22097	0.13416	0.43113	0.70387	0.96510
	+0.08388i	+0.08627i	+0.08726i	+0.08773i	+0.09666i	+0.08354i	+0.08608i	+0.08712i

49. 关于雷斯纳 – 诺兹特朗时空稳定性的考虑

第 4 章§34 关于史瓦西黑洞对外部扰动的稳定性的考虑几乎可以照搬到雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞, 因为与那些考虑相关的唯一事实是事件视界外部的势垒是实数的和正的, 而稳定性是来自于这个事实. 但在两个视界之间的区域 $r_- < r < r_+$ 的境况却颇为不同. 不同的境况如下所述.

虽然支配 $Z_i^{(\pm)}$ 的方程在形式上并无改变, 但是势垒 $V_i^{(\pm)}$ 在区间 $r_- <$

$r < r_+$ 和 r_* 的相应范围 $+\infty > r_* > -\infty$ 却是负的, 它们实际上是势阱而不是势垒 (见图 24). 例如, 现在支配 $Z_i^{(-)}$ 的方程是 (见方程 (151))

[263]

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z_i^{(-)}}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2 Z_i^{(-)} = -\frac{|\Delta|}{r^5}\left[(\mu^2+2)r - q_j + \frac{4Q_*^2}{r}\right] Z_i^{(-)}$$
$$(i,j=1,2; i\neq j; \text{和 } r_- < r < r_+, -\infty < r_* < +\infty), \tag{358}$$

其中

$$r_* = r + \frac{1}{2\kappa_+}\lg|r_+ - r| - \frac{1}{2\kappa_-}\lg|r - r_-|, \tag{359}$$

$$\kappa_+ = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2}, \quad \text{和 } \kappa_- = \frac{r_+ - r_-}{2r_-^2}. \tag{360}$$

鉴于属于轴向和极向扰动的解之间的关系 (199), 仅限于考虑方程 (358) 将再次是足够的; 而且为便利, 将略去区分上标.

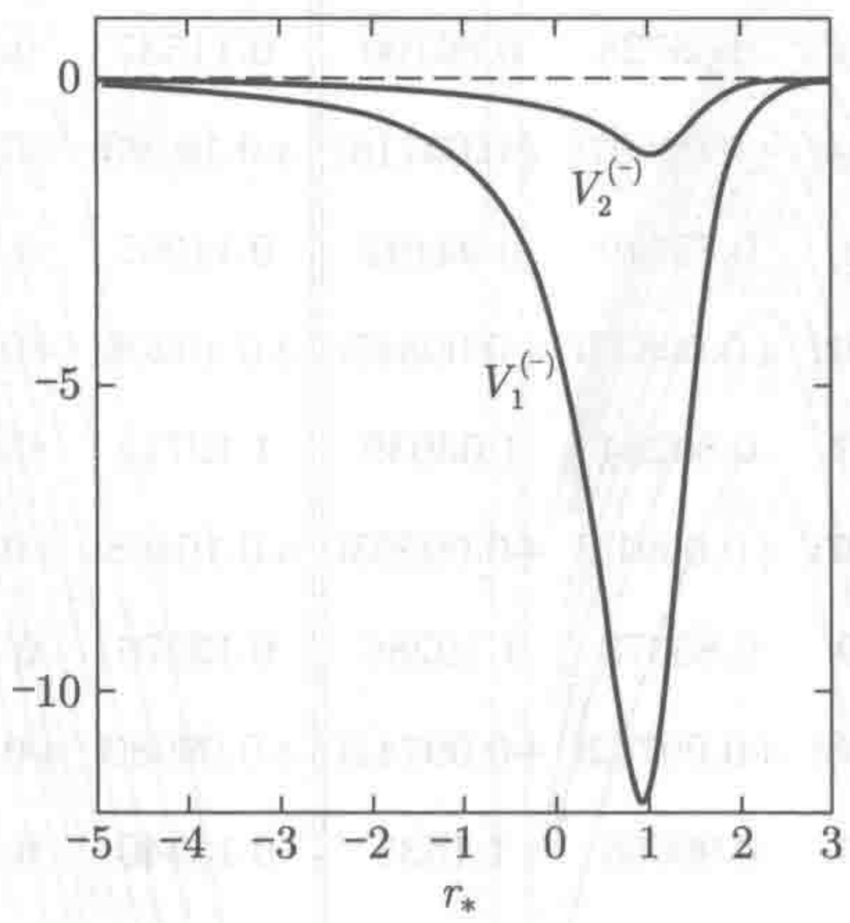


图 24 支配两个视界之间区域里扰动传播的势阱 $V_1^{(-)}$ 和 $V_2^{(-)}$ (对$Q_* = 0.75$).

窄范围一维势阱这一事实的一个重要结果是, 方程 (358) 将允许有限数量的分离、非简并束缚态:

[264]

$$\sigma = \pm \mathrm{i}\sigma_j \quad [j=1,2; n=1,2,\cdots,m \text{ (比如说)}]. \tag{361}$$

除这些束缚态外, 仍继续有与包括 σ 所有实数值的连续谱相关联的反射和透射的标准问题. 但是, 现在的相关解必须满足与迄今所用的不同的边界条件. 现在必须施加的边界条件是

$$\begin{aligned} Z(r_*) &\to A(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} + B(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r \to r_- - 0; r_* \to +\infty) \\ &\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \qquad\qquad\qquad\quad (r \to r_+ + 0; r_* \to -\infty). \end{aligned} \tag{362}$$

这些新边界条件的依据是, 由于两个视界之间区域的光锥结构, 只能有越过 r_+ 处的事件视界 (从 "外部世界") 而进入该区域的波, 而没有在相反方向上越过事件视界而离开该区域的波.

如迄今和在第 4 章 (方程 (175) 和 (176)) 定义的, 方程 (362) 中的系数 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$ 与反射和透射振幅相联系,

$$A(\sigma)=\frac{1}{T^*(\sigma)}=\frac{1}{T_1(-\sigma)}\quad B(\sigma)=\frac{R^*(\sigma)}{T^*(\sigma)}=\frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)}, \tag{363}$$

以致

$$|A(\sigma)|^2-|B(\sigma)|^2=1. \tag{364}$$

表 VI 列出了对 $Q_*^2=0.75M^2$ 的放大因子 $|A(\sigma)|^2$. 可以看到, $|A(\sigma)|^2$, 因而 $|B(\sigma)|^2$, 当 $\sigma\to 0$ 时趋于有限极限. 这个事实源于势阱 V_1 和 V_2 中零能量束缚态的存在. (见本章末的文献注释)

在对到达柯西视界 r_- 的辐射的分析中, 必须区分彭罗斯图中的边缘 EC' 和 EF (图 14). 出于这个理由, 回复解的时间依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$, 并记得在区间 $r_-<r<r_+$ 有 (见方程 (51))

$$u=r_*+t \text{ 和 } v=r_*-t, \tag{365}$$

代替方程 (362) 可写出

$$Z(r_*,t)\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma v}+[A(\sigma)-1]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma v}+B(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma u}. \tag{366}$$

表 VI 对 $Q_*^2=0.75M^2$ 的适于势 $V_1^{(\pm)}$ 和 $V_2^{(\pm)}$ 的放大因子

σ	V_1	V_2	σ	V_1	V_2
0.009375	2.7746	2.7747	0.50	1.2631	1.2653
0.01875	2.7652	2.7655	0.55	1.2165	1.2169
0.0375	2.7287	2.7299	0.65	1.1494	1.1471
0.05	2.6923	2.6944	0.70	1.1248	1.1220
0.075	2.5962	2.6005	0.75	1.1044	1.1016
0.10	2.4785	2.4853	0.80	1.0877	1.0849
0.15	2.2201	2.2312	0.85	1.0741	1.0710
0.20	1.9781	1.9914	0.90	1.0628	1.0596
0.25	1.7764	1.7898	0.95	1.0534	1.0502
0.30	1.6168	1.6286	0.100	1.0453	1.0423
0.35	1.4928	1.5022	0.105	1.0384	1.0358
0.40	1.3967	1.4035	0.110	1.0325	1.0304
0.45	1.3219	1.3262	0.115	1.0276	1.0257

现在假定从 $D'C'$ 发出的辐射流是 $\hat{Z}(v)$, 于是

$$Z(\sigma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{Z}(v)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma v}\mathrm{d}v. \tag{367}$$

[265] 这个流分散在两个视界之间的范围内, 在柯西视界上由下式决定,

$$Z(r_*,t)\to X(v)+Y(u)\quad(v\to\infty;u\to\infty), \tag{368}$$

其中

$$X(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}Z(\sigma)[A(\sigma)-1]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma v}\mathrm{d}\sigma, \tag{369}$$

和

$$Y(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}Z(\sigma)B(\sigma)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma u}\mathrm{d}\sigma. \tag{370}$$

但是, 重要的不是 $X(v)$ 或 $Y(u)$ 本身, 而是与它们相关联的量.

如在§38 中已解释的, 根本上重要的是观测者在他 (或她) 越过柯西视界的瞬间接收到的辐射. 为计算这个量, 考虑一个沿径向短程线自由下落的观测者. 观测者的四速度 U 由对 $L=0$ 的方程 (65) 给出, 即

$$U^t=\frac{r^2}{\Delta}E,\quad U^{r_*}=\frac{r^2}{\Delta}\left(E^2-\frac{\Delta}{r^2}\right)^{1/2},\quad \text{和 } U^\theta=U^\varphi=0, \tag{371}$$

其中, 与区间 $r_-<r<r_+$ 内 r 坐标的类时特征一致, 已在 U^{r*} 的表示式中选择正的平方根. 而且还须注意, 允许赋予 E 以负值, 因为在同一区间内 t 坐标是类空的.

由借助于 $Z(r_*,t)$ 表示的普遍辐射场, 自由下落观测者接收到的辐射流的量度 $\mathscr{F}$ 由下式给出,

[266]

$$\mathscr{F}=U^jZ_{,j}=\frac{r^2}{\Delta}\left[EZ_{,t}+\left(E^2-\frac{\Delta}{r^2}\right)^{1/2}Z_{,r_*}\right]. \tag{372}$$

可见, 随着趋近于柯西视界 (见方程 (369) 和 (370)),

$$Z(r_*,t)\to X(t-r_*)+Y(t+r_*). \tag{373}$$

相应地,

$$Z_{,t}\to X_{,-v}+Y_{,u}\text{ 和 }Z_{,r_*}\to -X_{,-v}+Y_{,u}; \tag{374}$$

而 $\mathscr{F}$ 的表示式 (372) 变为

$$\mathscr{F}\to\frac{r^2}{\Delta}\left\{X_{,-v}\left[E-\left(E^2-\frac{\Delta}{r^2}\right)^{1/2}\right]+Y_{,u}\left[E+\left(E^2-\frac{\Delta}{r^2}\right)^{1/2}\right]\right\}; \tag{375}$$

在 EF 上, v 保持有限, 而 $u \to \infty$; 因此,

$$r_* \to +t, \quad u \to 2r_* \to -\frac{1}{\kappa_-} \lg |r - r_-| \text{ 当在 } EF \text{ 上 } r \to r_-. \tag{376}$$

而且对 $E > 0, X_{,-v}$ 项保持有限, 而 $Y_{,u}$ 项有一个发散因子 (即 $1/\Delta$). 于是,

$$\mathscr{F}_{EF} \to -\frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} E Y_{,u} e^{\kappa - u} \quad (\text{在 } EF \text{ 上 } u \to \infty). \tag{377}$$

在 EC' 上, u 保持有限而 $v \to \infty$; 因此,

$$r_* \to -t, v \to 2r_* \to -\frac{1}{\kappa_-} \lg |r - r_-| \text{当在 } EC' \text{ 上 } r \to r_-. \tag{378}$$

而且对 $E < 0, Y_{,u}$ 项保持有限, 而 $X_{,-v}$ 项有发散因子. 于是,

$$\mathscr{F}_{EC'} \to +\frac{2r_-^2}{r_+ - r_-} |E| X_{,-v} e^{\kappa - v} \quad (\text{在 } EC' \text{ 上 } v \to \infty). \tag{379}$$

由方程 (377) 和 (399) 得出结论, 在 EF 和 EC' 的柯西视界上收到的辐射流的发散或别的什么, 是依赖于

$$Y_{,u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}\sigma \frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)} Z(\sigma) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma u} \mathrm{d}\sigma \tag{380}$$

和

$$X_{,-v} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}\sigma \left[\frac{1}{T_1(-\sigma)} - 1\right] Z(\sigma) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma v} \mathrm{d}\sigma, \tag{381}$$

其中已经由方程 (363) 代换了 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$. 特别地, 如果希望如自然地建议的 [267]
那样, 用围道积分法计算无限积分, 恰当地在上半平面 (为决定 $Y_{,u}$ 对 $u \to \infty$ 的行为) 和下半平面 (为决定 $X_{,-v}$ 对 $v \to \infty$ 的行为) 闭合围道, 那么就需要指明方程 (363) 所定义的 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$ 的解析性的范围.

再回到 $A(\sigma)$ 和 $B(\sigma)$ 的定义, 按照第 4 章方程 (180), 可写

$$B(\sigma) = \frac{R_1(-\sigma)}{T_1(-\sigma)} = \frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}[f_2(x, -\sigma), f_1(x, +\sigma)] \tag{382}$$

和

$$A(\sigma) = \frac{1}{T_1(-\sigma)} = \frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}[f_1(x, -\sigma), f_2(x, -\sigma)], \tag{383}$$

其中为方便已将 r_* 写为 x, 而 $f_1(x, \pm\sigma)$ 和 $f_2(x, +\sigma)$ 是满足下列边界条件的一维波动方程的解,

和

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, \pm\sigma) &\to \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\sigma x} \quad x \to +\infty, \\ f_2(x, \pm\sigma) &\to \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sigma x} \quad x \to -\infty. \end{aligned}\right\} \tag{384}$$

而且, 如第 4 章方程 (194) 和 (198) 所示, $f_2(x,-\sigma)$ 满足积分方程

$$f_2(x,-\sigma)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}+\int_{-\infty}^{x}\frac{\sin\sigma(x-x')}{\sigma}V(x')f_2(x',-\sigma)\mathrm{d}x'. \tag{385}$$

而被 $f_1(x,\pm\sigma)$ 满足的相应积分方程是

$$f_1(x,\mp\sigma)=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma x}-\int_{x}^{\infty}\frac{\sin\sigma(x-x')}{\sigma}V(x')f_1(x',\mp\sigma)\mathrm{d}x'. \tag{386}$$

将哈特勒和外尔金斯的更广泛的研究转变到目前问题的较简单的情形, 可以通过用逐次迭代法求解沃尔特拉积分方程 (385) 和 (386) 来确定函数 $f_2(x,-\sigma)$ 和 $f_1(x,\pm\sigma)$ 在复数 σ 平面上的解析性区域. (如所知, 沃尔特拉型积分方程的迭代通常能给出保证有一致收敛性的解.) 于是, 考虑方程 (385), 可以将其解表示为级数形式,

$$f_2(x,-\sigma)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}+\sum_{n=1}^{\infty}f_2^{(n)}(x,-\sigma), \tag{387}$$

其中

$$f_2^{(n)}(x,-\sigma)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}x_1\frac{\sin\sigma(x-x_1)}{\sigma}V(x_1)f_2^{(n-1)}(x_1,-\sigma). \tag{388}$$

[268] 由最后这个递推关系,

$$\begin{aligned}&f_2^{(n)}(x,-\sigma)\\&=\int_{-\infty}^{x_0}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\prod_{i=1}^{n}\frac{\sin\sigma(x_{i-1}-x_i)}{\sigma}V(x_i)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x_n}\end{aligned} \tag{389}$$

其中 $x_0=x$; 或经过一些重新整理,

$$f_2^{(n)}(x,-\sigma)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}}{(2\mathrm{i}\sigma)^n}\int_{-\infty}^{x_0}\mathrm{d}x_1\cdots\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n\prod_{i=1}^{n}\left\{[\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma(x_{i-1}-x_i)}-1]V(x_i)\right\}. \tag{390}$$

由于

$$V(x)\to\text{常量}\ e^{2\kappa_+x}\quad(x\to-\infty), \tag{391}$$

显然对 $x\to-\infty$, (390) 中的每个被乘数对所有

$$\mathrm{Im}\,\sigma>-\kappa_+ \tag{392}$$

都指数式地趋于零. 结果是, 对每个 n 的 $f_2^{(n)}(x,-\sigma)$ 对 $\mathrm{Im}\,\sigma>-\kappa_+$ 都存在. 而且可以证明 (如哈特勒和外尔金斯在更广泛的意义上已经证明的), 级数 (387)

对有着 $\mathrm{Im}\sigma > -\kappa_+$ 的所有 σ 一致收敛. 所以, $f_2(x,-\sigma)$ 的解析性区域包括整个上半平面和下半平面中宽度为 κ_+ 的无限长带.①

可以进一步证明, 沿虚轴在 $\sigma = -\mathrm{i}m\kappa_+ (m = 1, 2, \cdots)$ 上有一系列的极. 这里不做完全严格的证明, 但将指出奇异性的起源. 由于 $V(x)$ 的渐近行为 (391), 可以预期, 与这个行为一致, $V(x)$ 对 $x < 0$ 有着拉普拉斯变换方式的表示,

$$V(x) = \int_{2\kappa_+}^{\infty} \mathrm{d}\mu \mathscr{V}(\mu) e^{\mu x}, \tag{393}$$

其中 $\mathscr{V}(\mu)$ 包括不同位置的 δ 函数, 即 $\mathscr{V}(\mu)$ 在技术性意义上是一个分布. 由上面对 $V(x)$ 的表示, 对 $f_2(x,-\sigma)$ 的解的第一个迭代 $f_2^{(1)}(x,-\sigma)$ 变为 (见方程 (389))

$$f_2^{(1)}(x,-\sigma) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}}{2\mathrm{i}\sigma} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x_1 [\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma(x-x_1)} - 1] \int_{2\kappa_+}^{\infty} \mathrm{d}\mu \mathscr{V}(\mu) e^{\mu x_1}; \tag{394}$$

或, 将积分顺序反转, 有 [269]

$$f_2^{(1)}(x,-\sigma) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x}}{2\mathrm{i}\sigma} \int_{2\kappa_+}^{\infty} \mathrm{d}\mu \mathscr{V}(\mu) e^{\mu x} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x_1 [\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\sigma(x-x_1)} - 1] e^{\mu(x_1-x)}. \tag{395}$$

在完成覆盖 x_1 的积分后, 得到

$$f_2^{(1)}(x,-\sigma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma x} \int_{2\kappa_+}^{\infty} \mathrm{d}\mu \frac{\mathscr{V}(\mu)}{\mu(\mu - 2\mathrm{i}\sigma)} e^{\mu x}. \tag{396}$$

从最后这个表示显然可见, $f_2^{(1)}(x,-\sigma)$ 沿起始于 $\mathrm{Im}\sigma = -\kappa_+$ 的负虚轴有奇点. 类似结果可对更高阶迭代得出. 虽然这些论证并不能结论性地确立求和 $\sum f_2^{(n)}(x,-\sigma)$ 的起始于 $\mathrm{Im}\sigma = -\kappa_+$ 的切割和奇点的存在, 但能被提炼来证明确是如此, 不过这里并不试图这样做.

现在转到 $f_1(x,\pm\sigma)$ 所满足的积分方程 (386), 以与 $f_2(x,-\sigma)$ 同样的方式, 用迭代法求解方程, 可以证明, 由渐近行为

$$V(x) \to \text{常量}\ e^{-2\kappa_- x} \quad (x \to +\infty), \tag{397}$$

$f_1(x,-\sigma)$ 的解析性区域包括整个上半平面和下半平面中宽度为 κ_- 的无限长带; 而 $f_1(x,+\sigma)$ 的解析性区域包括整个下半平面和上半平面中宽度为 κ_- 的无限长带.

① 感谢 Roza Trautman 博士告诉我, 一个与这里所述等价的结果包含在下列文献中: M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur, *Studies in Applied Mathematics*, 53, 249 (1974).

由 $f_2(x,-\infty)$ 和 $f_1(x,+\sigma)$ 的解析性区域可以得到, 只要涉及的是 $\sigma B(\sigma)$, 它作为 $f_2(x,-\sigma)$ 和 $f_1(x,+\sigma)$ 的朗斯基行列式的解析性区域肯定包括上半平面里宽度为 κ_- 的带. (事实上可以证明, 除沿虚轴在 $\sigma = im\kappa_-(m=1,2,\cdots)$ 上的奇点外, $f_1(x,\sigma)$ 在整个复数 σ 面上是解析的.) 在任何情况, 通过将围道延伸到上半平面来沿实轴闭合它而计算出 $Y_{,u}$, 可得出, 只要 $Z(\sigma)$ 在上半平面是解析的, 则 $Y_{,u}$ 必定随 $u\to\infty$ 至少如 $e^{-\kappa_- u}$ 那样快地减小, 即

$$Y_{,u} \prec e^{-\kappa_- u}, \quad u\to\infty. \tag{398}$$

现在由方程 (377) 可得出, 流 $\mathscr{F}_{EF}$ 在 EF 的柯西视界上必须是束缚的.

再转到在 $X_{,-v}$ 的积分中出现的 $\sigma A(\sigma)$, 由对 $f_2(x,-\sigma)$ 和 $f_1(x,-\sigma)$ 所已经证明的结果可以看到, 它在下半平面的解析性区域包括宽度为 κ_+ 的带; 而且函数沿起始于 $-\kappa_+\mathrm{i}$ 的整个负虚轴有切割或奇点. 所以, 由下半平面里避开沿起始于 $\mathrm{Im}\,\sigma = -\kappa_+$ 的负虚轴的切割的围道来计算积分 $X_{,-v}$, 可以得到, 假定 $Z(\sigma)$ 在积分范围内正常, 有

[270]

$$X_{,v} \to \text{常量}\ e^{-\kappa_+ v}\ \text{对}\ v\to\infty. \tag{399}$$

相应地, 由方程 (379),

$$\mathscr{F}_{EC'} \to \text{常量}\ e^{(\kappa_- - \kappa_+)v} \quad (v\to\infty). \tag{400}$$

由于 $\kappa_- > \kappa_+$, 可得流 $\mathscr{F}_{EC'}$ 在 EC' 的柯西视界上发散. 这表明, 试图沿类时短程线穿越柯西视界并使他 (或她) 自己从过去中解放出来的观测者, 在穿越瞬间将经受无限强辐射流的撞击, 即使穿越事件视界的扰动是紧密支撑性的.

50. 对静态黑洞解的一些综合观察

对史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空的考虑已经完成, 再来聚焦一下二者的相似和差别是恰当的, 两方面都同样显著.

关于相似性: 两者都是彼得罗夫 D 型; 都有一个事件视界来包围着不可与渐近平坦的外部世界交流信息的内部区域; 事件视界都由决定着黑洞对入射到其上的辐射的反射能力的势垒围绕; 势垒全都属于这样一个很特别的类型, 即能保证对轴向型和极向型波的反射能力的相等性; 由纽曼 – 彭罗斯形式得出的扰动方程都允许双重变换, 而这个事实又与势垒所属的特别类型相关联. 但是变化又带来惊奇: 对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞与同时入射的电磁波和引力波之间相互作用方式的描述需要一个四阶散射矩阵, 而它是对称和幺正的! 类似地, 纽曼 – 彭罗斯形式的雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞扰动方程的解偶需要选

择一个特别的规范, 而它首先是作为对史瓦西扰动的处理中的一个影子出现的. 所以一个变化是跟随另一个.

差别中最重要的一个 —— 所有其它差别都由它而起 —— 是雷斯纳 – 诺兹特朗时空有一个内部柯西视界的事实, 这个视界造成了时空的最大解析延伸, 揭示了探索其它世界和探索者从自己的过去中解脱的原则上的可能性. 但是, 一个在事件视界外是类空的坐标向一个穿越事件视界时是类时的坐标的变形, 会带来这样一个危险的预期: 穿越事件视界的辐射被增强了, 而且随着向柯西视界的前进会增强到具有致命冲击力的程度. 而这个最后的旅程也成为主题和变奏乐曲的惊人终结.

文献注释 [271]

雷斯纳 (1874–1967) 和诺兹特朗 (1881–1923) 各自独立地得出了现在所称的雷斯纳 – 诺兹特朗解:

1. H. Reissner, *Ann d. Physik*, 50, 106–20 (1916).

2. G. Nordström, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, 20, 1238–45 (1918).

§37. 雷斯纳 – 诺兹特朗解的导出是模仿 §17 中史瓦西解的导出.

§38. 关于雷斯纳 – 诺兹特朗时空性质的讨论是密切地仿效:

3. M. Simpson and R. Penrose, *Internat. J. Theoret. Phys.*, 7, 183–97 (1973).

另见:

4. J. C. Graves and D. R. Brill, *Phys. Rev.*, 120, 1507–13 (1960).

5. S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large-Scale Structure of Space-Time*, 156–9, Cambridge, England, 1973.

§40. 关于雷斯纳 – 诺兹特朗时空短程线的完整论文目录, 见:

6. N. A. Sharp, *Gen. Relativity and Gravitation*, 10, 659–70 (1979).

特别可作参考的是:

7. A. R. Prasanna and R. K. Varma, *Pramana*, 8, 229–44 (1977).

该文在形式上是完整的. 但是关于这个题材的论文中都没有对轨道的恰当分类和排列, 都没有指出与史瓦西时空轨道的相似和差别.

图 16 是取自:

8. A. Armenti, Jr., *Nuovo Cim.*, 25B, 442–8 (1973).

图 15、17 和 18 中的短程线是由 Garret Toomey 先生计算和绘制的, 我对他甚为感激.

对带电粒子运动的研究, 特别着重于极端情形 $Q_*^2 = M^2$, 是在:

9. R. RUFFINI in *Black Holes*, 497–508, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.

10. G. DENARDO and R. RUFFINI, ibid., R33–44.

这些论文主要着重于通过与带相反电荷的粒子的遭遇来提取雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的电荷的可能性.

§41. 除 "视界函数" Δ 的重新定义外, 对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的自旋系数和主零方向与对史瓦西黑洞的相同. 指出这一事实是在:

11. S. K. BOSE, *J. Math. Phys.*, 16, 772–5 (1975).

12. D. M. CHITRE, *Phys. Rev.* D, 13, 2713–19 (1976).

13. C. H. LEE, *J. Math. Phys.*, 17, 1226–35 (1976).

§42. 本节的分析是基于:

14. S. CHANDRASEKHAR and B. C. XANTHOPOULOS, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 367, 1–14 (1979).

[272]

15. B. C. XANTHOPOULOS, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 378, 73–88 (1981).

关于采用不同方法的其它处理, 见:

16. V. MONCRIEF, *Phys. Rev.* D, 9, 2707–9 (1974).

17. ——, ibid., 10, 1057–9 (1974).

18. ——, ibid., 12, 1526–37 (1975).

19. F. J. ZERILLI, ibid., 9, 860–8 (1974).

§43. 给出本节中各种关系的是:

20. S. CHANDRASEKHAR, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 369, 425–33 (1980).

§44. 本节中的分析是按照:

21. S. CHANDRASEKHAR, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 365, 453–65 (1979).

另见:

22. A. W. C.-LUN, *Nuovo Cim. Letters*, 10, 681–4 (1976).

23. J. BICAK, *Czech. J. Phys.* B, 29, 945–80 (1979).

24. R. M. WALD, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 369, 67–81 (1979).

§45. 见文献 21

§46–§47. 这两节中的讨论有许多是新的. 我感谢 R.Sorkin 博士建议引入散射矩阵. 对低频极限下引力能向电磁能转变的很详细的考虑是在:

25. R. A. MATZNER, *Phys. Rev.* D, 14, 3274–80 (1976).

另见:

26. D. W. OLSON and W. G. UNRUH, *Phys. Rev. Letters*, 33, 1116–8 (1974).

§48. 表 V 所给的数值结果是取自:

27. D. GUNTER, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, 296, 457–526 (1980) and 301, 705–9 (1981).

§49. 考察柯西视界上扰动的发展的重要性是由彭罗斯首先意识到和探讨 (见文献 3). 自那以后这个题材已被广泛讨论, 主要的相关论文是:

28. J. M. MCNAMARA, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 364, 121–34 (1978).

29. ——, ibid., 358, 499–517 (1978).

30. Y. GÜRSEL, V. D. SANDBERG, I. D. NOVIKOV, and A. A. STAROBINSKY, *Phys. Rev.* D, 19, 413–20(1979).

31. Y. GÜRSEL, I. D. NOVIKOV, V. D. SANDBERG, and A. A. STAROBINSKY, ibid., 20, 1260–70 (1979).

32. R. A. MATZNER, N. ZAMORANO, and V. D. SANDBERG, ibid., 19, 2821–6 (1979).

必须补充的是, 我发觉这些文献中 "稳定性" 一词的使用并不合宜: 它似乎并不对应着实际研究的内容, 即来自外部世界的波是如何通过事件视界而进入两个视界之间的区域, 又如何随着向柯西视界的趋近而发展并影响自由下落的观测者.

我感谢 S. Detweiler 博士关于表 VI 中所列放大因子的贡献.

势阱 V_1 和 V_2 中零能量束缚态的存在是由文献 31 证明的.

本节中的处理在一些基本方面不同于文献 28-32. 主要的论证是取自:

33. J. B. HARTLE and D. C. WILKINS, *Commun. Math. Phys.*, 38, 47–63 (1974).

关于一些被回避的更细致问题的更充分的处理, 见:

34. S. CHANDRASEKHAR and J. B. HARTLE, *Proc. Roy. Soc. (London)* A (in press).

第六章

克尔度规

[273]

51. 引言

本章开始研究克尔解. 如在序言中所说, 它是广义相对论给出的描述由于恒星引力坍缩而存在于天文宇宙中的所有黑洞的唯一解, 它也是物理理论对宏观物体作出精确描述的唯一事例. 在很大程度上, 以上各章只是现在开始的研究的序曲.

前人有言: "没有一个对 (克尔) 度规的建设性解析导出在物理思想上是适当的, 即使是对爱因斯坦方程这个解的检查都需要复杂的计算" (朗道和栗弗席兹). 将会看到, 与这个观点相反, 一旦基本方程被恰当地写出和简化, 克尔度规的导出其实很简单, 而且是有着物理和数学动机的适当基础来进行的.

本章除导出克尔度规并论证其唯一性外, 还将给出使时空的 D 型特征明显的纽曼 – 彭罗斯形式描述.

52. 支配定常态轴对称真空时空的方程

如第 2 章 (§11) 中所示, 适合于定常态轴对称时空的度规可写成如下形式,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2 - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \tag{1}$$

其中 ν、ψ、ω、μ_2 和 μ_3 是 x^2 和 x^3 的函数, 有着对 μ_2 和 μ_3 加上坐标条件的自由.

通过将第 2 章方程 (75) 所列的表示适当地具体化, 可以写出在具有基一次型,

$$\omega^0 = e^{\nu}\mathrm{d}t, \quad \omega^1 = e^{\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t), \quad \omega^2 = e^{\mu_2}\mathrm{d}x^2, \quad \text{和 } \omega^3 = e^{\mu_3}\mathrm{d}x^3 \tag{2}$$

的四次标架中黎曼张量的分量. 黎曼张量的非零分量是 [274]

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= +e^{-\psi-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}\psi_{,2})_{,2} + e^{-2\mu_3}\psi_{,3}\mu_{2,3} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\nu}{\omega_{,2}}^2,\\
R_{1313} &= +e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_3}\psi_{,3})_{,3} + e^{-2\mu_2}\psi_{,2}\mu_{3,2} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\nu}{\omega_{,3}}^2,\\
R_{1010} &= -e^{-2\mu_2}\psi_{,2}\nu_{,2} - e^{-2\mu_3}\psi_{,3}\nu_{,3} - \frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}(e^{-2\mu_2}{\omega_{,2}}^2 + e^{-2\mu_3}{\omega_{,3}}^2),\\
R_{2323} &= +e^{-\mu_2-\mu_3}[(e^{\mu_2-\mu_3}\mu_{2,3})_{,3} + (e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3,2})_{,2}],\\
R_{2020} &= -e^{-\mu_2-\nu}(e^{\nu-\mu_2}\nu_{,2})_{,2} - e^{-2\mu_3}\nu_{,3}\mu_{2,3} + \frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\nu}{\omega_{,2}}^2,\\
R_{3030} &= -e^{-\mu_3-\nu}(e^{\nu-\mu_3}\nu_{,3})_{,3} - e^{-2\mu_2}\nu_{,2}\mu_{3,2} + \frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\nu}{\omega_{,3}}^2,\\
R_{1213} &= +e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}\psi_{,2})_{,3} - e^{-\mu_2-\mu_3}\psi_{,3}\mu_{3,2} + \frac{1}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3},\\
R_{1220} &= +e^{\psi-2\mu_2-\nu}\omega_{,2}\left(\psi_{,2} - \frac{1}{2}\nu_{,2}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\nu}(e^{\psi-\mu_2}\omega_{,2})_{,2}\\
&\quad + \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\nu}\omega_{,3}\mu_{2,3},\\
R_{1330} &= +e^{\psi-2\mu_3-\nu}\omega_{,3}\left(\psi_{,3} - \frac{1}{2}\nu_{,3}\right) + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\nu}(e^{\psi-\mu_3}\omega_{,3})_{,3}\\
&\quad + \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\nu}\omega_{,2}\mu_{3,2},\\
R_{3002} &= +e^{-\nu-\mu_3}(e^{\nu-\mu_2}\nu_{,2})_{,3} - e^{-\mu_2-\mu_3}\nu_{,3}\mu_{3,2} - \frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3},\\
R_{1230} &= +\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\nu}(e^{\psi-\mu_2}\omega_{,2})_{,3} + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\nu}\omega_{,3}(2\psi_{,2} - \mu_{3,2} - \nu_{,2}),\\
R_{1302} &= -\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\nu}(e^{\psi-\mu_3}\omega_{,3})_2 - \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\nu}\omega_{,2}(2\psi_{,3} - \mu_{2,3} - \nu_{,3}),\\
R_{1023} &= -\frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}[(e^{\psi-\nu}\omega_{,3})_{,2} - (e^{\psi-\nu}\omega_{,2})_{,3}]. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

为零的分量是

$$
\left.
\begin{aligned}
R_{1210} = R_{1310} = R_{1223} = R_{1332} = R_{1002} = R_{1003}\\
= R_{2330} = R_{3220} = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4)
$$

里奇和爱因斯坦张量的分量由黎曼张量分量 (示于第 2 章方程 (75)) 的一定线性组合给出; 设它们等于零, 就得到支配定常态轴对称真空时空的方程. 考虑下列的方程对于现在的目的已足够.

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\mu_2}[\nu_{,2,2} + \nu_{,2}(\psi + \nu - \mu_2 + \mu_3)_{,2}] + e^{-2\mu_3}[\nu_{,3,3} + \nu_{,3}(\psi + \nu + \mu_2 - \mu_3)_{,3}]\\
&\quad = +\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2 + e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2] \qquad (R_{00} = 0), \quad (5)
\end{aligned}
$$

$$e^{-2\mu_2}[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}(\psi+\nu-\mu_2+\mu_3)_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\psi_{,3,3}+\psi_{,3}(\psi+\nu+\mu_2-\mu_3)_{,3}]$$
$$=-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2] \qquad (R_{11}=0), \tag{6}$$

$$(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}\omega_{,2})_{,2}+(e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,3})_{,3}=0 \qquad (R_{01}=0), \tag{7}$$

$$(\psi+\nu)_{,2,3}-(\psi+\nu)_{,2}\mu_{2,3}-(\psi+\nu)_3\mu_{3,2}+\psi_{,2}\psi_{,3}+\nu_{,2}\nu_{,3}$$
$$=\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3} \qquad (R_{23}=0), \tag{8}$$

$$e^{-2\mu_3}[(\psi+\nu)_{,3,3}+(\psi+\nu)_{,3}(\nu-\mu_3)_{,3}+\psi_{,3}\psi_{,3}]$$
$$+e^{-2\mu_2}[\nu_{,2}(\psi+\mu_3)_{,2}+\psi_{,2}\mu_{3,2}]$$
$$=-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2] \qquad (G_{22}=0), \tag{9}$$

[275]

$$e^{-2\mu_2}[(\psi+\nu)_{,2,2}+(\psi+\nu)_{,2}(\nu-\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\nu_{,3}(\psi+\mu_2)_{,3}+\psi_{,3}\mu_{2,3}]$$
$$=+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2] \qquad (G_{33}=0). \tag{10}$$

令

$$\beta=\psi+\nu, \tag{11}$$

可将方程 (5) 和 (6) 重写为

$$(e^{\beta+\mu_3-\mu_2}\nu_{,2})_{,2}+(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\nu_{,3})_{,3}$$
$$=+\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2], \tag{12}$$
$$(e^{\beta+\mu_3-\mu_2}\psi_{,2})_{,2}+(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\psi_{,3})_{,3}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]. \tag{13}$$

这两个方程相加和相减给出

$$[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}+[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}=0, \tag{14}$$
$$[e^{\beta+\mu_3-\mu_2}(\psi-\nu)_{,2}]_{,2}+[e^{\beta+\mu_2-\mu_3}(\psi-\nu)_{,3}]_{,3}$$
$$=-e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]. \tag{15}$$

方程 (9) 和 (10) 相加同样给出方程 (14), 而相减给出

$$4e^{\mu_3-\mu_2}(\beta_{,2}\mu_{3,2}+\psi_{,2}\nu_{,2})-4e^{\mu_2-\mu_3}(\beta_{,3}\mu_{2,3}+\psi_{,3}\nu_{,3})$$
$$=2e^{-\beta}\{[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}-[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}\}$$
$$-e^{2\psi-2\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]: \tag{16}$$

对上述方程的考察按以下顺序进行.

首先, 运用规范自由, 必须对 μ_2 和 μ_3 加上坐标条件, 可以以某种便利的方式指定为

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)} = \Delta(x^2, x^3). \tag{17}$$

方程 (14) 于是变成对 $\beta = \psi + \nu$ 的方程. 对它求解没有困难. 确实可证, e^β 能被 "吸收" 为坐标之一 (见下面§ (b)). 方程 (7) 和 (15) 于是成为关于 $\psi - \nu$ 和 ω 的耦合方程对; 它们的解是爱因斯坦方程定常态轴对称解理论的核心问题.

由方程结构启示的上述度规函数集群的意义, 在将度规 (1) 写为如下形式时变得清楚,

$$\mathrm{d}s^2 = e^\beta \left[\chi(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{\chi}(\mathrm{d}\varphi - \omega \mathrm{d}t)^2\right] - \frac{e^{\mu_2+\mu_3}}{\sqrt{\Delta}}[(\mathrm{d}x^2)^2 + \Delta(\mathrm{d}x^3)^2], \tag{18}$$

其中 [276]

$$\Delta = e^{2(\mu_3-\mu_2)}, \quad \beta = \psi + \nu, \quad \text{和 } \chi = e^{-\psi+\nu}. \tag{19}$$

如已讲过的, Δ 是自由处理; β 能被独立地解出; 核心问题就是求解 χ 和 ω; 而一旦知道了 χ 和 ω, 求 $\mu_2 + \mu_3$ 的解没有原则上的困难: 它可由简单的求积分得出, 下面 §52 中将详述.

重要的是看到, $-e^{2\beta}$ 是矢量 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial\varphi$ 构建的二维空间度规的行列式值.

支配 χ 和 ω 的方程的一个特征值得注意. 将方程 (7) 重写为

$$\begin{aligned}&(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}\omega\omega_{,2})_{,2} + (e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega\omega_{,3})_{,3}\\ &= +e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2 + e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2],\end{aligned} \tag{20}$$

它与方程 (15) 的结合给出

$$\begin{aligned}&\{e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}[(\omega^2)_{,2} + 2e^{-2\psi+2\nu}(\psi-\nu)_{,2}]\}_{,2}\\ &+\{e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}[(\omega^2)_{,3} + 2e^{-2\psi+2\nu}(\psi-\nu)_{,3}]\}_{,3} = 0,\end{aligned} \tag{21}$$

或等价地,

$$[e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}(\chi^2-\omega^2)_{,2}]_{,2} + [e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}(\chi^2-\omega^2)_{,3}]_{,3} = 0. \tag{22}$$

方程 (7) 和 (21) 的比较表明, ω 和 $\chi^2 - \omega^2$ 形式上满足同一个方程.

(*a*) 共轭度规

支配定常态轴对称时空的方程的一个重要特征是, 从一个比如说由 (χ,ω) 表示的解开始, 就能够得到其它的解. 一个例子是, 对度规 (18) 作变换

$$t \to +\mathrm{i}\varphi \text{ 和 } \varphi \to -\mathrm{i}t. \tag{23}$$

于是

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{\chi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2 &\to \frac{1}{\chi}(\mathrm{d}t)^2 + \frac{2\omega}{\chi}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi - \frac{\chi^2-\omega^2}{\chi}(\mathrm{d}\varphi)^2 \\ &= \left[\widetilde{\chi}(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{\widetilde{\chi}}(\mathrm{d}\varphi - \widetilde{\omega}\mathrm{d}t)^2\right],\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2-\omega^2} \text{ 和 } \widetilde{\chi} = \frac{\chi}{\chi^2-\omega^2}. \tag{25}$$

其它度规系数都不受这个变换影响. 结论是, 如果 (χ,ω) 表示一组方程的解, 那么 $(\widetilde{\chi},\widetilde{\omega})$ 也表示同一组方程的解. 在 §53 中将明确地予以证实, 而这与 ω 和 $\chi^2-\omega^2$ 满足同一个方程的事实相关.

[277]

现将 (χ,ω) 和 $(\widetilde{\chi},\widetilde{\omega})$ 称为共轭解, 将产生这些解的变换关系 (23) 称为共轭.

(*b*) 帕帕培特罗变换

由规范的选择,

$$\mu_2 = \mu_3 = \mu \text{ 和 } \Delta = 1, \tag{26}$$

度规 (18) 成为

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\beta}\left[\chi(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{\chi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2\right] - e^{2\mu}[(\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2], \tag{27}$$

而 e^{β} 满足的方程成为

$$(e^{\beta})_{,\alpha,\alpha} = 0 \quad (\alpha = 2,3). \tag{28}$$

现在可以利用 e^{β} 满足二维拉普拉斯方程的事实, 将 e^{β} 视为坐标之一并寻找坐标变换

$$(x^2,x^3) \to (\rho,z), \tag{29}$$

以致于有

$$e^{2\mu}[(\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2] \to f(\rho,z)[(\mathrm{d}\rho)^2 + (\mathrm{d}z)^2]. \tag{30}$$

显然, 这样的坐标变换要能做到, 须有 (见第 2 章 §11)

和
$$\left.\begin{aligned}(\rho_{,2})^2+(z_{,2})^2&=(\rho_{,3})^2+(z_{,3})^2,\\ \rho_{,2}\rho_{,3}+z_{,2}z_{,3}&=0.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

这些条件要能被满足, 须设

$$\rho_{,2}=+z_{,3}\text{ 和 }\rho_{,3}=-z_{,2}, \tag{32}$$

这些方程肯定能被满足, 因为有方程

$$\rho_{,\alpha,\alpha}=0\quad(\rho=e^{\beta}) \tag{33}$$

它被 ρ 满足.

由于 $e^{\beta}=\rho$ 被选为坐标之一, 度规 (27) 取形式

$$\mathrm{d}s^2=\rho\left[\chi(\mathrm{d}t)^2-\frac{1}{\chi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2\right]-e^{2\mu}[(\mathrm{d}\rho)^2+(\mathrm{d}z)^2], \tag{34}$$

其中 χ、ω 和 μ 是 ρ 和 z 的函数. 这就是度规的帕帕培特罗形式.

53. 规范的选择和方程向标准形式的简化 [278]

即将作出的对规范的特殊选择不失一般性, 其实现阶段也并不是严格地有必要来作选择. 但是它确实为所寻求的度规形式给出了富有意义的物理动机.

可以方便地选择极向角 θ (相对于对称轴) 作为空间坐标 x^3. (本章下文以 $\cos\theta$ 代替 θ 作为独立变量之一.)

假定度规允许一个事件视界, 目前定义为一个平滑的二维零曲面, 由正切矢量 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial\varphi$ 撑开, 这两个矢量就是时空的 “基灵 (Killing) 矢量”.

与所假定的时空定常态和轴对称性一致, 设事件视界的方程为

$$N(x^2,x^3)=0. \tag{35}$$

它为零的条件是

$$g^{ij}N_{,i}N_{,j}=0. \tag{36}$$

对所选择的度规形式, 方程 (36) 给出

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)}(N_{,r})^2+(N_{,\theta})=0, \tag{37}$$

其中已写 $x^2=r$. 运用具有的规范自由, 假定

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)}=\Delta(r), \tag{38}$$

其中 $\Delta(r)$ 是现在尚未定的某个 r 的函数. 现在由方程 (37) 得出, 事实上零面的方程是

$$\Delta(r) = 0. \tag{39}$$

第二个条件, 即零面由 $\partial/\partial t$ 和 $\partial/\partial\varphi$ 撑开, 要求亚空间 (t, φ) 度规的行列式在 $\Delta(r) = 0$ 上为零:

$$e^{2\beta} = 0 \text{ 在 } \Delta(r) = 0. \tag{40}$$

由于尚保留 $\Delta(r)$ 未定, 可以不失一般性地假定

$$e^{\beta} = \Delta^{1/2} f(r, \theta), \tag{41}$$

其中 $f(r, \theta)$ 是 r 和 θ 的某个在 $\Delta(r) = 0$ 上和在 $\theta = 0$ 轴上都正常的函数. 再改为假定 e^{β} 具有更受限制的形式

[279]

$$e^{\beta} = \Delta^{1/2} f(\theta), \tag{42}$$

也就是说 e^{β} 对变量 r 和 θ 是可分离的.

由方程 (38) 和 (42) 给出的 $e^{\mu_3 - \mu_2}$ 和 e^{β}, 关于 e^{β} 的方程 (15) 变为

$$[\Delta^{1/2}(\Delta^{1/2})_{,r}]_{,r} + \frac{1}{f} f_{,\theta,\theta} = 0. \tag{43}$$

这个方程的符合轴上正常性和视界为凸面要求的解由下式决定,

$$\Delta_{,r,r} = 2 \text{ 和 } f = \sin\theta; \tag{44}$$

恰当的 Δ 的解是

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \tag{45}$$

其中 M 和 a 是常量.① (下面将表明, 这两个常量的意义是黑洞的质量和单位质量的角动量.)

于是, 由与事件视界的存在一致的规范选择, 有解

$$e^{\mu_3 - \mu_2} = \Delta^{1/2} \text{ 和 } e^{\beta} = \Delta^{1/2} \sin\theta, \tag{46}$$

其中 Δ 由方程 (45) 给出.

---

① 必须注意, 虽然这里的 M 和 a 是作为积分常量引入的, 但 Δ 和 $(M^2 - a^2)$ 对下列变换是不变的 (归功于山托珀罗斯),

$$M \to M' = (M^2 - a^2)^{1/2}/p, a \to a' = q(M^2 - a^2)^{1/2}/p, \quad \text{和 } r - M \to r' - M'.$$

其中 p 和 q 是常数, 且 $p^2 + q^2 = 1$.

所作的对 e^{β} 和 $e^{\mu_3-\mu_2}$ 的解的选择不失一般性的事实, 在注意到它们与度规的帕帕培特罗形式一致时变得明显, 因

$$\rho = e^{\beta} = \Delta^{1/2}\sin\theta \text{ 和 } z = (r-M)\cos\theta. \tag{47}$$

由方程 (46) 的 $e^{\mu_3-\mu_2}$ 和 e^{β} 的解, 并用

$$\mu = \cos\theta \tag{48}$$

(代替 θ) 作为由指标 "3" 标记的变量, 可将方程 (15) 和 (7) 分别带到下列形式,

$$[\Delta(\psi-\nu)_{,2}]_{,2} + [\delta(\psi-\nu)_{,3}]_{,3} = -e^{2(\psi-\nu)}[\Delta(\omega_{,2})^2 + \delta(\omega_{,3})^2], \tag{49}$$

和

$$[\Delta e^{2(\psi-\nu)}\omega_{,2}]_{,2} + [\delta e^{2(\psi-\nu)}\omega_{,3}]_{,3} = 0, \tag{50}$$

其中已写 [280]

$$\delta = 1-\mu^2 = \sin^2\theta. \tag{51}$$

令 χ 具有方程 (19) 所给的意义, 可将方程 (49) 和 (50) 重写为

$$\left(\frac{\Delta}{\chi}\chi_{,2}\right)_{,2} + \left(\frac{\delta}{\chi}\chi_{,3}\right)_{,3} = \frac{1}{\chi^2}[\Delta(\omega_{,2})^2 + \delta(\omega_{,3})^2], \tag{52}$$

$$\left(\frac{\Delta}{\chi^2}\omega_{,2}\right)_{,2} + \left(\frac{\delta}{\chi^2}\omega_{,3}\right)_{,3} = 0; \tag{53}$$

或等价地,

$$\chi[(\Delta\chi_{,2})_{,2} + (\delta\chi_{,3})_{,3}] = \Delta[(\chi_{,2})^2 + (\omega_{,2})^2] + \delta[(\chi_{,3})^2 + (\omega_{,3})^2], \tag{54}$$

$$\chi[(\Delta\omega_{,2})_{,2} + (\delta\omega_{,3})_{,3}] = 2\Delta\chi_{,2}\omega_{,2} + 2\delta\chi_{,3}\omega_{,3}. \tag{55}$$

现在设

$$X = \chi+\omega \text{ 和 } Y = \chi-\omega, \tag{56}$$

得到对称的方程对

$$\frac{1}{2}(X+Y)[(\Delta X_{,2})_{,2} + (\delta X_{,3})_{,3}] = \Delta(X_{,2})^2 + \delta(X_{,3})^2, \tag{57}$$

$$\frac{1}{2}(X+Y)[(\Delta Y_{,2})_{,2} + (\delta Y_{,3})_{,3}] = \Delta(Y_{,2})^2 + \delta(Y_{,3})^2. \tag{58}$$

方程 (8) 和 (16) (它们决定着 $\mu_2+\mu_3$) 在经过一些初等的简化后变为

$$-\frac{\mu}{\delta}(\mu_3+\mu_2)_{,2} + \frac{r-M}{\Delta}(\mu_3+\mu_2)_{,3} = \frac{2}{(X+Y)^2}(X_{,2}Y_{,3} + Y_{,2}X_{,3}) \tag{59}$$

和

$$2(r-M)(\mu_3+\mu_2)_{,2}+2\mu(\mu_3+\mu_2)_{,3}$$
$$=\frac{4}{(X+Y)^2}(\Delta X_{,2}Y_{,2}-\delta X_{,3}Y_{,3})-3\frac{(r-M)^2-\Delta}{\Delta}+\frac{\mu^2+\delta}{\delta}. \tag{60}$$

现已显然, 一旦方程 (57) 和 (58) 已对 X 和 Y 解出, 对 $(\mu_2+\mu_3)$ 的解就能通过简单地求积分由方程 (59) 和 (60) 得到.

方程 (57)—(60) 能被写为更对称的形式, 办法是将 r 变为新变量,

当
$$\left.\begin{aligned}\eta&=(r-M)/(M^2-a^2)^{1/2}\\ \Delta&=(M^2-a^2)(\eta^2-1).\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

[281] 于是得出

$$\frac{1}{2}(X+Y)\{[(\eta^2-1)X_{,\eta}]_{,\eta}+[(1-\mu^2)X_{,\mu}]_{,\mu}\}$$
$$=(\eta^2-1)(X_{,\eta})^2+(1-\mu^2)(X_{,\mu})^2, \tag{62}$$
$$\frac{1}{2}(X+Y)\{[(\eta^2-1)Y_{,\eta}]_{,\eta}+[(1-\mu^2)Y_{,\mu}]_{,\mu}\}$$
$$=(\eta^2-1)(Y_{,\eta})^2+(1-\mu^2)(Y_{,\mu})^2, \tag{63}$$
$$-\frac{\mu}{1-\mu^2}(\mu_3+\mu_2)_{,\eta}+\frac{\eta}{\eta^2-1}(\mu_3+\mu_2)_{,\mu}=\frac{2}{(X+Y)^2}(X_{,\eta}Y_{,\mu}+Y_{,\eta}X_{,\mu}), \tag{64}$$
$$2\eta(\mu_3+\mu_2)_{,\eta}+2\mu(\mu_3+\mu_2)_{,\mu}$$
$$=\frac{4}{(X+Y)^2}[(\eta^2-1)X_{,\eta}Y_{,\eta}-(1-\mu^2)X_{,\mu}Y_{,\mu}]-\frac{3}{\eta^2-1}+\frac{1}{1-\mu^2}. \tag{65}$$

方程 (62) 和 (63) 的能通过检验而发现一些特别解的便利形式可由下列变换得到,

$$X=\frac{1+F}{1-F}\text{ 和 }Y=\frac{1+G}{1-G}. \tag{66}$$

于是有

$$(1-FG)\{[(\eta^2-1)F_{,\eta}]_{,\eta}+[(1-\mu^2)F_{,\mu}]_{,\mu}\}$$
$$=-2G[(\eta^2-1)(F_{,\eta})^2+(1-\mu^2)(F_{,\mu})^2], \tag{67}$$

和

$$(1-FG)\{[(\eta^2-1)G_{,\eta}]_{,\eta}+[(1-\mu^2)G_{,\mu}]_{,\mu}\}$$
$$=-2F[(\eta^2-1)(G_{,\eta})^2+(1-\mu^2)(G_{,\mu})^2]. \tag{68}$$

度规函数 χ 和 ω 由下式与 F 和 G 相关联,

$$\chi=\frac{1-FG}{(1-F)(1-G)}\text{ 和 }\omega=\frac{F-G}{(1-F)(1-G)}. \tag{69}$$

可以附带地注意到, 方程 (67) 和 (68) 允许简单解

$$F = -p\eta - q\mu \text{ 和 } G = -p\eta + q\mu, \tag{70}$$

其中 p 和 q 是由下列条件限制的实常数,

$$p^2 - q^2 = 1. \tag{70'}$$

(a) 支配 X 和 Y 的方程的一些性质

令 (X, Y) 为方程 (62) 和 (63) 的一个解. 那么以下所列也都是解.

(i) (Y, X) 也是一个解. 对这个解 χ 保持不变, 而 ω 变号, 这是一个相当于令 $\varphi \to -\varphi$ 的无实质意义的改变.

(ii) $(X + c, Y - c)$, 其中 c 是一个任意常量, 也是一个解. 对这个解 χ 再次保持不变, 而 $\omega \to \omega + 2c$, 这也再次是一个无实质意义的改变, 相当于令 $\varphi \to \varphi - 2ct$. [282]

(iii) (X^{-1}, Y^{-1}) 和 (Y^{-1}, X^{-1}) 也是解. 这是来自于方程 (67) 和 (68) 对 F 和 G 符号同时改变 (其时 X 和 Y 被代之以其倒数) 的不变性. 为探求这些新解的意义, 将由解 (Y^{-1}, X^{-1}) 导出的度规函数用 $\sim$ 号与由解 (X, Y) 导出的函数区分, 即

$$\left.\begin{aligned} 2\tilde{\chi} &= \left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{X}\right) = \frac{X+Y}{XY} = \frac{2\chi}{\chi^2 - \omega^2} \\ \text{和} \qquad 2\tilde{\omega} &= \left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{X}\right) = \frac{X-Y}{XY} = \frac{2\omega}{\chi^2 - \omega^2}. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

与方程 (25) 的比较表明, 由 (Y^{-1}, X^{-1}) 导出的解是由 (X, Y) 导出的解的共轭. 所以, 变换 $(X, Y) \to (Y^{-1}, X^{-1})$ 等价于共轭.

(iv) 综合 (i)、(ii) 和 (iii) 的结果得出, 如果 (X, Y) 是一个解, 那么

$$[X/(1 + cX), Y/(1 - cY)]$$

也是解, 其中 c 是任意常量. 但由这些变换并不能得到超出共轭的真正新解.

(b) 方程的替代形式

回到方程 (7)、(12) 和 (13), 由对规范的选择和对 e^{β} 的解, 它们变为

$$\left(e^{4\psi}\frac{\omega_{,r}}{\sin\theta}\right)_{,r} + \left(e^{4\psi}\frac{\omega_{,\theta}}{\Delta\sin\theta}\right)_{,\theta} = 0, \tag{72}$$

$$[(\Delta\sin\theta)\nu_{,r}]_{,r} + [(\sin\theta)\nu_{,\theta}]_{,\theta} = +\frac{e^{4\psi}}{2\Delta\sin\theta}[\Delta(\omega_{,r})^2 + (\omega_{,\theta})^2], \tag{73}$$

$$[(\Delta\sin\theta)\psi_{,r}]_{,r} + [(\sin\theta)\psi_{,\theta}]_{\theta} = -\frac{e^{4\psi}}{2\Delta\sin\theta}[\Delta(\omega_{,r})^2 + (\omega_{,\theta})^2]. \tag{74}$$

由方程 (72) 很明显, ω 能由下列形式的 "势" Y 导出,

$$e^{4\psi}\frac{\omega_{,r}}{\sin\theta} = Y_{,\theta} \text{ 和 } e^{4\psi}\frac{\omega_{,\theta}}{\Delta\sin\theta} = -Y_{,r}, \tag{75}$$

[283] 以致有

$$\omega_{,r} = +e^{-4\psi}Y_{,\theta}\sin\theta \text{ 和 } \omega_{,\theta} = -e^{-4\psi}Y_{,r}\Delta\sin\theta. \tag{76}$$

最后这个方程的可积条件是

$$(e^{-4\psi}\Delta Y_{,r})_{,r} + \frac{1}{\sin\theta}(e^{-4\psi}Y_{,\theta}\sin\theta)_{,\theta} = 0; \tag{77}$$

而方程 (74) 借助于 Y 来表示时成为

$$(\Delta\psi_{,r})_{,r} + \frac{1}{\sin\theta}(\psi_{,\theta}\sin\theta)_{,\theta} = -\frac{1}{2}e^{-4\psi}[(Y_{,\theta})^2 + \Delta(Y_{,r})^2]. \tag{78}$$

现在令

$$X = e^{2\psi}, \tag{79}$$

并回复到变量 η 和 μ, 有方程

$$\left[(\eta^2-1)\frac{X_{,\eta}}{X}\right]_{,\eta} + \left[(1-\mu^2)\frac{X_{,\mu}}{X}\right]_{,\mu}$$

$$= -\frac{1}{X^2}[(\eta^2-1)(Y_{,\eta})^2 + (1-\mu^2)(Y_{,\mu})^2], \tag{80}$$

$$\left[(\eta^2-1)\frac{Y_{,\eta}}{X^2}\right]_{,\eta} + \left[(1-\mu^2)\frac{Y_{,\mu}}{X^2}\right]_{,\mu} = 0. \tag{81}$$①

符合时空渐近平坦要求的方程 (80) 和 (81) 的解当 $\eta\to\infty$ 时的行为可如下得出.

对现在的目的, 对渐近平坦要求的下列表述是充足的,

$$e^{2\nu} \to 1 - \frac{2M^*}{r} + O(r^{-2}) \text{ 和 } \omega \to \frac{2J}{r^3} + O(r^{-4}) \text{ 当 } r\to\infty, \tag{82}$$

其中 M^* (并不必要与 Δ 的定义中引入的 M 相同, 见第 266 页脚注) 和 J 表示源的质量和角动量. 可见上述行为与方程 (73) 一致, 而且即将看到它们也与方程 (80) 和 (81) 一致.

用变量 η, 所要求的行为是

$$e^{2\nu} \to 1 - \frac{2M^*}{(M^2-a^2)^{1/2}\eta} + O(\eta^{-2}) \text{ 和 } \omega \to \frac{J}{(M^2-a^2)^{3/2}\eta^3} + O(\eta^{-4}). \tag{83}$$

[284] 由于

① 由于将没有机会同时运用方程 (62)、(63) 和 (80)、(81), 在这两对方程中 X、Y 的不同意义应不会引起混淆.

$$e^{2\psi+2\nu} = Xe^{2\nu} = \Delta(1-\mu^2) = (M^2-a^2)(\eta^2-1)(1-\mu^2), \tag{84}$$

结论是

$$X \to (M^2-a^2)(1-\mu^2)\eta^2\left[1+\frac{2M^*}{(M^2-a^2)^{1/2}\eta}\right]+O(1). \tag{85}$$

现在由方程 (81) 可得, 与 X 的这个行为一致,

$$Y \to 2J\mu(3-\mu^2)+O(\eta^{-1}); \tag{86}$$

且可验证, 借助于方程 (75) 和 (85) 导出的 ω 的相应行为与随 $r \to \infty$ 有 $\omega \to 2Jr^{-3}$ 的要求一致.

(c) 恩斯特方程

基本方程还有一种形式, 它在发现爱因斯坦方程的所有定常态轴对称真空解的相关研究中起有核心作用, 是由恩斯特给出的. 此外, 他的方程还给出了导致克尔度规的最短途、最简单的路径.

首先看到, 方程 (53) 允许 ω 由下面形式的势 Φ 导出:

$$\Phi_{,2} = \frac{\delta}{\chi^2}\omega_{,3} \text{ 和 } \Phi_{,3} = -\frac{\Delta}{\chi^2}\omega_{,2}. \tag{87}$$

支配势 Φ 的方程是

$$\left(\frac{\chi^2}{\delta}\Phi_{,2}\right)_{,2}+\left(\frac{\chi^2}{\Delta}\Phi_{,3}\right)_{,3}=0; \tag{88}$$

而方程 (52) 在用 Φ 表示时成为

$$[\Delta(\lg\chi)_{,2}]_{,2}+[\delta(\lg\chi)_{,3}]_{,3} = \frac{\chi^2}{\Delta}(\Phi_{,3})^2+\frac{\chi^2}{\delta}(\Phi_{,2})^2. \tag{89}$$

令

$$\Psi = \sqrt{(\Delta\delta)}/\chi, \tag{90}$$

可得方程 (88) 和 (89) 能简化为 (见方程 (54) 和 (55))

$$\Psi[(\Delta\Psi_{,2})_{,2}+(\delta\Psi_{,3})_{,3}] = \Delta[(\Psi_{,2})^2-(\Phi_{,2})^2]+\delta[(\Psi_{,3})^2-(\Phi_{,3})^2], \tag{91}$$

$$\Psi[(\Delta\Phi_{,2})_{,2}+(\delta\Phi_{,3})_{,3}] = 2\Delta\Psi_{,2}\Phi_{,2}+2\delta\Psi_{,3}\Phi_{,3}. \tag{92}$$

现在将 Ψ 和 Φ 表示为下列复数函数的实部和虚部,

[285]

$$Z = \Psi+\mathrm{i}\Phi, \tag{93}$$

可将方程 (91) 和 (92) 合并为单个方程

$$\mathrm{Re}\,(Z)[(\Delta Z_{,2})_{,2}+(\delta Z_{,3})_{,3}] = \Delta(Z_{,2})^2+\delta(Z_{,3})^2. \tag{94}$$

由方程 (94) 与支配 X 和 Y 的方程对 (57) 和 (58) 的密切相似性可得, 方程 (94) 也必定具有与 § (*a*) 中对方程 (57) 和 (58) 所列举的相类似的性质. 于是, 如果 Z 是一个解, 那么 Z^{-1} 也是; 而且更一般地, $Z/(1+\mathrm{i}cZ)$ 也是, 其中 c 是任意实常数. 变换 $Z \to Z/(1+\mathrm{i}cZ)$ 等价于通常所称的 "厄勒 (*Ehler*) 变换". 厄勒变换与支配 X 和 Y 的方程允许的相应变换不同, 它确实给出了实质上的新解, 是从包括从 Z 到度规函数的积分的情形中导出的.

通过变换,

$$Z = -\frac{1+E}{1-E}, \tag{95}$$

(与变换 (66) 类似), 方程 (94) 变为

$$(1-EE^*)[(\Delta E_{,2})_{,2} + (\delta E_{,3})_{,3}] = -2E^*[\Delta(E_{,2})^2 + \delta(E_{,3})^2]. \tag{96}$$

这就是恩斯特方程.

已经看到, 与解 (χ,ω) 相关联, 有共轭解,

$$\widetilde{\chi} = \frac{\chi}{\chi^2-\omega^2} \text{ 和 } \widetilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2-\omega^2}. \tag{97}$$

相应地, 可导出共轭恩斯特方程. 定义

$$\widetilde{\Psi} = \frac{\sqrt{(\Delta\delta)}}{\widetilde{\chi}} = e^{\psi+\nu}\frac{\chi^2-\omega^2}{\chi} = e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi}; \tag{98}$$

$$\widetilde{\Phi}_{,2} = \frac{\delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,3} = \frac{\widetilde{\Psi}^2}{\Delta}\widetilde{\omega}_{,3}; \quad \widetilde{\Phi}_{,3} = -\frac{\Delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,2} = -\frac{\widetilde{\Psi}^2}{\delta}\widetilde{\omega}_{,2}; \tag{99}$$

和

$$\widetilde{Z} = \widetilde{\Psi} + \mathrm{i}\widetilde{\Phi} = -\frac{1+\widetilde{E}}{1-\widetilde{E}}, \tag{100}$$

有

$$(1-\widetilde{E}\widetilde{E}^*)[(\Delta\widetilde{E}_{,2})_{,2} + (\delta\widetilde{E}_{,3})_{,3}] = -2\widetilde{E}^*[\Delta(\widetilde{E}_{,2})^2 + \delta(\widetilde{E}_{,3})^2]; \tag{101}$$

或, 回复到变量 η 和 μ, 有

$$\begin{aligned}(1-\widetilde{E}\widetilde{E}^*)\{&[(\eta^2-1)\widetilde{E}_{,\eta}]_{,\eta} + [(1-\mu^2)\widetilde{E}_{,\mu}]_{,\mu}\}\\ &= -2\widetilde{E}^*[(\eta^2-1)(\widetilde{E}_{,\eta})^2 + (1-\mu^2)(\widetilde{E}_{,\mu})^2].\end{aligned} \tag{102}$$

[286] 度规函数 $\widetilde{\Psi}$ 和 $\widetilde{\Phi}$ 可用 $\widetilde{E}$ 给出如下,

$$\widetilde{\Psi} = \mathrm{Re}\,\widetilde{Z} = -\frac{1-\widetilde{E}\widetilde{E}^*}{|1-\widetilde{E}|^2} \text{ 和 } \widetilde{\Phi} = \mathrm{Im}\,\widetilde{Z} = \frac{\mathrm{i}(\widetilde{E}-\widetilde{E}^*)}{|1-\widetilde{E}|^2}. \tag{103}$$

54. 克尔度规的推导

可以简单地验证, 恩斯特方程 (102) 有基本解 (与方程 (67) 和 (68) 的解 (70) 类似)

$$\widetilde{E} = -p\eta - \mathrm{i}q\mu, \tag{104}$$

其中

$$p^2 + q^2 = 1 \tag{105}$$

而 p 和 q 是实常数. (为下面的便利在解 (104) 中已选写为 $-p$ 和 $-q$.) 对 $\widetilde{Z}$ 的相应解是

$$\widetilde{Z} = \widetilde{\Psi} + \mathrm{i}\widetilde{\Phi} = -\frac{1 - p\eta - \mathrm{i}q\mu}{1 + p\eta + \mathrm{i}q\mu}. \tag{106}$$

分离 $\widetilde{Z}$ 的实部和虚部, 有

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\Psi} &= \frac{p^2\eta^2 + q^2\mu^2 - 1}{1 + 2p\eta + p^2\eta^2 + q^2\mu^2} = \frac{p^2(\eta^2 - 1) - q^2(1 - \mu^2)}{(p\eta + 1)^2 + q^2\mu^2}, \\ \text{和} \quad \widetilde{\Phi} &= \frac{2q\mu}{(p\eta + 1)^2 + q^2\mu^2}, \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

或, 回到变量 r,

$$\widetilde{\Psi} = \frac{\Delta - [q^2(M^2 - a^2)/p^2]\delta}{[(r - M) + (M^2 - a^2)^{1/2}/p]^2 + [q^2(M^2 - a^2)/p^2]\mu^2}, \tag{108}$$

和

$$\widetilde{\Phi} = \frac{2[q(M^2 - a^2)/p]\mu}{[(r - M) + (M^2 - a^2)^{1/2}/p]^2 + [q^2(M^2 - a^2)/p^2]\mu^2}. \tag{109}$$

由与条件 (105) 一致的选择,

$$p = (M^2 - a^2)^{1/2}/M \text{ 和 } q = a/M, \tag{110}$$

对 $\widetilde{\Psi}$ 和 $\widetilde{\Phi}$ 的解可观地简化为

$$\widetilde{\Psi} = \frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2\delta) \text{ 和 } \widetilde{\Phi} = \frac{2aM\mu}{\rho^2}, \tag{111}$$

其中

$$\rho^2 = r^2 + a^2\mu^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{112}$$

现在, 由方程 (99), [287]

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\Phi}_{,2} &= -\frac{4aMr\mu}{\rho^4} = \frac{\widetilde{\Psi}^2}{\Delta}\widetilde{\omega}_{,3} = \frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4\Delta}\widetilde{\omega}_{,3}, \\ \text{和} \quad \widetilde{\Phi}_{,3} &= \frac{2aM}{\rho^4}(r^2 - a^2\mu^2) = -\frac{\widetilde{\Psi}^2}{\delta}\widetilde{\omega}_{,2} = -\frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4\delta}\widetilde{\omega}_{,2}. \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

相应地,

$$\widetilde{\omega}_{,3} = -\frac{4aMr\mu\Delta}{(\Delta - a^2\delta)^2} \text{ 和 } \widetilde{\omega}_{,2} = -\frac{4aM(r^2 - a^2\mu^2)\delta}{(\Delta - a^2\delta)^2}; \tag{114}$$

而对 $\widetilde{\omega}$ 的解是

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} = \frac{2aMr\delta}{\Delta - a^2\delta}. \tag{115}$$

还有 (见方程 (98))

$$\widetilde{\Psi} = e^{2\psi}(\chi^2 - \omega^2) = e^{2\nu} - \omega^2 e^{2\psi} = \frac{1}{\rho^2}(\Delta - a^2\delta). \tag{116}$$

利用最后这个方程, 可写出

$$\omega = \frac{2aMr\delta}{\Delta - a^2\delta}(\chi^2 - \omega^2) = \frac{2aMr\delta}{\rho^2}e^{-2\psi}. \tag{117}$$

将方程 (116) 和 (117) 结合而给出

$$\frac{\Delta - a^2\delta}{\rho^2}e^{2\psi} = e^{2\beta} - \omega^2 e^{4\psi} = \frac{\delta}{\rho^4}(\Delta\rho^4 - 4a^2M^2r^2\delta), \tag{118}$$

其中已用了 $e^{2\beta}(= \Delta\delta)$ 的知识. 从方程 (117) 和 (118) 得出的 ω 和 $e^{2\psi}$ 的解可得益于下列容易验证的等式而成为简单的形式:

$$[(r^2 + a^2) \mp a\sqrt{(\Delta\delta)}](\sqrt{\Delta} \pm a\sqrt{\delta}) = \rho^2\sqrt{\Delta} \pm 2aMr\sqrt{\delta}, \tag{119}$$

和

$$\Sigma^2(\Delta - a^2\delta) = \rho^4\Delta - 4a^2M^2r^2\delta, \tag{120}$$

其中

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\delta. \tag{121}$$

于是, 用等式 (120), 由方程 (118) 得

$$e^{2\psi} = \frac{\delta\Sigma^2}{\rho^2}. \tag{122}$$

现在由方程 (117) 得

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2}. \tag{123}$$

[288] 且有

$$e^{2\nu} = e^{2\beta - 2\psi} = \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}, \tag{124}$$

和

$$\chi = e^{-\psi + \nu} = \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2\sqrt{\delta}}. \tag{125}$$

下一步, 用等式 (119), 由方程 (123) 和 (125) 得

$$X = \chi + \omega = \frac{\sqrt{\Delta} + a\sqrt{\delta}}{[(r^2+a^2) + a\sqrt{(\Delta\delta)}]\sqrt{\delta}}. \tag{126}$$

和

$$Y = \chi - \omega = \frac{\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\delta}}{[(r^2+a^2) - a\sqrt{(\Delta\delta)}]\sqrt{\delta}}. \tag{127}$$

最后, 为完成求解, 转到方程 (59) 和 (60). 这两个方程的简化可由下列 X 和 Y 的导数式而变得容易:

$$\left.\begin{aligned}
X_{,2} &= \frac{1}{[(r^2+a^2)+a\sqrt{(\Delta\delta)}]^2\sqrt{(\Delta\delta)}}[\rho^2(r-M)-2r(\sqrt{\Delta}+a\sqrt{\delta})\sqrt{\Delta}],\\
X_{,3} &= \frac{\mu\sqrt{\Delta}}{[(r^2+a^2)+a\sqrt{(\Delta\delta)}]^2\delta^{3/2}}[(r^2+a^2)+a^2\delta+2a\sqrt{(\Delta\delta)}],\\
Y_{,2} &= \frac{1}{[(r^2+a^2)-a\sqrt{(\Delta\delta)}]^2\sqrt{(\Delta\delta)}}[\rho^2(r-M)-2r(\sqrt{\Delta}-a\sqrt{\delta})\sqrt{\Delta}],\\
Y_{,3} &= \frac{\mu\sqrt{\Delta}}{[(r^2+a^2)-a\sqrt{(\Delta\delta)}]^2\delta^{3/2}}[(r^2+a^2)+a^2\delta-2a\sqrt{(\Delta\delta)}].
\end{aligned}\right\} \tag{128}$$

用上述式子, 方程 (59) 和 (60) 变为

$$-\frac{\mu}{\delta}(\mu_3+\mu_2)_{,2} + \frac{r-M}{\Delta}(\mu_3+\mu_2)_{,3} = \frac{\mu}{\rho^2\Delta\delta}[(r-M)(\rho_-^2+2a^2\delta)-2r\Delta] \tag{129}$$

和

$$2(r-M)(\mu_3+\mu_2)_{,2} + 2\mu(\mu_3+\mu_2)_{,3} = 4 - \frac{2(r-M)^2}{\Delta} - \frac{4rM}{\rho^2}. \tag{130}$$

不难验证这些方程的解是

$$e^{\mu_3+\mu_2} = \frac{\rho^2}{\sqrt{\Delta}}; \tag{131}$$

又由于 $e^{\mu_3-\mu_2} = \sqrt{\Delta}$ (由规范选择), e^{μ_3} 和 e^{μ_2} 的解分别是 [289]

$$e^{2\mu_2} = \rho^2/\Delta \text{ 和 } e^{2\mu_3} = \rho^2. \tag{132}$$

现已完成所有度规系数的解; 度规是

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2\frac{\Delta}{\Sigma^2}(\mathrm{d}t)^2 - \frac{\Sigma^2}{\rho^2}\left(\mathrm{d}\varphi - \frac{2aMr}{\Sigma^2}\mathrm{d}t\right)^2\sin^2\theta - \frac{\rho^2}{\Delta}(\mathrm{d}r)^2 - \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2. \tag{133}$$

这就是克尔度规. 其协变和逆变形式是:

$$(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1-2Mr/\rho^2 & 0 & 0 & 2aMr\sin^2\theta/\rho^2 \\ 0 & -\rho^2/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 2aMr\sin^2\theta/\rho^2 & 0 & 0 & -[(r^2+a^2)+2a^2Mr\sin^2\theta/\rho^2]\sin^2\theta \end{vmatrix} \tag{134}$$

$$(g^{ij}) = \begin{vmatrix} \Sigma^2/\rho^2\Delta & 0 & 0 & 2aMr/\rho^2\Delta \\ 0 & -\Delta/\rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\rho^2 & 0 \\ 2aMr/\rho^2\Delta & 0 & 0 & -(\Delta - a^2\sin^2\theta)/\rho^2\Delta\sin^2\theta \end{vmatrix}. \tag{135}$$

可见, 当 $a=0$, 度规 (133) 简化为标准形式的史瓦西度规. 而且, 由各个度规系数的渐近行为,

$$\left.\begin{aligned} &e^{2\nu} \to 1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-2}), e^{2\psi} \to r^2\sin^2\theta + O(r), \omega \to \frac{2aM}{r^3} + O(r^{-4}), \\ &e^{-2\mu_2} \to 1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-2}), \text{和 } e^{2\mu_3} \to r^2 + O(r) \quad (r\to\infty), \end{aligned}\right\} \tag{136}$$

可进一步清楚看到, 度规对 $r\to\infty$ 趋于史瓦西度规. 结论是, 克尔度规是渐近平坦的, 而参量 M 应证认为黑洞的质量. 而且, 由对 ω 的表示惯性系拖曳的解释得出结论, 从其渐近行为 ($\omega \to 2aMr^{-3}$) 可知 a 应被解释为黑洞的单位质量的角动量.

最后注意, 度规系数之间的下列代数关系将是有用的:

$$a - (r^2+a^2)\omega = a\frac{\Delta\rho^2}{\Sigma^2} \text{ 和 } 1 - a\omega\sin^2\theta = (r^2+a^2)\frac{\rho^2}{\Sigma^2}. \tag{137}$$

[290]

(a) 黎曼张量的四次分量

原则上并无困难来将克尔解的各个度规系数代入方程 (3) 所列的表示式, 从而得出黎曼张量的分量. 所需的演算可以更简单, 只要首先注意到, 除方程 (4) 所列的为零分量和下列循环等式外,

$$R_{1230} + R_{1302} + R_{1023} = 0 \tag{138}$$

还有下列作为里奇张量为零的结果的关系:

$$\left.\begin{aligned} &R_{1213} = -R_{3002}; \quad R_{1330} = -R_{1220}; \quad R_{0202} = -R_{1313}; \\ &R_{0303} = -R_{1212}; \quad R_{2323} = -R_{1010} = R_{0202} + R_{0303}. \end{aligned}\right\} \tag{139}$$

下列各个度规函数的导数表还能进一步有助于演算:

$$\mu_{2,\theta} = -\frac{a^2 \sin\theta\cos\theta}{\rho^2} = \mu_{3,\theta}; \quad \mu_{3,2} = \frac{r}{\rho^2};$$

$$(\mu_2+\mu_3)_{,2} = \frac{2r}{\rho^2} - \frac{r-M}{\Delta}, \quad (\mu_2+\mu_3)_{,\theta} = -\frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2};$$

$$\psi_{,2} = \frac{1}{\Sigma^2}[2r(r^2+a^2) - a^2(r-M)\sin^2\theta] - \frac{r}{\rho^2} = -\nu_{,2} + \frac{r-M}{\Delta},$$

$$\psi_{,\theta} = \cot\theta + a^2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{\Delta}{\Sigma^2}\right)\sin\theta\cos\theta = -\nu_{,3} + \cot\theta;$$

$$\psi_{,2,\theta} = 2a^2\left\{-\frac{r-M}{\Sigma^2} + \frac{\Delta}{\Sigma^4}[2r(r^2+a^2) - a^2(r-M)\sin^2\theta] - \frac{r}{\rho^4}\right\}\sin\theta\cos\theta$$
$$= -\nu_{,2,\theta},$$

$$\psi_{,\theta,\theta} = -\mathrm{cosec}^2\theta - \frac{a^2\Delta\cos 2\theta}{\Sigma^2} - \frac{2a^4\Delta^2}{\Sigma^4}\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$+\frac{a^2\cos 2\theta}{\rho^2} + \frac{2a^4}{\rho^4}\sin^2\theta\cos^2\theta = -\nu_{,\theta,\theta} - \mathrm{cosec}^2\theta;$$

$$\omega_{,\theta} = +\frac{4a^3Mr\Delta}{\Sigma^4}\sin\theta\cos\theta,$$

$$\omega_{,2} = -\frac{2aM}{\Sigma^4}[(r^2+a^2)(3r^2-a^2) - a^2(r^2-a^2)\sin^2\theta]. \tag{140}$$

可以看到, 在推导下列公式时所涉及的计算并不是太过分:

[291]

$$R_{1023} = -\frac{\sqrt{(\Delta\delta)}}{4\rho^2\chi^2}(X_{,3}Y_{,2} - X_{,2}Y_{,3})$$
$$= -\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2 - a^2\cos^2\theta) = -(R_{1230} + R_{1302}),$$

$$R_{1230} - R_{1302} = \frac{\Sigma^2\sin\theta'}{2\rho^4}[-\omega_{,r}(\mu_2+\mu_3)_{,\theta} - \omega_{,\theta}(\mu_2+\mu_3)_{,r}$$
$$+e^{-4\psi}\left(e^{4\psi}\frac{\omega_{,r}}{\sin\theta}\right)_{,\theta}\sin\theta + e^{-4\psi}\left(e^{4\psi}\frac{\omega_{,\theta}}{\Delta\sin\theta}\right)_{,r}\Delta\sin\theta\Big]$$
$$= -3\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2 - a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[(r^2+a^2)^2 + a^2\Delta\sin^2\theta],$$

$$R_{2323} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho^2}\left[\left(\frac{\mu_{2,3}}{\sqrt{\Delta}}\right)_{,3} + (\mu_{3,2}\sqrt{\Delta})_{,2}\right]$$
$$= \frac{Mr}{\rho^6}(r^2 - 3a^2\cos^2\theta) = R_{0202} + R_{0303} = -R_{1010},$$

$$2R_{1330} = e^{-2\psi-\mu_3}(e^{3\psi-\nu-\mu_3}\omega_{,3})_{,3} + e^{\psi-2\mu_2-\nu}\omega_{,2}\mu_{3,2}$$
$$= -2\frac{Mr}{\rho^6}(r^2 - 3a^2\cos^2\theta)\frac{3a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta,$$

$$2R_{1213}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\rho^2}[(3\psi+\nu)_{,3,2}+3\psi_{,3}\psi_{,2}+\nu_{,3}\nu_{,2}-(3\psi+\nu)_{,2}\mu_{2,3}-(3\psi+\nu)_{,3}\mu_{3,2}]$$
$$=-2\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta)\frac{3a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta,$$

$$3R_{1313}-R_{3030}=e^{-2\mu_3}[3\psi_{,3,3}+\nu_{,3,3}+3(\psi_{,3})^2+(\nu_{,3})^2-(3\psi+\nu)_{,3}\mu_{3,3}]$$
$$+e^{-2\mu_2}(3\psi+\nu)_{,2}\mu_{3,2}$$
$$=-\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[5(r^2+a^2)^2+a^2\Delta\sin^2\theta]. \quad (141)$$

最后, 借助关系 (138) 和 (139) 得到

$$R_{1023}=-\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta),$$
$$R_{1230}=-\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[(r^2+a^2)^2+2a^2\Delta\sin^2\theta],$$
$$R_{1302}=+\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[2(r^2+a^2)^2+a^2\Delta\sin^2\theta],$$

[292]
$$-R_{3002}=R_{1213}=-\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta)\frac{3a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta,$$
$$-R_{1220}=R_{1330}=-\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)\frac{3a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta,$$
$$-R_{1010}=R_{2323}=+\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)=R_{0202}+R_{0303},$$
$$-R_{1313}=R_{0202}=+\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[2(r^2+a^2)^2+a^2\Delta\sin^2\theta],$$
$$-R_{1212}=R_{0303}=-\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)\frac{1}{\Sigma^2}[(r^2+a^2)^2+2a^2\Delta\sin^2\theta]. \quad (142)$$

可见黎曼张量的这些非零分量只对 $\theta=\pi/2$ 和 $r=0$ 变为奇异, 所以这是克尔时空的唯一奇点.

55. 克尔度规的唯一性; 罗宾逊和卡特的定理

已经看到, 对一个定常态、轴对称、渐近平坦时空赋予一个平滑圆凸的事件视界的克尔度规, 只由两个参量来表征, 即质量 M 和角动量 $J(=aM)$. 克尔度规作为自然界黑洞描述的唯一性由罗宾逊定理陈述: 爱因斯坦真空方程的有一个平滑圆凸事件视界的定常态轴对称解, 是渐近平坦的, 在视界以外是非奇异的, 是由两个参量并且仅由这两个参量, 即质量和角动量, 唯一地决定.

罗宾逊定理的证明是基于从下列方程 (见方程 (80) 和 (81)) 导出的等式 (见下面方程 (156)),

$$E = 0 \text{ 和 } F = 0, \tag{143}$$

其中

$$E(X,Y) = \left[(\eta^2-1)\frac{X_{,\eta}}{X}\right]_{,\eta} + (\eta^2-1)\frac{Y_{,\eta}^2}{X^2} + \left[(1-\mu^2)\frac{X_{,\mu}}{X}\right]_{,\mu} + (1-\mu^2)\frac{Y_{,\mu}^2}{X^2}, \tag{144}$$

和

$$F(X,Y) = \left[(\eta^2-1)\frac{Y_{,\eta}}{X^2}\right]_{,\eta} + \left[(1-\mu^2)\frac{Y_{,\mu}}{X^2}\right]_{,\mu}. \tag{145}$$

记得在推导方程 (80) 和 (81) 时, 运用了处理规范的自由而指定事件视界出现于 $\eta = 1$. 此外, 由算符 E 和 F 的表示式 (144) 和 (145) 很显然, 如果 (X,Y) 是方程的解, 那么 (cX,cY) 也是, 其中 c 是任意实常数. 基于这些就很清楚, 可以不失一般性地假定, 所有有关的对 X 的解在无穷远处都有同样的渐近行为 (见方程 (85)), [293]

$$X \to (1-\mu^2)\eta^2 + O(\eta) \quad (\eta \to \infty). \tag{146}$$

对解具有行为 (146) 的这一限制清楚地等价于考虑相同质量的解.

Y 的相关渐近行为是 (见方程 (86))

$$Y \to 2J\mu(3-\mu^2) + O(\eta^{-1}) \quad (\eta \to \infty), \tag{147}$$

其中 J 是角动量.

除渐近平坦行为 (146) 和 (147) 外, 还要求解 X 和 Y 在轴 ($\mu = \pm 1$) 上和视界 ($\eta = 1$) 上平滑和正常, 在外部 ($\eta > 1$) 非奇异. 似乎容易做到对同一个给定的 J 有多个解符合这些要求. 但是罗宾逊定理正是要表明, 对任何给定的 J 不可能有多于一个解. 要做的证明是, 如果真有两对解 (X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2) 对应于同一个 J 值, 那么它们必定重合.

假定存在对应于同一个 J 值的两对解 (X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2), 且跟随罗宾逊来考虑函数式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R} = \int_1^\infty \int_{-1}^{+1} \Bigg[& \frac{X_1}{X_2}(Y_2-Y_1)F(X_1,Y_1) + \frac{X_2}{X_1}(Y_1-Y_2)F(X_2,Y_2) \\ & + \frac{1}{2X_1X_2}[(Y_2-Y_1)^2 + (X_2^2-X_1^2)]E(X_1,Y_1) \\ & + \frac{1}{2X_1X_2}[(Y_2-Y_1)^2 + (X_1^2-X_2^2)]E(X_2,Y_2)\Bigg] \mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mu.\end{aligned} \tag{148}$$

由 (X_1, Y_1) 和 (X_2, Y_2) 所满足的方程, R 必定为零. 但现在来证明, 单利用算符 E、F 的定义和加于解上的边界条件, R 能被简化为一个有着正定被积函数的积分. 该简化关键地依赖于两个基本的代数等式, 称为罗宾逊引理.

[294] 罗宾逊引理:

$$\begin{aligned}
\text{I. } & \frac{1}{2X_1^3X_2^3}[X_2(Y_2-Y_1)Y_{1,\eta}+X_1(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2 \\
& +\frac{1}{2X_2^3X_1^3}[X_1(Y_2-Y_1)Y_{2,\eta}+X_2(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2 \\
& =\frac{1}{2X_1^3X_2}(Y_2-Y_1)^2(Y_{1,\eta})^2+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(X_1^2+X_2^2)(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})^2 \\
& +\frac{1}{2X_1X_2^3}(Y_2-Y_1)^2(Y_{2,\eta})^2 \\
& +\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)(Y_2+Y_1)_{,\eta}(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta}), \qquad (149)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II. } & \frac{1}{4X_1^3X_2^3}[(X_2+X_1)(X_1Y_{2,\eta}-X_2Y_{1,\eta})-(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1.\eta})]^2 \\
& +\frac{1}{4X_1^3X_2^3}[(X_2-X_1)(X_1Y_{2,\eta}+X_2Y_{1,\eta}) \\
& -(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta})]^2 \\
& =\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(Y_2-Y_1)^2(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta})^2 \\
& -\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)(Y_2-Y_1)_{,\eta}(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta}) \\
& +\frac{1}{2X_1^3X_2^3}\{(X_1^2+X_2^2)[X_1^2(Y_{2,\eta})^2+X_2^2(Y_{1,\eta})^2]-4X_1^2X_2^2Y_{1,\eta}Y_{2,\eta}\}, \qquad (150)
\end{aligned}$$

以及另外两个等式, 其中对 η 的导数被对 μ 的导数取代.

鉴于在 E 和 F 中 (从而在 R 中) 涉及对 η 的导数的项 (η 项) 和对 μ 的导数的项 (μ 项) 除由 (η^2-1) 取代 (μ^2-1) 外的完全对称性, 这里只对 η 项明晰地指出简化方式. 类似的简化适用于 μ 项.

考虑 R, 分部积分以 F 为因子的项和以 E 的定义中 (见方程 (144)) 方括号里的量为因子的项. 来自 η 项的积分部分是

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta^2-1}{X_1X_2}\Big\{(Y_1-Y_2)_{,\eta}(Y_2-Y_1)+\frac{1}{2X_1X_2}[(Y_2-Y_1)^2(X_2X_{1,\eta}+X_1X_{2,\eta}) \\
& \qquad +(X_2^2-X_1^2)(X_2X_{1,\eta}-X_1X_{2,\eta})]\Big\} \\
[295] \qquad & =\frac{1}{2}(\eta^2-1)\Big\{-\frac{1}{X_1X_2}[(Y_2-Y_1)]^2_{,\eta}+\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)^2(X_2X_{1,\eta}+X_1X_{2,\eta})
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{X_1^2X_2^2}(X_2^2-X_1^2)(X_2X_{1,\eta}-X_1X_{2,\eta})\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}(\eta^2-1)\left[\frac{(Y_2-Y_1)^2+(X_2-X_1)^2}{X_1X_2}\right]_{,\eta}. \tag{151}$$

与对 μ 项分部积分得到的类似项结合, 有

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\left\{(\eta^2-1)\left[\frac{(Y_2-Y_1)^2+(X_2-X_1)^2}{X_1X_2}\right]_{,\eta}\right\}_{\eta=1}^{\eta=+\infty}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\mathrm{d}\eta\left\{(1-\mu^2)\left[\frac{(Y_2-Y_1)^2+(X_2-X_1)^2}{X_1X_2}\right]_{,\mu}\right\}_{\mu=-1}^{\mu=+1}. \tag{152}$$

由要求的函数 X 和 Y 在视界和轴上的平滑性, 在轴 ($\mu=\pm1$) 和视界 ($\eta=1$) 上计算的 (152) 中的项没有幸存. 而由要求的解在无穷远处的渐近行为 (146) 和 (147),

$$\left[\frac{(Y_2-Y_1)^2+(X_2-X_1)^2}{X_1X_2}\right]_{,\eta} \text{ 是 } O(\eta^{-3}). \tag{153}$$①

所以这一项对面积分也没有贡献, 它全然为零.

在分部积分后留下的体积分被积函数的 η 项, 除一个 (η^2-1) 因子外是

$$\frac{1}{2X_1^3X_2}[(Y_2-Y_1)^2+X_2^2-X_1^2](Y_{1,\eta})^2$$
$$+\frac{1}{2X_2^3X_1}[(Y_2-Y_1)^2+X_1^2-X_2^2](Y_{2,\eta})^2$$
$$-\frac{Y_{1,\eta}}{X_1^2}\left[\frac{X_1}{X_2}(Y_2-Y_1)\right]_{,\eta}-\frac{X_{1,\eta}}{X_1}\left\{\frac{1}{2X_1X_2}[(Y_2-Y_1)^2+X_2^2-X_1^2]\right\}_{,\eta}$$
$$+\frac{Y_{2,\eta}}{X_2^2}\left[\frac{X_2}{X_1}(Y_2-Y_1)\right]_{,\eta}-\frac{X_{2,\eta}}{X_2}\left\{\frac{1}{2X_1X_2}[(Y_2-Y_1)^2+X_1^2-X_2^2]\right\}_{,\eta}$$
$$=\frac{1}{2X_1^3X_2}(Y_2-Y_1)^2(Y_{1,\eta})^2+\frac{1}{2X_2^3X_1}(Y_2-Y_1)^2(Y_{2,\eta})^2 \tag{296}$$
$$+\frac{1}{X_1X_2}[(Y_2-Y_1)_{,\eta}]^2$$

① 实际上, 如果是对方程 (146) 中的 $O(\eta^{-1})$ 项作计算, 则结果是 $O(\eta^{-5})$ (见方程 (85)).

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)(Y_2+Y_1)_{,\eta}(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})\\
&-\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)(Y_2-Y_1)_{,\eta}(X_2X_{1,\eta}+X_1X_{2,\eta})\\
&-\frac{1}{X_1^2X_2^2}(X_1X_{1,\eta}-X_2X_{2,\eta})(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})\\
&+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(X_2^2-X_1^2)\{X_2^2[(X_{1,\eta})^2+(Y_{1,\eta})^2]-X_1^2[(X_{2,\eta})^2+(Y_{2,\eta})^2]\}\\
&+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(Y_2-Y_1)^2(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta})^2. \qquad (154)
\end{aligned}
$$

可见 (154) 式右边的一些项与罗宾逊引理 I 右边的一些是共同的. 消去这些项并重整后得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2X_1^3X_2^3}[X_2(Y_2-Y_1)Y_{1,\eta}+X_1(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2\\
&+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}[X_1(Y_2-Y_1)Y_{2,\eta}+X_2(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2\\
&-\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(X_1^2+X_2^2)[X_1^2(X_{2,\eta})^2+X_2^2(X_{1,\eta})^2-2X_1X_2X_{1,\eta}X_{2,\eta}]\\
&+\frac{1}{X_1X_2}[(Y_{1,\eta})^2+(Y_{2,\eta})^2-2Y_{1,\eta}Y_{2,\eta}]\\
&-\frac{1}{X_1^2X_2^2}(Y_2-Y_1)(Y_2-Y_1)_{,\eta}(X_2X_{1,\eta}+X_1X_{2,\eta})\\
&-\frac{1}{X_1^2X_2^2}\{(X_1^2+X_2^2)X_{1,\eta}X_{2,\eta}-X_1X_2[(X_{1,\eta})^2+(X_{2,\eta})^2]\}\\
&+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(Y_2-Y_1)^2(X_2X_{1,\eta}+X_1X_{2,\eta})^2\\
&+\frac{1}{2X_1^3X_2^3}(X_2^2-X_1^2)\{X_2^2[(X_{1,\eta})^2+(Y_{1,\eta})^2]-X_1^2[(X_{2,\eta})^2+(Y_{2,\eta})^2]\}. \qquad (155)
\end{aligned}
$$

[297] 可见上式第 3、4、6 和 8 行中的许多项相抵消; 而余下的项正是罗宾逊引理 II 右边包括的那些. 所以, 除了去掉的因子 (η^2-1) 外, 被积函数的 η 项就是罗宾逊引理中的正定表示. 而 μ 项将对被积函数给出类似贡献. 于是得出简化的结果是

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mu}{4X_1^3X_2^3}\Big[\Big[(\eta^2-1)\Big\{&2[X_2(Y_2-Y_1)Y_{1,\eta}+X_1(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2\\
&+2[X_1(Y_2-Y_1)Y_{2,\eta}+X_2(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})]^2\\
&+[(X_2+X_1)(X_1Y_{2,\eta}-X_2Y_{1,\eta})-(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta})]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+[(X_2-X_1)(X_2Y_{1,\eta}+X_1Y_{2,\eta})-(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\eta}+X_2X_{1,\eta})]^2\Big\}\\
&+(1-\mu^2)\Big\{2[X_2(Y_2-Y_1)Y_{1,\mu}+X_1(X_1X_{2,\mu}-X_2X_{1,\mu})]^2\\
&+2[X_1(Y_2-Y_1)Y_{2,\mu}+X_2(X_1X_{2,\mu}-X_2X_{1,\mu})]^2\\
&+[(X_2+X_1)(X_1Y_{2,\mu}-X_2Y_{1,\mu})-(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\mu}+X_2X_{1,\mu})]^2\\
&+[(X_2-X_1)(X_2Y_{1,\mu}+X_1Y_{2,\mu})\\
&\quad -(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\mu}+X_2X_{1,\mu})]^2\Big\}\Big]\\
&=0. \qquad (156)
\end{aligned}
$$

从方程 (156) 可见, 被积函数中的 8 个正定表示必定一致地为零. 相应地,

$$
\begin{aligned}
(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\alpha}+X_2X_{1,\alpha})&=(X_2+X_1)(X_1Y_{2,\alpha}-X_2Y_{1,\alpha})\\
&=(X_2-X_1)(X_2Y_{1,\alpha}+X_1Y_{2,\alpha}), \qquad (157)
\end{aligned}
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
X_2(Y_2-Y_1)Y_{1,\alpha}&=-X_1(X_1X_{2,\alpha}-X_2X_{1,\alpha}),\\
X_1(Y_2-Y_1)Y_{2,\alpha}&=-X_2(X_1X_{2,\alpha}-X_2X_{1,\alpha}).
\end{aligned}\right\}(\alpha=\eta,\mu). \qquad (158)
$$

方程 (157) 右边两个表示的相等性要求

$$
X_1^2Y_{2,\alpha}=X_2^2Y_{1,\alpha}. \qquad (159)
$$

由这个结果, 方程 (157) 第一行表示的相等性给出

$$
X_1X_2(Y_2-Y_1)_{,\alpha}-(Y_2-Y_1)(X_1X_{2,\alpha}+X_2X_{1,\alpha})=0, \qquad (160)
$$

或等价地,

$$
\left(\frac{Y_2-Y_1}{X_1X_2}\right)_{,\alpha}=0 \quad (\alpha=\eta,\mu). \qquad (161)
$$

由于 Y_1 和 Y_2 对 $\eta\to\infty$ 渐近地趋于相等, 从方程 (161) 可得 [298]

$$
Y_2\equiv Y_1. \qquad (162)
$$

由最后这个等式, 方程 (158) 的任何一个都给出

$$
(X_1/X_2)_{,\alpha}=0 \quad (\alpha=\eta,\mu). \qquad (163)
$$

再由 X_1 和 X_2 对 $\eta\to\infty$ 的相等性得出

$$
X_1\equiv X_2; \qquad (164)
$$

于是得出对给定 M (由于假定的解的归一化) 和 J 的解的唯一性.

由于克尔度规确实符合罗宾逊定理所要求的边界条件并给出了对给定 M 和 $J(<M^2)$ 的一个解, 所以它就是对给定 M 和 J 的唯一解. 换句话说, 克尔的发现提供了满足罗宾逊定理要求的解存在的证明!

罗宾逊等式 (156) 的两个特殊情形是有一定意义的.

首先考虑两个 "相邻解" (X,Y) 和 $(X+\delta X, Y+\delta Y)$ 的情形, 即保持质量和角动量不变的准定常态轴对称扰动. 将 δX 和 δY 视为一阶小量 (扰动理应如此!), 对方程 (156) 线性化得出等式

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\int_{-1}^{+1}\frac{\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mu}{X^4}\{&(\eta^2-1)[(X_{,\eta}\delta X-Y_{,\eta}\delta Y-X\delta X_{,\eta})^2\\&+(X_{,\eta}\delta Y+Y_{,\eta}\delta X-X\delta Y_{,\eta})^2+(X_{,\eta}\delta Y-Y_{,\eta}\delta X)^2]\\&+(1-\mu^2)[(X_{,\mu}\delta X-Y_{,\mu}\delta Y-X\delta X_{,\mu})^2\\&+(X_{,\mu}\delta Y+Y_{,\mu}\delta X-X\delta Y_{,\mu})^2\\&+(X_{,\mu}\delta Y-Y_{,\mu}\delta X)^2]\}=0,\end{aligned}\tag{165}$$

它等价于由卡特首先导出的结果. 如对罗宾逊定理的证明那样, 由方程 (165) 可得

$$\delta X\equiv 0 \text{ 和 } \delta Y\equiv 0.\tag{166}$$

换句话说, 克尔解不可能被保持质量和角动量不变的准定常态轴对称扰动影响, 或者说, 沿克尔序列不可能有分叉点. 这就是在罗宾逊的杰作之前已被证明的卡特定理.

然后考虑 $Y=0$ 的不转动黑洞情形. 这时罗宾逊等式简化为

[299]

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty\int_{-1}^{+1}[(\eta^2-1)(X_1X_{2,\eta}-X_2X_{1,\eta})^2+(1-\mu^2)(X_1X_{2,\mu}-X_2X_{1,\mu})^2]\\&\times\frac{X_1^2+X_2^2}{X_1^3X_2^3}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mu=0,\end{aligned}\tag{167}$$

其中 X_1 和 X_2 是对应于同一质量的两个解. 由方程 (167) 得出

$$X_1\equiv X_2.\tag{168}$$

也就是说, 在轴对称假定下, 不转动黑洞由其质量唯一地决定. 若不作轴对称假定, 这个结果就是伊斯列 (Israel) 定理, 即史瓦西度规是表示不转动静态黑洞的唯一解.

56. 克尔时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述

对于克尔时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述, 首先需要构造一个零四次标架. 在第 7 章 (§63 (*b*)) 将证明, 在克尔时空有一类简单的零短程线, 由正切矢量

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}E,\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}=\pm E,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=0,\quad \text{和}\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}=\frac{a}{\Delta}E \tag{169}$$

给出, 其中 E 是常量. 借助于这些短程线定义纽曼 – 彭罗斯形式的实数零矢量 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$, 并再搭配一个与它们垂直的复数零矢量 $\boldsymbol{m}$, 就得到基

$$\left.\begin{aligned} l^i&=\frac{1}{\Delta}(r^2+a^2,+\Delta,0,a),\\ n^i&=\frac{1}{2\rho^2}(r^2+a^2,-\Delta,0,a),\\ m^i&=\frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta,0,1,\mathrm{i}\mathrm{cosec}\theta), \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

其中

$$\overline{\rho}=r+\mathrm{i}a\cos\theta\ \text{和}\ \overline{\rho}^*=r-\mathrm{i}a\cos\theta. \tag{171}$$

[不幸的是字母 "ρ" 被用于这么多不同的意义上: 作为自旋系数, 作为 $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$, 现在又作为 $\overline{\rho}$ 和 $\overline{\rho}^*$. 通常对于是指何种意义不会有混淆; 但若出现同时使用的情况, 将把自旋系数 ρ 记为 $\widetilde{\rho}$, 以与 $\overline{\rho}$ 和 $\overline{\rho}^*$ 相区分, 而 ρ^2 总是表示 $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$.]

矢量 $\boldsymbol{l}$ 是仿射参数化的, 而 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 不是: 它们已被安排为符合所需的归一化条件 [300]

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=1\ \text{和}\ \boldsymbol{m}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}=-1. \tag{172}$$

基矢的协变形式是

$$\left.\begin{aligned} l_i&=\frac{1}{\Delta}(\Delta,-\rho^2,0,-a\Delta\sin^2\theta),\\ n_i&=\frac{1}{2\rho^2}(\Delta,+\rho^2,0,-a\Delta\sin^2\theta),\\ m_i&=\frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta,0,-\rho^2,-\mathrm{i}(r^2+a^2)\sin\theta). \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

对所选基的自旋系数 (如第 1 章方程 (286) 所定义) 是最便利地通过 λ 符

号来计算的 (第 1 章方程 (265)). 可得非零的 λ 符号是:

$$\lambda_{122}=-\frac{1}{\rho^4}[(r-M)\rho^2-r\Delta];\qquad \lambda_{134}=-\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}$$

$$\lambda_{132}=+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2\overline{\rho}};\qquad \lambda_{324}=-\frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4}$$

$$\lambda_{213}=-\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2\overline{\rho}};\qquad \lambda_{334}=+\frac{(\mathrm{i}a+r\cos\theta)\mathrm{cosec}\theta}{\overline{\rho}^2\sqrt{2}}$$

$$\lambda_{243}=-\frac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}};\qquad \lambda_{341}=-\frac{1}{\overline{\rho}};\tag{174}$$

利用这些 λ 符号导出的自旋系数是:

$$\left.\begin{gathered}\kappa=\sigma=\lambda=\nu=\varepsilon=0\\ \widetilde{\rho}=-\frac{1}{\overline{\rho}^*};\quad \beta=\frac{\cot\theta}{\overline{\rho}2\sqrt{2}};\quad \pi=\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2\sqrt{2}};\quad \tau=-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\rho^2\sqrt{2}}\\ \mu=-\frac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}^*};\quad \gamma=\mu+\frac{r-M}{2\rho^2};\quad \alpha=\pi-\beta^*.\end{gathered}\right\}\tag{175}$$

自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 为零的事实表明, 零短程线 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的迭合是无切变的. 而由这些迭合的无切变特征, 可基于哥尔德伯 – 萨赫定理得出结论, 克尔时空是属于彼得罗夫 D 型.

由哥尔德伯 – 萨赫定理还能得出结论, 在所选基中外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 为零. 这些结论能被直接验证, 方法是按照这些标量的定义用矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 来收缩方程 (142) 所列黎曼张量的非零分量.

[301] 由于方程 (142) 所列黎曼张量的分量是在四次标架中, 将基矢也在同一标架中表示是便利的, 办法是给它们下列变换,

$$(e^{(a)}{}_i)=\begin{vmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0\\ -\omega e^{\psi} & e^{\psi} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\mu_2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\mu_2}\end{vmatrix}.\tag{176}$$

结果是

$$\begin{aligned} l^{(p)}&=\left\{\frac{e^{\nu}}{\Delta}(r^2+a^2),\quad a\frac{e^{\psi}\rho^2}{\Sigma^2},\quad e^{\mu_2},\quad 0\right\},\\ n^{(p)}&=\left\{\frac{e^{\nu}}{2\rho^2}(r^2+a^2),\quad a\frac{e^{\psi}\Delta}{2\Sigma^2},\quad -\frac{\Delta}{2\rho^2}e^{\mu_2},\quad 0\right\},\\ m^{(p)}&=\left\{\mathrm{i}\frac{e^{\nu}}{\overline{\rho}\sqrt{2}}a\sin\theta,\quad \mathrm{i}\frac{e^{\psi}\rho^2}{\Sigma^2\sin\theta}\frac{(r^2+a^2)}{\overline{\rho}\sqrt{2}},\quad 0\quad \frac{e^{\mu_2}}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\right\},\end{aligned}\tag{177}$$

其中在得出这些形式的矢量时用了关系式 (137).

运用上述基矢表示式和方程 (4)、(139), 可得到, 例如,

$$
\begin{aligned}
-\Psi_0 &= R_{pqrs}l^p, m^q l^r m^s \\
&= R_{0101}[(l^0m^1 - l^1m^0)^2 - (l^2m^3)^2] + R_{0303}[(l^0m^3)^2 - (l^2m^1)^2] \\
&\quad + R_{2020}[(l^2m^0)^2 - (l^1m^3)^2] + 2R_{1330}[(l^2)^2m^0m^1 - (m^3)^2l^0l^1] \\
&\quad + 2R_{3002}[l^2l^0m^0m^3 + l^2l^1m^1m^3] + 2R_{2301}l^2m^3(l^0m^1 - l^1m^0) \\
&\quad + 2R_{2103}l^2l^0m^1m^3 + 2R_{2013}l^2l^1m^0m^3 \\
&= \frac{\rho^4}{\Delta\overline{\rho}^2}\left\{-R_{0101} + \frac{(r^2+a^2)^2}{\Sigma^2}R_{0303} - \frac{a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma^2}R_{0202}\right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{2a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta\right]R_{1330}\right\} \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}\rho^4}{\Delta\overline{\rho}^2}\left\{+R_{2301} + \frac{(r^2+a^2)^2}{\Sigma^2}R_{2103} + \frac{a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma^2}R_{2013}\right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{2a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta\right]R_{3002}\right\}.
\end{aligned}
\tag{178}
$$

现在由方程 (142) 代入黎曼张量的分量, 如所要求地得到,

$$\Psi_0 = 0. \tag{179}$$

外尔标量 Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 为零能被类似地验证.

非零外尔标量 Ψ_2 的值可按其定义用零基矢量收缩黎曼张量得到, 即有 [302]

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 &= R_{pqrs}l^p m^q n^r \overline{m}^s \\
&= R_{0101}[(l^0m^1 - l^1m^0)(n^0\overline{m}^1 - n^1\overline{m}^0) - l^2n^2|m^3|^2] \\
&\quad + R_{0303}[l^0n^0|m^3|^2 - l^2n^2|m^1|^2] + R_{0202}[l^2n^2|m^0|^2 - l^1n^1|m^3|^2] \\
&\quad + R_{1330}[l^2n^2(m^1\overline{m}^0 + \overline{m}^1m^0) - (l^1n^0 + l^0n^1)|m^3|^2] \\
&\quad + R_{3002}[l^2n^0m^0\overline{m}^3 + l^0n^2\overline{m}^0m^3 + l^2n^1m^1\overline{m}^3 + l^1n^2\overline{m}^1m^3] \\
&\quad + R_{2301}[l^2m^3(n^0\overline{m}^1 - n^1\overline{m}^0) + n^2\overline{m}^3(l^0m^1 - l^1m^0)] \\
&\quad + R_{2103}[l^2n^0m^1\overline{m}^3 + l^0n^2\overline{m}^1m^3] + R_{2013}[l^1n^2m^3\overline{m}^0 + l^2n^1\overline{m}^3m^0] \\
&= \frac{1}{2}\left\{+R_{0101} + \frac{(r^2+a^2)^2}{\Sigma^2}R_{0303} - \frac{a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma^2}R_{0202}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[\frac{2a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta\right] R_{1330}\Bigg\} \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{i}\Bigg\{-R_{2301}+\frac{(r^2+a^2)}{\Sigma^2}R_{2103}+\frac{a^2\Delta\sin^2\theta}{\Sigma^2}R_{2013} \\
&+\left[\frac{2a\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2}(r^2+a^2)\sin\theta\right] R_{3002}\Bigg\} \\
&=-\frac{Mr}{\rho^6}(r^2-3a^2\cos^2\theta)-\mathrm{i}\frac{aM\cos\theta}{\rho^6}(3r^2-a^2\cos^2\theta) \\
&=-\frac{M}{(\overline{\rho}^*)^3}.
\end{aligned}
\tag{180}
$$

有了对零基、自旋系数和外尔标量的确定, 就已完成了显示其特别代数特征的对克尔时空的纽曼 – 彭罗斯形式描述.

57. 度规的克尔 – 席尔德形式

按照 §52—§54 所述途径的克尔度规推导, 并不是克尔在导致他发现的原初研究中采用的. 他当时寻找的是作为适于代数上特殊时空的度规形式的爱因斯坦方程解. 他选来予以特别考虑的度规形式 (现在称为克尔 – 席尔德形式) 是

$$
g_{ij}=\eta_{ij}+l_i l_j, \tag{181}
$$

[303] 其中 η_{ij} 是平直度规, l 是关于 η_{ij} 的零矢量. 克尔度规属于此种类型. 的确将会看到, 正是克尔 – 席尔德形式使得克尔度规的性质变得最为透明. 因此, 对克尔时空性质的考虑从证明为何具有 (181) 形式度规的时空必定是彼得罗夫 II 型为起始. 下面的表述方式来自山托珀罗斯.

且从几个引论开始.

考虑有着两个度规 g_{ij} 和 g'_{ij} 的流形. 用 ∇_i 和 ∇'_i 表示对由每个度规导出的克里斯托费尔联络的协变求导算符. 若 ξ_j 是流形上的协变矢量, 则必有如下关系,

$$
\nabla'_i\xi_j=\nabla_i\xi_j-C^m_{ij}\xi_m, \tag{182}
$$

其中 C^m_{ij} 具有对称联络的所有性质. 于是有, 例如,

$$
\nabla'_i T^k_j=\nabla_i T^k_j-C^m_{ij}T^k_m+C^k_{im}T^m_j, \tag{183}
$$

其中 T^k_j 是 (1, 1) 类型张量. 利用这些公式, 可将对两个度规定义的黎曼张量

通过里奇恒等式联系起来, 即有,

$$\begin{aligned} R'_{ijk}{}^{m}\xi_m &= 2\nabla'_{[i}\nabla'_{j]}\xi_k \\ &= 2\nabla_{[i}(\nabla_{j]}\xi_k - C^m_{j]k}\xi_m) - 2C^n_{[ij]}(\nabla_n\xi_k - C^m_{nk}\xi_m) \\ &\quad -2C^n_{k[i}(\nabla_{j]}\xi_n - C^m_{j]n}\xi_m). \end{aligned} \tag{184}$$

经进一步简化 (利用 C^m_{ij} 对指标 i 和 j 的对称性), 得到关系

$$R'_{ijk}{}^{m} = R_{ijk}{}^{m} - 2\nabla_{[i}C^m_{j]k} + 2C^n_{k[i}C^m_{j]n}. \tag{185}$$

相应的里奇张量之间的关系可通过收缩得到,

$$R'_{ik} = R_{ik} - 2\nabla_{[i}C^m_{m]k} + 2C^n_{k[i}C^m_{m]n}. \tag{186}$$

在考虑度规的克尔 – 席尔德形式 (181) 时, 将上面公式中不带撇号和带撇号的度规认同为

$$\eta_{ij} \text{ 和 } g_{ij} = \eta_{ij} + l_i l_j, \tag{187}$$

其中, 如已述, l_i 是对 η_{ij} 的零矢量, 即

$$l^i = \eta^{ij}l_j \text{ 和 } l^i l_i = 0. \tag{188}$$

现在, 由定义,

$$g^{ij} = \eta^{ij} - l^i l^j, \tag{189}$$

可验证 [304]

$$g^{ij}g_{jk} = (\eta^{ij} - l^i l^j)(\eta_{jk} + l_j l_k) = \delta^i_k. \tag{190}$$

也就是说, 所定义的 g^{ij} 的确是 g_{ij} 的逆变形式. 进一步有

$$g^{ij}l_j = (\eta^{ij} - l^i l^j)l_j = l_i. \tag{191}$$

相应地, 零矢量的指标可用 $\boldsymbol{g}$ 也可用 $\boldsymbol{\eta}$ 来提升和降低. 可得出 $\boldsymbol{l}$ 对 $\boldsymbol{g}$ 也是零. (但应认识到, 指标的升降一般仅由 $\boldsymbol{\eta}$ 来实现.)

现在来得出关于联络 C^m_{ij} 的明晰公式. 由于 ∇'_i 是借助于从 g_{ij} 导出的克里斯托费尔联络定义的, 所以

$$\nabla'_i g_{jk} = 0. \tag{192}$$

但还可以由方程 (183) 来计算这个量, 即有

$$\nabla'_i g_{jk} = \nabla_i g_{jk} - C^m_{ij}g_{mk} - C^m_{ik}g_{jm} = 0. \tag{193}$$

另一方面,

$$\nabla_i g_{jk} = \nabla_i(\eta_{jk} + l_j l_k) = \nabla_i(l_j l_k). \tag{194}$$

所以,

$$\nabla_i(l_j l_k) = C^m_{ij} g_{mk} + C^m_{ik} g_{jm}. \tag{195}$$

从最后这个关系得到 (与由度规张量的协变导数为零得出克里斯托费尔联络的方式相同):

$$C^m_{ij} g_{mk} = \frac{1}{2}[\nabla_i(l_j l_k) + \nabla_j(l_k l_i) - \nabla_k(l_i l_j)]. \tag{196}$$

用 g^{kn} 来收缩最后这个关系, 得 (用关系 (190))

$$C^n_{ij} = \frac{1}{2}(\eta^{kn} - l^k l^n)[\nabla_i(l_j l_k) + \nabla_j(l_i l_k) - \nabla_k(l_i l_j); \tag{197}$$

或经过一些简化 (记住 $\boldsymbol{l}$ 是零矢量) 得

$$C^n_{ij} = \frac{1}{2}[\nabla_i(l_j l^n) + \nabla_j(l_i l^n) - \nabla^n(l_i l_j) + l^n l^k \nabla_k(l_i l_j)]. \tag{198}$$

对指标 n 和 i 收缩方程 (198), 得

$$C^n_{jn} = 0. \tag{199}$$

类似地, 可得

$$l_n C^n_{ij} = -\frac{1}{2} l_n \nabla^n(l_i l_j) = -\frac{1}{2}(l_i l_n \nabla^n l_j + l_j l_n \nabla^n l_i) \tag{200}$$

和

$$l^i C^n_{ij} = \frac{1}{2}(l^n l^i \nabla_i l_j + l_j l^i \nabla_i l^n). \tag{201}$$

定义

$$X_j = l^i \nabla_i l_j, \tag{202}$$

[305] 可将关系式 (200) 和 (201) 重写为

$$l_n C^n_{ij} = -\frac{1}{2}(l_i X_j + l_j X_i)$$

和 (203)

$$l^j C^n_{ij} = +\frac{1}{2}(l^n X_j + l_j X^n).$$

此外还必定有

$$l^j X_j = 0. \tag{204}$$

现在设 g_{ij} 表示爱因斯坦方程对真空的一个解. 于是里奇张量 R'_{ij} 必定为零. 而按照 η_{ij} 是平直时空度规的假定, R_{ij} 也为零. 所以, 由方程 (186),

$$\begin{aligned} 0 &= -2\nabla_{[i}C^m_{m]k} + 2C^n_{k[i}C^m_{m]n} \\ &= -\nabla_i C^m_{mk} + \nabla_m C^m_{ik} + C^n_{ki}C^m_{mn} - C^n_{km}C^m_{in} \\ &= \nabla_m C^m_{ik} - C^n_{km}C^m_{in}, \end{aligned} \tag{205}$$

其中在简化时已用了方程 (199). 用 $l^i l^k$ 收缩方程 (205) 并用关系式 (203) 和 (204), 得

$$\begin{aligned} 0 &= -l^k[\nabla_m(l^i C^m_{ik}) - C^m_{ik}\nabla_m l^i] + (l^k C^n_{km})(l^i C^m_{in}) \\ &= -\frac{1}{2}l^k\nabla_m(l^m X_k + X^m l_k) + \frac{1}{2}(l^m X^i + l^i X^m)\nabla_m l_i \\ &\quad + \frac{1}{4}(l^n X_m + l_m X^n)(l^m X_n + l_n X^m) \\ &= -\frac{1}{2}l^k l^m \nabla_m X_k + \frac{1}{2}X_i l^m \nabla_m l^i \\ &= +\frac{1}{2}X_k l^m \nabla_m l^k + \frac{1}{2}X_i X^i = X_i X^i. \end{aligned} \tag{206}$$

所以, $\boldsymbol{X}$ 是零矢量; 由于它还垂直于零矢量 $\boldsymbol{l}$, 它必定是 $\boldsymbol{l}$ 的倍数. 相应地可写

$$X_j = \phi l_j, \tag{207}$$

其中 ϕ 是某个比例函数. 现在由 X_j 的定义 (202),

$$X_j = l^i \nabla_i l_j = \phi l_j. \tag{208}$$

所以, l 定义一个短程线迭合. 最后, 将方程 (203) 和 (207) 结合得到关系

$$l_n C^n_{ij} = -\phi l_i l_j \text{ 和 } l^i C^n_{ij} = +\phi l^n l_j. \tag{209}$$

现在回到方程 (185) 并用 $l^j l_m$ 收缩它. 记得 $R_{ijk}{}^m$ 为零 (因为度规 η_{ij} 按假定是平直时空的), 有

$$l^j l_m R'_{ijk}{}^m = l^j l_m(\nabla_j C^m_{ik} - \nabla_i C^m_{jk} + C^n_{ki}C^m_{jn} - C^n_{kj}C^m_{in}). \tag{210}$$

不难验证, 右边除第一项外的所有项都由于关系 (209) 而为零. 于是留有 [306]

$$\begin{aligned} l^j l_m R'_{ijk}{}^m &= l^j l_m \nabla_j C^m_{ik} = l^j[\nabla_j(l_m C^m_{ik}) - C^m_{ik}\nabla_j l_m] \\ &= -l^j\nabla_j(\phi l_i l_k) - C^m_{ik}\phi l_m \\ &= -(l^j\nabla_j\phi + \phi^2) l_i l_k, \end{aligned} \tag{211}$$

其中在简化时再次用了关系 (209). 由于 $\boldsymbol{l}$ 的指标能用度规 $\boldsymbol{\eta}$ 或 $\boldsymbol{g}$ 来升降, 可将已得到的关系重写为

$$R'_{ijkm}l^j l^m = Hl_i l_k \text{ 其中 } H = -(l^j\nabla_j\phi + \phi^2), \tag{212}$$

其中应记得 $\boldsymbol{l}$ 表示零短程线迭合.

从方程 (212) 可清楚地得到

$$R'_{ijm[k}l_{n]}l^j l^m = -Hl_i l_{[k}l_{n]} = 0. \tag{213}$$

按照第 1 章方程 (385), 精确地就是最后这个关系保证了时空为彼得罗夫 Ⅱ 型, 而 $\boldsymbol{l}$ 是主零方向.

(*a*) 将克尔度规表示为克尔 – 席尔德形式

从方程 (169) 定义的零矢量迭合 $\boldsymbol{l}$ 出发. 由选择 $E = 1$, 有

$$\mathrm{d}t = \frac{r^2+a^2}{\Delta}\mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}r = \mathrm{d}\lambda, \quad \mathrm{d}\theta = 0, \quad \text{和 } \mathrm{d}\varphi = \frac{a}{\Delta}\mathrm{d}\lambda. \tag{214}$$

现在代替 t 和 φ 引入新变量,

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}t - \frac{r^2+a^2}{\Delta}\mathrm{d}r, \quad \text{和 } \mathrm{d}\widetilde{\varphi} = \mathrm{d}\varphi - \frac{a}{\Delta}\mathrm{d}r. \tag{215}$$

在这些新坐标里, 零短程线是

$$l^i = (0,1,0,0). \tag{216}$$

为在新坐标里表示克尔度规, 首先将它重写为下列形式是便利的,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \frac{\Delta}{\rho^2}[\mathrm{d}t - (a\sin^2\theta)\mathrm{d}\varphi]^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t]^2 \\ & -\frac{\rho^2}{\Delta}(\mathrm{d}r)^2 - \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2.\end{aligned} \tag{217}$$

[307] 关系 (215) 的直接代入给出

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \frac{\Delta}{\rho^2}(\mathrm{d}u - a\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\sin^2\theta)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\widetilde{\varphi} - a\mathrm{d}u]^2 \\ & +2\mathrm{d}r(\mathrm{d}u - a\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\sin^2\theta) - \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2.\end{aligned} \tag{218}$$

对应的明晰度规形式是

$$(g_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} (u) & (r) & (\theta) & (\widetilde{\varphi}) \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1-2Mr/\rho^2 & 1 & 0 & 2aMr\sin^2\theta/\rho^2 \\ 1 & 0 & 0 & -a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ 2aMr\sin^2\theta/\rho^2 & -a\sin^2\theta & 0 & -\Sigma^2\sin^2\theta/\rho^2 \end{vmatrix} \end{array}. \tag{219}$$

通过对各项的进一步重组, 度规 (218) 可成为以下形式,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = [&(\mathrm{d}u+\mathrm{d}r)^2-(\mathrm{d}r)^2-\rho^2(\mathrm{d}\theta)^2-(r^2+a^2)(\mathrm{d}\widetilde{\varphi})^2\sin^2\theta \\ &-2a\mathrm{d}r\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\sin^2\theta]-\frac{2Mr}{\rho^2}(\mathrm{d}u-a\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\sin^2\theta)^2; \end{aligned} \tag{220}$$

或, 鉴于 $\boldsymbol{l}$ 的协变形式是

$$l_i=(1,0,0,-a\sin^2\theta), \tag{221}$$

也可写出

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = [&(\mathrm{d}x^0)^2-(\mathrm{d}r)^2-\rho^2(\mathrm{d}\theta)^2-(r^2+a^2)(\mathrm{d}\widetilde{\varphi})^2\sin^2\theta \\ &-2a\mathrm{d}r\mathrm{d}\widetilde{\varphi}\sin^2\theta]-\frac{2Mr}{\rho^2}l_il_j\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j, \end{aligned} \tag{222}$$

其中

$$\mathrm{d}x^0=\mathrm{d}u+\mathrm{d}r. \tag{223}$$

现在来证明, 方程 (222) 方括号里的度规部分表示平直时空. 这样就导出了克尔度规的克尔 – 席尔德形式; 而其代数特殊性现在是其定义的一部分.

现在能验证, 代换

$$\left.\begin{aligned} &x=(r\cos\widetilde{\varphi}+a\sin\widetilde{\varphi})\sin\theta, y=(r\sin\widetilde{\varphi}-a\cos\widetilde{\varphi})\sin\theta, \\ &x^2+y^2=(r^2+a^2)\sin^2\theta \text{ 和 } z=r\cos\theta, \end{aligned}\right\} \tag{224}$$

使方程 (222) 方括号里的度规部分成为明显的平直度规形式,

$$(\mathrm{d}x^0)^2-(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}y)^2-(\mathrm{d}z)^2. \tag{225}$$

新坐标中的整个度规明确地是 [308]

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = &(\mathrm{d}x^0)^2-(\mathrm{d}x)^2-(\mathrm{d}y)^2-(\mathrm{d}z)^2 \\ &-\frac{2Mr^3}{r^4+a^2z^2}\left\{\mathrm{d}x^0-\frac{1}{r^2+a^2}[r(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+a(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)]-\frac{1}{r}z\mathrm{d}z\right\}^2, \end{aligned} \tag{226}$$

其中, 按照代换 (224), r^2 是由 x、y 和 z 来内含地定义,

$$r^4-r^2(x^2+y^2+z^2-a^2)-a^2z^2=0. \tag{227}$$

很清楚, 除在

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \text{ 和 } z=0 \tag{228}$$

外, 度规 (226) 是处处解析的; 换句话说, 它在 (x,y) 面上有一个奇异环. 下面的§58 将更详细地考虑这个奇异环的性质. 这里仅指出, (226) 式精确地就是克尔最初表示他的解的形式.

58. 克尔时空的性质

克尔时空有两个基本特征需要检查和澄清: 第一个是关于零面的性质, 第二个是关于 $r=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 处奇点的性质.

先看第一个, 零面存在于零值点

$$\Delta(r)=r^2-2Mr+a^2=0, \tag{229}$$

也就是在

$$r=r_+=M+\sqrt{M^2-a^2} \text{ 和 } r=r_-=M-\sqrt{M^2-a^2}. \tag{230}$$

这些零值点是实的、正的、可区分的, 前提是有 $a^2<M^2$, 而这个不等式将予以假定. 由于

$$\Delta>0 \text{ 对 } r>r_+ \text{ 和 } r<r_-, \quad \Delta<0 \text{ 对 } r_-<r<r_+, \tag{231}$$

所以很清楚, 如雷斯纳 – 诺兹特朗时空的情形那样, 必须区分三个区域:

$$A: r<r_-; \quad B: r_-<r<r_+; \quad \text{和 } C: r>r_+. \tag{232}$$

(可见 A 区能延伸到 r 的所有负值, 而 C 区能延伸到 r 的所有正值.) 将看到, 再次如雷斯纳 – 诺兹特朗几何那样, $r=r_+$ 面是事件视界, 而 $r=r_-$ 面是柯西视界.

关于克尔时空的奇异性, 已经指出黎曼张量的非零分量 (列于方程 (142)) 仅对 $r=0$ 和 $\theta=\pi/2$ 发散, 而这是唯一存在的奇点. 由于在 $r=0$ 的发散仅
[309] 对 $\theta=\pi/2$ 发生, 所以其性质就显然不可能与史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空中的 $r=0$ 奇点一样. 为认识克尔时空奇点的真实性质, 首先必须消除坐标系 (r,θ,φ) 自身在 $r=0$ 的含糊性. 这种含糊性曾在§58 (a) 中通过选择 "笛卡儿" 坐标系 (x,y,z) 而予以消除. 在用这些坐标写的度规 (226) 中, r^2 由 x、y 和 z 按方程 (227) 内含地定义, 而

$$x^2+y^2=(r^2+a^2)\sin^2\theta. \tag{233}$$

保持 r 不变的面是共焦椭球面, 其主轴与坐标轴重合. 这些椭球对 $r=0$ 简并成盘,

$$x^2+y^2\leqslant a^2, \quad z=0. \tag{234}$$

于是, 点 $(r=0,\theta=\pi/2)$ 对应着环,

$$x^2+y^2=a^2, \quad z=0; \tag{235}$$

而沿着这个环的奇异性是克尔时空仅有的奇异性.

环 (235) 内部的点对应着 $r=0$、$\pi/2>\theta>0$ 和 $0<\widetilde{\varphi}<2\pi$. 保持 θ 为常数的面穿过盘而伸到另一侧. 这些就是将 r 的区域延伸到所有负值这一说法的依据. 换句话说就是, 将方程 (227) 定义的函数 r 解析地延续到所有负值. 实现这一延续的办法是, 对盘 (234) 附着另一个标图 (x',y',z'), 并将盘的顶侧上的一点认同到 (x',y',z') 标图中盘的底侧上具有相同 x 和 y 坐标的一点. 类似地, 将 (x,y,z) 标图中盘的底侧上的一点认同到 (x',y',z') 标图中盘的顶侧上的一点 (见图 25). 原初流形这种方式的放大, 类似于为表示有奇异性的解析函数所做的复数平面向黎曼面的放大.

由在 (232) 中区分的 A 区里的放大流形, r 允许取所有的负值.

延伸到放大流形的度规 (226), 除 r 现在被赋予负值外, 在 (x',y',z') 标图中有着与在 (x,y,z) 标图中同样的形式. 所以在 (x',y',z') 标图中, (226) 式花括号中的项有着因子 $+2Mr^3/(r^4+a^2z^2)$. 对大负值的 r, 空间再次是渐近平坦的, 但源有着负质量.

转到 r_+ 和 r_- 上坐标奇异性的消除, 首先要认识到, 由于主零迭合 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 不是正交超面, 就不能像对史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空那样将它们取 [310]
为导出非奇异坐标的基. 所以有用的做法是, 首先限于沿对称轴 $\theta=0$ 的二维 (r,t) 流形来澄清, 视界的性质本质上与雷斯纳 – 诺兹特朗时空中的一样, 而且

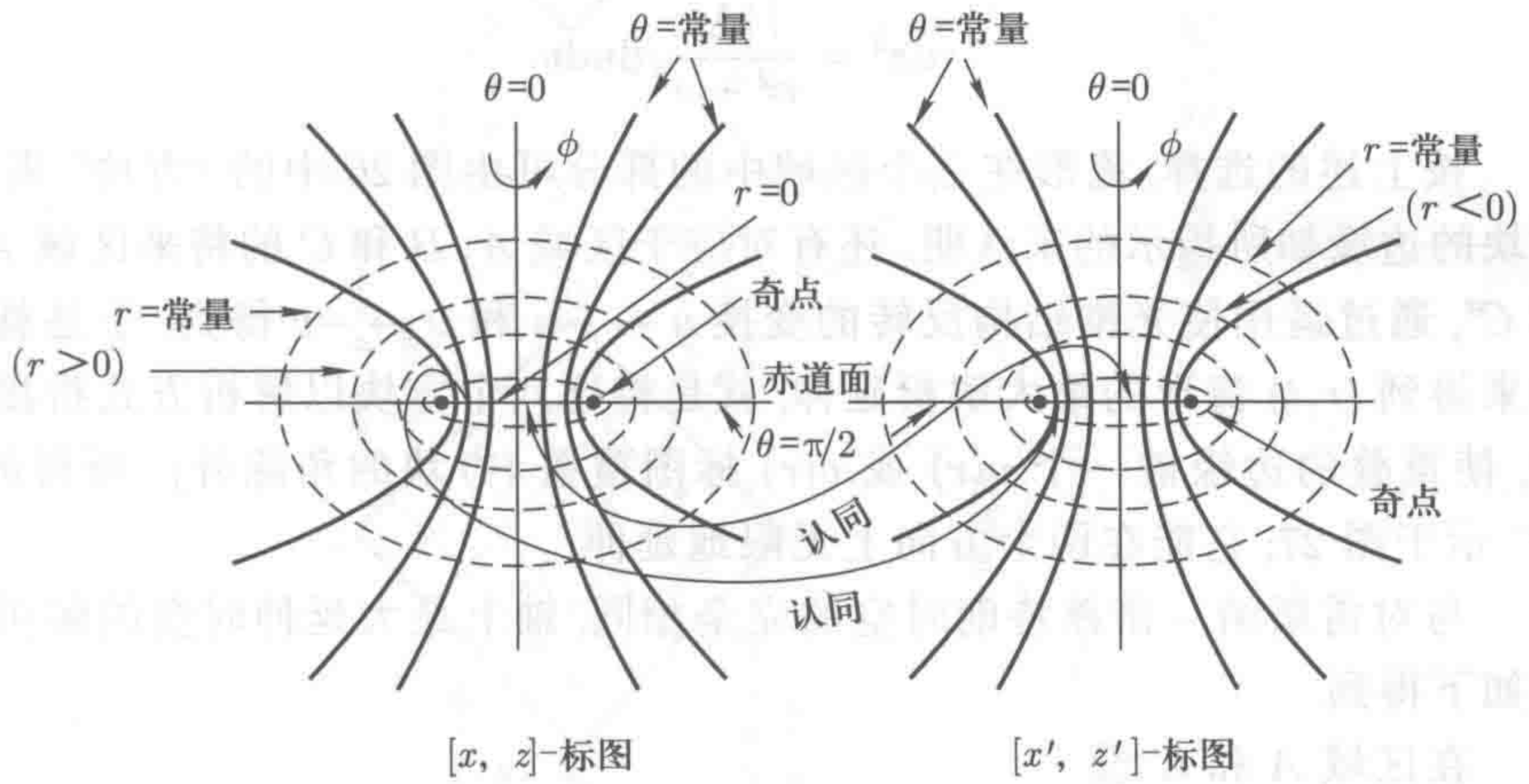


图 25　赤道面上克尔度规的奇异环. 当度规写成 “笛卡儿坐标” 的形式 (226) 时, 保持 r 不变的曲线成为共焦椭圆, 保持 θ 不变的曲线成为共焦双曲线, 而奇异性变得明显. 解析地延伸到所有 r 负值的实现途径是, 对盘 $(x^2+y^2\leqslant a^2;z=0)$ 附着标图 (x',y',z') 中的另一个盘, 再进行正文中讲述和图中描绘的认同. 图中所示是这些面的 $y=0$ 和 $y'=0$ 横截.

流形能由相同的基本思想来完成.

沿对称轴 $\theta = 0$, 克尔度规简并为形式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2}\left(\mathrm{d}t - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\mathrm{d}r\right)\left(\mathrm{d}t + \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\mathrm{d}r\right). \tag{236}$$

定义零坐标,

$$u = t - r_* \text{ 和 } v = t + r_*, \tag{237}$$

其中

$$r_* = \int \frac{r^2 + a^2}{\Delta}\mathrm{d}r = r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-}\lg|r - r_+| - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-}\lg|r - r_-|, \tag{238}$$

可写出

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{r^2 + a^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{239}$$

代换 (237) 对 A 区和 C 区是恰当的 (见第 5 章方程 (46) 和 (48)). 在 B 区, Δ 是负的, 恰当的代换是

$$u = r_* + t \text{ 和 } v = r_* - t, \tag{240}$$

度规相应地取形式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{|\Delta|}{r^2 + a^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{241}$$

按上述的选择, 流形在三个区域中的部分可由图 26 中的 "方块" 来表示. 方块的边缘如所指示的来认明. 还有对应于区域 A、B 和 C 的将来区域 A'、B' 和 C', 通过运用使光锥结构反转的变换 $u \to -u$ 和 $v \to -v$ 得到. 于是就能这样来得到 (r, t) 流形的最大解析延伸, 就是将这六个方块以解析方式拼接在一起, 使重叠的边缘被一个 $u(r)$ 或 $v(r)$ 标图覆盖 (方块的角除外). 所得的 "梯子" 示于图 27; 它能在两个方向上无限地延伸.

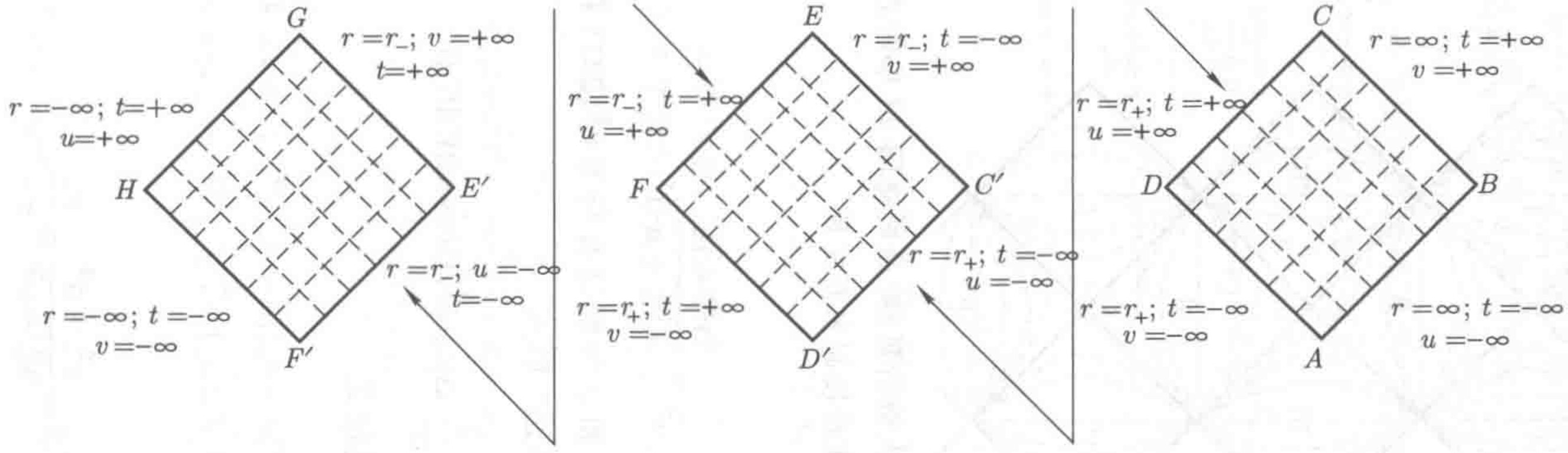
与对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的完全相同, 轴上最大延伸时空的解析表示可如下得到.

在区域 A 和 C 设

$$\tan U = -e^{-\alpha u} \text{ 和 } \tan V = +e^{+\alpha v}, \tag{242}$$

而在 B 区设

$$\tan U = +e^{+\alpha u} \text{ 和 } \tan V = +e^{+\alpha v}, \tag{243}$$



区域A
$r<r_-$
$u=t-r_*;\ v=t+r_*$

区域B
$r_-<r<r_+$
$u=t+r_*;\ v=-t+r_*$

区域C
$r>r_+$
$u=t-r_*;\ v=t+r_*$

图 26　克尔时空沿 $\theta=0$ 轴的不同区域. 解释见正文.

[311]

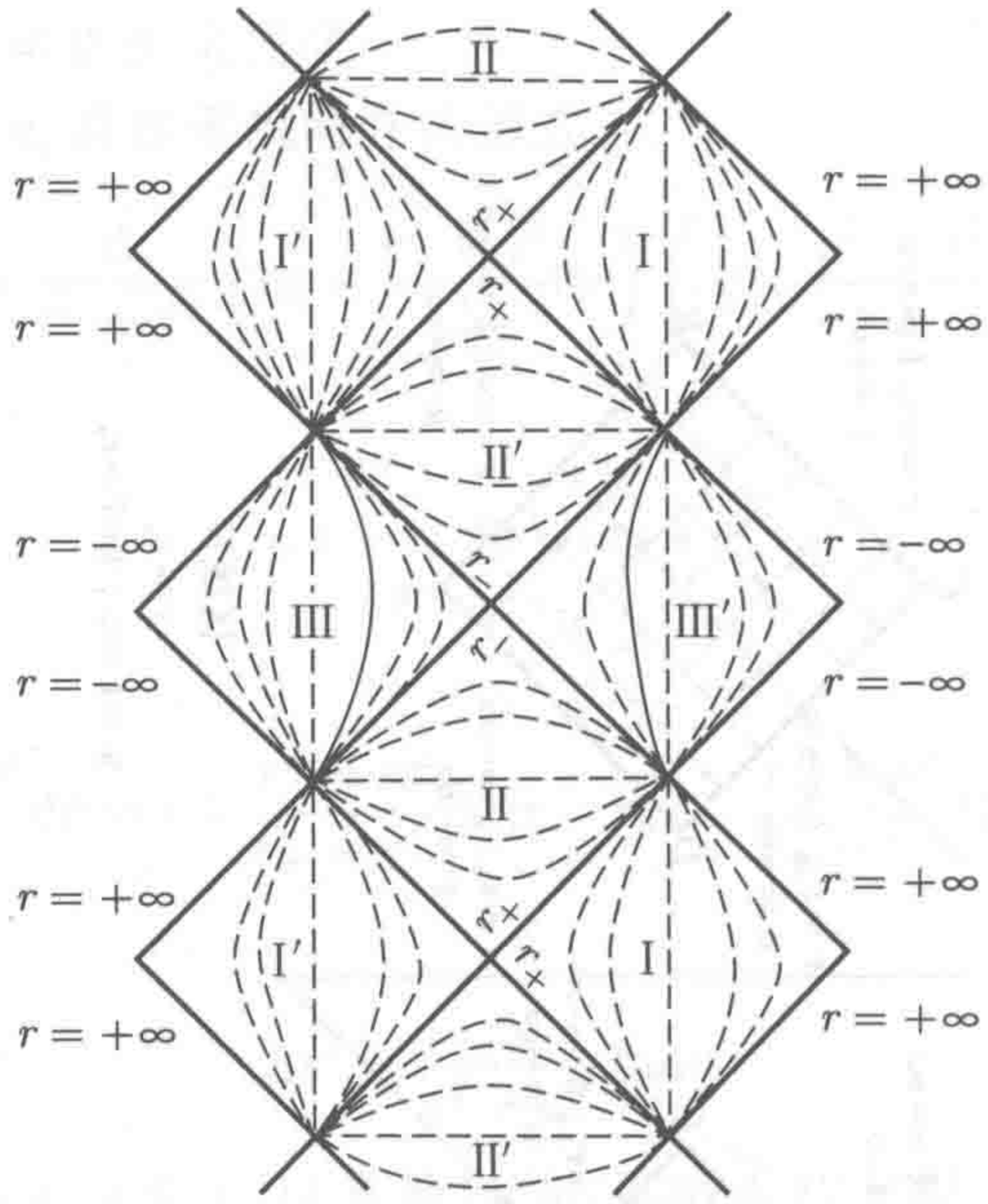


图 27 克尔时空对 $\theta = 0$ 的最大解析延伸, 是由将图 26 中的方块按图 14 中对雷斯纳 – 诺兹特朗时空所描述的方式拼接起来而实现.

[312]

[313] 其中

$$\alpha = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}, \tag{244}$$

而代换 (242) 和 (243) 中的 u 和 v 分别具有与方程 (237) 和 (240) 中同样的意义. 有了上述代换, 度规取 “普适” 形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{4}{\alpha^2}|\Delta|\mathrm{cosec}2U\,\mathrm{cosec}2V\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V, \tag{245}$$

其中 r 是用 U 和 V 来内在地定义,

$$\begin{aligned}\tan U\tan V &= -e^{2\alpha r}|r-r_+||r-r_-|^{-\beta} \quad (r > r_+ \text{ 和 } r < r_-)\\ &= +e^{2\alpha r}|r-r_+||r-r_-|^{-\beta} \quad (r_- < r < r_+),\end{aligned} \tag{246}$$

其中

$$\beta = \frac{r_-^2 + a^2}{r_+^2 + a^2} = \frac{r_-}{r_+}. \tag{247}$$

图 26 和图 27 用零短程线作出的坐标轴描绘形象地显现了背景时空的性质. 在 $r = r_+$ 的分割是事件视界, 而在 $r = r_-$ 上的分割是柯西视界, 其意义已在以前的章节阐明.

更困难的是以统一的方式一般地消除 r_+ 和 r_- 上的坐标奇异性, 并同时实现整个流形的最大解析延伸. 困难出现于沿零 (或类时) 短程线到达视界时 t 和 φ 两者都有奇异行为的事实 (见第 7 章§61). 因此, 一个能在两个视界上同时令人满意的简单坐标变换看来并不现实. 于是就只能满足于分开处理事件视界和柯西视界.

首先考虑适于平滑地穿越事件视界的代换.

从下列度规形式出发 (见方程 (217)),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{\Delta}{\rho^2}(\mathrm{d}t - a\mathrm{d}\varphi \sin^2\theta)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t]^2 \\ & -\frac{\rho^2}{\Delta}(\mathrm{d}r)^2 - \rho^2(\mathrm{d}\theta)^2; \end{aligned} \tag{248}$$

如前一样用 [314]

$$u = t - r_* \text{ 和 } v = t + r_*, \tag{249}$$

其中 r_* 是如方程 (238) 所定义的变量. 另外, 代替 φ 而引入

$$\widetilde{\varphi}_+ = \varphi - at/2Mr_+, \tag{250}$$

其中已用下标 + 区分新变量, 以强调现在关注的是对事件视界的平滑穿越. (关乎穿越视界的新角变量的引入, 是对克尔时空研究的一个基本特征.)

由所定义的变量变换,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t - a\mathrm{d}\varphi\sin^2\theta &= \frac{\rho_+^2}{r_+^2+a^2}\mathrm{d}t - a\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+\sin^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{\rho_+^2}{r_+^2+a^2}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v) - a\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{251}$$

其中

$$\rho_+^2 = r_+^2 + a^2\cos^2\theta; \tag{252}$$

类似地,

$$(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t = (r^2+a^2)\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+ + \frac{1}{2}a\frac{r^2-r_+^2}{r_+^2+a^2}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v). \tag{253}$$

还有

$$\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{r^2+a^2}(\mathrm{d}v-\mathrm{d}u). \tag{254}$$

将 (251)、(253) 和 (254) 的表示代入方程 (248), 经过一些进一步简化后得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{\Delta}{2\rho^2}\left[\frac{\rho_+^4}{(r_+^2+a^2)^2}+\frac{\rho^4}{(r^2+a^2)^2}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\rho^2(\mathrm{d}\theta)^2 \\ & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2+a^2)\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+ + \frac{1}{2}a\frac{r^2-r_+^2}{r_+^2+a^2}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)\right]^2 \\ & -\frac{a^2\Delta\sin^2\theta}{4\rho^2}\left(\frac{\rho_+^2}{r_+^2+a^2}+\frac{\rho^2}{r^2+a^2}\right)\frac{r^2-r_+^2}{(r_+^2+a^2)(r^2+a^2)}[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2] \\ & +\frac{a\Delta\sin^2\theta}{\rho^2}\left[a\sin^2\theta\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+ - \frac{\rho_+^2}{r_+^2+a^2}(\mathrm{d}u+\mathrm{d}v)\right]\mathrm{d}\widetilde{\varphi}_+. \end{aligned} \tag{255}$$

为将图 27 中的四个毗连区域 I、II、I′ 和 II′ 包括进单个坐标邻域, 如前一样定义

[315]

$$\left.\begin{aligned} \tan U_+ &= -e^{-\alpha_+ u} = -e^{-\alpha_+ t}e^{+\alpha_+ r_*} \\ \tan V_+ &= +e^{+\alpha_+ v} = +e^{+\alpha_+ t}e^{+\alpha_+ r_*}, \end{aligned}\right\} \tag{256}$$

其中

$$\alpha_+ = \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2+a^2)}. \tag{257}$$

于是

$$\mathrm{d}u = -\frac{2}{\alpha_+}\mathrm{cosec}2U_+\mathrm{d}U_+ \text{ 和 } \mathrm{d}v = +\frac{2}{\alpha_+}\mathrm{cosec}2V_+\mathrm{d}V_+. \tag{258}$$

将对 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 的这些表示代入方程 (255), 就会得到所要求形式的度规, 其中 r 会被认识到是由 U_+ 和 V_+ 按下列方程内在地定义,

$$\tan U_+ \tan V_+ = -e^{2\alpha_+ r}|r-r_+||r-r_-|^{-\beta_+}, \tag{259}$$

其中

$$\beta_+ = r_-/r_+. \tag{260}$$

再来考虑适于平滑地穿越柯西视界 $r=r_-$ 的代换, 用

$$u = r_* + t \text{ 和 } v = r_* - t \tag{261}$$

和

$$\widetilde{\varphi}_- = \varphi - at/2Mr_-. \tag{262}$$

产生的度规形式可通过将方程 (255) 中的 "+" 改为 "−"、$\mathrm{d}v$ 改为 $\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}u$ 改为 $-\mathrm{d}v$ 而得到. 而与方程 (256)—(260) 所给相类似的变换是

$$\begin{gathered} \tan U_- = e^{+\alpha_- u} = e^{+\alpha_-(r_*+t)}, \quad \tan V_- = e^{+\alpha_- v} = e^{+\alpha_-(r_*-t)}, \\ \mathrm{d}u = \frac{2}{\alpha_-}\mathrm{cosec}2U_-\mathrm{d}U_-, \quad \mathrm{d}v = \frac{2}{\alpha_-}\mathrm{cosec}2V_-\mathrm{d}V_-, \end{gathered} \tag{263}$$

其中

$$\alpha_- = \frac{r_- - r_+}{2(r_-^2 + a^2)}; \tag{264}$$

而 r 是由 U_- 和 V_- 按下式内在地定义,

$$\tan U_- \tan V_- = e^{2\alpha_- r}|r - r_-||r - r_+|^{-\beta_-}, \tag{265}$$

其中

$$\beta_- = r_+/r_-. \tag{266}$$

容易验证, 已经由 (U_+, V_+) 和 (U_-, V_-) 定义的度规, 除 ρ^2 为零的曲率奇点外是处处解析的.

在第 7 章将看到, 有了流形的最大延伸, 所有的类时和零短程线都有无限 [316]
的仿射长度 (延伸到过去和延伸到未来), 只除那些终结于奇点的以外; 也就是说, 延伸的时空是短程地完整的.

(a) 能层

克尔时空除在奇点性质上与史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空的原则性差别外, 还有一个使它与后两者进一步区分的特征. 区分产生于这一事实, 即与史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空不同, 事件视界并不与下列曲面重合,

$$g_{tt} = 1 - 2Mr/\rho^2 = 0 \tag{267}$$

或

$$r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta = \Delta - a^2\sin^2\theta = 0. \tag{268}$$

曲面

$$r = r_e(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{269}$$

是在事件视界之外, 在其上 g_{tt} 为零, 被称为能层. 它与事件视界只在极点 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 重合.

能层是静止极限面, 意思是具有世界线 $\mathrm{d}t = 0$ 的粒子为类时的区域的内边界. 例如, 事情可以在追究下列明显要求的含义时变得容易理解,

$$|v^{(\varphi)}| \leqslant 1, \tag{270}$$

其中

$$v^{(\varphi)} = e^{\psi - \nu}(\Omega - \omega) \tag{271}$$

是 §52 所述正交四次标架中 3 速度的 φ 分量. 对克尔度规, 不等式 (270) 给出 (见方程 (125))

$$|\Omega - \omega| \leqslant e^{\nu - \psi} = \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2\sqrt{\delta}}. \tag{272}$$

可得到

$$\Omega_{\substack{\max\\\min}} = \omega \pm \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2\sqrt{\delta}} = \frac{2aMr\sqrt{\delta} \pm \rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2\sqrt{\delta}}, \tag{273}$$

或, 利用等式 (119)—(121),

$$\Omega_{\substack{\max\\\min}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta} \pm a\sqrt{\delta}}{[(r^2+a^2) \pm a\sqrt{\Delta\delta}]\sqrt{\delta}}. \tag{274}$$

[317] 特别地有

$$\Omega_{\min} = -\frac{\sqrt{\Delta} - a\sqrt{\delta}}{[(r^2+a^2) - a\sqrt{\Delta\delta}]\sqrt{\delta}} = -\frac{\Delta - a^2\delta}{[\rho^2\sqrt{\Delta} + 2aMr\sqrt{\delta}]\sqrt{\delta}}, \tag{275}$$

其中再次用了等式 (119)—(121). 由于

$$\Delta - a^2\delta < 0 \text{ 在能层内}, \tag{276}$$

结论是

$$\Omega_{\min} > 0 \text{ 在能层内}, \ = 0 \text{ 在 } r = r_e(\theta). \tag{277}$$

这个结果与上文由 g_{tt} 为零导出的静止极限面的陈述一致.

在能层内不可能有静止观测者的事实, 当然并不排除区域 $r_+ < r < r_e(\theta)$ 内能够逃逸到无穷远的类时轨道的存在. 所以, 这部分空间是能与外部空间交流信息的. 在第 7 章 §65 将看到, 事件视界与静止极限面之间的这个有限空间区域的存在具有重要意义: 例如, 它导致一种过程, 即彭罗斯过程, 能够导致对黑洞转动能量的提取.

最后注意, 下文将涉及, 事件视界的面积由下式给出,

面积

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi})^{1/2}_{r=r_+}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta\}\rho^2\right]^{1/2}_{r=r_+}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi(r_+^2+a^2) = 8\pi M r_+ = 8\pi M[M + \sqrt{M^2-a^2}].
\end{aligned} \tag{278}$$

文献注释

克尔的发现是在一篇短信里 (日期为 1963 年 7 月 26 日) 很简短地发表的:

1. R. P. Kerr, *Phys. Rev. Letters*, 11, 237–8 (September 1, 1963), 并于几个月后在一次会议上 (1963 年 12 月 16—18 日) 报告:

2. R. P. KERR in *Quasistellar Sources and Gravitational Collapse*, 99–103, edited by I. Robinson and E. Schuking, University of Chicago Press, Chicago, 1965.

原初的发表文章虽然简短, 在列举解的基本特征上却是惊人地完整. 但是文章对推导过程却连一个轮廓都没有给出; 那是在大约两年后才提供:

3. R. P. KERR and A. SCHILD in *Comitato Nazionale per le Manifestazioni Celebrative Del IV Centenario della Nascita di Galileo Galilei, Atti del Convegno Sulla Relatività Generale: Problemi Dell' Energia E Onde Gravitazionali*, 1–12, edited by G. Barbèra, Florence, 1965.

4. —— in *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 17, 199–209, [318] American Math. Soc., 1965.

但是, 作者警告读者 (在文献 3 中): "给出这些结果的计算决不简单."

§52. 关于定常态轴对称时空的文献甚多; 从下文可略知其程度:

5. W. KINNERSLEY in *General Relativity and Gravitation*, 109–35, edited by G. Shaviv and J. Rosen, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

自上面的报告写出以来, 在这个课题上又有了引人注目的进展. 但是本书对一般理论的关注只限于对克尔度规的简单导出有一个恰当的基础.

虽然本节中的方程是作为第 2 章所给方程的特别情形导出, 它们却是以基本上同样的形式包括在:

6. S. CHANDRASEKHAR and J. L. FRIEDMAN, *Astrophys. J.*, 175, 379–405 (1972).

对本书所称的帕帕培特罗变换的描述是在:

7. A. PAPAPETROU, *Ann. d. Physik*, (6) 12, 309–15 (1953).

8. ——, *Ann. d'l Institut Henri Poincaré Section* A, 4, 83–105 (1966).

§53. 本节的处理在很大程度上取自:

9. S. CHANDRASEKHAR, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 358, 406–20 (1978).

恩斯特方程的导出是在:

10. F. J. ERNST, *Phys. Rev.*, 167, 1175–8 (1968).

11. ——, ibid., 168, 1415–7 (1968).

另见:

12. B. C. XANTHOPOULOS, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 365, 381–411, (1979).

§55. 关于克尔时空唯一性的主要论文是:

13. B. CARTER, *Phys. Rev. Letters*, 26, 331–3 (1972).

14. D. C. ROBINSON, ibid., 34, 905–6 (1975).

另见:

15. B. Carter in *Black Holes*, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.

16. —— in *General Relativity—An Einstein Centenary Survey*, chapter 6, 294–369, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979.

伊斯列定理 (本节中作为罗宾逊定理的特别情形导出,并假定了比伊斯列的原始表述更多些限制性的条件) 的证明是在:

17. W. Israel, *Phys. Rev.*, 164, 1776–9 (1968).

§56. 一篇重要的相关参考文献是:

18. W. Kinnersley, *J. Math. Phys.*, 10, 1195–1203 (1969).

§57. "克尔 – 席尔德" 时空是在文献 3 和 4 中引入.

本节讲述的基本思想 (归于山托珀罗斯) 取自:

19. B. C. Xanthopoulos, *J. Math. Phys.*, 19, 1607–9 (1978).

§58. 关于克尔时空性质的基本文献是:

20. B. Carter, *Phys. Rev.*, 141, 1242–7 (1966).

21. R. H. Boyer and R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.*, 8, 265–81 (1967).

22. B. Carter, *Phys. Rev.*, 174, 1559–70 (1968).

本书中用来推导和写出克尔度规的坐标常被称为 Boyer-Linquist 坐标, 在文献 21 中引入.

第七章

克尔时空的短程线

59. 引言

[319]

本章用于克尔时空短程线的研究. 对此研究用上整整一章有几个理由: 除了短程线的描述展现着时空的基本特征 (例如, 关于将流形延伸到径向坐标 r 的负值) 外, 哈密顿 – 雅可比方程的可分离性 (由卡特发现) 是赋予克尔度规以奇妙灵气的诸多性质的第一个. 此外, 此研究还揭示了从克尔黑洞提取能量的可能性 (由彭罗斯发现), 从而显现了人们以前从未思考过的物理过程的存在. 同时, 对克尔时空短程线的研究还导致对一般的彼得罗夫 D 型时空某些相当意外的性质的注意. 且从这些性质之一的确立开始.

60. D 型时空中短程线运动积分的定理

第 1 章中 (§9 (c)) 已显示, 在彼得罗夫 D 型时空中, 主零迭合是短程的和无剪切的; 而在零四次基 $(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n},\boldsymbol{m},\overline{\boldsymbol{m}})$ 里, 其中 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 是主零方向, 自旋系数 κ、σ、λ、ν 和外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3、Ψ_4 为零:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0, \tag{1}$$

和

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0. \tag{2}$$

且若如将假定的, l 是仿射参数化的, 那么自旋系数 ε 也为零:

$$\varepsilon = 0. \tag{3}$$

最后, 比安基恒等式 (第 1 章方程 (321)) 为非零外尔标量 Ψ_2 提供方程

$$\left.\begin{aligned} D\lg\Psi_2 &= +3\rho; \quad \delta\lg\Psi_2 = +3\tau, \\ \Delta\lg\Psi_2 &= -3\mu; \quad \delta^*\lg\Psi_2 = -3\pi, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

[320] 其中 D、Δ、δ 和 δ^* 分别是沿 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 的方向导数.

用 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 表示的坐标基中的度规张量 g_{ij} 是 (见第 1 章方程 (246))

$$g_{ij} = l_i n_j + l_j n_i - m_i \overline{m}_j - m_j \overline{m}_i; \tag{5}$$

而用自旋系数表示的 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 的协变导数是 (见第 1 章方程 (357))

$$\begin{aligned} l_{j;i} = &+(\gamma+\gamma^*)l_j l_i - (\alpha^*+\beta)l_j\overline{m}_i - (\alpha+\beta^*)l_j m_i \\ &-\tau\overline{m}_j l_i - \tau^* m_j l_i + \rho\overline{m}_j m_i + \rho^* m_j \overline{m}_i; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} n_{j;i} = &-(\gamma+\gamma^*)n_j l_i + (\alpha^*+\beta)n_j\overline{m}_i + (\alpha+\beta^*)n_j m_i \\ &+\pi^*\overline{m}_j n_i + \pi m_j n_i - \mu m_j \overline{m}_i - \mu^*\overline{m}_j m_i; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} m_{j;i} = &+(\gamma-\gamma^*)m_j l_i + (\alpha^*-\beta)m_j\overline{m}_i + (\beta^*-\alpha)m_j m_i \\ &+\pi^* l_j n_i - \mu^* l_j m_i - \tau n_j l_i + \rho n_j m_i. \end{aligned} \tag{8}$$

(上述关系只适用于 D 型时空, 因为已假定关系 (1) 和 (3).)

若 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 是两个矢量, 则按方程 (5),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{f} = g_{ij}k^i f^j = &(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) \\ &-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) - (\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m}), \end{aligned} \tag{9}$$

$$|\boldsymbol{k}|^2 = 2[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \tag{10}$$

和

$$k^i\nabla_i = (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})D + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})\Delta - (\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})\delta - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})\delta^*. \tag{11}$$

现在讲述由沃尔克 (Walker) 和彭罗斯得出的关于本主题的基本定理.

定理 1 如果 k 是仿射参数化的零短程线, 而 f 是垂直于 k 并沿着它平行移动的矢量, 那么在 D 型时空中, 量

$$\begin{aligned} K_s &= k^i f^j (l_i n_j - l_j n_i - m_i\overline{m}_j + \overline{m}_i m_j)\Psi_2^{-1/3} \\ &= k^i f^j (2l_i n_j - 2m_i\overline{m}_j - g_{ij})\Psi_2^{-1/3} \\ &= 2[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\Psi_2^{-1/3}, \end{aligned} \tag{12}$$

沿该短程线守恒, 即

$$k^i\nabla_i K_s = 0. \tag{13}$$

该定理的更通常表述是 "D 型时空允许共形基灵张量".

证明 定理的假定, 即 $\boldsymbol{k}$ 是仿射参数化的零短程线而 f 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 并沿着 [321]
它平行移动, 要求

$$k^i\nabla_i k_j = 0, \quad k^i\nabla_i f_j = 0, \tag{14}$$

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) = 0, \tag{15}$$

和

$$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(f\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) - (\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m}) = 0. \tag{16}$$

由于

$$\begin{aligned} &k^i\nabla_i\{[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\Psi_2^{-1/3}\} \\ &= \Psi_2^{-1/3}\{k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \\ &\quad +[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]k^i\nabla_i \lg\Psi_2^{-1/3}\}, \end{aligned} \tag{17}$$

故定理要求证明

$$\begin{aligned} &k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \\ &= -[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]k^i\nabla_i \lg\Psi_2^{-1/3}. \end{aligned} \tag{18}$$

展开方程 (18) 的左边并用方程 (14), 得

$$\begin{aligned} &k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \\ &= (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})k^ik^jl_{j;i} + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})k^if^jn_{j;i} \\ &\quad -(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})k^ik^jm_{j;i} - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})k^if^j\overline{m}_{j;i}. \end{aligned} \tag{19}$$

现在由方程 (6)—(8) 代换 $l_{j;i}$ 等等并予以简化, 得到的是

$$\begin{aligned} &k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \\ &= \rho[+(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})] \\ &\quad +\tau[-(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})] \\ &\quad +\mu[-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})] \\ &\quad +\pi[+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})]. \end{aligned} \tag{20}$$

再考虑方程 (18) 的右边并用方程 (4) 和 (11), 得

$$\begin{aligned}
&-[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]k^i\nabla_i\lg\Psi_2^{-1/3}\\
&=\frac{1}{3}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\\
&\quad\times[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})D+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})\Delta-(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})\delta-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})\delta^*]\lg\Psi_2\\
&=[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\\
&\quad\times[+\rho(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})-\mu(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})-\tau(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})+\pi(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})].
\end{aligned}\tag{21}$$

[322] 定理所要求的等式 (18) 又需要方程 (20) 右边的项与方程 (21) 最后两行的项一致. 可以验证确实如此. 先看方程 (20) 右边以自旋系数 μ 为因子的项, 用方程 (15) 和 (16), 有

$$\begin{aligned}
&-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})\\
&=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\\
&\quad+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})\\
&=-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})];
\end{aligned}\tag{22}$$

这个表示与方程 (21) 中 μ 的系数一致. 方程 (20) 和 (21) 中其它自旋系数的因子的相等能以类似方式同样用方程 (15) 和 (16) 验证. K_s 沿仿射参数化零短程线的守恒性于是得证.

定理 2 *若 $\boldsymbol{k}$ 是 D 型时空中的仿射参数化短程线, 则*

$$\begin{aligned}
K&=2|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})-Q|k|^2\\
&=2|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})-(Q-|\Psi_2|^{-2/3})|k|^2
\end{aligned}\tag{23}$$

沿 $\boldsymbol{k}$ 守恒, 若有且仅有满足下列方程的标量 Q 存在,

$$DQ=D|\Psi_2|^{-2/3},\quad \Delta Q=\Delta|\Psi_2|^{-2/3},\quad \text{和 } \delta Q=\delta^*Q=0.\tag{24}$$

证明 首先看到, 定理表述中 K 的两种形式的等价性是来自方程 (10). K 对于沿 $\boldsymbol{k}$ 的短程线运动的守恒性要求

$$2k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})|\Psi_2|^{-2/3}]=|k|^2k^i\nabla_iQ\tag{25}$$

因为 $|\boldsymbol{k}|^2$ 是守恒的. 由方程 (11), 方程 (25) 的右边能重写为

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{k}|^2k^i\nabla_iQ=|\boldsymbol{k}|^2[&(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})DQ+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})\Delta Q\\
&-(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})\delta Q-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})\delta^*Q].
\end{aligned}\tag{26}$$

对方程 (25) 的左边, 有

$$\begin{aligned}&2k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})|\Psi_2|^{-2/3}]\\&=2|\Psi_2|^{-2/3}[k^i\nabla_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})k^i\nabla_i\lg|\Psi_2|^{-2/3}].\end{aligned}\tag{27}$$

另一方面, 由方程 (4) 和 $\boldsymbol{k}$ 的短程线特征有,

[323]

$$\begin{aligned}&k^i\nabla_i\lg|\Psi_2|^{-2/3}\\&=-\frac{1}{3}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})D+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})\Delta-(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})\delta-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})\delta^*](\lg\Psi_2+\lg\Psi_2^*)\\&=-[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\rho+\rho^*)-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\mu+\mu^*)-(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\tau-\pi^*)-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\tau^*-\pi)],\end{aligned}\tag{28}$$

和

$$k^i\nabla_i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})k^ik^jl_{j;i}+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})k^ik^jn_{j;i}.\tag{29}$$

现在将方程 (28) 和 (29) 代入方程 (27), 并由方程 (6) 和 (7) 代换 $l_{j;i}$ 和 $n_{j;i}$, 在经过可观的简化工作后得到

$$\begin{aligned}&2k^i\nabla_i[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})|\Psi_2|^{-2/3}]\\&=2|\Psi_2|^{-2/3}\{[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\rho+\rho^*)-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\mu+\mu^*)]\\&\quad\times[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})]\}\\&=|\Psi_2|^{-2/3}|k|^2[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\mu+\mu^*)-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\rho+\rho^*)]\\&=|k|^2[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})D|\Psi_2|^{-2/3}+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})\Delta|\Psi_2|^{-2/3}],\end{aligned}\tag{30}$$

其中, 在简化的最后一步再次用了方程 (4). 上面简化的最后结果与方程 (26) 右边的比较导致了定理中陈述的要求 (24).

推论 1 任何 D 型时空中的零短程线 $\boldsymbol{k}$ 允许运动积分

$$K_0=2|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})=2|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}).\tag{31}$$

这是所述定理的平凡结果, 因为对零短程线有 $|\boldsymbol{k}|^2=0$, 且它并不要求条件 (24) 的任何一个.

推论 2 不计一个倍增因子, 推论 1 中的常量 K_0 是定理 1 中复数常量 K_s 的绝对值的平方.

证明 由方程 (12),

$$\begin{aligned}K_sK_s^*=4|\Psi_2|^{-2/3}&[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]\\&\times[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})-(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})];\end{aligned}\tag{32}$$

或等价地用方程 (16),

$$|K_s|^2 = -4|\Psi_2|^{-2/3}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \times[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})]. \tag{33}$$

[324] 重复利用等式 (15) 和 (16) 来展开和简化, 得到

$$\begin{aligned}|K_s|^2 &= -4|\Psi_2|^{-2/3}\{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})^2(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})^2 \\ &\quad -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})]\} \\ &= -4|\Psi_2|^{-2/3}\{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})^2(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})^2 \\ &\quad -(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) + (\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})]\} \\ &= -4|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})[(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l}) - (\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})] \\ &= -4|\Psi_2|^{-2/3}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})|f|^2.\end{aligned} \tag{34}$$

由于 f 是平行移动, 故 $|f|^2$ 沿短程线 $\boldsymbol{k}$ 保持守恒, 而所述推论得证.

推论 3 克尔度规允许定理 2 中所示形式的守恒量.

在第 6 章所采用的坐标系里 (见第 6 章方程 (180)),

$$|\Psi_2|^{-2/3} = M^{-2/3}\rho^2 = M^{-2/3}(r^2 + a^2\cos^2\theta). \tag{35}$$

相应地, 定理的要求由下列选择而达到,

$$Q = M^{-2/3}r^2. \tag{36}$$

去掉因子 $M^{-2/3}$, 结论是在克尔几何中,

和

$$\left.\begin{aligned}K &= 2\rho^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) - r^2|\boldsymbol{k}|^2 \\ K &= 2\rho^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) + a^2|\boldsymbol{k}|^2\cos^2\theta\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

是短程线运动的积分.

(37) 式的两个积分可被认为是独立的, 因为它们的等价性是来自于 $|\boldsymbol{k}|^2$ 的不变性, 而这又通常被说成是等同于静质量守恒.

定理 3 对 D 型时空, 定理 2 所给形式的短程线运动积分存在的必要和充分条件是, 自旋系数 ρ、τ、μ 和 π 以下列方式相关联,

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\mu}{\mu^*} = \frac{\tau}{\pi^*} = \frac{\pi}{\tau^*}. \tag{38}$$

证明 对 D 型时空的短程线运动, 定理 2 得到的 (23) 形式的积分存在的条件是, 存在一个具有下列性质的标量 Q,

$$DQ = Df, \quad \Delta Q = \Delta f \text{ 和 } \delta Q = \delta^* Q = 0, \tag{39}$$

其中为方便已写 [325]

$$f = |\Psi_2|^{-2/3}. \tag{40}$$

用 f, 支配 Ψ_2 的比安基恒等式 (4) 变为

$$\left.\begin{aligned} Df &= -(\rho+\rho^*)f; \quad \delta f = (\pi^* - \tau)f, \\ \Delta f &= +(\mu+\mu^*)f; \quad \delta^* f = (\pi - \tau^*)f. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

定理的证明包括, 将合用的转换关系 (第 1 章§8 (c)) 运用于 Q, 并一致地由方程 (41) 来追踪要求 (39) 的结果. 对 D 型时空, 与关系 (1) 和 (3) 相符的转换关系是

$$\left.\begin{aligned} &\delta^*\delta - \delta\delta^* = (\mu^* - \mu)D + (\rho^* - \rho)\Delta + (\alpha - \beta^*)\delta + (\beta - \alpha^*)\delta^*, \\ &\Delta D - D\Delta = (\gamma + \gamma^*)D - (\tau^* + \pi)\delta - (\tau + \pi^*)\delta^*, \\ &\delta D - D\delta = (\alpha^* + \beta - \pi^*)D - \rho^*\delta, \\ &\delta\Delta - \Delta\delta = (\tau - \alpha^* - \beta)\Delta + (\mu - \gamma - \gamma^*)\delta. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

将这些关系运用于 Q, 并用要求 (39), 得

$$(\mu^* - \mu)Df + (\rho^* - \rho)\Delta f = 0, \tag{43}$$

$$(\Delta D - D\Delta)f = (\gamma + \gamma^*)Df, \tag{44}$$

$$\delta Df = (\alpha^* + \beta - \pi^*)Df, \tag{45}$$

和

$$\delta\Delta f = (\tau - \alpha^* - \beta)\Delta f. \tag{46}$$

现在来用关系式 (41). 方程 (43) 直接给出关系

$$(\mu^* - \mu)(\rho + \rho^*) = (\rho^* - \rho)(\mu + \mu^*), \tag{47}$$

经简化有

$$\rho\mu^* = \rho^*\mu \text{ 或 } \rho/\rho^* = \mu/\mu^*. \tag{48}$$

下一步, 计算方程 (44) 的左边, 按方程 (42), 得

$$(\tau^* + \pi)\delta f + (\tau + \pi^*)\delta^* f = 0, \tag{49}$$

或, 由关系 (41),

$$(\tau^* + \pi)(\tau - \pi^*) + (\tau + \pi^*)(\tau^* - \pi) = 0. \tag{50}$$

方程 (50) 经简化后给出

$$\tau\tau^* - \pi\pi^* = 0, \quad \text{或 } \tau/\pi^* = \pi/\tau^*. \tag{51}$$

[326] 对方程 (45) 和 (46) 结果的追踪稍微复杂一些. 首先, 得方程 (41) 之助, 方程 (45) 和 (46) 能被简化而给出

$$\delta \lg(\rho + \rho^*) = (\alpha^* + \beta - 2\pi^* + \tau) = \delta \lg \rho + \delta \lg(1 + \rho^*/\rho), \tag{52}$$

$$\delta \lg(\mu + \mu^*) = (2\tau - \pi^* - \alpha^* - \beta) = \delta \lg \mu + \delta \lg(1 + \mu^*/\mu). \tag{53}$$

由于按方程 (48) 有 $\rho/\rho^* = \mu/\mu^*$, 从方程 (52) 减去方程 (53) 得到

$$\delta \lg \rho - \delta \lg \mu = 2\alpha^* + 2\beta - \pi^* - \tau, \tag{54}$$

或

$$\delta\rho - \rho\delta \lg \mu = (2\alpha^* + 2\beta - \pi^* - \tau)\rho. \tag{55}$$

另一方面, 由里奇恒等式第 1 章方程 (310 (k)),

$$\delta\rho = \rho(\alpha^* + \beta + \tau) - \tau\rho^*. \tag{56}$$

借助最后这个关系从方程 (55) 消去 $\delta\rho$, 得

$$-\delta\mu = (\alpha^* + \beta - \pi^* - 2\tau)\mu + \tau\mu^*, \tag{57}$$

其中已再次用了方程 (48). 但由里奇恒等式第 1 章方程 (310 (m)),

$$-\delta\mu^* = (\alpha^* + \beta + \pi^*)\mu^* - \pi^*\mu. \tag{58}$$

将方程 (57) 和 (58) 相加, 得

$$-\delta(\mu + \mu^*) = (\alpha^* + \beta - 2\pi^* - 2\tau)\mu + (\alpha^* + \beta + \tau + \pi^*)\mu^*. \tag{59}$$

但又还有关系 (见方程 (53))

$$-\delta(\mu + \mu^*) = -(2\tau - \pi^* - \alpha^* - \beta)(\mu + \mu^*). \tag{60}$$

方程 (59) 和 (60) 的比较给出

$$\tau\mu^* - \pi^*\mu = 0, \quad \text{或 } \tau/\pi^* = \mu/\mu^*. \tag{61}$$

将方程 (48)、(51) 和 (61) 结合, 就得到须建立的关系式 (38).

事实上关系式 (38) 为大多数 D 型度规所满足.

61. 赤道面上的短程线

赤道面上的短程线显然可以在很大程度上如同对史瓦西和雷斯纳 - 诺兹特朗时空那样来描绘: 能量和角动量积分常量足以将问题简化为求积分. 但是有两个实质性差别必须记取. 第一, 必须区分正向和反向轨道, 二者绕对称轴的转动是分别在与黑洞相同和相反的方向上. 第二, 坐标 φ 如坐标 t 那样, 并不是描述对共动观测者 "真正" 发生了什么的 "好" 坐标: 趋近于视界 (在 r_+ 或 r_- 上) 的轨道将围绕黑洞螺旋转动无数次, 并用无限长的坐标时间 t 来穿越视界; 而共动观测者对这些都体验不到. [327]

赤道面上 ($\dot\theta = 0$ 和 θ =常数 $= \pi/2$) 运动的恰当拉格朗日量是

$$2\mathscr{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot t^2 + \frac{4aM}{r}\dot t\dot\varphi - \frac{r^2}{\Delta}\dot r^2 - \left[(r^2+a^2) + \frac{2a^2M}{r}\right]\dot\varphi^2; \tag{62}$$

由此推出广义动量是

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot t + \frac{2aM}{r}\dot\varphi = E = \text{常量}, \tag{63}$$

$$-p_\varphi = -\frac{2aM}{r}\dot t + \left[(r^2+a^2) + \frac{2a^2M}{r}\right]\dot\varphi = L = \text{常量}, \tag{64}$$

和

$$-p_r = \frac{r^2}{\Delta}\dot r, \tag{65}$$

其中已用上点号表示对仿射参数 τ 的导数. (p_t 和 p_φ 的守恒性是来自拉格朗日量对 t 和 φ 的独立性, 而这又正是克尔几何定常态轴对称特征的显示.)

哈密顿量由下式给出,

$$\begin{aligned}\mathscr{K} &= p_t\dot t + p_\varphi\dot\varphi + p_r\dot r - \mathscr{L}\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot t^2 + \frac{2aM}{r}\dot t\dot\varphi - \frac{r^2}{2\Delta}\dot r^2 - \frac{1}{2}\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)\dot\varphi^2;\end{aligned} \tag{66}$$

而由哈密顿量对 t 的独立性可推得

$$\begin{aligned}2\mathscr{K} &= \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot t + \frac{2aM}{r}\dot\varphi\right]\dot t - \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)\dot\varphi - \frac{2aM}{r}\dot t\right]\dot\varphi - \frac{r^2}{\Delta}\dot r^2\\ &= E\dot t - L\dot\varphi - \frac{r^2}{\Delta}\dot r^2 = \delta_1 = \text{常量}.\end{aligned} \tag{67}$$

不失一般性, 可设

$$\left.\begin{aligned}\delta_1 &= 1\text{对类时短程线},\\ &= 0\ \text{对零短程线}.\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

[328] (对类时短程线设 $\delta_1 = 1$ 要求 E 的意义是比能量即单位质量的能量.)

对 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{t}$ 解方程 (63) 和 (64), 得

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)L + \frac{2aM}{r}E\right], \tag{69}$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r}\right)E - \frac{2aM}{r}L\right]; \tag{70}$$

将这些解代入方程 (67) 的第二行, 得到径向方程

$$r^2\dot{r}^2 = r^2E^2 + \frac{2M}{r}(aE - L)^2 + (a^2E^2 - L^2) - \delta_1\Delta. \tag{71}$$

(a) 零短程线

如已注明的, 对零短程线 $\delta_1 = 0$, 而径向方程 (71) 变为

$$\dot{r}^2 = E^2 + \frac{2M}{r^3}(L - aE)^2 - \frac{1}{r^2}(L^2 - a^2E^2). \tag{72}$$

在下面的考虑中, 用碰撞参量

$$D = L/E, \tag{73}$$

而不是 L, 来区分短程线将更便利.

首先看到, 有着碰撞参量

$$D = a, \quad \text{当 } L = aE \tag{74}$$

的短程线现在起着与史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗几何中的径向短程线同样的作用. 于是, 现在方程 (69)、(70) 和 (72) 简化为

$$\dot{r} = \pm E, \quad \dot{t} = (r^2 + a^2)E/\Delta, \quad \text{和 } \dot{\varphi} = aE/\Delta. \tag{75}$$

径向坐标是一致地由仿射参数来描述, 而支配 t 和 φ 的方程是

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{r^2 + a^2}{\Delta} \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \pm\frac{a}{\Delta}. \tag{76}$$

这些方程的解是 (见第 6 章方程 (238))

$$\left.\begin{aligned} \pm t &= r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-}\lg\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-}\lg\left(\frac{r}{r_-} - 1\right), \\ \pm\varphi &= \frac{a}{r_+ - r_-}\lg\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{a}{r_+ - r_-}\lg\left(\frac{r}{r_-} - 1\right). \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

[329] 这些解显示了 t 和 φ 随着趋近视界 r_+ 和 r_- 而趋于 $\pm\infty$ 的特征行为, 对此事

实已予注意.

如下文将看到的, 由方程 (76) 描述的零短程线是限于赤道面的主零迭合的成员.

一般说来, 很清楚, 必须如史瓦西几何中那样区分碰撞参量大于和小于一定临界值 $D_{\rm c}$ 的轨道 ($D_{\rm c}$ 对正向和反向轨道将是不同的). 对 $D=D_{\rm c}$, 短程线方程将给出一个半径为 $r_{\rm c}$ (比如说) 的不稳定圆轨道. 对 $D>D_{\rm c}$, 将有两类轨道: 第一类来自无穷远处, 近心点距离大于 $r_{\rm c}$; 第二类有距离小于 $r_{\rm c}$ 的远心点, 终结于 $r=0$ (和 $\theta=\pi/2$!) 的奇点. 对 $D=D_{\rm c}$, 两类轨道重合: 两者都围绕在 $r=r_{\rm c}$ 上的同一个不稳定圆轨道无限地螺旋转动. 对 $D<D_{\rm c}$, 只有一类轨道: 来自无穷远, 越过两个视界, 终结于奇点.

决定不稳定圆形 "光子轨道" 半径 $r_{\rm c}$ 的方程是 (见方程 (72))

$$E^2+\frac{2M}{r_{\rm c}^3}(L-aE)^2-\frac{1}{r_{\rm c}^2}(L^2-a^2E^2)=0 \tag{78}$$

和

$$E^2+\frac{2M}{r_{\rm c}^3}(L-aE)^2-\frac{1}{r_{\rm c}^2}(L^2-a^2E^2)=0 \tag{79}$$

由方程 (79) 可得结论,

$$r_{\rm c}=3M\frac{L-aE}{L+aE}=3M\frac{D_{\rm c}-a}{D_{\rm c}+a}. \tag{80}$$

将此代入方程 (78), 得

$$E^2=\frac{1}{27M^2}\frac{(L+aE)^3}{L-aE}=\frac{E^2}{27M^2}\frac{(D_{\rm c}+a)^3}{D_{\rm c}-a}, \tag{81}$$

或

$$(D_{\rm c}+a)^3=27M^2(D_{\rm c}-a). \tag{82}$$①

令

$$y=D_{\rm c}+a, \tag{83}$$

得三次方程 [330]

$$y^3-27M^2y+54aM^2=0. \tag{84}$$

现在必须来区分对应于正向和反向轨道的 $a>0$ 和 $a<0$. 对 $a>0$,

$$\left.\begin{aligned} &y=-6M\cos(\vartheta+120^\circ)\ \text{其中}\ \cos 3\vartheta=a/M,\\ &D_{\rm c}=y-a\ \text{和}\ r_{\rm c}=3M(1-2a/y); \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

① 容易验证, 由方程 (80) 和 (82) 可得到 $D_{\rm c}^2=3r_{\rm c}^2+a^2$, 这是在史瓦西极限 $a=0$ 时所得结果的简单推广.

而对 $-a=|a|>0$,

$$\left.\begin{aligned} &y=6M\cos\vartheta \text{ 其中 } \cos 3\vartheta=|a|/M,\\ &D_{\mathrm{c}}=y+|a| \text{ 和 } r_{\mathrm{c}}=3M(1+2|a|/y). \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

能够直接验证, 用 ϑ 来直接表示的对 r_{c} 的解是

$$r_{\mathrm{c}}=4M\cos^2\vartheta=2M\left\{1+\cos\left[\frac{2}{3}\cos^{-1}\left(\pm\frac{a}{M}\right)\right]\right\}, \tag{87}$$

其中上号是对反向轨道, 下号对正向轨道.

由方程 (85) 和 (86) 得

$$\text{对 } a=0: \quad D_{\mathrm{c}}=(3\sqrt{3})M \text{ 和 } r_{\mathrm{c}}=3M, \tag{88}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{对 } a=M: \quad D_{\mathrm{c}}=2M \text{ 和 } r_{\mathrm{c}}=M \quad (\text{对正向轨道})\\ &\text{对 } a=-M: \quad D_{\mathrm{c}}=7M \text{ 和 } \quad r_{\mathrm{c}}=4M \quad (\text{对反向轨道}) \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

转到当碰撞参量为临界值 D_{c} 时支配轨道的方程, 方程 (72) 右边的表示允许一对重根, 可得到该方程简化为

$$\dot{u}^2=ME^2(D_{\mathrm{c}}-a)^2u^4(u-u_{\mathrm{c}})^2(2u+u_{\mathrm{c}}), \tag{90}$$

其中

$$u=\frac{1}{r} \text{ 和 } u_{\mathrm{c}}=\frac{1}{r_{\mathrm{c}}}=\frac{D_{\mathrm{c}}+a}{3M(D_{\mathrm{c}}-a)}. \tag{91}$$

方程 (90) 可直接积分给出

$$\begin{aligned}[E(D_{\mathrm{c}}-a)\sqrt{M}]\tau&=\pm\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2(u-u_{\mathrm{c}})(2u+u_{\mathrm{c}})^{1/2}}\\&=\pm\frac{1}{u_{\mathrm{c}}^2}\left\{\frac{1}{u}(2u+u_{\mathrm{c}})^{1/2}+\frac{1}{\sqrt{3u_{\mathrm{c}}}}\lg\left|\frac{\sqrt{2u+u_{\mathrm{c}}}-\sqrt{3u_{\mathrm{c}}}}{\sqrt{2u+u_{\mathrm{c}}}+\sqrt{3u_{\mathrm{c}}}}\right|\right\}.\end{aligned} \tag{92}$$

[331] 但若是希望展现赤道面上的轨道, 可将它与方程

$$\dot{\varphi}=\frac{Eu^2}{3(a^2u^2-2Mu+1)u_{\mathrm{c}}}[3D_{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}}-2(D_{\mathrm{c}}+a)u] \tag{93}$$

(直接来自方程 (69)) 结合而得到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{D_{\mathrm{c}}+a}{\sqrt{M}}(a^2u^2-2Mu+1)\frac{(u-u_{\mathrm{c}})(2u+u_{\mathrm{c}})^{1/2}}{3D_{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}}-2(D_{\mathrm{c}}+a)u}, \tag{94}$$

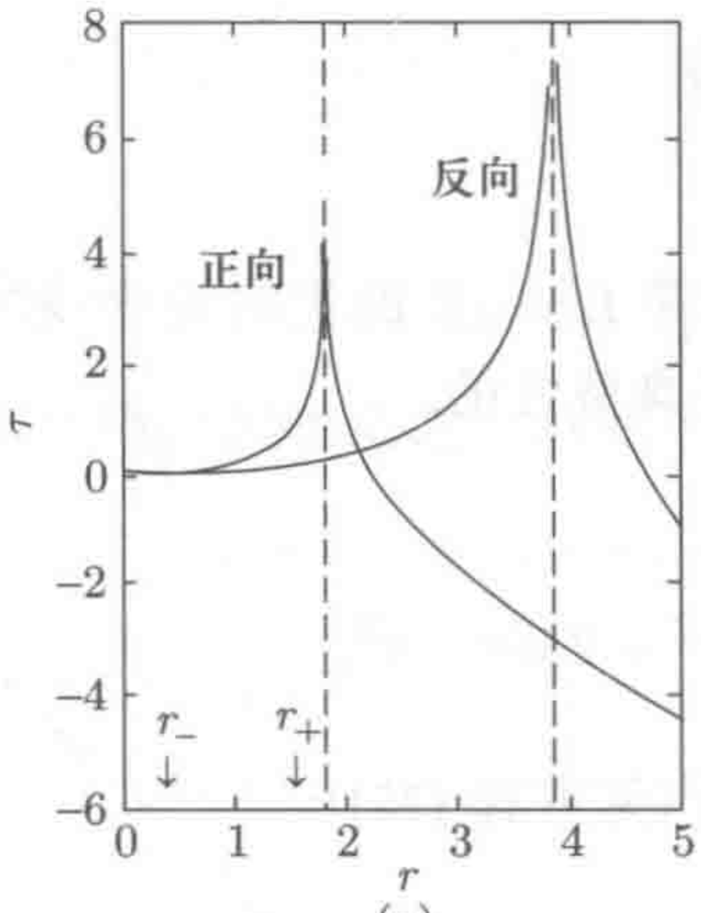
或

$$\varphi=\pm\frac{\sqrt{M}}{a^2(D_{\mathrm{c}}+a)}\int\frac{3D_{\mathrm{c}}u_{\mathrm{c}}-2(D_{\mathrm{c}}+a)u}{(u-u_+)(u-u_-)(u-u_{\mathrm{c}})(2u+u_{\mathrm{c}})^{1/2}}\mathrm{d}u, \tag{95}$$

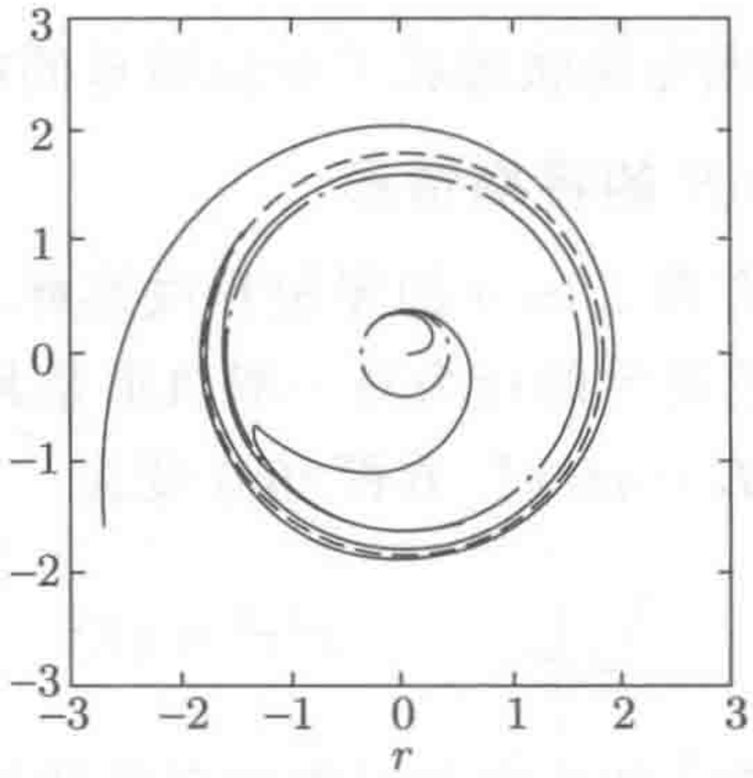
其中 $u_\pm = 1/r_\pm$. 方程 (95) 右边的积分是基本的, 可以直截了当地计算. 但其明晰表示包括部分分式, 并不简单, 这里不拟写出.

图 28 所示为解 (92) 和 (95) 给出的轨道. 它们展示了已经描述的特征. 一般轨道的性质不难由所绘的具有临界碰撞参量的轨道体现出来.

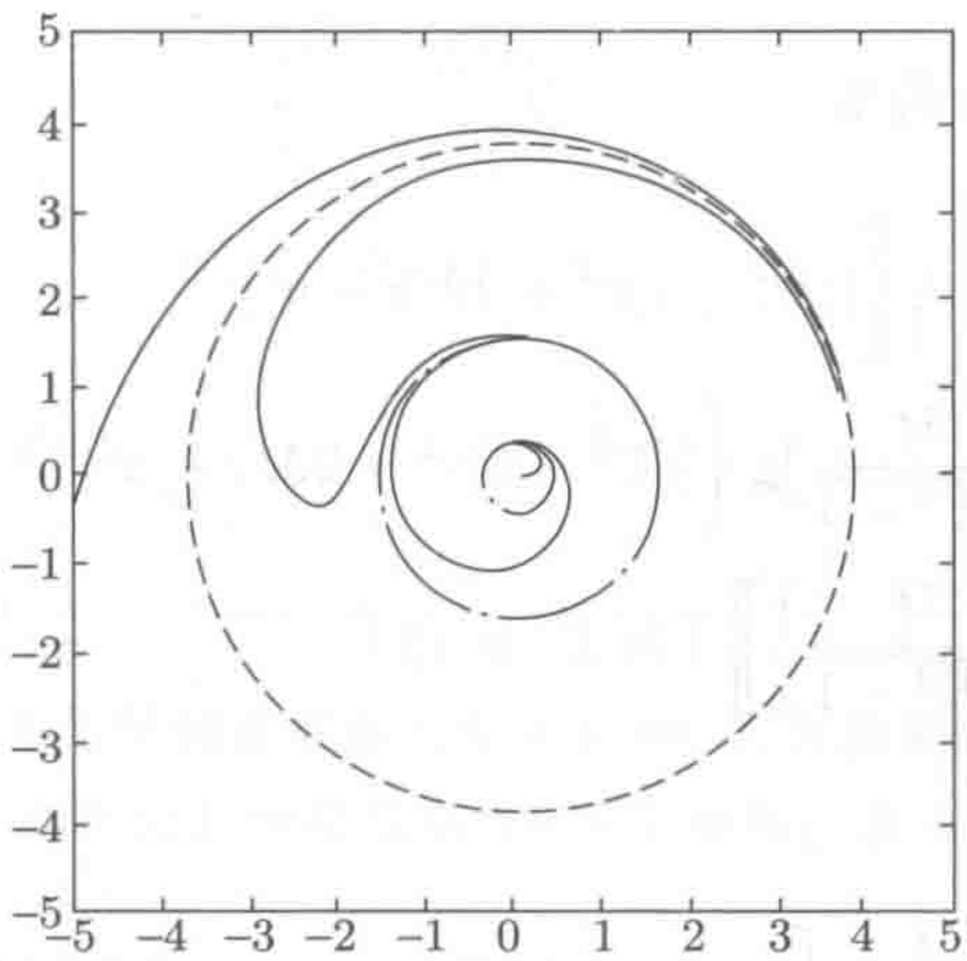
[332]



(a)



(b)



(c)

图 28 参数 $a = 0.8$ 的克尔黑洞赤道面上的临界零短程线 (正向和反向). 径向坐标 r 随仿射参数 τ 的变化示于图 (a), 而随同样轨道的 φ 的相应变化示于图 (b) 和 (c). 不稳定圆轨道的半径和这些短程线对应的碰撞参量是, 对正向轨道 $r_c = 1.811M$ 和 $D_c = 3.237M$, 对反向轨道 $r_c = 3.819M$ 和 $D_c = 6.662M$. 沿坐标轴长度的单位是 M. 两个视界由图 (b) 和 (c) 中的虚线表示.

(*b*) 类时短程线

对类时短程线, 对 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{t}$ 的方程 (69) 和 (70) 保持不变, 但方程 (72) 变为

$$r^2\dot{r}^2 = -\Delta + r^2E^2 + \frac{2M}{r}(L-aE)^2 - (L^2 - a^2E^2), \tag{96}$$

其中 E 现在是轨道粒子单位质量的能量.

(i) $L = aE$ 的特别情形

如有着 $D = a$ 的零短程线那样, 有着 $L = aE$ 的类时短程线的意义在于, 它们穿越视界的行为对一般轨道是具有典型性的.

当 $L = aE$ 时, 方程 (96) 变为

$$r^2\dot{r}^2 = (E^2-1)r^2 + 2Mr - a^2, \tag{97}$$

而对 $\dot{\varphi}$ 和 $\dot{t}$ 的方程与对零短程线的相同 (见方程 (75)):

$$\dot{\varphi} = aE/\Delta \text{ 和 } \dot{t} = E(r^2+a^2)/\Delta. \tag{98}$$

[333] 方程 (97) 积分给出

$$\begin{aligned}\tau = \frac{1}{E^2-1}\Big[\Big[&[(E^2-1)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2} \\ &-\frac{M}{\sqrt{E^2-1}}\lg\Big\{[(E^2-1)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2} + r\sqrt{E^2-1} \\ &+\frac{M}{\sqrt{E^2-1}}\Big\}\Big]\Big] \text{ (当 } E^2 > 1)\end{aligned} \tag{99}$$

和

$$\begin{aligned}\tau = -\frac{1}{1-E^2}\Big\{&[-(1-E^2)r^2 + 2Mr - a^2]^{1/2} \\ &+\frac{1}{\sqrt{1-E^2}}\sin^{-1}\frac{M-(1-E^2)r}{[M^2 - a^2(1-E^2)]^{1/2}}\Big\} \text{ (当 } E^2 < 1).\end{aligned} \tag{100}$$

(所给的解只对 $a^2 < M^2$ 成立.)

等价地, 可将支配 $\dot{r}$ 和 $\dot{\varphi}$ 的方程以下列方式结合,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi} = \pm\frac{a}{E}(u-u_+)(u-u_-)[(E^2-1) + 2Mu - a^2u^2]^{1/2}, \tag{101}$$

其中 $u=1/r$ 和 $u_\pm=1/r_\pm$, 并得到解

$$\varphi=\frac{1}{a(u_+-u_-)}\Big[\lg\{2E[E^2\xi_+^2+2(M-a^2u_+)\xi_+-a^2]^{1/2}+2E^2\xi_+ +2(M-a^2u_+)\}-\lg\{2E[E^2\xi_-^2+2(M-a^2u_-)\xi_--a^2]^{1/2} +2E^2\xi_-+2(M-a^2u_-)\}\Big], \tag{102}$$

其中

$$\xi_\pm=(u-u_\pm)^{-1}. \tag{103}$$

由方程 (102) 得出的轨道之一例示于图 29.

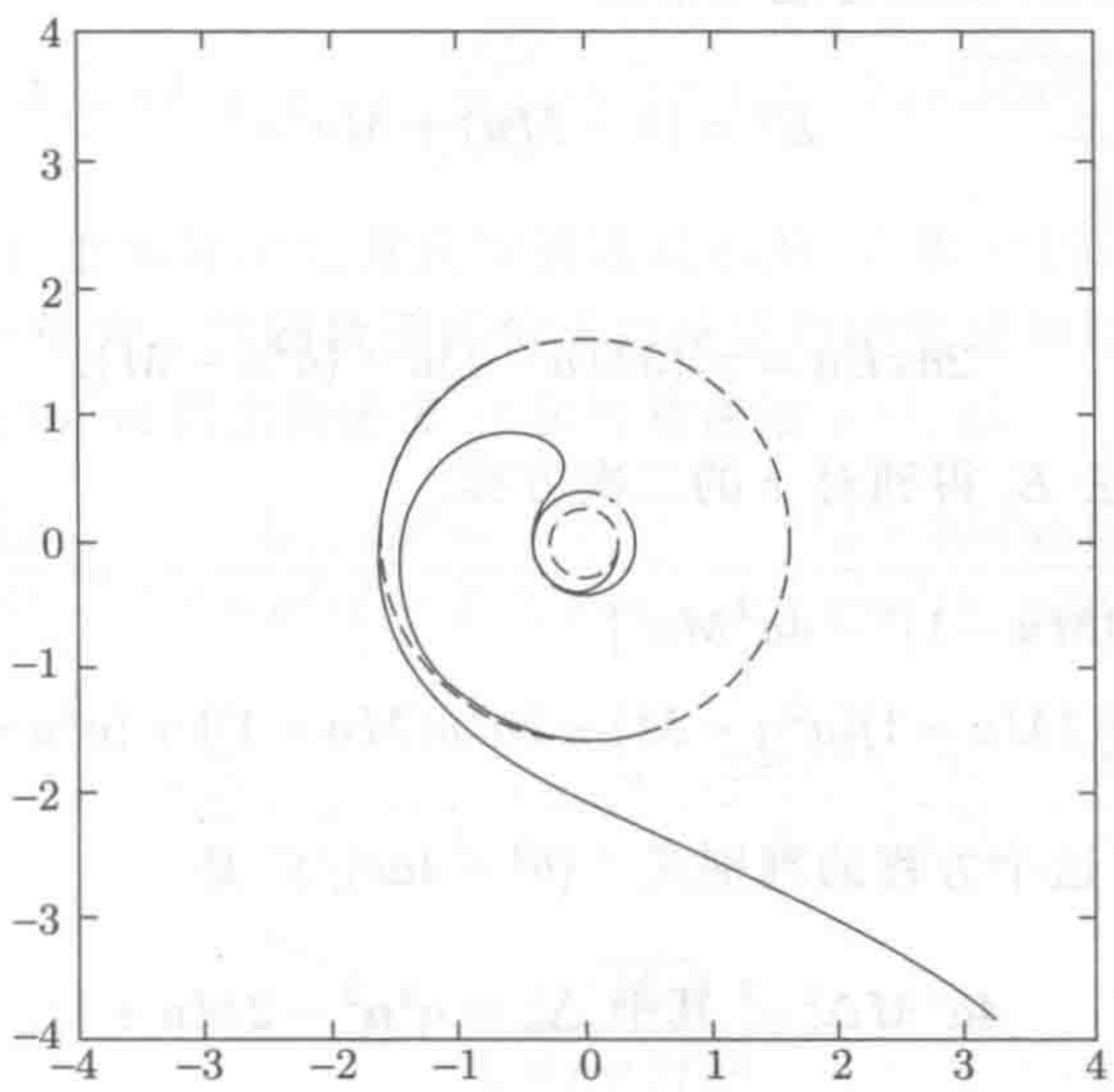


图 29　参数 $a=0.8$ 的克尔黑洞赤道面上有 $L=aE$ 的开放类时短程线之一例. 对所绘的轨道 $E=1.4$. 沿坐标轴的长度单位是 M; 两个视界由虚线显示.

(ii) 圆形的和相关的轨道

现在转到对径向方程 (96) 的一般考虑. 以倒数半径 $u(=1/r)$ 为独立变量, 方程取形式

$$u^{-4}\dot{u}^2=-(a^2u^2-2Mu+1)+E^2+2M(L-aE)^2u^3-(L^2-a^2E^2)u^2. \tag{104}$$

如在史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗几何中那样, 圆轨道在轨道分类中起着 [334]
重要作用. 此外, 它们还对提供能同时展现基本特征的轨道简例很有作用; 而这终究是研究短程线的理由.

现在来寻求在某个给定半径 $r = 1/u$ 上圆轨道所具有的 L 和 E 值. 当 L 和 E 具有这些值时, 方程 (104) 右边的三次多项式有一对重根. 重根存在的条件是

$$-(a^2u^2 - 2Mu + 1) + E^2 + 2Mx^2u^3 - (x^2 + 2aEx)u^2 = 0 \tag{105}$$

和

$$-(a^2u - M) + 3Mx^2u^2 - (x^2 + 2aEx)u = 0, \tag{106}$$

其中已记

$$x = L - aE. \tag{107}$$

方程 (105) 和 (106) 能结合起来给出

$$E^2 = (1 - Mu) + Mx^2u^3 \tag{108}$$

[335] 和

$$2axEu = x^2(3Mu - 1)u - (a^2u - M). \tag{109}$$

由这些方程消去 E, 得到对 x 的二次方程:

$$\begin{aligned} &x^4u^2[(3Mu - 1)^2 - 4a^2Mu^3] \\ &-2x^2u[(3Mu - 1)(a^2u - M) - 2a^2u(Mu - 1)] + (a^2u - M)^2 = 0. \end{aligned} \tag{110}$$

值得注意的是, 这个方程的判别式 “ $(b^2 - 4ac)/4$” 是

$$4a^2M\Delta_u^2u^3 \text{ 其中 } \Delta_u = a^2u^2 - 2Mu + 1; \tag{111}$$

而方程 (110) 的解将取特别简单的形式, 只要写

$$(3Mu - 1)^2 - 4a^2Mu^3 = Q_+Q_-, \tag{112}$$

其中

$$Q_\pm = 1 - 3Mu \pm 2a\sqrt{Mu^3}. \tag{113}$$

于是得到

$$x^2u^2 = \frac{Q_\pm\Delta_u - Q_+Q_-}{Q_+Q_-} = \frac{1}{Q_\mp}(\Delta_u - Q_\mp). \tag{114}$$

另一方面 (如可验证的),

$$\Delta_u - Q_\mp = u(a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2. \tag{115}$$

对 x 的解于是取简单形式

$$x=-\frac{a\sqrt{u}\pm\sqrt{M}}{\sqrt{uQ_{\mp}}}. \tag{116}$$

上面这些式子中的上号是对反向轨道, 而下号对正向轨道. 本节将一致地遵守这个约定.

将 x 的解 (116) 代入方程 (108), 得

$$E=\frac{1}{\sqrt{Q_{\mp}}}[1-2Mu\mp a\sqrt{Mu^3}]; \tag{117}$$

与这个 E 值相关联的 L 值是

$$L=aE+x=\mp\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{uQ_{\mp}}}[a^2u^2+1\pm 2a\sqrt{Mu^3}]. \tag{118}$$

如已说明的, 也如导出的方式所清晰显示的, 方程 (117) 和 (118) 所给的 E 和 L 是倒数半径为 u 的圆轨道的粒子单位质量的能量和角动量. 从这些方程和方程 (69)、(70) 可得出角速度 Ω 和转动速度 $v^{(\varphi)}$, 即 [336]

$$\Omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{L-2Mux}{(r^2+a^2)E-2aMxu}=\frac{(L-2Mux)u^2}{(1+a^2u^2)E-2aMux^3} \tag{119}$$

和

$$v^{(\varphi)}=e^{\psi-\nu}(\Omega-\omega)=\left(r^2+a^2+\frac{2Ma^2}{r}\right)\frac{\Omega}{\sqrt{\Delta}}-\frac{2aM}{r\sqrt{\Delta}}. \tag{120}$$

可得①

$$\Omega=\frac{\mp\sqrt{Mu^3}}{1\mp a\sqrt{Mu^3}}, \tag{121}$$

和

$$v^{(\varphi)}=\frac{\mp\sqrt{Mu}}{[1\mp a\sqrt{Mu^3}]\sqrt{\Delta_u}}[1+a^2u^2\pm 2a\sqrt{Mu^3}]. \tag{122}$$

这里可以附带地注意到, 从方程 (117) 通过考虑极限 $E\to\infty$ 能重新得到不稳定圆形零短程线存在的条件, 即

$$Q_{\mp}=1-3Mu\mp 2a\sqrt{Mu^3}=0, \tag{123}$$

① 这里注意, 下列关系在简化过程中是有用的:

$$L-2Mux=\frac{\mp\sqrt{M}}{\sqrt{uQ_{\mp}}}\Delta_u,$$

$$(1+a^2u^2)E-2aMxu^3=\frac{\Delta_u}{\sqrt{Q_{\mp}}}[1\mp a\sqrt{Mu^3}].$$

或等价地,

$$r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \mp 2a\sqrt{M} = 0. \tag{124}$$

可以直接验证, 这个对 $\sqrt{r}$ 的三次方程的解与方程 (87) 所给的一致.

设 L 和 E 有着适合于某个给定倒数半径 u_c 的圆轨道的值, 即 L 和 E 有着方程 (117) 和 (118) 对 $u = u_c$ 所给出的值. 为避免混淆, 对特定 u_c 计算的量 $(L, E, x,$ 等等) 用下标 c 标识. 由这样选择的 L_c 和 E_c, 方程 (104) 右边的三次多项式允许在 $u = u_c$ 上的一对重根; 结果得出方程简化为

$$u^{-4}\dot{u}^2 = 2M(L_c - aE_c)^2(u - u_c)^2 \left[u + 2u_c - \frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2M(L_c - aE_c)^2}\right]. \tag{125}$$

对方程 (117) 和 (118) (对 $u = u_c$) 给出的 L_c 和 E_c, 可得

$$\frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2Mx_c^2} = [1 + 3a^2u_c^2 \pm 4a\sqrt{Mu_c^3}]\frac{1}{2(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2}, \tag{126}$$

[337] 和

$$u_c - \frac{L_c^2 - a^2E_c^2 + a^2}{2Mx_c^2} = -\frac{\Delta_{u_c}}{2(a\sqrt{u_c} \pm M)^2}. \tag{127}$$

可以相应地将方程 (125) 重写为更简单的形式,

$$\dot{u}^2 = 2Mx_c^2u^4(u - u_c)^2(u - u_*), \tag{128}$$

其中

$$u_* = -u_c + \frac{\Delta_{u_c}}{2(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2}. \tag{129}$$

显然 u_* 定义了与倒数半径为 u_c 的稳定圆轨道相关联的第二类轨道的倒数半径. 方程 (128) 的适当解是

$$\tau = \frac{1}{x_c\sqrt{2M}} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2(u - u_c)(u - u_*)^{1/2}}. \tag{130}$$

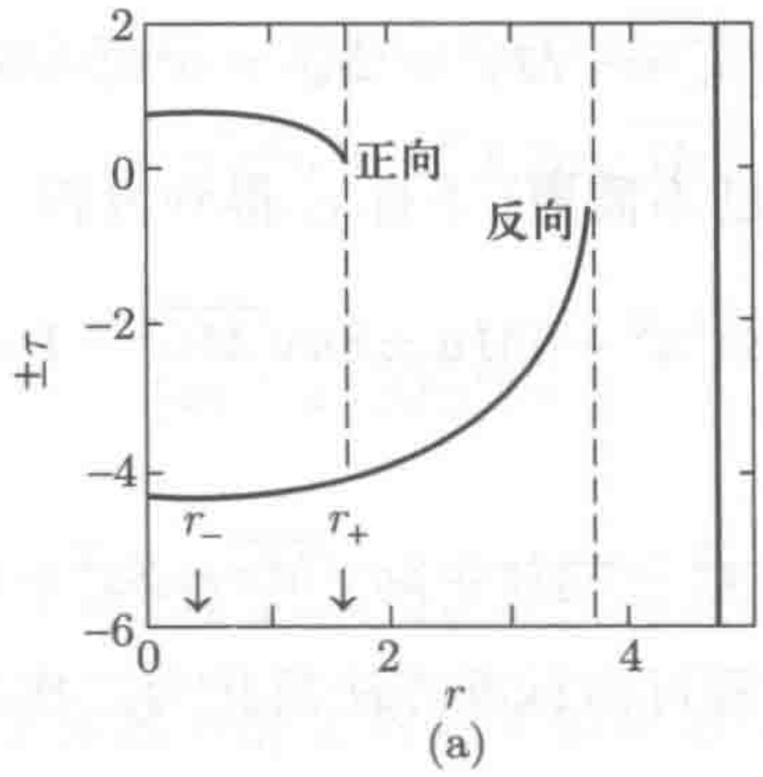
等价地, 可将方程 (128) 与

$$\dot{\varphi} = \frac{u^2}{\Delta_u}(L_c - 2Mx_cu) \tag{131}$$

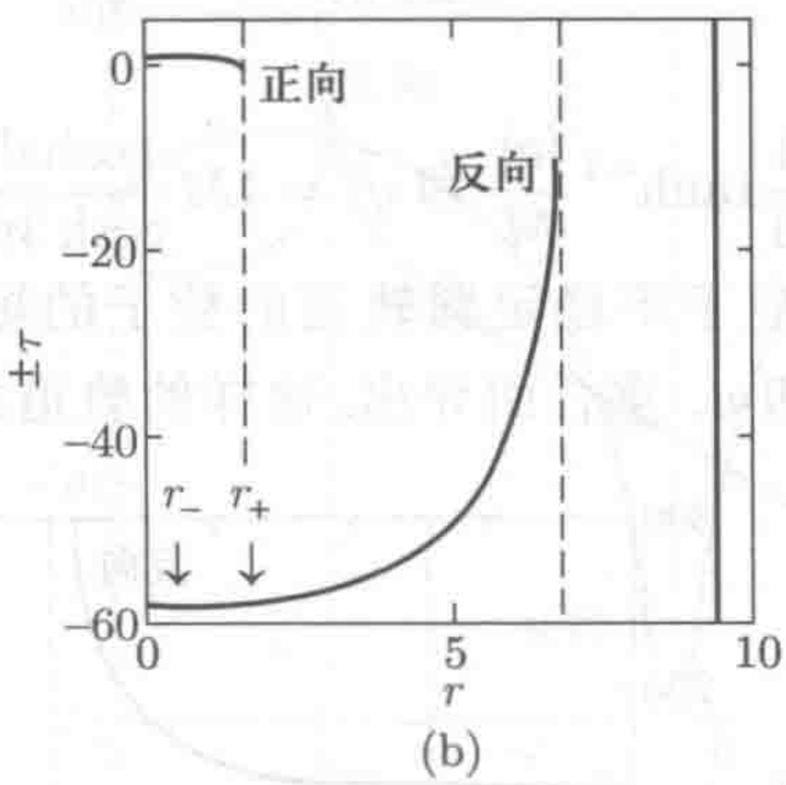
结合而得到轨道

$$\varphi = \frac{1}{x_ca^2\sqrt{2M}} \int \frac{(L_c - 2Mx_cu)}{(u - u_+)(u - u_-)(u - u_c)(u - u_*)^{1/2}}\mathrm{d}u. \tag{132}$$

由方程 (130) 给出的第二类轨道绘于图 30.



(a)



(b)

图 30　与半径为 $20M$ 和 $9.5M$ 的稳定圆轨道相关联的第二类轨道示例. 相关轨道的参量是: [338]

r_c	E	L		
20	0.9780	4.7222	正向	图 (a)
	0.8911	−4.9981	反向	
9.5	0.9503	3.4153	正向	图 (b)
	0.9605	−4.1243	反向	

很清楚, 圆形轨道不稳定的条件是 $u_* = u_c$, 或由方程 (129),

$$4u_c(a\sqrt{u_c} \pm \sqrt{M})^2 = \Delta_{u_c} = a^2u_c^2 - 2Mu_c + 1. \tag{133}$$

展开这个方程并去掉 (已不需要) 下标 c, 得到方程

$$3a^2u^2 + 6Mu \pm 8a\sqrt{Mu^3} - 1 = 0; \tag{134}$$

或回到变量 r, 有

$$r^2 - 6Mr \mp 8a\sqrt{Mr} - 3a^2 = 0. \tag{135}$$

这个关于 $\sqrt{r}$ 的四次方程可由标准方法简化为二次方程

$$r - 2q\sqrt{r} - 2M\frac{\cosh\vartheta}{\cosh 3\vartheta} \mp 2a\frac{\sqrt{M}}{q} - M = 0, \tag{136}$$

其中

$$\vartheta = \frac{1}{3}\tanh^{-1}\frac{|a|}{M} \text{ 和 } q^2 = 4M\frac{\cosh\vartheta}{\cosh 3\vartheta}\sinh^2\vartheta. \tag{137}$$

[339] 能量和角动量对应于不稳定圆轨道的粒子的短程线, 可由方程 (130) 和 (132) 经简单地设 u_c 和 u_* 重合而导出. 这样的轨道之一例示于图 31.

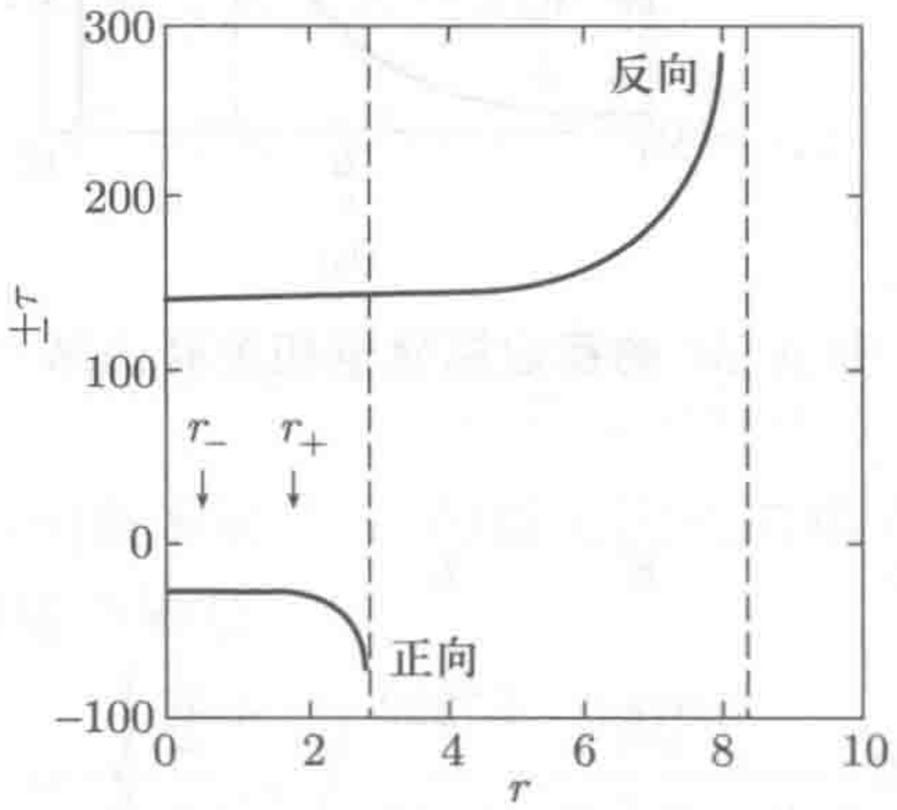


图 31 有 $a = 0.8$ 的克尔时空中反向和正向的临界稳定圆轨道

从方程 (117) 和 (118) 正式地得出的半径小于方程 (135) 所给 r 的圆轨道, 是§ (a) 所考虑的不稳定零短程线对 $E^2 > 1$ 的类时类似: 确如已验证的, 当 $E^2 \to \infty$ 时, 二者导致同一的极限情形.

除极限情形 $E^2 \to \infty$ 外, $E^2 = 1$ 的 "临界束缚" 轨道情形也有一定意义: 它对应着在无穷远处静止的落向黑洞的粒子. 由方程 (108) 和 (116), 临界束缚圆轨道的半径是

$$1 = x^2u^2 = \frac{u}{Q_\mp}(a\sqrt{u} \pm \sqrt{M})^2, \tag{138}$$

或

$$\begin{aligned} Q_{\mp} &= 1 - 3Mu \mp 2a\sqrt{Mu^3} \\ &= u[a^2u + M \pm 2a\sqrt{Mu}]. \end{aligned} \tag{139}$$

最后这个方程可简化为

$$[au \pm 2\sqrt{Mu}]^2 = 1; \tag{140}$$

从这个方程可推得

$$r = 2M \pm a + 2\sqrt{M^2 \pm aM}. \tag{141}$$

这个半径的圆轨道是在无穷远处静止的粒子的轨道的包层. 图 32 所示为临界束缚轨道之一例. [340]

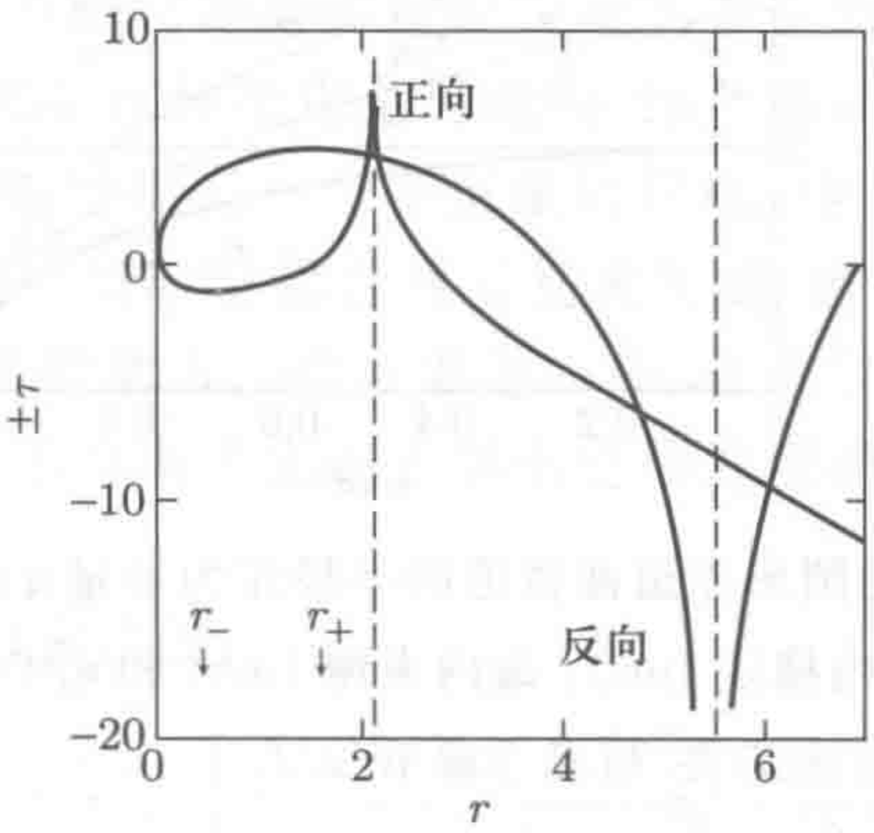


图 32　有 $E^2 = 1$ 的从无穷远处静止而下落的临界束缚轨道 (正向和反向) 示例. (在图 30—32 中, 由习惯选择, 仿射参量沿正向和反向轨道在相反方向上变化.)

在上面对零和类时短程线的讨论中, 已经遇到三类极限圆轨道: 不稳定光子轨道、最后的稳定类时轨道、临界束缚轨道. 这些轨道的半径对 a/M 的依赖关系示于图 33. 可见所有这三类正向轨道的半径都随 $a \to M$ 而趋于 M. 对这个极限被趋近时所导致行为的更仔细考虑可见表 Ⅶ.

正向轨道的三个极限半径随 $a \to M$ 的重合实际上是一个 "错觉", 因为它们之间的原距离是趋于非零极限. 对

$$a = M(1-\delta) \text{ 和 } r_+ = M[1+\sqrt{2\delta}] + O(\delta^{3/2}), \tag{142}$$

在 $r = M\,(1+\varepsilon)$ 与 r_+ 之间的原距离是

$$\int_{r_+=M[1+\sqrt{2\delta}]}^{r=M(1+\varepsilon)} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{\Delta}} \to M \lg \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 2\delta} + \varepsilon}{\sqrt{2\delta}}. \tag{143}$$

由表 VII 所给的 ε 可得

$$\left.\begin{aligned}
&(r_{\rm ph}-r_+)_{\rm proper\ distance}\to\frac{1}{2}M\lg 3 && [\varepsilon=\sqrt{8\delta/3}],\\
&(r_{\rm m.b.}-r_+)_{\rm proper\ distance}\to M\lg(1+\sqrt{2}) && [\varepsilon=2\sqrt{\delta}],\\
&(r_{\rm st.}-r_+)_{\rm proper\ distance}\to M\lg(2^{5/6}\delta^{-1/6}) && [\varepsilon=\sqrt[3]{4\delta}].
\end{aligned}\right\}\tag{144}$$

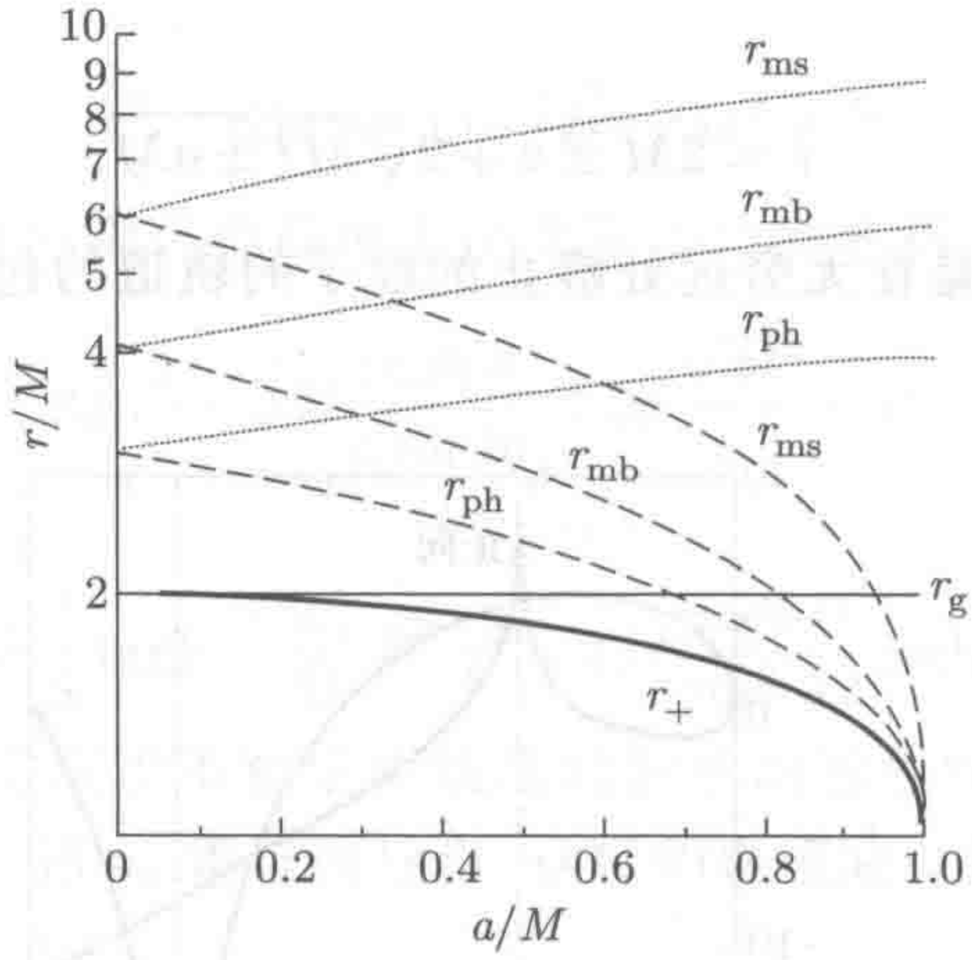


图 33 围绕克尔黑洞的圆形赤道面轨道的半径作为参量 a 的函数. 虚线和点线 (对正向和反向轨道) 表示最内稳定 (ms)、最内束缚 (mb) 和光子 (ph) 轨道. 实线表示事件视界 (r_+) 和能层的赤道面边界, 后者总是在 $2M$.

表 VII 对 $a=0$ 和 $a=\pm M$ 的极限圆轨道的半径

	$a=0$	正向 $a=M(\mathrm{t}-\delta)$ $(\delta\to 0)$	反向 $a=-M$
$r_{\rm photon}$	$3M$	$M[\mathrm{t}+\sqrt{8\delta/3}]$	$4M$
$r_{\rm mar.bound}$	$4M$	$M[1+2\sqrt{\delta}]$	$(3+2\sqrt{2})M$
$r_{\rm stability}$	$6M$	$M[1+\sqrt[3]{4\delta}]$	$9M$

[341] 这些原距离随 $a\to M$ 趋于非零极限的事实显示了所选径向坐标在 $a\to M$ 时的含混. 一个相关的事实是, 最后稳定圆轨道的能量对 $a^2\to M^2-0$ 并不像由其半径与视界重合所以为的那样趋于无穷大. 对 $a=M$, 有倒数半径 u 的正向圆轨道的能量是由下式给出 (见方程 (117)),

$$E_{\rm direct}(a=M)=\frac{1-2Mu+\sqrt{Mu^3}}{[1-3Mu+2\sqrt{Mu^3}]^{1/2}};\tag{145}$$

对 $u \to M^{-1} \mp 0$, 这个表示趋于极限, [342]

$$E_{\text{direct}}(a = M) \to \pm 3^{-1/2} \quad (u \to M^{-1} \mp 0), \tag{146}$$

显示出不连续性.

当 $a = M$ 时对 $r \to M + 0$ 的极限 $E = 3^{-1/2}$ 是重要的: 它是克尔几何中 $a^2 < M^2$ 的稳定圆轨道所能具有的最大能量 (每单位质量).

在§66 将回到 E 所显示的不连续性的含义.

62. 短程线运动的一般方程和哈密顿 – 雅可比方程的可分离性

相当一般地, 定常态轴对称时空的短程线运动允许两个运动积分: 能量和关于对称轴的角动量. 此外, 四速度的范数也由于其平行转移而守恒. 一般说来, 这三条守恒定律不足以将求解短程线运动方程的问题简化为只是求积分. 然而, 卡特发现事实上这种简化是可能的, 他严格证明了哈密顿 – 雅可比方程的可分离性, 并且推导出另一个守恒量的存在. 继卡特的发现之后, 沃尔克和彭罗斯证明, 任何 D 型时空都有共形基灵矢量, 更一般地还有§60 定理 1 中对零短程线的守恒复数量 K_s, 而且更进一步, 在克尔几何中还有定理 2 引理 3 中确立的积分 K. 本节所考虑的正是由这些发现得来的一般短程线运动方程的简化.

从一般的拉格朗日量出发,

$$\begin{aligned} 2\mathscr{L} = {} & \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{4aMr\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{t}\dot{\varphi} - \frac{\rho^2}{\Delta}\dot{r}^2 - \rho^2\dot{\theta}^2 \\ & - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)(\sin^2\theta)\dot{\varphi}^2, \end{aligned} \tag{147}$$

可导出能量和角动量积分:

$$+p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)\dot{t} + \frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{\varphi} = E = \text{常量} \tag{148}$$

和

$$-p_\varphi = -\frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2}\dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)(\sin^2\theta)\dot{\varphi} = L_z = \text{常量}. \tag{149}$$

此外还有积分 (见方程 (37)) [343]

$$2\rho^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}) - r^2|\boldsymbol{k}|^2 = K \tag{150}$$

和

$$2\rho^2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) + (a^2\cos^2\theta)|\boldsymbol{k}|^2 = K, \tag{151}$$

其中 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 是基零矢量. 可以将积分 (150) 和 (151) 视为独立的, 因为预先假定了 $|\boldsymbol{k}|^2$ 的守恒. 而且将如通常一样设

$$\left.\begin{aligned} |\boldsymbol{k}|^2 = \delta_1 = 1 \text{ 对类时短程线,} \\ = 0 \text{ 对零短程线.} \end{aligned}\right\} \tag{152}$$

对现在的情形,

$$k^i = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}). \tag{153}$$

利用现有的零基矢知识 (第 6 章方程 (173)), 可得在克尔几何中积分 (150) 和 (151) 有明晰形式,

$$\frac{1}{\Delta}[\Delta\dot{t} - (a\Delta\sin^2\theta)\dot{\varphi}]^2 - \frac{\rho^4}{\Delta}\dot{r}^2 - \delta_1 r^2 = K \tag{154}$$

和

$$[(a\sin\theta)\dot{t} - (r^2+a^2)(\sin\theta)\dot{\varphi}]^2 + \rho^4\dot{\theta}^2 + \delta_1 a^2\cos^2\theta = K. \tag{155}$$

另一方面, 由方程 (148) 和 (149) 有

$$(a\sin\theta)\dot{t} - [(r^2+a^2)\sin\theta]\dot{\varphi} = aE\sin\theta - L_z\mathrm{cosec}\,\theta \tag{156}$$

和

$$\Delta\dot{t} - (a\Delta\sin^2\theta)\dot{\varphi} = (r^2+a^2)E - aL_z. \tag{157}$$

将这些表示式代入方程 (154) 和 (155), 得方程

$$\frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)E - aL_z]^2 - \frac{\rho^4}{\Delta}\dot{r}^2 - \delta_1 r^2 = K, \tag{158}$$

和

$$(aE\sin\theta - L_z\mathrm{cosec}\,\theta)^2 + \rho^4\dot{\theta}^2 + \delta_1 a^2\cos^2\theta = K; \tag{159}$$

或等价地,

$$\rho^4\dot{r}^2 = [(r^2+a^2)E - aL_z]^2 - \Delta(\delta_1 r^2 + K) \tag{160}$$

和

$$\rho^4\dot{\theta}^2 = -(aE\sin\theta - L_z\mathrm{cosec}\,\theta)^2 + (-\delta_1 a^2\cos^2\theta + K). \tag{161}$$

最后, 方程 (156) 和 (157) 给出补充方程对,

$$\rho^2\dot{t} = \frac{1}{\Delta}(\Sigma^2 E - 2aMrL_z) \tag{162}$$

[344] 和

$$\rho^2\dot{\varphi} = \frac{1}{\Delta}[2aMrE + (\rho^2 - 2Mr)L_z\mathrm{cosec}^2\theta]. \tag{163}$$

现已清楚, 求解短程线运动方程的问题已经简化为求积分.

方程 (161) 的另一种有用形式是

$$\rho^4\dot{\theta}^2 = [K - (L_z - aE)^2] - [a^2(\delta_1 - E^2) + L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta]\cos^2\theta. \tag{164}$$

(a) 哈密顿 – 雅可比方程的可分离性和基本方程的另一种导出

如前已述, 沿短程线守恒的第四个量的存在, 是由卡特通过严格地证明哈密顿 – 雅可比方程的可分离性而首先发现的. 这在当时是完全没有预期到的; 而且这还意味着其它的数学物理方程也可以类似地被分离. 如在第 8、9 和 10 章中将看到的, 那些方程的确最终都被分离了. 作为克尔几何特征的非凡性质链的第一环, 对卡特关于哈密顿 – 雅可比方程可分离性证明的介绍是有益的.

支配度规张量为 g^{ij} 的时空中短程线运动的哈密顿 – 雅可比方程是

$$2\frac{\partial S}{\partial\tau} = g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j}, \tag{165}$$

其中 S 表示哈密顿主函数. 用第 6 章方程 (135) 给出的克尔几何的 g^{ij}, 方程 (165) 成为

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial S}{\partial\tau} = {} & \frac{\Sigma^2}{\rho^2\Delta}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \frac{4aMr}{\rho^2\Delta}\frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial\varphi} - \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\rho^2\Delta\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2 \\ & - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{166}$$

可将此方程重写为便利形式

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial S}{\partial\tau} = {} & \frac{1}{\rho^2\Delta}\left[(r^2 + a^2)\frac{\partial S}{\partial t} + a\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right]^2 - \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta}\left[(a\sin^2\theta)\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial\varphi}\right]^2 \\ & - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{167}$$

假定变量能被分离, 寻找方程 (167) 的下列形式的解,

$$S = \frac{1}{2}\delta_1\tau - Et + L_z\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \tag{168}$$

其中如标记所示, S_r 和 S_θ 只是所指变量的函数. 对所选的 S 形式, 方程 (167) 成为 [345]

$$\begin{aligned} \delta_1\rho^2 = {} & \frac{1}{\Delta}[(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(aE\sin^2\theta - L_z)^2 \\ & - \Delta\left(\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2. \end{aligned} \tag{169}$$

借助于等式

$$(aE\sin^2\theta - L_z)^2\mathrm{cosec}^2\theta = (L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta - a^2E^2)\cos^2\theta + (L_z - aE)^2, \tag{170}$$

可将方程 (169) 重写为

$$\left\{\Delta\left(\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2\right\}$$
$$+\left\{\left(\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + (L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta - a^2E^2)\cos^2\theta + \delta_1 a^2\cos^2\theta\right\} = 0. \tag{171}$$

方程的可分离性现已显然, 并可得出

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}S_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)E - aL_z]^2 - [\mathscr{Q} + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2] \tag{172}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}S_\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \mathscr{Q} - (L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta - a^2E^2 + \delta_1 a^2)\cos^2\theta, \tag{173}$$

其中 $\mathscr{Q}$ 是分离常量. 用缩写

$$R = [(r^2+a^2)E - aL_z]^2 - \Delta[\mathscr{Q} + (L_z - aE)^2 + \delta_1 r^2] \tag{174}$$

和

$$\Theta = \mathscr{Q} - [a^2(\delta_1 - E^2) + L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta]\cos^2\theta, \tag{175}$$

对 S 的解是

$$S = \frac{1}{2}\delta_1\tau - Et + L_z\varphi + \int^r \frac{\sqrt{R(r)}}{\Delta}\mathrm{d}r + \int^\theta \mathrm{d}\theta\sqrt{\Theta(\theta)}. \tag{176}$$

支配运动的基本方程能由主函数 S 的解 (176) 导出, 方法是按标准程序将 S 对不同运动常量, 现在是对 $\mathscr{Q}$、δ_1、E 和 L_z 的偏导数设为零. 于是有,

$$\frac{\partial S}{\partial \mathscr{Q}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\Delta\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial \mathscr{Q}}\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\Theta}}\frac{\partial \Theta}{\partial \mathscr{Q}}\mathrm{d}\theta = 0 \tag{177}$$

[346] 导致方程

$$\int^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\Theta}}. \tag{178}$$

类似地可得

$$\tau = \int^r \frac{r^2}{\sqrt{R}}\mathrm{d}r + a^2\int^\theta \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}\mathrm{d}\theta, \tag{179}$$

$$t = \frac{1}{2}\int^r \frac{1}{\Delta\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial E}\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}}\frac{\partial \Theta}{\partial E}\mathrm{d}\theta$$
$$= \tau E + 2M\int^r r[r^2E - a(L_z - aE)]\frac{\mathrm{d}r}{\Delta\sqrt{R}}, \tag{180}$$

和

$$\varphi = -\frac{1}{2}\int^r \frac{1}{\Delta\sqrt{R}}\frac{\partial R}{\partial L_z}\mathrm{d}r - \frac{1}{2}\int^\theta \frac{1}{\sqrt{\Theta}}\frac{\partial \Theta}{\partial L_z}\mathrm{d}\theta$$
$$= a\int^r [(r^2+a^2)E - aL_z]\frac{\mathrm{d}r}{\Delta\sqrt{R}} + \int^\theta (L_z\mathrm{cosec}^2\theta - aE)\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\Theta}}, \quad (181)$$

其中已包含利用方程 (178) 所作的简化.

现能验证, 按下列认定, 则方程 (178)—(181) 与 (160)—(163) 完全等价,

$$\mathscr{Q} = K - (L_z - aE)^2. \quad (182)$$

特别是, 按照这个认定, 方程 (160) 和 (164) 的右边与方程 (174) 和 (175) 中 R 和 Θ 的定义一致; 而关系式 (178) 是方程 (160) 和 (164) 的立即结果. 于是, 基本方程是

$$\rho^4\dot{r}^2 = R; \quad \rho^4\dot{\theta}^2 = \Theta, \quad (183)$$

和

$$\left.\begin{aligned}\rho^2\dot{\varphi} &= \frac{1}{\Delta}[2aMrE + (\rho^2 - 2Mr)L_z\mathrm{cosec}^2\theta],\\ \rho^2\dot{t} &= \frac{1}{\Delta}(\Sigma^2 E - 2aMrL_z),\end{aligned}\right\} \quad (184)$$

其中

$$R = E^2r^4 + (a^2E^2 - L_z^2 - \mathscr{Q})r^2 + 2Mr[\mathscr{Q} + (L_z - aE)^2] - a^2\mathscr{Q} - \delta_1 r^2\Delta \quad (185)$$

和

$$\Theta = \mathscr{Q} + (a^2E^2 - L_z^2\mathrm{cosec}^2\theta)\cos^2\theta - \delta_1 a^2\cos^2\theta. \quad (186)$$

将给出张量和四动量的四次分量的各个公式集中写在一起是便利的, [347]
即有

$$\left.\begin{aligned}-p_r = \frac{\rho^2}{\Delta}p^r = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \quad -p_\theta = \rho^2 p^\theta = \sqrt{\Theta},\\ p_\varphi = \frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2}p^t - \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2Mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)(\sin^2\theta)p^\varphi = -L_z,\\ p_t = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)p^t + \frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2}p^\varphi = E,\end{aligned}\right\} \quad (187)$$

和

$$\left.\begin{aligned}p^{(t)} = p_{(t)} = e^{-\nu}(E - \omega L_z) = e^{+\nu}p^t,\\ p^{(r)} = -p_{(r)} = -e^{-\mu_2}p_r = +e^{+\mu_2}p^r,\\ p^{(\theta)} = -p_{(\theta)} = -e^{-\mu_3}p_\theta = e^{+\mu_3}p^\theta,\\ p^{(\varphi)} = -p_{(\varphi)} = e^{\psi}p^\varphi = -e^{-\psi}p_\varphi = e^{-\psi}L_z.\end{aligned}\right\} \quad (188)$$

和

63. 零短程线

在对一般非平面轨道的考虑中, 将集中于对轨道在 (r,θ) 面上投影的描述: t 和 φ 沿轨道的变化并不揭示赤道面上平面轨道未曾显示的任何特别性状.

对零短程线 $\delta_1=0$, 将参量个数减到最少的方便做法是设

$$\xi=L_z/E \text{ 和 } \eta=\mathscr{Q}/E^2, \tag{189}$$

并用 R 和 Θ 代替 R/E^2 和 Θ/E^2:

$$R=r^4+(a^2-\xi^2-\eta)r^2+2M[\eta+(\xi-a)^2]r-a^2\eta \tag{190}$$

和

$$\Theta=\eta+a^2\cos^2\theta-\xi^2\cot^2\theta. \tag{191}$$

两个参量 ξ 和 η 取代了曾用来区分赤道面上零短程线的单个碰撞参量 D. 参量 ξ 和 η 实际上很简单地联系着在无穷远处接收光线的观测者所见图像的 "天空坐标" α 和 β. 用表示式 (188), 容易验证

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\left(\frac{rp^{(\varphi)}}{p^{(t)}}\right)_{r\to\infty}=\xi\operatorname{cosec}\theta_0\\ \text{和}\qquad\beta&=\left(\frac{rp^{(\theta)}}{p^{(t)}}\right)_{r\to\infty}=(\eta+a^2\cos^2\theta_0-\xi^2\cot^2\theta_0)^{1/2}=-p_{\theta_0},\end{aligned}\right\} \tag{192}$$

[348] 其中 θ_0 是无穷远处观测者的角坐标. 准确地说, α 是图像与对称轴的表观垂直距离, β 是图像与其在赤道面上投影的表观垂直距离.

支配轨道在 (r,θ) 面上投影的方程是

$$\int_{r_i}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R}}=\int_{\theta_i}^{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\Theta}}, \tag{193}$$

其中 r_i 和 θ_i 是对 r 和 θ 所赋的初值. 还应注意, 虽然 $\sqrt{R}$ 和 $\sqrt{\Theta}$ 的符号能独立选择, 但一旦选择就必须遵守.

(a) θ 运动

首先考虑由方程 (193) 中对 $\Theta^{-1/2}$ 的积分所确定的 θ 运动, 因为它已经给出了对轨道特征的一定洞察. 于是, Θ 不能为负的基本要求按以下不等式限制常量 ξ 和 η,

$$\eta+(a-\xi)^2\geqslant 0, \tag{194}$$

这是由将 Θ 写为另一种形式得出的:

$$\Theta = \eta + (a-\xi)^2 - (a\sin\theta - \xi\operatorname{cosec}\theta)^2. \tag{195}$$

将会看到便利的做法是, 以 $\cos\theta = \mu$ 代替 θ 作为积分变量, 并转而考虑积分

$$I_\mu = \int \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} \quad (\mu = \cos\theta), \tag{196}$$

其中

$$\Theta_\mu = \eta - (\xi^2 + \eta - a^2)\mu^2 - a^2\mu^4. \tag{197}$$

由于

和

$$\left.\begin{aligned} &\Theta_\mu = \eta \text{ 当 } \mu = 0 \text{ 和 } \theta \leqslant \pi/2 \\ &\Theta_\mu = -\xi^2 \leqslant 0 \text{ 当 } \mu = 1 \text{ 和 } \theta = 0, \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

可得出必须区分 $\eta > 0$ 和 $\eta < 0$ 的情形. 当 $\eta > 0$, 对 $\Theta_\mu \geqslant 0$ 的 μ^2 允许值范围将是在 $\mu^2 = 0$ 和一定的极大值 $\mu^2_{\max}$ 之间: $0 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu^2_{\max}$; 而当 $\eta < 0, \mu^2$ 的限制范围将是 $0 < \mu_1^2 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu_2^2 < 1$ (允许没有这样一个范围存在的可能性). 也就是说, 当 $\eta > 0$, 轨道与赤道面相交, 并在赤道面两侧对称地振荡; 而当 $\eta < 0$, 轨道不与赤道面相交, 而是必定限制在排除轴 ($\theta = 0$) 和垂直方向 ($\theta = \pi/2$) 两者在外的锥内. $\eta = 0$ 的情形则需另行考虑.

适于 $\eta > 0$、$\eta = 0$ 和 $\eta < 0$ 情形的积分 I_μ 的明晰表示式不难写出: [349]

(i) $\boldsymbol{\eta > 0}$: $$\Theta_\mu = a^2(\mu_-^2 + \mu^2)(\mu_+^2 - \mu^2) \quad (0 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu_+^2), \tag{199}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mu_+^2 &= \frac{1}{2a^2}\{[(\xi^2+\eta-a^2)^2 + 4a^2\eta]^{1/2} - (\xi^2+\eta-a^2)\}, \\ \mu_-^2 &= \frac{1}{2a^2}\{[(\xi^2+\eta-a^2)^2 + 4a^2\eta]^{1/2} + (\xi^2+\eta-a^2)\}; \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\int_\mu^{\mu_+} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \frac{1}{a(\mu_+^2 + \mu_-^2)^{1/2}} F(\psi, k), \\ &k^2 = \mu_+^2/(\mu_+^2 + \mu_-^2) \text{ 和 } \cos\psi = \mu/\mu_+. \end{aligned}\right\} \tag{201}$$

其中

(ii) $\boldsymbol{\eta = 0}$: $$\Theta_\mu = (a^2 - \xi^2)\mu^2 - a^2\mu^4 \quad (0 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu^2_{\max}),$$

其中

$$\mu^2_{\max} = 1 - \xi^2/a^2 \quad (|\xi|^2 \leqslant |a|^2), \tag{202}$$

和

$$\int_{\mu}^{\mu_{\max}} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}} \operatorname{sech}^{-1} \frac{\mu}{\mu_{\max}}. \tag{203}$$

(iii) $\eta < 0$:

$$\Theta_\mu = a^2(\mu^2-\mu_-^2)(\mu_+^2-\mu^2) \quad (\mu_-^2 \leqslant \mu^2 \leqslant \mu_+^2), \tag{204}$$

其中

$$\mu_\pm^2 = \frac{1}{2a}\{(|\eta|+a^2-\xi^2) \pm [(|\eta|+a^2-\xi^2)^2 - 4a^2|\eta|]^{1/2}\} \tag{205}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\mu_-}^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \frac{1}{a\mu_+} F(\psi,k) \text{ 其中 } k^2 = (\mu_+^2-\mu_-^2)/\mu_+^2, \\ &|\eta| \leqslant a^2, \quad 0 \leqslant |\xi| \leqslant |a| - \sqrt{|\eta|}, \quad \text{和 } \sin\psi = \left[\frac{\mu_+^2(\mu^2-\mu_-^2)}{\mu^2(\mu_+^2-\mu_-^2)}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{206}$$

方程 (201) 和 (206) 中 $F(\psi,k)$ 表示第一类雅可比椭圆积分.

(*b*) 主零迭合

由方程 (194) 和 (195) 很清楚, 对情形

$$\eta + (a-\xi)^2 = 0 \tag{207}$$

[350] 的识别是由这一事实, 即它只对

$$\theta = \theta_0 = \text{常数}, \quad \text{和 } \xi = a\sin^2\theta_0 \tag{208}$$

才符合 $\Theta_\mu \geqslant 0$ 的要求, 对 $\theta = \theta_0$ 有 $\Theta_\mu = 0$. 方程 (207) 现在要求

$$\eta = -a^2\cos^4\theta_0. \tag{209}$$

将上述 ξ 和 η 的值代入方程 (190), 得

$$R = (r^2 + a^2\cos^2\theta_0)^2 E^2, \tag{210}$$

其中已恢复了去掉的因子 E^2. 现在由方程 (183) 可得结论, 在这种情形有

$$\dot{r} = \pm E. \tag{211}$$

类似地, 由方程 (184) 可得

$$\dot{\varphi} = aE/\Delta \text{ 和 } \dot{t} = (r^2+a^2)E/\Delta. \tag{212}$$

相应地, 这些特别的零短程线定义如下:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{r^2+a^2}{\Delta}E, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \pm E, \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad \text{和 } \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \frac{a}{\Delta}E. \tag{213}$$

这些方程事实上规定了无剪切零迭合, 后者曾被用于构造零基来对克尔时空作出适合其 D 型特征的纽曼 – 彭罗斯形式描述 (见第 6 章 §56).

(c) r 运动

现在转到考虑由方程 (193) 中对 $R^{-1/2}$ 的积分所确定的径向运动.

如 §61 中所述平面轨道的情形那样, 能够区分来自无穷远的、穿越或者不穿越事件视界的轨道. 对平面轨道, 区分在于碰撞参量 D 是小于或大于临界值 $D_{\rm c}$, 而有着碰撞参量 $D_{\rm c}$ 的轨道自身是一个不稳定圆轨道. 同样地, 对现在的非平面情形的区分必定是, 运动常量 ξ 和 η 是在 (ξ,η) 面上临界轨迹 (ξ_s,η_s) 的一侧或另一侧, 而有着临界轨迹上的运动常量的轨道自身则是 $r=$ 常量的不稳定轨道. 现在的轨迹 (ξ_s,η_s) 将起着与以前的碰撞参量 $D_{\rm c}$ 同样的作用.

决定半径为常量的不稳定轨道的方程是

$$R=r^4+(a^2-\xi^2-\eta)r^2+2M[\eta+(\xi-a)^2]r-a^2\eta=0 \tag{214}$$

和 [351]

$$\partial R/\partial r=4r^3+2(a^2-\xi^2-\eta)r+2M[\eta+(\xi-a)^2]=0. \tag{215}$$

方程 (214) 和 (215) 结合给出

$$3r^4+r^2a^2-\eta(r^2-a^2)=r^2\xi^2 \tag{216}$$

和

$$r^4-a^2Mr+\eta(a^2-Mr)=Mr(\xi^2-2a\xi). \tag{217}$$

这些方程可对 ξ 和 η 求解. 从它们中消去 η, 得

$$\begin{aligned}&a^2(r-M)\xi^2-2aM(r^2-a^2)\xi\\&-(r^2+a^2)[r(r^2+a^2)-M(3r^2-a^2)]=0.\end{aligned} \tag{218}$$

相当引人注目的是, 这个方程的判别式 "$(b^2-ac)/4$" 是

$$a^2r^2\Delta^2; \tag{219}$$

而方程 (218) 的解是

$$\xi=\frac{1}{a(r-M)}[M(r^2-a^2)\pm r\Delta]. \tag{220}$$

若选解 (220) 中的上号,

$$\xi=(r^2+a^2)/a; \tag{221}$$

而从方程 (216) 可得 η 的相应解是

$$\eta=-r^4/a^2. \tag{222}$$

由方程 (221) 和 (222) 所给的 ξ 和 η,

$$\eta + (a - \xi)^2 = 0. \tag{223}$$

但是这个关系与目前的要求不符: 如在§ (*b*) 已看到的, 它要求 θ 为常量. 所以就必须选择方程 (220) 中的下号. 这样就得到

$$\xi = \frac{1}{a(r-M)}[M(r^2 - a^2) - r\Delta] \tag{224}$$

和

$$\eta = \frac{r^3}{a^2(r-M)^2}[4a^2M - r(r-3M)^2] = \frac{r^3}{a^2(r-M)^2}[4M\Delta - r(r-M)^2]. \tag{225}$$

这些方程参量式地决定了临界轨迹 (ξ_s, η_s). (见图 34)

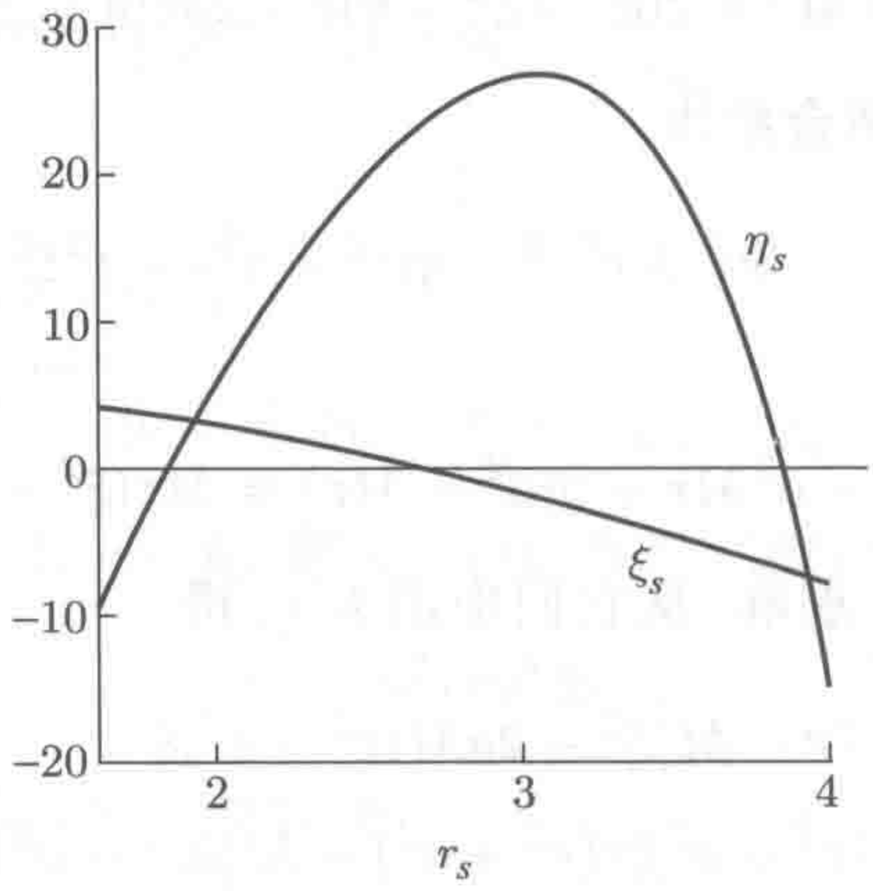


图 34 决定着围绕 $a = 0.8$ 的克尔黑洞的常半径三维轨道运动常量的轨迹 (ξ_s, η_s). 沿横坐标的长度单位是 M.

[352] 在§ (*a*) 中已看到, 轨道的特征决定性地依赖于 η 是大于、等于或小于零. 相应地, 必须区分这三种情形.

由方程 (225), $\eta = 0$ 要求

$$4a^2M = r(r-3M)^2 \tag{226}$$

或等价地,

$$\pm 2a\sqrt{M} = r^{3/2} - 3Mr^{1/2}. \tag{227}$$

但这个方程与决定赤道面上正向和反向不稳定圆光子轨道半径的方程 (124) 是一样的. 设这些不稳定光子轨道的半径为 $r_{\rm ph}^{(+)}$ 和 $r_{\rm ph}^{(-)}$, 很清楚有

$$\left.\begin{aligned}&\eta>0 \text{ 对 } r_{\rm ph}^{(+)}<r<r_{\rm ph}^{(-)},\\&\eta=0 \text{ 对 } r=r_{\rm ph}^{(+)} \text{ 和 } r=r_{\rm ph}^{(-)},\\&\eta<0 \text{ 对 } r_+<r<r_{\rm ph}^{(+)} \text{ 和 } r>r_{\rm ph}^{(-)}.\end{aligned}\right\} \tag{228}$$

和

适于 (228) 这三种情形的 θ 运动解已在§ (*a*) 中给出. 由这些解可见, 有 $\eta<0$ 的常半径轨道是不被允许的, 因为对方程 (205) 所给的 $\mu_\pm^2$ 为正值须有 $0\leqslant\xi\leqslant a-\sqrt{|\eta|}$ 和 $|\eta|\leqslant a^2$; 而这些条件 (可验证) 不可能被方程 (224) 和 (225) 所给的 ξ 和 η 满足.

也很重要的是看到, 对 $\eta=0$, 轨道完全处在赤道面上. 因为对 $\eta=0$, 由 [353]
方程 (216) 可得 $\xi^2=3r^2+a^2$; 而这个关系与在方程 (82) 的脚注中注明的是一样的, 理由是现在 $\xi\ (=L_z/a)$ 的意义与以前 $D\ (=L/a)$ 的意义一样.

回到 r 运动, 设运动常量 ξ 和 η 有着适合于常半径 r_s 轨道的值 ξ_s 和 η_s, 即 ξ_s 和 η_s 有着方程 (224) 和 (225) 对 $r=r_s$ 所给的值. 对这个运动常量选择, r_s 是 $R=0$ 的重根; 并可证明 R 简化为

$$R=(r-r_s)^2(r^2+2rr_s-a^2\eta_s/r_s^2), \tag{229}$$

而必须考虑的积分是

$$\int\frac{{\rm d}r}{\sqrt{R}}=\int\frac{{\rm d}r}{(r-r_s)(r^2+2rr_s-a^2\eta_s/r_s^2)^{1/2}}. \tag{230}$$

由这个方程很明显, 轨道由两部分组成: 一部分在 $r=r_s$ 之外, 一部分在 $r=r_s$ 之内. 由于 $\eta_s>0$, 它将在 $r=0$ 之前终止; 因为方程

$$r^2+2rr_s-a^2\eta_s/r_s^2=0, \tag{231}$$

两根中之较大者, 即

$$-r_s+(r_s^2+a^2\eta_s/r_s^2)^{1/2}=-r_s+2\sqrt{(M\Delta r_s)/(r_s-M)} \tag{232}$$

是正的, 且如能证明的, 只要有 $a^2<M^2$ 就小于 r_s.

现在设

$$x=(r-r_s)^{-1}, \tag{233}$$

并计算积分 (230), 可得决定着轨道在 $(r,\theta=\cos^{-1}\mu)$ 面上投影的方程, 即有

$$\int\frac{{\rm d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}=\pm\frac{1}{\sqrt{c}}\lg\{2[c(1+4r_sx+cx^2)]^{1/2}+2cx+4r_s\}, \tag{234}$$

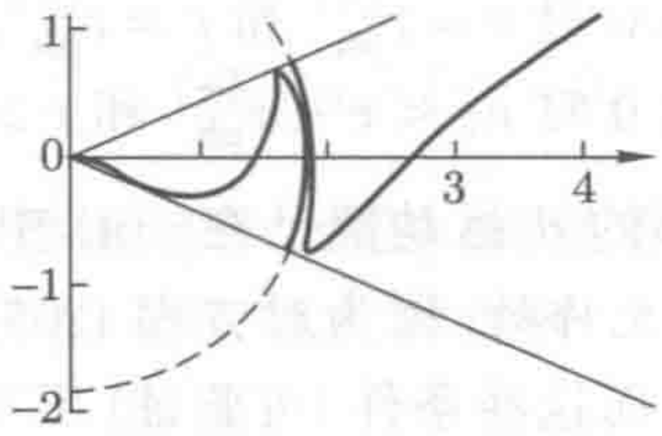
其中

$$c=3r_s^2-a^2\eta_s/r_s^2\quad(>0). \tag{235}$$

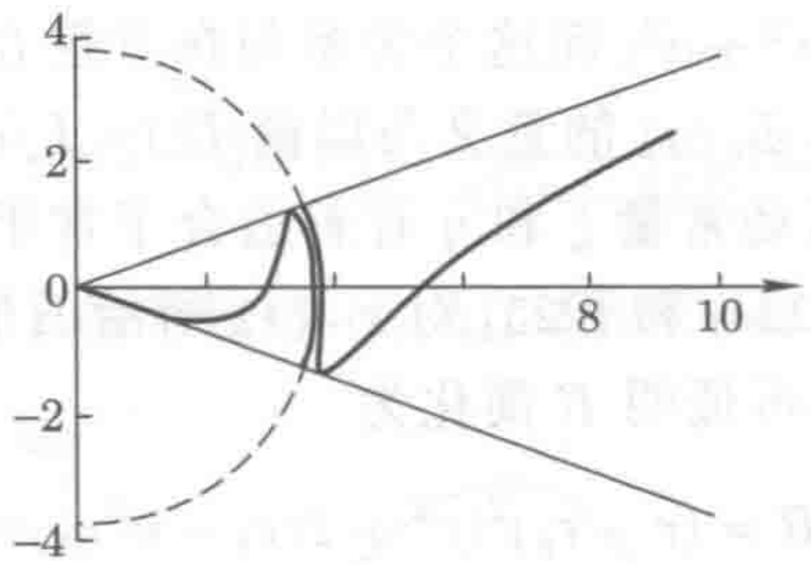
方程右边对 μ 的积分由方程 (201) 给出.

方程 (234) 给出的轨道的例子示于图 35.

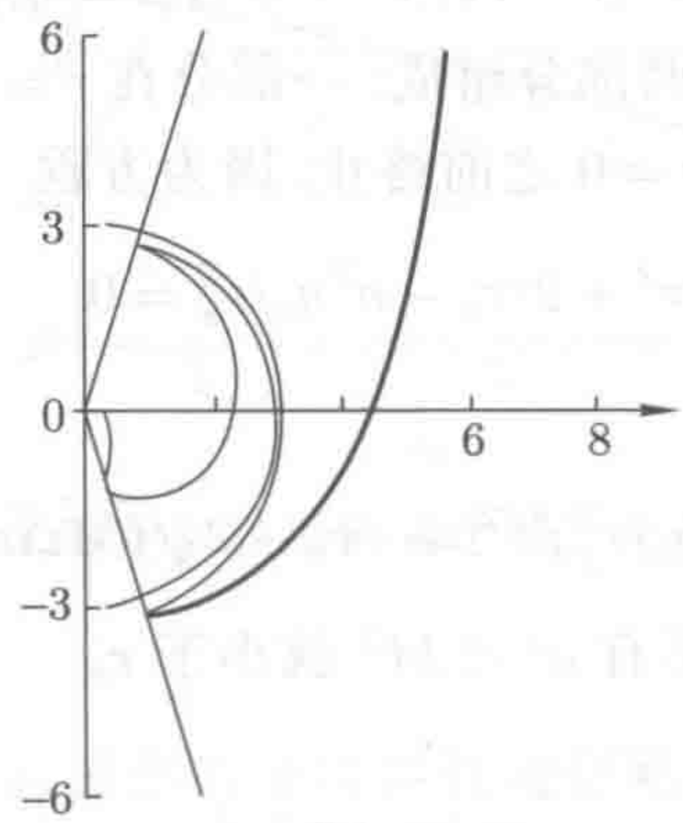
[354]



(a)



(b)



(c)

图 35 (r,θ) 面上的临界零短程线, 对应于三对值: $(a), r_s = 1.85, \eta_s = 1.6524$; $(b), r_s = 3.75, \eta_s = 4.9087$; 和 $(c), r_s = 3.0$ 和 $\eta_s = 27.0$. 这些轨道并不到达奇点. 沿坐标轴的长度单位是 M; 所选的克尔参数 a 是 0.8.

虽然已考虑的仅是有着临界轨迹 (ξ_s,η_s) 上运动常量的轨道, 但可清楚看到, 当运动常量是在临界轨迹的一侧或另一侧时的轨道必定是什么样子: 从一侧或另一侧趋于球面 $r=r_s$ 的两部分轨道将要么分开为两个相脱离的部分 (已指明为第一和第二类轨道), 要么结合为单个的连接轨道.

$\eta=0$ 的情形有一定意义. 如已看到的, 有 $\eta=0$ 的常半径 $r=r_{\rm ph}^{(\pm)}$ 轨道 [355]
完全处于赤道面上. 而且, 所有赤道面上的轨道由卡特常量为零来表征. 但是, 并非所有 $\eta=0$ 的轨道都在赤道面上. 因为当 $\eta=0, r$ 运动是相当一般地由下式决定 (见方程 (214)),

$$\int\frac{{\rm d}r}{\sqrt{R}}=\int\frac{{\rm d}r}{\{r[r^3+(a^2-\xi^2)r+2M(a-\xi)^2]\}^{1/2}},\tag{236}$$

而 θ 运动由方程 (203) 决定. 积分 (236) 可简化为雅可比椭圆积分; 而在 (r,θ) 面上的轨迹则可表示为

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-\xi^2}}{\rm sech}^{-1}\frac{\mu}{\mu_{\rm max}}=\pm\frac{1}{\sqrt{AB}}F(\psi,k),$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\mu_{\rm max}=(1-\xi^2/a^2)^{1/2},\quad k^2=\frac{(A+B)^2-r_1^2}{4AB},\quad \cos\psi=\frac{(A-B)r+r_1A}{(A+B)r+r_1A},\\&A^2=r_1^2+(a^2-\xi^2);\quad B^2=3r_1^2+(a^2-\xi^2),\\&r_1=-\left[\frac{4}{3}(a^2-\xi^2)\right]^{1/2}\ \sinh\vartheta\ \text{和}\ \sinh 3\vartheta=\left[27M^2\frac{a-\xi}{(a+\xi)^3}\right]^{1/3}.\end{aligned}\right\}\tag{237}$$

由这些定义很清楚, 这些轨迹只对 $\xi\leqslant a$ 存在. 对赤道面上的轨道, 限制 $\xi\leqslant a$ 等价于限制 $D\leqslant a$ (见方程 (73) 和 (189) 对 D 和 ξ 的定义). 具有 $\eta=0$ 和 $\xi\leqslant a$ 的三维轨道的存在是碰撞参量 $D<a$ 的赤道面上轨道不稳定性的显示. 也很清楚, 所有这些轨道终结于奇点, 不能自然地延伸到负 r 区域 (见图 36, 其中显示了方程 (237) 给出的轨道的例子).

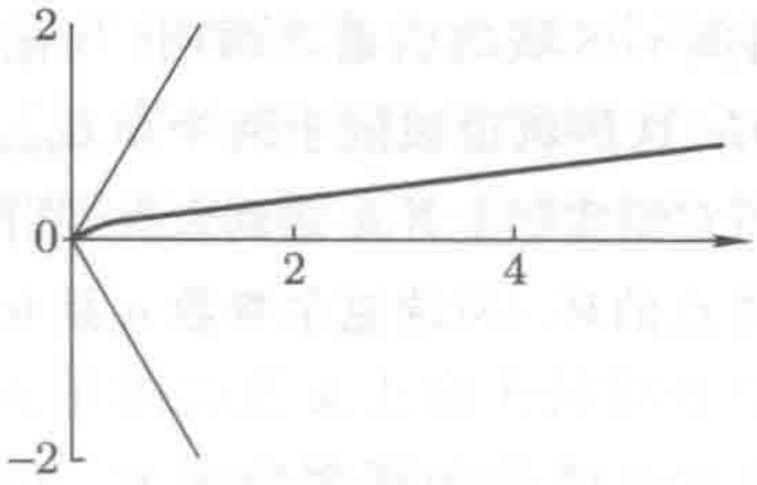


图 36 (r,θ) 面上 $\eta=0$ 的零短程线之一例. 这些是仅有的不在赤道面上、终结于奇点的轨道. 沿坐标轴的长度单位是 M; 所选的克尔参数 a 是 0.8.

最后考虑具有 $\eta < 0$ 的轨道类型. 这些轨道是有意义的, 因为它们以自然的方式探索了负 r 区域, 并且在物理上必要地将流形扩大到包括这些区域. 但它们存在的条件是严厉的: $|\eta| < a^2$ 和 $0 < |\xi| \leqslant |a| - \sqrt{|\eta|}$. 鉴于这些轨道的意义, Garret Toomey 对 r 和 θ 运动做了数值积分, 他的积分结果示于图 37.

[356]

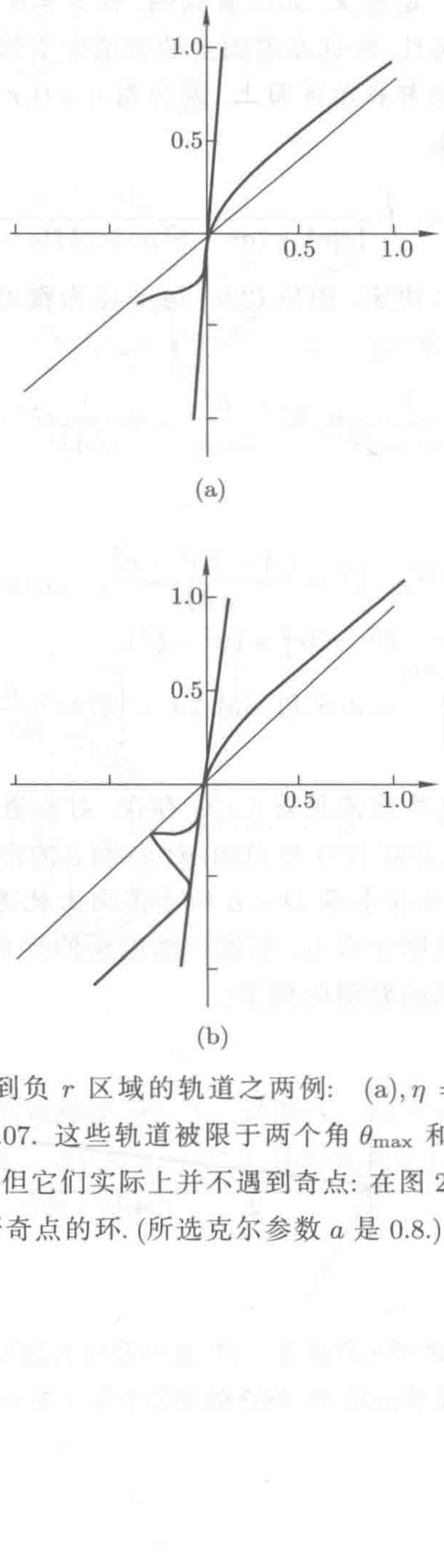


图 37 具有负 η、延伸到负 r 区域的轨道之两例: (a), $\eta = -0.3$ 和 $\xi = -0.05$; 和 (b), $\eta = -0.3$ 和 $\xi = -0.07$. 这些轨道被限于两个角 $\theta_{\max}$ 和 $\theta_{\min}$ 之间. 虽然在 (r, θ) 面上这些轨道穿过零点, 但它们实际上并不遇到奇点: 在图 25 的克尔 – 席尔德坐标系里, 它们平滑地穿过避开奇点的环. (所选克尔参数 a 是 0.8.)

[357]

(*d*) $a = M$ 情形

尽管本书的判断 (与常见的观点相反) 是对 $a = M$ 时 "发生了什么" 不给予任何特别关注, 这里还是简略地提及上节中的公式在 $a = M$ 时所取的极限形式. (在§61 (*b*) 关于方程 (142) 的讨论中已经注意到在 $a \to M$ 时坐标 r 对描述靠近事件视界的物质运动之不适宜.)

当 $a = M$ 时, 方程 (224) 和 (225) 成为

$$\xi = \frac{1}{M}(-r^2 + 2Mr + M^2); \quad \eta = \frac{r^3}{M^2}(4M - r), \tag{238}$$

而轨迹 $\eta(\xi)$ 能明晰地得到. 也就是, 用 ξ 来解出 r, 得

$$r(\xi) = M + (2M^2 - M\xi)^{1/2}; \tag{239}$$

代入到对 η 的表示式, 得

$$\eta(\xi) = \frac{1}{M^2}[M + (2M^2 - M\xi)^{1/2}]^3[3M - (2M^2 - M\xi)^{1/2}], \tag{240}$$

这里可以记起

$$\alpha = +\xi \operatorname{cosec}\theta_0 \text{ 和 } \beta = (\eta + a^2\cos^2\theta_0 - \xi^2\cot^2\theta_0)^{1/2}, \tag{241}$$

对无穷远处观测者而言的黑洞表观形状, 将由临界轨迹 (ξ, η) 在 "天球" 上的投影决定, 如同半径为 $3M$ (碰撞参量 $3M\sqrt{3}$) 的不稳定圆光子轨道决定史瓦西黑洞的形状那样. 对现在的情形, 不得不简单地将轨迹 (ξ, η) 改作 (α, β) 面上的一条闭合曲线. 对赤道面上从无穷远处看黑洞的观测者, 表观形状由下式给出,

$$(\alpha, \beta) = [\xi, \sqrt{\eta(\xi)}]. \tag{242}$$

[358]

并示于图 38.

(*e*) 偏振方向沿零短程线的传播

广义相对论里通常用几何光学的语言来描述光的传播. 这种描述的基本概念是定义为垂直于传播波前的轨道的光线. 准确地说, 光线是空中的曲线, 其任何一点的正切矢量是在平均坡印廷矢量的方向上. 这些常被视为光子轨道的曲线是广义相对论的零短程线. 在本章和前面各章对零短程线的考虑中已经遵守了这一图像.

光的另一个精确地在黑洞的意义上在天体物理中显示出重要性的特征是偏振. 这一重要性的原因是, 从围绕黑洞的吸积盘发出的辐射被预期是有偏振的. 问题是, 如何将无穷远处观测者接收到的辐射的偏振态与辐射从吸积盘发

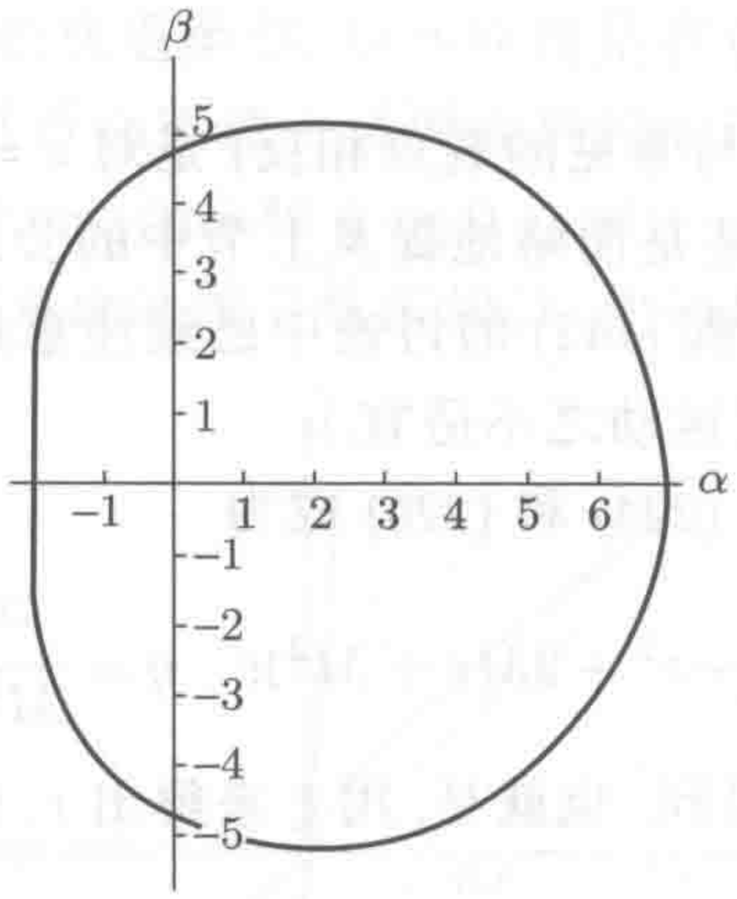


图 38 赤道面上的遥远观测者看到的极端 ($a = M$) 克尔黑洞的表观形状, 黑洞是位于角尺度比它大的照明光源的前面. 沿坐标轴 α 和 β (方程 (241) 中定义) 的长度单位是 M.

[359] 出时的偏振态联系起来. 对问题的回答很简单. 偏振态是由与传播方向, 即波矢量 $\boldsymbol{k}$, 横切的面上的电矢量的方向来描述的; 而与 $\boldsymbol{k}$ 相垂直的电矢量是沿着光线, 即沿着 $\boldsymbol{k}$ 所描述的零短程线而平行传播的. 按这种方式来表达, 很清楚在克尔几何中问题能通过以下途径直接回答, 就是将§60 的沃尔克 – 彭罗斯定理中的矢量 $\boldsymbol{f}$ 认同为电矢量, 并利用方程 (12) 定义的复数量 K_s 沿零短程线的守恒性.

在克尔时空中 (见第 6 章方程 180)

$$\Psi_2 = -M(r - \mathrm{i}a\cos\theta)^{-3}; \tag{243}$$

而沃尔克 – 彭罗斯守恒量是

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})\\ &-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})+(\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})](r-\mathrm{i}a\cos\theta)=K_2+\mathrm{i}K_1, \quad (\text{比如说}).\end{aligned} \tag{244}$$

由第 6 章方程 (173) 所给的对基矢的已知表示, 可得

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{l})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}) - (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{l})\\ &= (k^t f^r - k^r f^t) + a(k^r f^\varphi - k^\varphi f^r)\sin^2\theta = A(\text{比如说}),\end{aligned} \tag{245}$$

和

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{m}}) - (\boldsymbol{k}\cdot\overline{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{m})\\ &= \mathrm{i}[(r^2+a^2)(k^\varphi f^\theta - k^\theta f^\varphi) - a(k^t f^\theta - k^\theta f^t)]\sin\theta = \mathrm{i}B(\text{比如说}).\end{aligned} \tag{246}$$

由这些定义, 方程 (244) 所表示的守恒定律乘以 $(r+\mathrm{i}a\cos\theta)$ 后给出

$$\rho^2(A+\mathrm{i}B)=(r+\mathrm{i}a\cos\theta)(K_2+\mathrm{i}K_1); \tag{247}$$

分别由实部和虚部的相等得到

$$A=\frac{1}{\rho^2}(K_2r-aK_1\cos\theta) \tag{248}$$

和

$$B=\frac{1}{\rho^2}(K_1r+aK_2\cos\theta). \tag{249}$$

此外, $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 之相垂直要求

$$\left(1-\frac{2Mr}{\rho^2}\right)k^tf^t+\frac{2aMr\sin^2\theta}{\rho^2}(k^tf^\varphi+k^\varphi f^t)-\rho^2k^\theta f^\theta$$
$$-\frac{\rho^2}{\Delta}k^rf^r-\left(r^2+a^2+\frac{2a^2Mr}{\rho^2}\sin^2\theta\right)k^\varphi f^\varphi\sin^2\theta=0. \tag{250}$$

最后, 短程线方程 (183) 和 (184) 给出 [360]

$$\rho^2\boldsymbol{k}^r=\sqrt{R},\quad \rho^2k^\theta=\sqrt{\Theta},$$
$$\rho^2\boldsymbol{k}^t=\frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)^2-a^2\Delta\sin^2\theta-2aMr\xi],$$

和

$$\rho^2\boldsymbol{k}^\varphi=\frac{1}{\Delta}[2aMr+(\rho^2-2Mr)\xi\mathrm{cosec}^2\theta]. \tag{251}$$

由这些方程给出的 $\boldsymbol{k}$ 的分量, 方程 (248)—(250) 成为决定 $\boldsymbol{f}$ 的分量的三个方程; 而这三个方程正好足够, 因为 $\boldsymbol{f}$ 限定于仅以零矢量 $\boldsymbol{k}$ 为模.

上述方程的主要意义是将由物理理论给出的、黑洞附近某一点上 $\boldsymbol{f}$ 的方向与无穷远处 $\boldsymbol{f}$ 的方向联系起来. 相应地, 考虑方程 (248)—(250) 的解的渐近形式就已足够.

可从方程 (251) 推出的 $\boldsymbol{k}$ 的渐近形式是

$$\boldsymbol{k}^r\to 1,\quad \boldsymbol{k}^t\to 1,\quad \boldsymbol{k}^\theta\to\frac{\beta}{r^2},\quad \text{和 } \boldsymbol{k}^\varphi\to\frac{\xi}{r^2}\mathrm{cosec}^2\theta_0, \tag{252}$$

其中 (见方程 (192))

$$\beta^2=\eta+a^2\cos^2\theta_0-\xi^2\cot^2\theta_0. \tag{253}$$

由于 $\boldsymbol{f}$ 限定于仅以 $\boldsymbol{k}$ 为模, 可不失一般性地设

$$f^t=0. \tag{254}$$

正交条件 (250) 现在给出

$$-r^2\boldsymbol{k}^\theta f^\theta - \boldsymbol{k}^r f^r - (r^2\sin^2\theta_0)k^\varphi f^\varphi = 0 \quad (r\to\infty), \tag{255}$$

或, 由方程 (252),

$$f^r = -\beta f^\theta - \xi f^\varphi. \tag{256}$$

类似地, 方程 (248) 和 (249) 的渐近形式给出

$$f^r + (a\sin^2\theta_0)f^\varphi = K_2 r^{-1} \tag{257}$$

和

$$[r^2(k^\varphi f^\theta - k^\theta f^\varphi) - af^\theta]\sin\theta_0 = K_1 r^{-1}. \tag{258}$$

利用方程 (256) 从方程 (257) 中消去 f^r, 并由方程 (252) 代入 k^θ 和 k^φ, 得到

$$-\beta f^\theta - (\xi - a\sin^2\theta_0)f^\varphi = K_2 r^{-1} \tag{259}$$

和

$$(\xi\operatorname{cosec}\theta_0 - a\sin\theta_0)f^\theta - (\beta\sin\theta_0)f^\varphi = K_1 r^{-1}, \tag{260}$$

[361] 或, 令

$$\gamma = \xi\operatorname{cosec}\theta_0 - a\sin\theta_0, \tag{261}$$

有

和

$$\left.\begin{aligned}\beta f^\theta + (\gamma\sin\theta_0)f^\varphi &= -K_2 r^{-1}\\ \gamma f^\theta - (\beta\sin\theta_0)f^\varphi &= +K_1 r^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{262}$$

对 f^θ 和 f^φ 解这些方程, 得

和

$$\left.\begin{aligned}f^\varphi\sin\theta_0 &= -\frac{1}{r(\beta^2+\gamma^2)}(\beta K_1 + \gamma K_2)\\ f^\theta &= -\frac{1}{r(\beta^2+\gamma^2)}(\beta K_2 - \gamma K_1).\end{aligned}\right\} \tag{263}$$

现在用 $\mathscr{E}^\theta$ 和 $\mathscr{E}^\varphi$ 表示决定无穷远处偏振态的横切面上电矢量 $\boldsymbol{\mathscr{E}}$ 的分量, 于是可认明

$$\mathscr{E}^\varphi = -(r\sin\theta_0)f^\varphi \text{ 和 } \mathscr{E}^\theta = -rf^\theta, \tag{264}$$

而方程 (263) 给出

$$\mathscr{E}^\varphi = \frac{1}{\beta^2+\gamma^2}(\beta K_1 + \gamma K_2) \text{ 和 } \mathscr{E}^\theta = \frac{1}{\beta^2+\gamma^2}(\beta K_2 - \gamma K_1). \tag{265}$$

很清楚, 可安排

$$K_1^2 + K_2^2 = 1. \tag{266}$$

于是, $(\mathscr{E}^\varphi, \mathscr{E}^\theta)$ 是决定偏振态的横切面上的单位矢量: 通常用来描述偏振态的斯托克斯 (Stokes) 参量 (归一化为单位强度) 能容易地用 $(\mathscr{E}^\varphi, \mathscr{E}^\theta)$ 来表示.

64. 类时短程线

对类时短程线, 可在方程 (185) 和 (186) 中令 $\delta_1 = 1$; 而决定短程线在 (r, θ) 面上投影的方程再次是

$$\int^r \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R}} = \int^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\Theta}}, \tag{267}$$

但现在的定义是

$$R = r^4 + (a^2 - \xi^2 - \eta)r^2 + 2M[\eta + (\xi - a)^2]r - a^2\eta - r^2\Delta/E^2 \tag{268}$$

和

$$\Theta = \eta + a^2(1 - E^{-2})\cos^2\theta - \xi^2\cot^2\theta, \tag{269}$$

其中 $\xi = L_z/E, \eta = \mathscr{Q}/E^2$, 而 E 是每单位质量的能量. 而且, 已写 R 和 Θ 来代替 R/E^2 和 Θ/E^2. [362]

(a) θ 运动

首先考虑由对 $\Theta^{-1/2}$ 的积分指明的 θ 运动, 如前那样用 $\mu = \cos\theta$ 代替 θ 作为积分变量. 于是方程 (267) 的右边成为

$$\int^\mu \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}}, \tag{270}$$

其中

$$\Theta_\mu = \eta - [\xi^2 + \eta - a^2(1 - E^{-2})]\mu^2 - a^2(1 - E^{-2})\mu^4. \tag{271}$$

很清楚的是, 必须区分三种情形: $E^2 < 1$ 的束缚轨道, $E^2 = 1$ 的临界束缚轨道, 和 $E^2 > 1$ 的开放轨道.

对 $E^2 < 1$ 的束缚轨道, 便利的做法是将 a^2 代之以

$$\alpha^2 = a^2(E^{-2} - 1) > 0 \tag{272}$$

并将 Θ_μ 写为

$$\Theta_\mu = \eta - (\xi^2 + \eta + \alpha^2)\mu^2 + \alpha^2\mu^4. \tag{273}$$

由 Θ_μ 的这个表示和 $\Theta_\mu \geqslant 0$、$0 \leqslant \mu^2 \leqslant 1$ 的要求可得结论, η 的负值是不被允许的; 而 μ^2 的范围是在零与下列方程两根的较小者之间,

$$\eta - (\xi^2 + \eta + \alpha^2)\mu^2 + \alpha^2\mu^4 = 0 \quad (\eta > 0). \tag{274}$$

积分 (270) 现可简化为通常形式的第一类椭圆积分, 即有

$$\int_0^\mu \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\mu \frac{\mathrm{d}\mu}{[(\mu_+^2 - \mu^2)(\mu_-^2 - \mu^2)]^{1/2}} = \frac{1}{\alpha\mu_+}F(\psi, k), \tag{275}$$

其中

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{1}{2\alpha^2}\{(\xi^2+\eta+\alpha^2) \pm [(\xi^2+\eta+\alpha^2)^2 - 4\alpha^2\eta]^{1/2}\}, \tag{276}$$

$$k = \mu_-/\mu_+ \text{ 和 } \sin\psi = \mu/\mu_-. \tag{277}$$

对 $E^2=1$ 的临界束缚轨道,

$$\Theta_\mu = \eta - (\xi^2+\eta)\mu^2. \tag{278}$$

再一次, η 的负值不被允许, 且

$$\int^{\mu} \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta}} \cos^{-1}\left[\left(\frac{\xi^2+\eta}{\eta}\right)^{1/2}\mu\right]. \tag{279}$$

[363] 对 $E^2>1$ 的开放轨道, §63 (a) 对零短程线的讲述是适用的, 只要将 a^2 代之以

$$\alpha^2 = a^2(1-E^{-2}) > 0. \tag{280}$$

总之, 束缚和临界束缚轨道必定穿越赤道面, 并围绕该面振荡. 开放轨道则与零短程线非常相似: $\eta>0$ 的轨道与赤道面相交; $\eta<0$ 的轨道不与赤道面相交, 限制在锥内, 并能延伸到负 r 区域; 还有 $\eta=0$ 的轨道.

(b) r 运动

下面转到由对 $R^{-1/2}$ 的积分指明的 r 运动, 按照标准程序来考虑这样的特别轨道, 它们提供的不仅是轨道分类的基础, 而且还有足以描绘所预期的轨道性质的简单可积类型. 对目前的情形, 特别轨道是径向坐标保持不变的那些. 它们存在的条件是

$$R=0 \text{ 和 } \partial R/\partial r = 0. \tag{281}$$

条件 (281) 施于运动常量 ξ、η 和 E^2 的限制, 除现在必须在 R 的定义中增加一项即 $-r^2\Delta/E^2$ 外, 能如§63 (c) 中完全一样地导出. 于是, 按照同样步骤, 可得方程 (216) 和 (217) 被代之以

$$3r^4 + r^2a^2 - \eta(r^2-a^2) - \frac{r^2}{E^2}(3r^2-4Mr+a^2) = r^2\xi^2 \tag{282}$$

和

$$r^4 - a^2Mr + \eta(a^2-Mr) - \frac{r^3}{E^2}(r-M) = rM(\xi^2-2a\xi); \tag{283}$$

且如前一样, 对 ξ 和 η 来求解这些方程.

由方程 (282) 和 (283) 消去 η 可得 (代替方程 (218))

$$a^2(r-M)\xi^2 - 2aM(r^2-a^2)\xi - \left\{(r^2+a^2)[r(r^2+a^2)-M(3r^2-a^2)] - \frac{r}{E^2}\Delta^2\right\} = 0; \tag{284}$$

此方程的解是 (见方程 (220))

$$\xi = \frac{1}{a(r-M)}\left\{M(r^2-a^2) \pm r\Delta\left[1-\frac{1}{E^2}\left(1-\frac{M}{r}\right)\right]^{1/2}\right\}; \tag{285}$$

对 η 的相应解是 (见方程 (225)) (见图 39) [364]

$$\eta a^2(r-M) = \frac{r^3}{r-M}[4a^2M - r(r-3M)^2] + \frac{r^2}{E^2}[r(r-2M)^2 - a^2M] - \frac{2r^3M}{r-M}\Delta\left\{1 \pm \left[1-\frac{1}{E^2}\left(1-\frac{M}{r}\right)\right]^{1/2}\right\}. \tag{286}$$

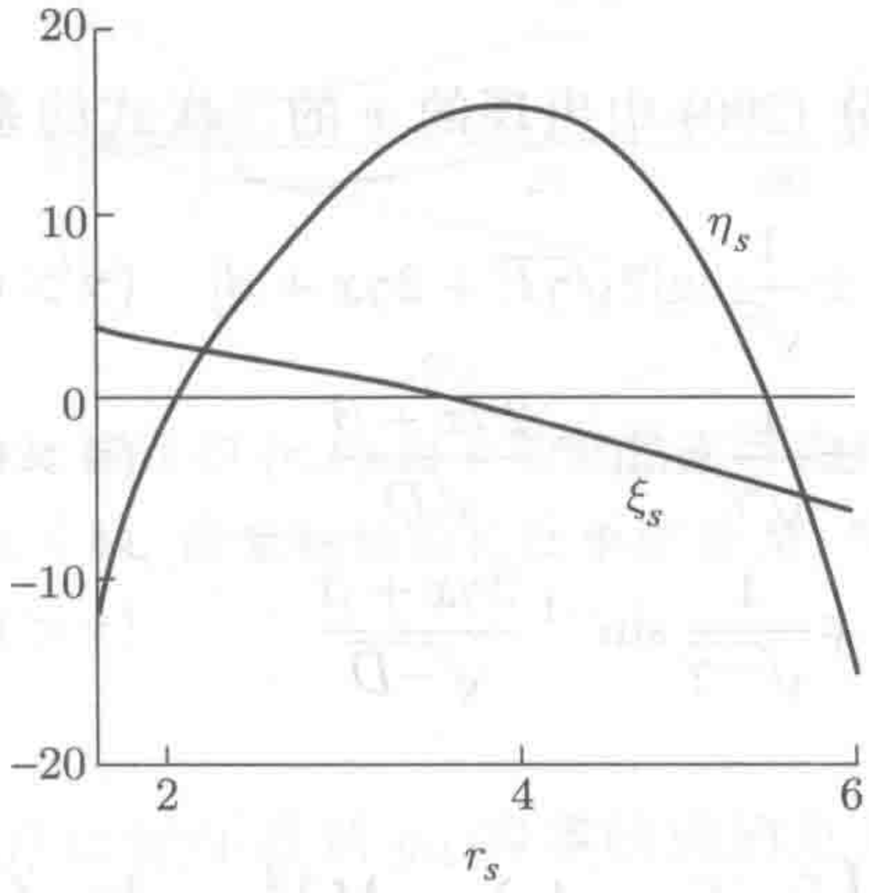


图 39　由方程 (285) 和 (286) 定义的对 $E^2 = 1.0$ 的临界束缚类时轨道的 (ξ_s, η_s) 轨迹. 沿横坐标的长度单位是 M; 所选克尔参量 a 是 0.8.

回到对 r 运动的考虑, 设运动常量 ξ 和 η 有值 ξ_s 和 η_s, 这些值适合于具有单位质量能量 E 的粒子的常半径 r_s 轨道, 即这些值是由方程 (285) 和 (286) 对 $r = r_s$ 和所赋 E^2 给出. (当然须有, 对所选的 r_s 和 E^2 值, η_s 对束缚和临界束缚轨道是正值.) 对这样的运动常量选择, r_s 是 $R = 0$ 的重根, 而且相应地, R 能简化为

$$R = (r-r_s)^2\left\{r^2\left(1-\frac{1}{E^2}\right) + 2rr_s\left[1-\frac{1}{E^2}\left(1-\frac{M}{r_s}\right)\right] - \frac{a^2}{r_s^2}\eta_s\right\}. \tag{287}$$

现在设

$$x = (r - r_s)^{-1}, \tag{288}$$

必须与上面§ (a) 中所给的

$$\int \frac{\mathrm{d}\mu}{\sqrt{\Theta_\mu}} \tag{289}$$

[365] 的表示之一个或另一个相等的积分是

$$\int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R}} = -\int \mathrm{d}x \left\{ \left(1 - \frac{1}{E^2}\right) + \left[4r_s\left(1 - \frac{1}{E^2}\right) + \frac{2M}{E^2}\right] x + \left[3r_s^2\left(1 - \frac{1}{E^2}\right) - \frac{a^2\eta_s}{r_s^2} + \frac{2Mr_s}{E^2}\right] x^2 \right\}^{-1/2} \tag{290}$$

[366] 这是一个基础积分, 其对不同情形 $E^2 > 0$、$E^2 = 0$ 和 $E^2 < 0$ 的值不难得出. 由定义

$$F(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2, \tag{291}$$

其中 α、β 和 γ 是积分 (290) 中出现的 x 的二次式的系数, 有

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{R}} &= \pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \lg[2\sqrt{\gamma F} + 2\gamma x + \beta] && (\gamma > 0), \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sinh^{-1}\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{D}} && (\gamma > 0, D > 0), \\ &= \mp\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \sin^{-1}\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{-D}} && (\gamma < 0, D < 0), \end{aligned}\right\} \tag{292}$$

其中

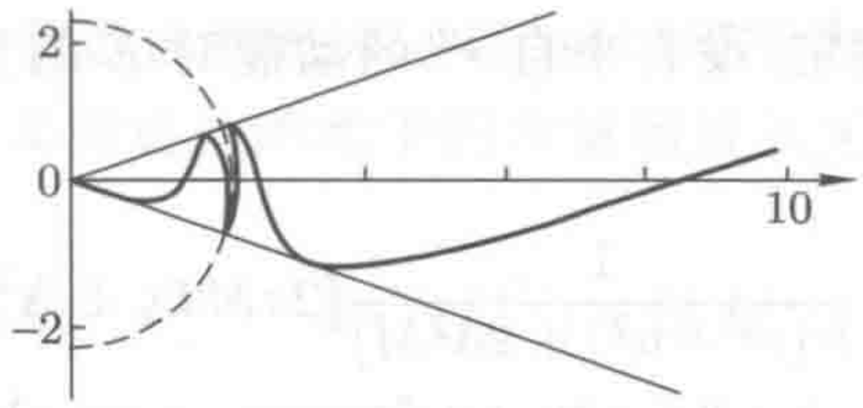
$$D = -4\left\{\left[r_s\left(1 - \frac{1}{E^2}\right) + \frac{M}{E^2}\right]^2 + \frac{\alpha^2\eta_s}{r_s^2}\left(1 - \frac{1}{E^2}\right)\right\}. \tag{293}$$

由这些方程给出的轨道的例子示于图 40.

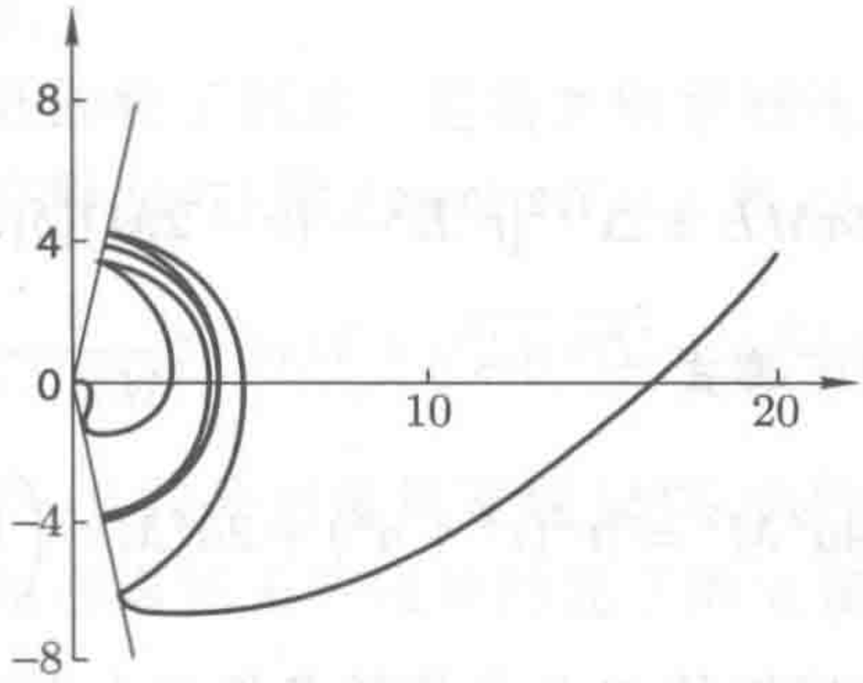
如同零短程线的情形那样, 有 $\eta = 0$ 的常半径 r 的轨道必定限制在赤道面上. 这是由于, 方程 (282) 和 (283) 对 $\eta = 0$ 成为

$$\left.\begin{aligned} 3r^2 + a^2 - \frac{1}{E^2}(3r^2 - 4Mr + a^2) &= \xi^2 \\ \text{和} \qquad r^3 - \frac{r^2}{E^2}(r - M) &= M(\xi - a)^2, \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

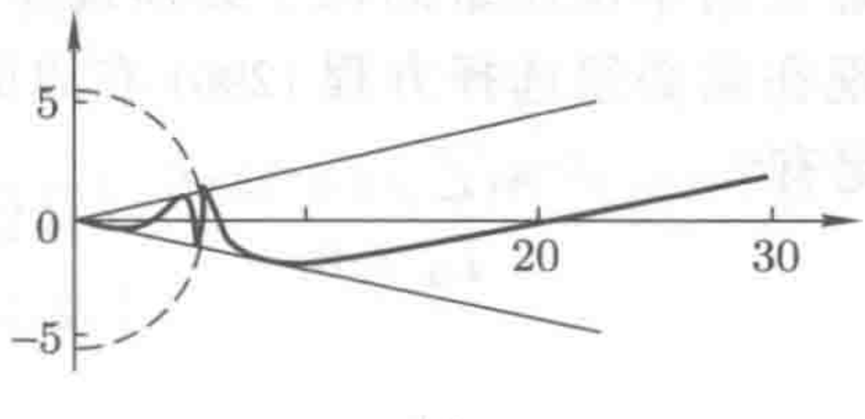
与描述赤道面上圆轨道的方程 (108) 和 (109) 是一样的.



(a)



(b)



(c)

图 40　方程 (279) 和 (292) 描述的 (r,θ) 面上的临界束缚类时短程线, 对 r_s 的三个值: (a), 2.154; (b), 4.0; 和 (c), 5.44. 沿坐标轴的长度单位是 M; 所选克尔参量 a 是 0.8.

65. 彭罗斯过程

在上一章 (§58 (a)) 已经注意到 g_{tt} 为零的面的意义和在克尔几何里除两极外这个面不与事件视界重合的事实. 在这两个面之间的环形空间即能层里, 基灵矢量 $\partial/\partial t$ 变成类空的, 四动量的守恒分量 p_t 也是如此. 无穷远处观测者所感知的这个空间区域中粒子的能量可以是负的. 最后这个事实有着重要的后果: 如彭罗斯首先证明的, 它使实际上从黑洞提取能量和角动量的物理过程成为可能. 本节将考虑这些过程的性质和能够被提取的能量的极限.

考虑彭罗斯过程的便利途径是, 得出某一特定位置上的粒子所能具有的 [367]
能量的极限. 由方程 (183) 和 (185) 可得, 该极限由下式设定,

$$[r(r^2+a^2)+2a^2M]E^2-(4aML_z)E$$
$$-L_z^2(r-2M)-(\delta_1 r+\mathscr{Q}/r)\Delta=0, \tag{295}$$

因为这个方程预先假定, 没有来自 $\dot{r}^2$ 的动能对 E 的贡献. 分别对 E 和 L_z 求解方程 (295), 得

$$E = \frac{1}{[r(r^2+a^2)+2a^2M]}\llbracket 2aML_z \pm \Delta^{1/2}\{r^2L_z^2 + [r(r^2+a^2)+2a^2M](\delta_1 r + \mathscr{Q}r^{-1})\}^{1/2}\rrbracket \tag{296}$$

和

$$L_z = \frac{1}{r-2M}\{-2aME \pm \Delta^{1/2}[r^2E^2 - (r-2M)(\delta_1 r + \mathscr{Q}r^{-1})]^{1/2}\}, \tag{297}$$

在导出这些解时已用了等式

$$\Delta r^2 - 4a^2M^2 = [r^2(r^2+a^2)+2a^2Mr]\left(1-\frac{2M}{r}\right). \tag{298}$$

无穷远处观测者感知的 E 为负值的条件可由方程 (296) 推出. 首先, 重要的是看到, 无穷远处静止的单位质量的粒子必须按照约定被赋予能量 $E=1$; 而为与此要求一致, 现在就必须选择方程 (296) 右边的正号. 按照这个符号选择, 显然对 $E<0$ 必定有

$$L_z < 0, \tag{299}$$

和

$$4a^2M^2L_z^2 > \Delta\{r^2L_z^2 + [r^2(r^2+a^2)+2a^2Mr](\delta_1 + \mathscr{Q}/r^2)\}. \tag{300}$$

借助于等式 (298), 这个不等式可写为另一形式,

$$[r^2(r^2+a^2)+2a^2Mr]\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)L_z^2 + \Delta\left(\delta_1 + \frac{\mathscr{Q}}{r^2}\right)\right\} < 0. \tag{301}$$

[368] 可得

$$\left.\begin{aligned} &E<0, \quad \text{当并仅当 } L_z<0 \\ \text{和}\quad &(r-2M) < -\frac{\Delta r}{L_z^2}\left(\delta_1 + \frac{\mathscr{Q}}{r^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

结论是, 只有反向转动的粒子才能够具有负能量; 而且在赤道面上还须进一步有 $r<2M$, 即粒子在能层内.

(a) 原初彭罗斯过程

以下是最初由彭罗斯构想的表征从克尔黑洞提取能量的方式的过程.

一个在无穷远处静止的粒子沿赤道面上的短程线到达一点 r $(<2M)$, 那里是它的转折点 (故有 $\dot{r}=0$). 它在 r 点衰变为两个光子, 其中一个越过事件

视界而“消失”, 而另一个逃逸到无穷远处. 可以安排为, 越过事件视界的光子具有负能量, 而逃逸到无穷远处的光子的能量超过从无穷远处到达的粒子.

令

$$E^{(0)}=1,\quad L_z^{(0)};\quad E^{(1)},L_z^{(1)};\quad \text{和 } E^{(2)},\quad L_z^{(2)}, \tag{303}$$

分别表示从无穷远处到达的粒子、越过事件视界的光子、和逃逸到无穷远处的光子的能量和角动量.

由于来自无穷远处的粒子到达 r 是沿类时短程线并在 r 上有转折点, 故其角动量 $L_z^{(0)}$ 能由对方程 (297) 设 $\delta_1=1$、$E=1$ 和 $\mathscr{Q}=0$ 推出, 即有

$$L_z^{(0)}=\frac{1}{r-2M}[-2aM+\sqrt{2Mr\Delta}]=\alpha^{(0)}(\text{比如说}). \tag{304}$$

类似地, 通过设 $\delta_1=\mathscr{Q}=0$ 和分别选择方程 (297) 中的负号和正号, 可以得到越过事件视界的光子与逃逸到无穷远处的光子的能量和角动量之间的关系, 即有

$$L_z^{(1)}=\frac{1}{r-2M}(-2aM-r\sqrt{\Delta})E^{(1)}=\alpha^{(1)}E^{(1)}\ (\text{比如说}) \tag{305}$$

和

$$L_z^{(2)}=\frac{1}{r-2M}(-2aM+r\sqrt{\Delta})E^{(2)}=\alpha^{(2)}E^{(2)}\ (\text{比如说}). \tag{306}$$

能量和角动量守恒现在要求

$$E^{(1)}+E^{(2)}=E^{(0)}=1 \tag{307}$$

和 [369]

$$L_z^{(1)}+L_z^{(2)}=\alpha^{(1)}E^{(1)}+\alpha^{(2)}E^{(2)}=L_z^{(0)}=\alpha^{(0)}. \tag{308}$$

求解这些方程, 得

$$E^{(1)}=\frac{\alpha^{(0)}-\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}\ \text{和}\ E^{(2)}=\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(0)}}{\alpha^{(1)}-\alpha^{(2)}}, \tag{309}$$

或, 由方程 (304)—(306) 代入 $\alpha^{(0)}$、$\alpha^{(1)}$ 和 $\alpha^{(2)}$, 可得

$$E^{(1)}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r}}-1\right)\ \text{和}\ E^{(2)}=+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r}}+1\right). \tag{310}$$

只要有 $r<2M$ (如已要求的), 逃逸到无穷远处的光子的能量的确超过 $E^{(0)}=1$. 获取的能量 ΔE 是

$$\Delta E=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r}}-1\right)=-E^{(1)}. \tag{311}$$

由方程 (311) 很明显, 通过已描述的过程的最大能量获取, 是在来自无穷远处的粒子在事件视界上有转折点时实现. 所以

$$\Delta E \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2M}{r_+}} - 1\right). \tag{312}$$

由于 r_+ 的极小值是 M (当 $a^2 = M^2$), 故

$$\Delta E \leqslant \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0.207. \tag{313}$$

不等式 (312) 的另一种有益形式是, 将它以 "不可约质量" 来表示,

$$M_{\text{irr}} = \frac{1}{2}(r_+^2 + a^2)^{1/2} = \left(\frac{1}{2}Mr_+\right)^{1/2}. \tag{314}$$

(下面在§ (d) 将解释为什么这个质量被称为 "不可约".) 用这个定义, 不等式 (312) 能写成

$$\Delta E \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{M}{M_{\text{irr}}} - 1\right). \tag{315}$$

比上式更一般的不等式能由方程 (296) 直接导出. 该方程要求

$$[r(r^2 + a^2) + 2a^2M]E - 2aML_z \geqslant 0. \tag{316}$$

特别地,

$$[r_+(r_+^2 + a^2) + 2a^2M]E - 2aML_z \geqslant 0. \tag{317}$$

但是,

$$r_+(r_+^2 + a^2) + 2a^2M = 2M(r_+^2 + a^2) = 4M^2r_+. \tag{318}$$

[370] 所以,

$$2Mr_+E - aL_z \geqslant 0. \tag{319}$$

在下面的§ (d) 将回到这个不等式.

(b) 瓦尔德不等式

对由彭罗斯过程所能够提取的能量是有限制的. 这里给出两个不等式 (分别归功于瓦尔德和巴丁、珀勒斯、楚科尔斯基), 它们指明了该限制的性质和起源.

按照 § (a) 讲述的过程, 假定具有四速度 U^i 和比能量 E 的粒子分裂为碎片. 令 ε 为碎片之一的比能量, u^i 为其四速度. 现在寻求对 ε 的限制.

选择正交四次标架 $e_{(a)}{}^i$, 其中 U^i 与 $e_{(0)}{}^i$ 重合, 其它的 (类空) 基矢是 $e_{(\alpha)}{}^i(\alpha=1,2,3)$:

$$e_{(0)}{}^i = U^i \text{ 和 } e_{(\alpha)}{}^i(\alpha=1,2,3). \tag{320}$$

在这个标架里,

$$u^i = \gamma(U^i + v^{(\alpha)} e_{(\alpha)}{}^i), \tag{321}$$

其中 $v^{(\alpha)}$ 是碎片的三速度的空间分量,

$$\gamma = (1-|v|^2)^{-1/2}, \quad \text{和 } |v|^2 = v^{(\alpha)} v_{(\alpha)}. \tag{322}$$

现在假设时空允许类时基灵矢量 $\xi_i = \partial/\partial x^0$. 它在所选四次标架中的表示是

$$\xi_i = \xi_{(0)} U_i + \xi_{(\alpha)} e^{(\alpha)}{}_i \text{ 和 } \xi^i = \xi^{(0)} U^i + \xi^{(\alpha)} e_{(\alpha)}{}^i. \tag{323}$$

由对 ξ_i 的表示可得

$$E = \xi_i U^i = \xi_{(0)} = \xi^i U_i = \xi^{(0)}, \tag{324}$$

和

$$g_{00} = \xi^i \xi_i = \xi_{(0)}{}^2 - \xi_{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} = E^2 - |\xi|^2. \tag{325}$$

于是有关系

$$|\xi|^2 = \xi_{(\alpha)} \xi^{(\alpha)} = E^2 - g_{00}. \tag{326}$$

由碎片四速度的表示式 (321) 可得

$$\varepsilon = \xi_i u^i = \gamma(\xi_{(0)} + v^{(\alpha)} \xi_{(\alpha)}) = \gamma(E + |v||\xi| \cos\vartheta), \tag{327}$$

其中 ϑ 是三维速度 $v^{(\alpha)}$ 与 $\xi_{(\alpha)}$ 之间的夹角. 用关系式 (326), 可将方程 (327) 重写为

$$\varepsilon = \gamma E + \gamma |v| (E^2 - g_{00})^{1/2} \cos\vartheta. \tag{328}$$

这个方程显然意味着不等式 [371]

$$\gamma E - \gamma |v| (E^2 - g_{00})^{1/2} \leqslant \varepsilon \leqslant \gamma E + \gamma |v| (E^2 - g_{00})^{1/2}. \tag{329}$$

这就是瓦尔德不等式.

在克尔几何中,

$$g_{00} = 1 - 2Mr/\rho^2 < 0 \text{ 在能层内;} \tag{330}$$

其下限是 -1, 对 $a=M$ 和 $\theta=\pi/2$ 在事件视界上达到. 因此在克尔几何里, 必定在任何情况都有

$$\gamma E-\gamma|v|(E^2+1)^{1/2}\leqslant\varepsilon\leqslant\gamma E+\gamma|v|(E^2+1)^{1/2}. \tag{331}$$

已经看到, 遵循稳定圆轨道的粒子所能够具有的最大能量是 (见方程 (146))

$$E_{\max}=3^{-1/2}. \tag{332}$$

对 ε 为负值, 因此必定有

$$|v|>\frac{E}{\sqrt{E^2+1}}=\frac{1}{2}. \tag{333}$$

也就是说, 在由彭罗斯过程提取能量成为可能之前, 碎片必须具有相对论性能量.

有趣的是将不等式 (331) 与在没有能层优势的狭义相对论框架里的式子比较, 即

$$\gamma E-\gamma|v|(E^2-1)^{1/2}\leqslant\varepsilon\leqslant\gamma E+\gamma|v|(E^2-1)^{1/2}. \tag{334}$$

很清楚, 与狭义相对论框架里更常见过程所具有的可能性相比, 并不能实现在所得上有很大超出.

(c) 巴丁 – 珀勒斯 – 楚科尔斯基不等式

再一次, 按照§ (a) 所讲述的过程的概念, 设两个具有比能量 E_+ 和 E_-、沿着各自轨道的粒子在某一点碰撞. 现在来寻求它们之间相对三速度 $|w|$ 的大小的下限.

选择正交四次标架,

$$e_{(0)}{}^i=U^i \text{ 和 } e_{(\alpha)}{}^i \quad (\alpha=1,2,3), \tag{335}$$

在该标架中两个轨道以相等而相反的三速度 $+v^{(\alpha)}$ 和 $-v^{(\alpha)}$ 相交, 致有

$$|w|=\frac{2|v|}{1+|v|^2} \text{ 其中 } |v|^2=v^{(\alpha)}v_{(\alpha)}. \tag{336}$$

[372] 在碰撞瞬间, 在所选四次标架, 两粒子四速度 $u_+{}^i$ 和 $u_-{}^i$ 的表示是

$$\left.\begin{aligned}u_+{}^i&=\gamma(U^i+v^{(\alpha)}e_{(\alpha)}{}^i)\\ \text{和}\qquad u_-{}^i&=\gamma(U^i-v^{(\alpha)}e_{(\alpha)}{}^i),\end{aligned}\right\} \tag{337}$$

其中

$$\gamma=(1-|v|^2)^{-1/2}. \tag{338}$$

现在假定, 时空允许基灵矢量 $\xi_i(=\partial/\partial x^0)$. 设它在所选四次标架中的表示是

$$\left.\begin{aligned}\xi^i &= \xi^{(0)}U^i + \xi^{(\alpha)}e_{(\alpha)}{}^i \\ \xi_i &= \xi_{(0)}U_i + \xi_{(\beta)}e^{(\beta)}{}_i(\xi^{(0)} = \xi_{(0)}).\end{aligned}\right\} \quad (339)$$

和

于是, 由定义,

$$g_{00} = \xi^i\xi_i = \xi^{(0)}\xi_{(0)} - \xi_{(\alpha)}\xi^{(\alpha)} = \xi_{(0)}^2 - |\xi|^2, \quad (340)$$

致有

$$|\xi|^2 = \xi_{(0)}^2 - g_{00}. \quad (341)$$

碰撞瞬间两粒子的比能量由下式给出,

$$\left.\begin{aligned}E_+ &= \xi_i u_+{}^i = \gamma(\xi_{(0)} + v^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}) = \gamma(\xi_{(0)} + |v||\xi|\cos\vartheta) \\ E_- &= \xi_i u_-{}^i = \gamma(\xi_{(0)} - v^{(\alpha)}\xi_{(\alpha)}) = \gamma(\xi_{(0)} - |v||\xi|\cos\vartheta),\end{aligned}\right\} \quad (342)$$

和

其中 ϑ 是三速度 $\xi^{(\alpha)}$ 与 $v_{(\alpha)}$ 之间的夹角. 由上述方程可得

$$\gamma\xi_{(0)} = \frac{1}{2}(E_+ + E_-) \text{ 和 } \gamma|v||\xi|\cos\vartheta = \frac{1}{2}(E_+ - E_-). \quad (343)$$

相应地,

$$\begin{aligned}(E_+ - E_-)^2 &= 4\gamma^2|v|^2|\xi|^2\cos^2\vartheta \\ &= |v|^2(4\gamma^2\xi_{(0)}^2 - 4\gamma^2 g_{00})\cos^2\vartheta \\ &= |v|^2[(E_+ + E_-)^2 - 4\gamma^2 g_{00}]\cos^2\vartheta, \end{aligned} \quad (344)$$

其中已用了关系 (341) 和 (343). 方程 (344) 清楚地意味着不等式

$$(E_+ - E_-)^2 \leqslant |v|^2[(E_+ + E_-)^2 - 4\gamma^2 g_{00}]; \quad (345)$$

或, 记取 γ 的定义, 有

$$|v|^2\left[(E_+ + E_-)^2 - \frac{4}{1-|v|^2}g_{00}\right] \geqslant (E_+ - E_-)^2, \quad (346)$$

或, 等价地, [373]

$$-|v|^4(E_+ + E_-)^2 + 2|v|^2(E_+^2 + E_-^2 - 2g_{00}) - (E_+ - E_-)^2 \geqslant 0. \quad (347)$$

上式取等号, 方程 (347) 的根是

$$\frac{1}{(E_+ + E_-)^2}\left[\sqrt{E_+^2 - g_{00}} \pm \sqrt{E_-^2 - g_{00}}\right]^2. \quad (348)$$

可得结论

$$|v| \geqslant \frac{1}{E_+ + E_-}|\sqrt{E_+^2 - g_{00}} - \sqrt{E_-^2 - g_{00}}|; \tag{349}$$

所求的 $|w|$ 的下限由方程 (336) 得到; 而相应的不等式就是巴丁 – 珀勒斯 – 楚科尔斯基不等式.

如果具有能量 E_+ 的粒子遵循克尔黑洞赤道面上的稳定圆轨道, 则它的最大能量 (如已看到的) 是 $3^{-1/2}$. 由最有利的值 $g_{00} = -1$ 和 $E_- = 0$, 不等式 (349) 给出

$$|v| > \left[\sqrt{1 + \frac{1}{3}} - 1\right]\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}; \tag{350}$$

而对 $|w|$ 的相应不等式是

$$|w| \geqslant \frac{1}{2}, \tag{351}$$

与由瓦尔德不等式得出的结果 (333) 一致.

从瓦尔德不等式和巴丁 – 珀勒斯 – 楚科尔斯基不等式得出的主要结论是, 要通过彭罗斯过程实现实质性的能量提取, 必须首先由流体力学或其它形式的力将粒子碎片加速到光速的一半以上. § (*a*) 中考虑的特别例子证实了这个结论.

(*d*) 可逆的能量提取

回到§ (*a*) 中导出的不等式 (319). 只有当所考虑的过程是发生在事件视界上时, 这个不等式才变为等式. 一般说来, 由到达事件视界的、具有负能量 $-E$ 和角动量 $-L_z$ 的粒子导致的能量获取 $\delta M(= E)$ 和角动量获取 $\delta J(= L_z)$ 受制于不等式

$$2r_+ M\delta M \geqslant a\delta J. \tag{352}$$

如果假定过程是 "绝热地" 发生的, 也就是黑洞沿克尔序列演化, 那么

$$\delta J = \delta(aM) = M\delta a + a\delta M, \tag{353}$$

[374] 而不等式 (352) 给出

$$(2Mr_+ - a^2)\delta M = r_+^2\delta M \geqslant Ma\delta a. \tag{354}$$

现在, 由方程 (314) 的不可约质量 M_{irr} 定义,

$$M_{\text{irr}}^2 = \frac{1}{2}Mr_+ = \frac{1}{2}M[M + \sqrt{M^2 - a^2}]. \tag{355}$$

由此方程可得

$$\delta M_{\text{irr}}^2 = \frac{1}{2\sqrt{M^2 - a^2}}(r_+^2\delta M - Ma\delta a). \tag{356}$$

所以, 不等式 (354) 等价于限制

$$\delta M_{\mathrm{irr}}^2 \geqslant 0. \tag{357}$$

换句话说, 没有任何连续的过程能使黑洞的不可约质量减小, 这是证实名称的结果. 由于 (见第 6 章方程 (278))

$$\text{表面积} = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 16\pi M_{\mathrm{irr}}^2, \tag{358}$$

所以也可以说, 没有任何连续的过程能使黑洞的表面积减小. 更一般的论断, 即 "黑洞之间无论何种相互作用都不能使它们的总表面积减小", 是霍金 (Hawking) 的面积定理. 而这里的考虑只适用于涉及单个克尔黑洞的无限小过程.

由于最佳能达到的是保持不可约质量不变, 符合此要求的过程被称为可逆的. 还可注意, 由定义 (355), 有关系

$$M^2 = M_{\mathrm{irr}}^2 + J^2/4M_{\mathrm{irr}}^2. \tag{359}$$

由于 M_{irr} 是不可约的, 于是可将第二项 $J^2/4{M_{\mathrm{irr}}}^2$ 解释为转动动能对黑洞惯性质量平方的贡献; 而由彭罗斯过程提取的正是这个转动能量.

具有更广泛意义的进一步结果, 可由考虑彭罗斯过程对 $a = M$ 和 $r_+ = M$ 的极端克尔黑洞的影响得出. 对此情形, 不等式 (354) 给出

$$M\delta M \geqslant a\delta a \text{ 或 } \delta(M^2 - a^2) \geqslant 0. \tag{360}$$

也就是说, 黑洞是沿克尔系列向下演化到 a^2/M^2 的更低值, 并更远离等式. 所以, $a^2 > M^2$ 的裸奇点是不可能由所考虑的此类无限小过程来创建的. 裸奇点能否由非线性的 "爆发式" 过程创建的问题则仍无答案. 关于裸奇点在没有时不可能被创建出来的猜想, 就是彭罗斯的宇宙监督假设.

66. $a^2 > M^2$ 时的短程线 [375]

由于本书的基本兴趣是在于黑洞, 所以只限于考虑具有 $a^2 \leqslant M^2$ 的克尔时空, 因为只有这样的时空才允许一个事件视界, 并表示一个黑洞. 如果 $a^2 > M^2$, 视界不再存在, 只有奇异环保留. 所保留的实际上是裸奇点. 而裸奇点被认为不能在自然界存在: 宇宙监督假设禁止它们在自然的事件进程中出现. 不过, 仍有不少人有兴趣知道, 有着裸奇点的时空是个什么样子, 有着裸奇点的时空较之奇点是隐藏在事件视界后面的时空是否会显示出任何基本的差异. 对有着 $a^2 < M^2$ 和 $a^2 > M^2$ 的克尔时空短程线的比较研究可以有助于认识这些差异可能是什么.

(a) 零短程线

首先来看与 $a^2 < M^2$ 或 $a^2 > M^2$ 相关联的零短程线的一些基本特征. 在§61 (a) 中已看到, 当 $a^2 < M^2$ 时, 赤道面上的零短程线由临界碰撞参量 $D_c{}^{\mp}$ 来区分 (上号对反向轨道, 下号对正向轨道): 有着碰撞参量 $D > D_c{}^{\mp}$ 的来自无穷远处的轨道在到达近心点后再次返回到无穷远, 而有着碰撞参量 $D < D_c{}^{\mp}$ 的轨道终结于奇点. 但是当 $a^2 > M^2$ 时, 这样的区分只对反向轨道存在: 所有 $D > a$ 的来自无穷远的正向轨道都再次回到无穷远. 这是因为, 区分是取决于不稳定圆光子轨道存在与否. 不稳定圆光子轨道的半径是由三次方程 (见方程 (124)) 的实数正根 $\sqrt{r}$ 决定,

$$r^{3/2}Q_{\mp} = r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \mp 2aM^{1/2} = 0; \tag{361}$$

而对 $a^2 > M^2$, 此方程取正号时 (对应于正向轨道) 不允许任何实数正根. 但是在取负号时 (对应于反向轨道), 方程 (361) 允许根 (见方程 (87))

其中
$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{r_{\text{ph.}}^{(-)}} = (2\sqrt{M})\cosh\vartheta \text{ 或 } r_{\text{ph.}}^{(-)} = 4M\cosh^2\vartheta \\ &\cosh 3\vartheta = |a|/M. \end{aligned}\right\} \tag{362}$$

[376] 与这个反向的不稳定圆轨道相关的碰撞参量是

$$D_c^{(-)} = M(6\cosh\vartheta + \cosh 3\vartheta). \tag{363}$$

§63 (a) 关于常半径 (r_s) 非平面轨道的讨论同样适用于 $a^2 > M^2$. 特别地, $\eta > 0$ 的轨道 (对 $r_s < r_{\text{ph}}^{(-)}$) 穿越赤道面并避开奇点, 而 $\eta < 0$ 的轨道 (包括 $r_s > r_{\text{ph}}^{(-)}$ 的反向轨道和所有正向轨道) 则限制在锥内 (不包括 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 方向) 并对某个负 r 有转折点. ($\eta = 0$ 的情形只对 $r_s = r_{\text{ph}}^{(-)}$ 的反向轨道才可能.) 但是, 对 $\eta < 0$ 的轨道有一个重要的差异. 当 $a^2 < M^2$ 时, 在负 r 区域有转折点的轨道不能返回它们所离开的世界: 视界的介入迫使它们向其它世界迁移. 但当 $a^2 > M^2$ 时, 没有视界介入; 在负 r 区域有转折点的轨道能够回到正 r 世界, 并讲述它们的 "惊人旅行故事" (见下面§ (c)).

(b) 类时短程线

与越过 $a^2 = M^2$ "垒" 的转变相关的一些有趣特征出现于 (如德菲里切 (de Felice) 首先证明的) 对下列表示的考虑 (见方程 (117)),

$$E^{\mp} = \frac{1}{\sqrt{Q_{\mp}}}[1 - 2Mu \mp a\sqrt{(Mu)^3}], \tag{364}$$

该式给出所赋倒数半径 u ($= 1/r$) 的正向 (+) 和反向 (–) 圆轨道的能量. 现在有兴趣的只是正向轨道: 非正向轨道受限于要求 $Q_- \geqslant 0$, 即受限于反向圆光子轨道 (如已看到的, 对所有 a^2 存在) 的半径, 而对正向轨道则无此限制.

限于正向轨道, 已经注意到, $E^{(+)}$ 对 $a = M$ 在 $r = M \pm 0$ 有不连续性, 即 (见方程 (146))

$$E^{(+)} \to \pm 3^{-1/2} \quad (r \to M \pm 0). \tag{365}$$

而不连续性是所选径向坐标 r 对 $a^2 = M^2$ 在 $r = M$ 上含混性的结果, 这里且集中于 $E^{(+)}$ 对 $r < M$ 的行为. 由方程 (364), 如果方程

$$r^{3/2} - 2Mr^{1/2} + aM^{1/2} = 0 \tag{366}$$

允许对 $\sqrt{r}$ 的一个实数正根, 则 $E^{(+)}$ 为零. 对 $a = M$, 方程 (366) 允许两个这样的根: [377]

$$\sqrt{r} = \sqrt{M} \text{ 和 } \sqrt{r} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{M}, \tag{367}$$

或

$$r = M \text{ 和 } r = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})M = 0.38197M. \tag{368}$$

所以, $E^{(+)}$ 在下列区间内为负,

$$\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})M < r < M \quad (E^{(+)} < 0). \tag{369}$$

也就是说, 负能量稳定圆轨道对 $a^2 = M^2$ 存在于区间 (369). 这种负能量稳定圆轨道对 $a^2 > M^2$ 继续存在, 但只在有限范围

$$(32/27)^2 M^2 > a^2 > M^2. \tag{370}$$

这是由于, 方程 (366) 对 $a^2/M^2 = 32/27$, 即

$$r^{3/2} - 2Mr^{1/2} + (32/27)^{1/2} M^{3/2} = 0 \tag{371}$$

允许两个重合正根

$$\sqrt{r} = \sqrt{2M/3} \text{ 或 } r = \frac{2}{3}M; \tag{372}$$

而对 $|a| > (32/27)^{1/2} M = 1.088M$ 没有实数正根.

§64 中关于非平面类时短程线的讨论同等地对 $a^2 > M^2$ 适用. 而与 $\eta < 0$ 相关联的轨道再次具有特别意义, 因为它们在访问负 r 区域后又返回正 r 区域, 下面在§ (c) 中即将回到这个问题.

(c) 对因果律的违反

有奇点的时空的重要特征之一是, 可以有因果律被违反的区域, 即可以有闭合的类时曲线允许其将来影响其过去, 而这个特征被认为是非物理的. 在延伸到允许 r 为负值的克尔时空中, 在 $g_{\varphi\varphi} > 0$ 和 φ 成为类时的区域肯定能违反因果律.

φ 为类时的区域的边界由下列方程定义,

$$\begin{aligned}\Sigma^2 &= (r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta \\ &= (r^2+a^2)(r^2+a^2\cos^2\theta) + 2Ma^2r\sin^2\theta = 0\end{aligned} \tag{373}$$

这个方程仅当允许 r 为负值时才能成立. 令 $x=-r$, 为避免混淆, 将方程 (373) 重写为

$$\frac{(x^2+a^2)^2}{a^2(x^2+a^2+2Mx)} = \sin^2\theta \quad (x=-r). \tag{374}$$

[378] 此方程清楚地要求

$$\frac{(x^2+a^2)^2}{a^2(x^2+a^2+2Mx)} \leqslant 1; \tag{375}$$

而此不等式锁定了 x 的范围:

$$0 \leqslant x \leqslant x_{\max} \tag{376}$$

其中

$$x_{\max} = \frac{2a}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\sinh^{-1}\frac{3M}{a}\sqrt{3}\right) \tag{377}$$

是下列方程的正根,

$$x^3 + a^2x - 2Ma^2 = 0. \tag{378}$$

特别地,

$$\left.\begin{aligned}&0 \leqslant x \leqslant M \text{ 对 } a^2 = M^2 \\ &0 \leqslant x \leqslant 1.2878M \text{ 对 } a^2 = 3M^2.\end{aligned}\right\} \tag{379}$$

和

类似地, θ 也被限定:

$$\sin^2\theta_{\min} \leqslant \sin^2\theta \leqslant 1, \tag{380}$$

其中

$$\sin^2\theta_{\min} = \min\frac{(x^2+a^2)^2}{a^2(x^2+a^2+2Mx)}. \tag{381}$$

右边表示式的极小值发生于 $x=zM$, 其中 z 是下列方程的正根,

$$(z+1)^3 - (3-a^2/M^2)(z+1) + 2(1-a^2/M^2) = 0. \tag{382}$$

例如, 可以得到

$$\left.\begin{aligned}&z=\sqrt{2}-1, \quad \sin^2\theta_{\min} = 4(3-2\sqrt{2}), \quad \theta_{\min} = 55.75^\circ \quad (a=M) \\ &z=\sqrt[3]{4}-1, \quad \sin^2\theta_{\min} = 0.9080, \quad \theta_{\min} = 65.25^\circ \quad (a=M\sqrt{3}).\end{aligned}\right\} \tag{383}$$

和

于是, 定义因果律可被违反区域的边界的方程 (374), 对 $-r$ 和 θ 的范围给出了相当严厉的限制.

虽然 φ 为类时的区域对适合 $a^2 < M^2$ 的所有值 $a^2 > 0$ 都存在, 但这些区域与其外部空间是不能交换信息的, 对其所能做的只是漠不关心. 但当 $a^2 > M^2$、没有事件视界介入、且 φ 为类时的区域能够与外部空间交换信息时, 就不会是没有差别. 与此相关的一个有趣问题是, 因果律 (在一定意义上) 是否能被沿类时 (或零) 短程线的运动所违反. 如果这种违反发生, 就只能是沿着有 $\eta < 0$、并在负 r 区域有转折点的开放短程线. 由 (见 方程 (179) 和 (180))

$$t = \int^r \frac{r^2}{\sqrt{R}}\mathrm{d}r + a^2 \int^\theta \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\Theta}}\mathrm{d}\theta + 2M \int^r r[r^2 - a(\xi - a)]\frac{\mathrm{d}r}{\Delta\sqrt{R}}, \qquad (384) \qquad [379]$$

可得, 对因果律的违反而言, 最后一个积分中来自负 r 区域的短程线部分的负贡献 (其最大值可由安排 $a(\xi - a)$ 为负和转折点存在于 φ 为类时的区域而得出) 足以抵消所有三个积分中来自正 r 区域的短程线部分的正贡献. 相关的计算尚无确定结果.

文献注释

正是卡特对哈密顿–雅可比方程可分离性的发现使得对克尔时空短程线的完整解析研究成为可能:

1. B. Carter, *Phys. Rev.*, 174, 1559-71 (1968).

另见:

2. B. Carter, *Commun. Math. Phys*, 10, 280–310 (1968).

§60. 在讲述此课题时颠倒了历史顺序, 改为从沃尔克和彭罗斯发现的 (任何 D 型时空都允许的) 零短程线运动的积分开始:

3. M. Walker and R. Penrose, *Commun. Math. Phys.*, 18, 265–74 (1970).

沃尔克和彭罗斯还导出了对克尔时空特别情形的类时短程线运动的积分 (与卡特的等价).

正文中的处理与沃尔克和彭罗斯采用的不同, 避开了旋量形式体系. 这样会更直接, 或许更 "通俗"; 而又有着这样的优势, 即能用自旋系数来给出 D 型时空允许对类时短程线运动的卡特型积分的简单的必要和充分条件.

定理 1 的证明是与山托珀罗斯合作完成的.

看来与定理 3 中所建立的相等价的条件是包含在 Hauser 和 Malhiot 的下列论文中 (尽管作者未能阐明自己的标记法):

4. I. Hauser and R. J. Malhiot, *J. Math. Phys.*, 16, 150–2 (1975).

5. ——, ibid, 1625–9 (1975).

6. ——, ibid, 17, 1306–12 (1976).

§61. 克尔黑洞赤道面上的短程线已在文献中被广泛讨论. 对文献的完整开列见:

7. N. A. Sharp, *General Relativity and Gravitation*, 10, 659–70, (1979).

作者关于此课题的撰写还参考了下列文献:

8. F. de Felice, *Il Nuovo Cim.*, 57 B, 351–88 (1968).

9. J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, 178, 347–69 (1972).

10. ——, ibid, 161, 103–9 (1970).

[380] 11. ——, in *Black Holes*, 241–89, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.

处理克尔时空短程线的通常程序是从一般运动方程 (如在§62 (a) 中导出的) 出发, 然后将它们恰当地具体化到赤道面上的轨道. 对赤道面上短程线的讲述当然并不需要一般运动方程: 它们能如正文中那样从头处理.

本节和以下各节中短程线的绘图是由 Garret Toomey 先生制作的, 作者再次向他致谢.

§62. 清晰的讲述见:

12. C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. W. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1970.

13. J. Stewart and M. Walker, *Springer Tracts in Modern Physics*, 69, 69–115 (1973).

§63 和 §64. 在关于克尔时空短程线的许多文献中, 作者认为下列几篇是最有用的:

14. J. M. Bardeen in *Black Holes*, 215–39, edited by C. DeWitt and B. S. DeWitt, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1973.

15. F. de Felice and M. Calvani, *Il Nuovo Cim.*, 10 B, 447–58 (1972).

16. M. Calvani and F. de Felice, *General Relativity and Gravitation*, 9, 889–902 (1978).

另见:

17. R. H. Boyer and R. W. Lindquist, *J. Math. Phys.*, 8, 265–81 (1967).

18. D. C. Wilkins, *Phys. Rev.* D, 5, 814–22 (1972).

19. C. T. Cunningham and J. M. Bardeen, *Astrophys. J.*, 183, 237–64, (1973).

20. ——,ibid., 202, 788-802 (1975).

21. ——, ibid., 208, 534–49 (1976).

沃尔克和彭罗斯的复杂积分对跟踪沿零短程线的偏振方向变化问题的首次应用归功于 Stark 和 Connors:

22. P. A. Connors and R. F. Stark, *Nature*, 269, 128–9 (1977).

另见:

23. R. F. Stark and P. A. Connors, *Nature*, 266, 429–30 (1977).

24. P. A. Connors, T. Piran, and R. F. Stark, *Astrophys. J.*, 235, 224–44 (1980).

§63 (*e*) 中的处理是文献 22 中速写式描述的放大.

§65. 提取克尔黑洞转动能量的物理过程的存在实际上是由下文首先证明:

25. R. Penrose and R. M. Floyd, *Nature Phys. Sci.*, 229, 177–9 (1971).

该文也讲到了 "面积定理", 尽管是尝试性的.

关于彭罗斯所构思的过程的更详细考虑见:

26. D. Christodoulou, 'Investigations in gravitational collapse and the physics of black holes', Ph. D. dissertation, Princeton University, Princeton, N. J., 1971; also, *Phys. Rev. Lett.*, 25, 1596–7 (1970).

27. —— and R. Ruffini, *Phys. Rev.* D, 4, 3552–5 (1971).

"不可约质量" 的概念是在文献 26 中引入的.

彭罗斯过程可提取能量的限制是由巴丁、珀勒斯、楚科尔斯基在文献 9 中和瓦尔德在下列文献中导出的:

28. R. M. Wald, *Astrophys. J.*, 191, 231–3 (1974).

29. ——, *Ann. Phys.*, 82, 548–56 (1974).

另见:

30. T. Piran and J. Shaham, *Phys. Rev.* D, 16, 1615–35 (1977). [381]

§66. 有 $a^2 > M^2$ 的克尔时空短程线和这种时空中违反因果律的可能性已由德菲里切及其合作者最为持续不断地考虑:

31. F. de Felice, *Astron. Astrophys.*, 34, 15–19 (1974).

32. ——, ibid., 45, 65–8 (1975).

33. ——, M. Calvani, and L. Nobili, *Il Nuovo Cim.*, 26 B, 1–15 (1975).

34. M. Calvani, F. de Felice, B. Muchotrzeb, and F. Salmistraro, *General Relativity and Gravitation*, 9, 155–63 (1977).

35. F. de Felice, *Nature*, 273, 429–31 (1978).

36. —— and M. Calvani, *General Relativity and Gravitation*, 10, 335–43 (1979).

正文中已试图归纳这些文献的主要结果.

第八章

克尔几何中的电磁波

[382]

67. 引言

如已讲述的对史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的研究那样, 关于时空的认识由分析其对外部扰动的反应方式而加深和丰富. 由于外部扰动一般能被表示为不同种类的入射波, 所以对它们的研究基本上就简化为黑洞时空中不同种类波的传播, 特别是这些波如何被散射和吸收. 这样表述的问题固然有其物理基础, 但对问题的解答却揭示了人们未曾预料的时空本身的解析丰富性. 在克尔时空的情形, 这种丰富性几乎从一开始就很显然.

由于克尔黑洞的时空是定常态和轴对称的, 自然会预期可以将一般的扰动表示为不同频率$(\sigma^+)^*$[①]和在 φ 上不同周期 $(2m\pi, m = 0, 1, 2, \cdots)$ 的波的叠合. 换句话说, 预期可将扰动解析为有着时间和 $\varphi-$ 依赖的不同模式的叠合,

$$\mathrm{e}^{i(\sigma^+ t + m\varphi)}, \tag{1}$$

其中 m 是整数, 为正、负、或零. 但未曾预期的是, 这些波 (有着上述的 t-和 φ-依赖性) 的振幅对其余两个变量 r 和 θ 的依赖性也同样能被分离. 楚科尔斯基于 1971 年证明, 如果无质量粒子, 即光子、引力子和二分量中微子的方程写为有着第 6 章 §56 所选基矢的纽曼 – 彭罗斯形式, 则这种进一步的分离事实上能够实现; 而且数学物理基础方程的这种未期可分离性原来还是后面大门的 “开门诀”.

本章将由麦克斯韦方程和电磁波的传播来开始对克尔黑洞扰动的研究. 理论足够简单, 因而能给出完整和自容的描述, 而且还能为对其它场的研究提供原型.

---

① 在本章和后面各章将用 σ^+ (代替常用的 σ) 来表示频率, 以与自旋系数 σ 相区分.

68. 定义和引理 [383]

与 §67 描述的对扰动问题的表示一致, 也与对关于史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的同一问题的处理一致, 将假定扰动能被解析为有着方程 (1) 所指明的 t-和 φ-依赖的模式. 在所有描述扰动的量中, 共同因子 (1) 将被略去; 而表示这些量的记号将是它们的振幅.

第 6 章方程 (170) — (173) 所给的基矢 $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}})$, 当作为正切矢量运用于有着方程 (1) 所指明的 t-和 φ-依赖的函数时, 成为导数算符

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{l} = D = \mathscr{D}_0, \quad \boldsymbol{n} = \Delta = -\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathscr{D}_0^\dagger \\ \boldsymbol{m} = \delta = \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\mathscr{L}_0^\dagger, \quad \text{和 } \overline{\boldsymbol{m}} = \delta^* = \frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\mathscr{L}_0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{D}_n = \partial_r + \frac{\mathrm{i}K}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \quad \mathscr{D}_n^\dagger = \partial_r - \frac{\mathrm{i}K}{\Delta} + 2n\frac{r-M}{\Delta}, \\ \mathscr{L}_n = \partial_\theta + Q + n\cot\theta, \quad \mathscr{L}_n^\dagger = \partial_\theta - Q + n\cot\theta, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

和

$$K = (r^2 + a^2)\sigma^+ + am, \quad Q = a\sigma^+\sin\theta + m\mathrm{cosec}\theta, \tag{4}$$

$$\overline{\rho} = r + \mathrm{i}a\cos\theta, \quad \overline{\rho}^* = r - \mathrm{i}a\cos\theta, \quad \rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta. \tag{5}$$

注意, $\mathscr{D}_n$ 和 $\mathscr{D}_n^\dagger$ 是纯径向算符, 而 $\mathscr{L}_n$ 和 $\mathscr{L}_n^\dagger$ 是纯角向算符. 也清楚, 当作用于 "背景" 量 (独立于 t 和 φ) 时, 算符 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{L}$ 分别简化为 ∂_r 和 ∂_θ.

已定义的导数算符满足在本章和下面各章的后继分析里有机会经常使用的许多基本等式. 因此, 将它们作为系列引理收集在这里 (见第 4 章方程 (227) — (229)).

引理 1

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_n(\theta) = -\mathscr{L}_n^\dagger(\pi - \theta), \quad \mathscr{D}_n^\dagger = (\mathscr{D}_n)^*, \\ (\sin\theta)\mathscr{L}_{n+1} = \mathscr{L}_n\sin\theta, \quad (\sin\theta)\mathscr{L}_{n+1}^\dagger = \mathscr{L}_n^\dagger\sin\theta, \\ \Delta\mathscr{D}_{n+1} = \mathscr{D}_n\Delta, \quad \Delta\mathscr{D}_{n+1}^\dagger = \mathscr{D}_n^\dagger\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

引理 2 [384]

$$\left(\mathscr{D} + \frac{m}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L} + \frac{\mathrm{i}ma\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) = \left(\mathscr{L} + \frac{\mathrm{i}ma\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D} + \frac{m}{\overline{\rho}^*}\right), \tag{7}$$

其中 $\mathscr{D}$ 可以是任何 $\mathscr{D}_n$ 或 $\mathscr{D}_n^\dagger$, $\mathscr{L}$ 可以是任何 $\mathscr{L}_n$ 或 $\mathscr{L}_n^\dagger$, 而 m 是常数 (一般是正的或负的整数).

引理 3

$$\mathscr{L}_{n+1}\mathscr{L}_{n+2}\cdots\mathscr{L}_{n+m}(f\cos\theta)=(\cos\theta)\mathscr{L}_{n+1}\cdots\mathscr{L}_{n+m}f \\ -(m\sin\theta)\mathscr{L}_{n+2}\cdots\mathscr{L}_{n+m}f, \tag{8}$$

其中 f 是 θ 的任何平滑函数, 而 $\mathscr{L}_n$ 可被代之以 $\mathscr{L}_n^\dagger$.

引理 4 如果 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 在区间 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 内的任意两个平滑函数, 则

$$\int_0^\pi g(\mathscr{L}_n f)\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\int_0^\pi f(\mathscr{L}^\dagger_{-n+1}g)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{9}$$

最后, 注意两个在许多简化过程中起着关键作用的基本等式:

$$Q_{,\theta}+Q\cot\theta=2a\sigma^+\cos\theta \quad 和 \quad K-aQ\sin\theta=\rho^2\sigma^+. \tag{10}$$

69. 麦克斯韦方程: 简化和可分离性

适合于克尔几何的麦克斯韦方程, 能由在第 1 章方程 (330) — (333) 中插入第 6 章方程 (175) 所列的自旋系数和方程 (2) 定义的方向导数而得到. 它们是

$$\begin{gathered}\frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_1-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_0=+\left(\mathscr{D}_0+\frac{2}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_1,\\ \frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_0+\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_1=+\left(\mathscr{D}_0+\frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_2,\\ \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_1^\dagger+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_2=-\frac{\Delta}{2\rho^2}\left(\mathscr{D}_0^\dagger+\frac{2}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_1,\\ \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_0^\dagger+\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_1=-\frac{\Delta}{2\rho^2}\left(\mathscr{D}_1^\dagger-\frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\phi_0.\end{gathered} \tag{11}$$

这些方程在用下列变量写出时成为更简单和更对称的形式,

$$\Phi_0=\phi_0,\quad \Phi_1=\phi_1\overline{\rho}^*\sqrt{2},\quad 和\quad \Phi_2=2\phi_2(\overline{\rho}^*)^2. \tag{12}$$

[385] 即有

$$\left(\mathscr{L}_1 - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 = \left(\mathscr{D}_0 + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1, \tag{13}$$

$$\left(\mathscr{L}_0 + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = \left(\mathscr{D}_0 - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_2, \tag{14}$$

$$\left(\mathscr{L}_1^\dagger - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_2 = -\Delta\left(\mathscr{D}_0^\dagger + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1, \tag{15}$$

$$\left(\mathscr{L}_0^\dagger + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = -\Delta\left(\mathscr{D}_1^\dagger - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0. \tag{16}$$

(*a*) **对 Φ_0 和 Φ_2 的方程的简化和可分离性**

很明显, 算符 $(\mathscr{D}_0 + 1/\overline{\rho}^*)$ 和 $(\mathscr{L}_0^\dagger + \mathrm{i}a\sin\theta/\overline{\rho}^*)$ 的可交换性 (由 §68 的引理 2) 能用来从方程 (13) 和 (16) 中消去 Φ_1, 并得到对 Φ_0 的解耦方程, 即有

$$\left[\left(\mathscr{L}_0^\dagger + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_1 - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathscr{D}_1 + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_1^\dagger - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\right]\Phi_0 = 0. \tag{17}$$

类似地, 算符 $(\mathscr{L}_0 + \mathrm{i}a\sin\theta/\overline{\rho}^*)$ 和 $\Delta(\mathscr{D}_0^\dagger + 1/\overline{\rho}^*)$ 的可交换性能用来从方程 (14) 和 (15) 中消去 Φ_1, 并得到对 Φ_2 的解耦方程, 即有

$$\left[\left(\mathscr{L}_0 + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_1^\dagger - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathscr{D}_0^\dagger + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_0 - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\right]\Phi_2 = 0. \tag{18}$$

方程 (17) 能借助于下列容易验证的等式,

$$\left.\begin{aligned}\Delta\left(\mathscr{D}_1 + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_1^\dagger - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right) &= \Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger - \frac{2\mathrm{i}K}{\overline{\rho}^*},\\ \left(\mathscr{L}_0^\dagger + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_1 - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) &= \mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 + \frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}Q;\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

和进一步的关系,

$$K - aQ\sin\theta = \rho^2\sigma^+, \tag{20}$$

而简化, 于是得到

$$[\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger + \mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 - 2\mathrm{i}\sigma^+(r + \mathrm{i}a\cos\theta)]\Phi_0 = 0. \tag{21}$$

方程 (18) 的类似简化给出 [386]

$$[\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0 + \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger + 2\mathrm{i}\sigma^+(r + \mathrm{i}a\cos\theta)]\Phi_2 = 0. \tag{22}$$

方程 (21) 和 (22) 显然是可分离的. 由代换

$$\Phi_0 = R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \quad \text{和} \quad \Phi_2 = R_{-1}(r)S_{-1}(\theta), \tag{23}$$

其中 $R_{\pm1}(r)$ 和 $S_{\pm1}(\theta)$ 分别只是 r 和 θ 的函数, 方程 (21) 和 (22) 分离而给出两对方程,

$$(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger - 2\mathrm{i}\sigma^+ r)R_{+1} = \lambda R_{+1}, \tag{24}$$

$$(\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 + 2a\sigma^+\cos\theta)S_{+1} = -\lambda S_{+1}; \tag{25}$$

和

$$(\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0 + 2\mathrm{i}\sigma^+ r)R_{-1} = \lambda R_{-1}, \tag{26}$$

$$(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger - 2a\sigma^+\cos\theta)S_{-1} = -\lambda S_{-1}, \tag{27}$$

其中 λ 是分离常数. (用 λ 代替常用的 λ 以与自旋系数 λ 相区分.)

注意, 并没有区分得自方程 (21) 和 (22) 的分离常数. 理由与前面对第 4 章方程 (248) 和 (250) 已解释的一样.

与 (24) — (27) 式等价的方程由楚科尔斯基首先导出, 故被称为楚科尔斯基方程.

还可注意, 方程 (26) 与重写为形式

$$(\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0^\dagger - 2\mathrm{i}\sigma^+ r)\Delta R_{+1} = \lambda\Delta R_{+1} \tag{28}$$

的方程 (24) 比较表明, R_{-1} 和 ΔR_{+1} 满足复数共轭方程; 而 $S_{+1}(\theta)$ 和 $S_{-1}(\theta)$ 满足一对方程, 其中一个方程能由将 θ 换成 $\pi-\theta$ 而从另一个得到.

70. 楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式

方程 (13) — (16) 解耦以给出对 Φ_0 和 Φ_2 的独立、可分离方程对, 只是部分地解决问题: 因为, 除了 Φ_1 的解有待找到外, Φ_0 和 Φ_2 解的相对归一化也持而未决. 后面这个问题在一定意义上更为基本: 任何线性扰动问题的解必须是除了一个比例常数外确定的. 对现在的情形, 确定性要求 Φ_2 (例如) 的解不能有任何模糊性, 甚至是比例常数的范围也如此, 如果 Φ_0 解的振幅已被给定的话, 并且反之亦然. 由方程 (23) 表示的 Φ_0 和 $\Phi_2, S_{+1}(\theta)$ 和 $S_{-1}(\theta)$ 的解能由要求它们二者都归一化而不带模糊性:

[387]

$$\int_0^\pi S_{+1}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi S_{-1}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta = 1. \tag{29}$$

但这将留下径向函数 R_{+1} 和 R_{-1} 的相对归一化未解决.

如将看到的, 麦克斯韦方程解的完成要求对方程 (24) — (28) 的仔细检查, 和同一组方程所包含的解 R_{+1} 与 R_{-1} 之间、解 S_{+1} 与 S_{-1} 之间的关系. 由斯

塔罗宾斯基和楚科尔斯基所做的此种检查导致了一些成为整个理论基础的很重要的等式. 这里对这些等式予以介绍 (尽管不是以它们最初被得出时的形式).

定理 1 $\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}$是 ΔR_{+1} 的常数倍数
和 $\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta R_{+1}$ 是 R_{-1} 的常数倍数.

证明 将算符 $\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0$ 作用于 R_{-1} 满足的方程 (26), 可相继得出

$$\begin{aligned}
\lambda\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} &= \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0R_{-1}) + 2\mathrm{i}\sigma^+\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(rR_{-1})\\
&= \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_0 - 2\mathrm{i}K)\mathscr{D}_0R_{-1} + 2\mathrm{i}\sigma^+r\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} + 4\mathrm{i}\sigma^+\mathscr{D}_0R_{-1}\\
&= \mathscr{D}_0\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} - 2\mathrm{i}\mathscr{D}_0(K\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} + 2r\sigma^+\mathscr{D}_0R_{-1})\\
&\quad +2\mathrm{i}\sigma^+r\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} + 4\mathrm{i}\sigma^+\mathscr{D}_0R_{-1}\\
&= \mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_1^\dagger + 2\mathrm{i}K)\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} - 2\mathrm{i}\mathscr{D}_0(K\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}) - 2\mathrm{i}\sigma^+r\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}\\
&= (\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger - 2\mathrm{i}\sigma r)\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}. \qquad (30)
\end{aligned}$$

所以, $\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}$ 和 R_{+1} 满足同一个方程, 而定理的第一部分得证. 同时, 上述演绎的结果相当于确立了下列等式的正确性,

$$\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0 + 2\mathrm{i}\sigma r) = (\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger - 2\mathrm{i}\sigma r)\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0. \qquad (31)$$

此等式的复数共轭, 即

$$\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger(\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0^\dagger - 2\mathrm{i}\sigma r) = (\Delta\mathscr{D}_1^\dagger\mathscr{D}_1 + 2\mathrm{i}\sigma r)\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger, \qquad (32)$$

确立了定理的第二部分.

推论 通过对函数 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 相对归一化的适当选择, 可安排

$$\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} = \mathscr{C}\Delta R_{+1} \qquad (33)$$

和 [388]

$$\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta R_{+1} = \mathscr{C}^*R_{-1}, \qquad (34)$$

其中 $\mathscr{C}$ 是常数 (可为复数①).

由于 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 满足复数共轭方程, 故很清楚地能安排如所要求的相对归一化.

定理 2 如果函数 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 的相对归一化是如此安排, 以致方程 (33) 和 (34) 成立, 则 $\mathscr{C}$ 的模的平方由下式给出,

$$|\mathscr{C}|^2 = \lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2} \quad \text{其中} \quad \alpha^2 = a^2 + (am/\sigma^+). \qquad (35)$$

① §71 将显示, 事实上 $\mathscr{C}$ 是实常数.

证明 将算符 $\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger$ 作用于方程 (33), 得

$$\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}=\mathscr{C}\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta R_{+1}, \tag{36}$$

或, 由方程 (34),

$$\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1}=|\mathscr{C}|^2R_{-1}. \tag{37}$$

因此有等式

$$\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\equiv|\mathscr{C}|^2 \quad \mod \quad \Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0+2\mathrm{i}\sigma^+r-\lambda=0; \tag{38}$$

而所述 $|\mathscr{C}|^2$ 的值必定由对此等式的直接计算得出. 看方程 (38) 的左边, 有

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0&=\Delta\mathscr{D}_0^\dagger(\mathscr{D}_0\Delta\mathscr{D}_0^\dagger+4\mathrm{i}r\sigma^+)\mathscr{D}_0\\&=\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0)+4\mathrm{i}r\sigma^+\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0+4\mathrm{i}\sigma^+\Delta\mathscr{D}_0\\&\equiv\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0(\lambda-2\mathrm{i}\sigma^+r)+4\mathrm{i}r\sigma^+\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0+4\mathrm{i}\sigma^+\Delta\mathscr{D}_0.\end{aligned} \tag{39}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0r&=\Delta\mathscr{D}_0^\dagger(r\mathscr{D}_0+1)=r\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0+\Delta\mathscr{D}_0+\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\\&=r\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0+2\Delta\mathscr{D}_0-2\mathrm{i}K.\end{aligned} \tag{40}$$

用最后这个关系, 可将结果 (39) 进一步简化为

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0&\equiv(\lambda+2\mathrm{i}r\sigma^+)\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0-4\sigma^+K\\&=(\lambda+2\mathrm{i}r\sigma^+)(\lambda-2\mathrm{i}r\sigma^+)-4\sigma^+[(r^2+a^2)\sigma^++am]\\&=\lambda^2-4a^2\sigma^{+2}-4a\sigma^+m=|\mathscr{C}|^2;\end{aligned} \tag{41}$$

所要求的等式成立.

[389] **定理 3** $\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1}$ 是 S_{-1} 的常数倍数和 $\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1}$ 是 S_{+1} 的常数倍数.

证明 将算符 $\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1$ 作用于 S_{+1} 所满足的方程 (25), 得

$$\begin{aligned}-\lambda\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1}&=\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1(\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1+2a\sigma^+\cos\theta)S_{+1}\\&=\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1S_{+1}+2a\sigma^+(\cos\theta)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1}\\&\quad-4a\sigma^+(\sin\theta)\mathscr{L}_1S_{+1};\end{aligned} \tag{42}$$

而由相继演绎, 得

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 &= \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1(\mathscr{L}_0 - 2Q)\mathscr{L}_1 \\
&= \mathscr{L}_0(\mathscr{L}_1^\dagger + 2Q)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 - 2\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1Q\mathscr{L}_1 \\
&= \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 + 2\mathscr{L}_0(Q\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1) - 2\mathscr{L}_0(\mathscr{L}_0Q + Q\cot\theta)\mathscr{L}_1 \\
&= \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 + 2\mathscr{L}_0(Q\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1) - 2\mathscr{L}_0(a\sigma^+\cos\theta + m\cot\theta\mathrm{cosec}\theta)\mathscr{L}_1 \\
&\quad -2\mathscr{L}_0[Q\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 + (a\sigma^+\cos\theta - m\cot\theta\mathrm{cosec}\theta)\mathscr{L}_1] \\
&= \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 - 4a\sigma^+\mathscr{L}_0(\cos\theta)\mathscr{L}_1 \\
&= \mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 - 4a\sigma^+(\cos\theta)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 + 4a\sigma^+(\sin\theta)\mathscr{L}_1. \qquad (43)
\end{aligned}$$

将 (42) 和 (43) 的演绎结果结合, 得

$$(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger - 2a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1} = -\lambda\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1}. \qquad (44)$$

所以, $\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1}$ 和 S_{-1} 满足同一个方程 (27), 而定理的第一部分得证. 同时, 上述演绎的结果相当于确立了下列等式的正确性,

$$\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1(\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 + 2a\sigma^+\cos\theta) = (\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger - 2a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1. \qquad (45)$$

这个关系的伴随 (由用 $\pi-\theta$ 取代 θ 得到), 即

$$\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1^\dagger - 2a\sigma^+\cos\theta) = (\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1 + 2a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger \qquad (46)$$

确立了定理的第二部分.

定理 3 很清楚地等价于确立了下列形式关系的存在,

$$\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1} = D_1S_{-1} \quad 和 \quad \mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1} = D_2S_{+1}, \qquad (47)$$

其中 D_1 和 D_2 是两个实常数.

定理 4 如果 $S_{+1}(\theta)$ 和 $S_{-1}(\theta)$ 两者都归一化, 则在关系式 (47) 中 $D_1 = D_2$, 即有

$$\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1} = DS_{-1} \quad 和 \quad \mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1} = DS_{+1}. \qquad (48)$$

证明 证明来自引理 4 对归一化积分 (29) 的两次相继运用, 即 [390]

$$\begin{aligned}
D_1^2 &= D_1^2\int_0^\pi S_{-1}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1})(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1})\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^\pi(\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1})S_{+1}\sin\theta\mathrm{d}\theta. \qquad (49)
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1^\dagger \mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1 S_{+1} = D_1 \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1^\dagger S_{-1} = D_1 D_2 S_{+1}; \tag{50}$$

而方程 (49) 给出

$$D_1^2 = D_1 D_2 \int_0^\pi S_{+1}^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = D_1 D_2, \tag{51}$$

因为 S_{+1} 也已被假定归一化. D_1 和 D_2 的相等由最后这个关系得出.

定理 5 定理 4 的常数 D 有值

$$D^2 = \lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2} = |\mathscr{C}|^2. \tag{52}$$

证明 由方程 (50) 和 D_1 与 D_2 的相等 $(= D)$ 很清楚, 所需要的是由直接计算来确认

$$\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1^\dagger \mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1 = \lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2} \mod \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 + 2a\sigma^+ \cos\theta + \lambda = 0. \tag{53}$$

首先看到

$$\mathscr{L}_1^\dagger \mathscr{L}_0 = (\mathscr{L}_1 - 2Q)(\mathscr{L}_0^\dagger + 2Q) = \mathscr{L}_1 \mathscr{L}_0^\dagger + 4a\sigma^+ \cos\theta; \tag{54}$$

因而还有

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1^\dagger \mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1 &= \mathscr{L}_0^\dagger (\mathscr{L}_1 \mathscr{L}_0^\dagger + 4a\sigma^+ \cos\theta)\mathscr{L}_1 \\ &\equiv \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 (-\lambda - 2a\sigma^+ \cos\theta) + 4a\sigma^+ (\cos\theta)\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 \\ &\quad -4a\sigma^+ (\sin\theta)\mathscr{L}_1. \end{aligned} \tag{55}$$

另一方面, 由 §68 的引理 3,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 \cos\theta &= (\cos\theta)\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 - (\sin\theta)(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_1^\dagger) \\ &= (\cos\theta)\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 - 2(\sin\theta)\mathscr{L}_1 + 2Q\sin\theta. \end{aligned} \tag{56}$$

[391] 将演绎式 (55) 和 (56) 的结果结合, 得到想要的结果:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1^\dagger \mathscr{L}_0 \mathscr{L}_1 &= -(\lambda + 2a\sigma^+ \cos\theta)\mathscr{L}_0^\dagger \mathscr{L}_1 - 4a\sigma^+ Q\sin\theta \\ &\equiv (\lambda + 2a\sigma^+ \cos\theta)(\lambda - 2a\sigma^+ \cos\theta) - 4a\sigma^+ (a\sigma^+ \sin\theta + m\mathrm{cosec}\theta)\sin\theta \\ &= \lambda^2 - 4a^2\sigma^{+2} - 4a\sigma^+ m = \lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2} = D^2 = |\mathscr{C}|^2. \end{aligned} \tag{57}$$

将 $\mathscr{C}$ 和 D 称为斯塔罗宾斯基常数.

回到方程 (33) 和 (34), 当 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 的相对归一化是与这些方程一致时, 将它们标记为 P_{+1} 和 P_{-1}. 即写有

$$\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0P_{-1}=\mathscr{C}P_{+1}\quad\text{和}\quad\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1}=\mathscr{C}^*P_{-1}. \tag{58}$$

上面方程的第一个可被重写为

$$\begin{aligned}\mathscr{C}P_{+1}&=\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0P_{-1}=\Delta\left(\mathscr{D}_0^\dagger+\frac{2\mathrm{i}K}{\Delta}\right)\mathscr{D}_0P_{-1}\\&=\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0P_{-1}+2\mathrm{i}K\mathscr{D}_0P_{-1};\end{aligned} \tag{59}$$

或, 由 P_{-1} 所满足的方程,

$$\mathscr{C}P_{+1}=(\lambda-2\mathrm{i}\sigma^+r)P_{-1}+2\mathrm{i}K\mathscr{D}_0P_{-1}. \tag{60}$$

类似地, 由方程 (58) 的第二个得到

$$\mathscr{C}^*P_{-1}=(\lambda+2\mathrm{i}\sigma^+r)P_{+1}-2\mathrm{i}K\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1}. \tag{61}$$

方程 (60) 和 (61) 能用来以函数 P_{+1} 和 P_{-1} 自身表示它们的导数, 即

$$\frac{\mathrm{d}P_{+1}}{\mathrm{d}r}=+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}P_{+1}-\frac{\mathrm{i}}{2K}[(\lambda+2\mathrm{i}\sigma^+r)P_{+1}-\mathscr{C}^*P_{-1}] \tag{62}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}P_{-1}}{\mathrm{d}r}=-\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}P_{-1}+\frac{\mathrm{i}}{2K}[(\lambda-2\mathrm{i}\sigma^+r)P_{-1}-\mathscr{C}P_{+1}],$$

其中应注意, 虽然已知道 $\mathscr{C}$ 的绝对值, 却仍未能分别知道其实部和虚部. 这个信息缺失将在 §71 填补. [392]

以类似方式可由方程 (48) 得到, 当 S_{+1} 和 S_{-1} 两者都归一化时, 有

$$\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1}=-\frac{1}{2Q}[\lambda-2a\sigma^+\cos\theta)S_{-1}+DS_{+1}] \tag{63}$$

和

$$\mathscr{L}_1S_{+1}=+\frac{1}{2Q}[(\lambda+2a\sigma^+\cos\theta)S_{+1}+DS_{-1}].$$

这些方程很清楚地能用来以函数 S_{+1} 和 S_{-1} 自身表示它们的导数.

71. 解的完成

为完成麦克斯韦方程的解, 在分离 Φ_0 和 Φ_2 的变量之后, 还须决定它们的相对归一化. 如果选择径向函数 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 是 P_{+1} 和 P_{-1} (与方程 (58) 一致), 并设 S_{+1} 和 S_{-1} 已归一化 (与方程 (48) 一致), 则余下待确定的是, 例如, 若 $\Delta\Phi_0$ 是选为 $P_{+1}S_{+1}$ 时, 必须用以与 $\Phi_2 = P_{-1}\,S_{-1}$ 相乘的数字因子. 这个因子仅能由直接连接 Φ_0 和 Φ_2 的方程来确定. 这样一个方程可利用§68 的引理 2 从方程 (13) 和 (14) 消去 Φ_1 而得到. 也就是, 将算符 $(\mathscr{L}_0 + \mathrm{i}a\sin\theta/\overline{\rho}^*)$ 和 $(\mathscr{D}_0 + 1/\overline{\rho}^*)$ 分别作用于方程 (13) 和 (14) 并相加, 得

$$\left(\mathscr{L}_0 + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_1 - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 = \left(\mathscr{D}_0 + \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_0 - \frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_2. \tag{64}$$

简化之后成为

$$\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\Phi_0 = \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\Phi_2. \tag{65}$$

由方程 (23) 所给的 Φ_0 和 Φ_2 的解, 方程 (65) 要求

$$(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1S_{+1})/S_{-1} = (\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1})/\Delta R_{+1}. \tag{66}$$

现在若假定 S_{+1} 和 S_{-1} 两者已归一化, 则由方程 (48) 有

$$\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-1} = D\Delta R_{+1}. \tag{67}$$

最后这个方程与下列证认一致,

$$R_{-1} = P_{-1} \quad \text{和} \quad \Delta R_{+1} = P_{+1}, \tag{68}$$

若有

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}^* = D = (\lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2})^{1/2}. \tag{69}$$

由方程 (52), 这个条件要求 $\mathscr{C}$ 是实数, 且无需区分 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{C}^*$ (例如, 在方程 (60) — (62) 中).

对 ϕ_0 和 ϕ_2 的解现已成为确定的, 按照方程 (12) 和 (23) 可写出

$$\Delta\phi_0 = P_{+1}S_{+1} \quad \text{和} \quad \phi_2 = \frac{1}{2(\overline{\rho}^*)^2}P_{-1}S_{-1}. \tag{70}$$

于是, 关系式 (65) 不仅解决了 ϕ_0 和 ϕ_2 解的相对归一化, 而且没有任何模糊地确定了常数 $\mathscr{C}$.

(*a*) **对 ϕ_1 的解** [393]

现在通过确定余下的标量 Φ_1 来完成麦克斯韦方程的解.

首先定义函数

$$\left.\begin{aligned} g_{+1}(r) &= \frac{1}{\mathscr{C}}(r\mathscr{D}_0 P_{-1} - P_{-1}); g_{-1}(r) = \frac{1}{\mathscr{C}}(r\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1} - P_{+1}), \\ f_{+1}(\theta) &= \frac{1}{\mathscr{C}}[(\cos\theta)\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1} + (\sin\theta)S_{-1}], \\ f_{-1}(\theta) &= \frac{1}{\mathscr{C}}[(\cos\theta)\mathscr{L}_1 S_{+1} + (\sin\theta)S_{+1}]. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

借助于楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式能直接验证, 函数 $g_\pm(r)$ 和 $f_\pm(\theta)$ 满足微分方程

$$\Delta\mathscr{D}_0 g_{+1} = rP_{+1}; \quad \Delta\mathscr{D}_0^\dagger g_{-1} = rP_{-1}, \tag{72}$$

和

$$\mathscr{L}_0^\dagger f_{+1} = S_{+1}\cos\theta; \quad \mathscr{L}_0 f_{-1} = S_{-1}\cos\theta.$$

现将方程 (13) 写为

$$\Delta\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\Phi_1) = (\overline{\rho}^*\mathscr{L}_1 - \mathrm{i}a\sin\theta)\Delta\Phi_0, \tag{73}$$

并将 $\Delta\Phi_0$ 代换为它的解 $P_{+1}S_{+1}$, 可利用方程 (71) 和§70 中建立的等式将方程 (73) 依次写为以下形式,

$$\begin{aligned} \Delta\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\Phi_1) &= (rP_{+1})\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}aP_{+1}[(\cos\theta)\mathscr{L}_1 S_{+1} + (\sin\theta)S_{+1}] \\ &= (\Delta\mathscr{D}_0 g_{+1})\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}a\mathscr{C}P_{+1}f_{-1} \\ &= (\Delta\mathscr{D}_0 g_{+1})\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}a(\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 P_{-1})f_{-1}. \end{aligned} \tag{74}$$

于是得到关系

$$\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\Phi_1) = \mathscr{D}_0(g_{+1}\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}af_{-1}\mathscr{D}_0 P_{-1}). \tag{75}$$

以类似方式, 由方程 (14) 可得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_0(\overline{\rho}^*\Phi_1) &= [(r - \mathrm{i}a\cos\theta)\mathscr{D}_0 - 1]P_{-1}S_{-1} \\ &= (r\mathscr{D}_0 P_{-1} - P_{-1})S_{-1} - \mathrm{i}a(\mathscr{D}_0 P_{-1})(\cos\theta)S_{-1} \\ &= g_{+1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}a(\mathscr{D}_0 P_{-1})\mathscr{L}_0 f_{-1}; \end{aligned} \tag{76}$$

或等价地,

$$\mathscr{L}_0(\overline{\rho}^*\Phi_1) = \mathscr{L}_0(g_{+1}\mathscr{L}_1 S_{+1} - \mathrm{i}af_{-1}\mathscr{D}_0 P_{-1}). \tag{77}$$

[394] 由对方程 (75) 和 (77) 的比较可得结论, 所需对 Φ_1 的解是

$$\overline{\rho}^*\Phi_1 = g_{+1}(r)\mathscr{L}_1 S_{+1}(\theta) - \mathrm{i}af_{-1}(\theta)\mathscr{D}_0 P_{-1}(r). \tag{78}$$①

以类似方式处理方程 (15) 和 (16), 可得对 Φ_1 的解有下列替代形式:

$$-\overline{\rho}^*\Phi_1 = g_{-1}(r)\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1}(\theta) - \mathrm{i}af_{+1}(\theta)\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1}(r). \tag{79}$$

解 (78) 和 (79) 的比较可导致有趣的等式

$$g_{+1}\mathscr{L}_1 S_{+1} + g_{-1}\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1} = \mathrm{i}a(f_{-1}\mathscr{D}_0 P_{-1} + f_{+1}\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1}). \tag{80}$$

且推迟对这个等式的验证, 可看到, 结合方程 (78) 和 (79), 能将 ϕ_1 的解写为更对称的形式

$$\begin{aligned}\phi_1 = \frac{\Phi_1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4(\overline{\rho}^*)^2}[&(g_{+1}\mathscr{L}_1 S_{+1} - g_{-1}\mathscr{L}_1^\dagger S_{-1}) \\ &-\mathrm{i}a(f_{-1}\mathscr{D}_0 P_{-1} - f_{+1}\mathscr{D}_0^\dagger P_{+1})].\end{aligned} \tag{81}$$

(*b*) 等式 (80) 的验证

利用方程 (60)、(61) 和 (63), 可将对 $g_{\pm1}(r)$ 和 $f_{\pm1}(\theta)$ 的表示重写为函数 $P_{\pm1}(r)$ 和 $S_{\pm}(\theta)$ 的线性组合, 即有

$$\left.\begin{aligned} g_{+1} &= \frac{1}{2\mathscr{C}K}[(\mathrm{i}r\lambda - 2\alpha^2\sigma^+)P_{-1} - \mathrm{i}r\mathscr{C}P_{+1}], \\ g_{-1} &= \frac{1}{2\mathscr{C}K}[-(\mathrm{i}r\lambda + 2\alpha^2\sigma^+)P_{+1} + \mathrm{i}r\mathscr{C}P_{-1}], \\ f_{+1} &= \frac{1}{2\mathscr{C}Q}[(-\lambda\cos\theta + 2\alpha^2\sigma^+/a)S_{-1} - \mathscr{C}S_{+1}\cos\theta], \\ f_{-1} &= \frac{1}{2\mathscr{C}Q}[(+\lambda\cos\theta + 2\alpha^2\sigma^+/a)S_{+1} + \mathscr{C}S_{-1}\cos\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

有了这些表示式, 等式 (80) 容易得以验证.

---

① 严格地讲, 应该对特定解 (78) 加上对应齐次方程 $\mathscr{D}_0(P) = \mathscr{L}_0(P) = 0$ 的解 P (比如说). 但是 P 的解, 即

$$P = \text{constant}\exp[-\mathrm{i}\sigma^+(r_* + \mathrm{i}a\cos\theta)]\cdot\cot^m(\theta/2),$$

其中 r_* 由下列方程定义 (见后面方程 (100)),

$$\mathrm{d}r_* = (r^2+\alpha^2)\mathrm{d}r/\Delta \quad (\alpha^2 = a^2 + am/\sigma^+),$$

在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/2$ 是奇异的; 所以这里没有将它包含进 $\overline{\rho}^*\Phi_1$ 的解中.

(*c*) **对矢量势的解** [395]

现在来说明, 对矢量势 $\boldsymbol{A}$ 解的明晰形式如何能由已有的对麦克斯韦标量 ϕ_0、ϕ_1 和 ϕ_2 的解得出.

由表示式

$$F_{ij} = \partial_j A_i - \partial_i A_j \tag{83}$$

出发, 并用 $\boldsymbol{A}$ 来表示 ϕ_0 和 ϕ_2, 即有

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{ij} l^i m^j = l^i m^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) \\ &= l^i \delta A_i - m^j D A_j = \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} l^i \mathscr{L}_0^\dagger A_i - m^j \mathscr{D}_0 A_j \\ &= \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} \mathscr{L}_0^\dagger \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta} A_t + A_r + \frac{a}{\Delta} A_\varphi \right) \\ &\quad - \frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} \mathscr{D}_0 (\mathrm{i}a A_t \sin\theta + A_\theta + \mathrm{i} A_\varphi \mathrm{cosec}\theta),\end{aligned} \tag{84}$$

和

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \overline{m}^i n^j (\partial_j A_i - \partial_i A_j) = \overline{m}^i \Delta A_i - n^j \delta^* A_j \\ &= -\frac{\overline{m}^i \Delta}{2\rho^2} \mathscr{D}_0^\dagger A_i - \frac{n^j}{\overline{\rho}^* \sqrt{2}} \mathscr{L}_0 A_j \\ &= -\frac{1}{\rho^2 \overline{\rho}^* 2\sqrt{2}} \{ \Delta \mathscr{D}_0^\dagger (-\mathrm{i}a A_t \sin\theta + A_\theta - \mathrm{i} A_\varphi \mathrm{cosec}\theta) \\ &\quad + \mathscr{L}_0 [-\Delta A_r + (r^2 + a^2) A_t + a A_\varphi] \}.\end{aligned} \tag{85}$$

现设

$$\left.\begin{aligned}\Delta F_{+1} &= (r^2 + a^2) A_t + \Delta A_r + a A_\varphi, \\ \Delta F_{-1} &= (r^2 + a^2) A_t - \Delta A_r + a A_\varphi, \\ G_{+1} &= \mathrm{i}a A_t \sin\theta + A_\theta + \mathrm{i} A_\varphi \mathrm{cosec}\theta, \\ G_{-1} &= -\mathrm{i}a A_t \sin\theta + A_\theta - \mathrm{i} A_\varphi \mathrm{cosec}\theta,\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

和

并利用方程 (70) 给的 ϕ_0 和 ϕ_2 的解以及定义 (71), 可将方程 (84) 和 (85) 重写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathscr{L}_0^\dagger \Delta F_{+1} - \Delta \mathscr{D}_0 G_{+1}) &= (r + \mathrm{i}a\cos\theta) P_{+1} S_{+1} \\ &= S_{+1} \Delta \mathscr{D}_0 g_{+1} + \mathrm{i}a P_{+1} \mathscr{L}_0^\dagger f_{+1},\end{aligned} \tag{87}$$

和 [396]

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta \mathscr{D}_0^\dagger G_{-1} + \mathscr{L}_0 \Delta F_{-1}) &= (r + \mathrm{i}a\cos\theta) P_{-1} S_{-1} \\ &= S_{-1} \Delta \mathscr{D}_0^\dagger g_{-1} + \mathrm{i}a P_{-1} \mathscr{L}_0 f_{-1}.\end{aligned} \tag{88}$$

这些方程容易对 $F_{\pm1}$ 和 $G_{\pm1}$ 求解, 可得

$$\left.\begin{aligned}\Delta F_{+1} &= (\mathrm{i}aP_{+1}f_{+1} + \Delta\mathscr{D}_0 H_{+1})\sqrt{2},\\ \Delta F_{-1} &= (-\mathrm{i}aP_{-1}f_{-1} - \Delta\mathscr{D}_0^{\dagger} H_{-1})\sqrt{2},\\ G_{+1} &= (-g_{+1}S_{+1} + \mathscr{L}_0^{\dagger} H_{+1})\sqrt{2},\\ G_{-1} &= (-g_{-1}S_{-1} + \mathscr{L}_0 H_{-1})\sqrt{2},\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

和

其中引进的 H_{+1} 和 H_{-1} 是任意函数, 但即将看到它们并不是相互独立的.

由上述对 $F_{\pm1}$ 和 $G_{\pm1}$ 的解, 可对方程 (86) 明晰地解出矢量势的分量, 即有

$$\begin{aligned}\Delta A_r &= \frac{1}{2}\Delta(F_{+1} - F_{-1})\\ &= \frac{\mathrm{i}a}{\sqrt{2}}(P_{+1}f_{+1} + P_{-1}f_{-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta\mathscr{D}_0 H_{+1} + \Delta\mathscr{D}_0^{\dagger} H_{-1}),\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}A_\theta &= \frac{1}{2}(G_{+1} + G_{-1})\\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(g_{+1}S_{+1} + g_{-1}S_{-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathscr{L}_0^{\dagger} H_{+1} + \mathscr{L}_0 H_{-1}),\end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 A_t &= \frac{1}{2}[\Delta(F_{+1} + F_{-1}) + \mathrm{i}a(G_{+1} - G_{-1})\sin\theta]\\ &= \frac{\mathrm{i}a}{\sqrt{2}}[(P_{+1}f_{+1} - P_{-1}f_{-1}) - (g_{+1}S_{+1} - g_{-1}S_{-1})\sin\theta]\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}[(\Delta\mathscr{D}_0 H_{+1} - \Delta\mathscr{D}_0^{\dagger} H_{-1}) + \mathrm{i}a(\mathscr{L}_0^{\dagger} H_{+1} - \mathscr{L}_0 H_{-1})\sin\theta],\end{aligned} \tag{92}$$

和

$$\begin{aligned}\rho^2 A_\varphi &= -\frac{1}{2}[a\Delta(F_{+1} + F_{-1})\sin^2\theta + \mathrm{i}(r^2 + a^2)(G_{+1} - G_{-1})\sin\theta]\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}[a^2(P_{+1}f_{+1} - P_{-1}f_{-1})\sin^2\theta\\ &\qquad -(r^2 + a^2)(g_{+1}S_{+1} - g_{-1}S_{-1})\sin\theta]\\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}[a(\Delta\mathscr{D}_0 H_{+1} - \Delta\mathscr{D}_0^{\dagger} H_{-1})\sin^2\theta\\ &\qquad +\mathrm{i}(r^2 + a^2)(\mathscr{L}_0^{\dagger} H_{+} - \mathscr{L}_0 H_{-1})\sin\theta].\end{aligned} \tag{93}$$

[397] 如已提到的, 对函数 H_{+1} 和 H_{-1} 的选择有一个限制: 这是来自由 $\boldsymbol{A}$ 对 ϕ_1 的计算并与已有的解 (81) 的比较. 由矢量势来计算 ϕ_1, 得

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}(l^i n^j + \overline{m}^i m^j)F_{ij} = \frac{1}{2}(l^i n^j + \overline{m}^i m^j)(\partial_j A_i - \partial_i A_j)\\ &= -\frac{\Delta}{2\rho^2} l^i \mathscr{D}_0^{\dagger} A_i - n^j \mathscr{D}_0 A_j + \frac{\overline{m}^i}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\mathscr{L}_0^{\dagger} A_i - \frac{m^j}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\mathscr{L}_0 A_j\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\rho^2}[\mathrm{i}KA_r - (r^2+a^2)A_{t,r} - aA_{\varphi,r} - QA_\theta$$
$$-\mathrm{i}(aA_{t,\theta}\sin^2\theta + A_{\varphi,\theta})\mathrm{cosec}\theta]. \tag{94}$$

将方程 (90) — (93) 的 $\boldsymbol{A}$ 的分量代入, 并将所得的表示与对 ϕ_1 的解 (81) 相等, 在经过相当可观的简化过程后, 得到的是

$$\mathscr{D}_0^\dagger\frac{\Delta\mathscr{D}_0 H_{+1}}{(\overline{\rho}^*)^2} + \mathscr{L}_1\frac{\mathscr{L}_0^\dagger H_{+1}}{(\overline{\rho}^*)^2} - \mathscr{D}_0\frac{\Delta\mathscr{D}_0^\dagger H_{-1}}{(\overline{\rho}^*)^2} - \mathscr{L}_1^\dagger\frac{\mathscr{L}_0 H_{-1}}{(\overline{\rho}^*)^2} = 0. \tag{95}$$

这个方程规定了在对矢量势的规范的选择中所具有的自由度. 它使人想起库仑规范.

72. 楚科尔斯基方程到标准形式的变换

代替方程 (26) 和 (28), 考虑更一般的方程

$$[\Delta\mathscr{D}_{1-|s|}\mathscr{D}_0^\dagger - 2(2|s|-1)\mathrm{i}\sigma^+ r]P_{+|s|} = \lambda P_{+|s|} \tag{96}$$

和

$$[\Delta\mathscr{D}_{1-|s|}^\dagger\mathscr{D}_0 + 2(2|s|-1)\mathrm{i}\sigma^+ r]P_{-|s|} = \lambda P_{-|s|}, \tag{97}$$①

这些方程适用于自旋为 $|s|$ 的无质量场. 对 $|s|=1$, 方程简化为适合于自旋为 1 的光子的方程 (26) 和 (28); 而在第 9 和 10 章将会看到, 对 $|s|=2$ 和 $|s|=1/2$, 它们分别是支配引力波和两分量中微子传播的方程.

由于 $P_{+|s|}$ 和 $P_{-|s|}$ 满足复数共轭方程, 所以仅考虑对 $P_{+|s|}$ 的方程已足够. 而且为方便, 可简单地写 s 来代替 $|s|$, 并理解为是正的, 允许值 2、1 和 1/2. 于是, 所考虑的方程就是

$$[\Delta\mathscr{D}_{1-s}\mathscr{D}_0^\dagger - 2(2s-1)\mathrm{i}\sigma^+ r]P_{+s} = \lambda P_{+s}. \tag{98}$$

此方程中 m 是通过算符 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}^\dagger$ 中的 [398]

$$K = (r^2+a^2)\sigma^+ + am \tag{99}$$

而明确出现. 现在来显示, 对 m 的明确相关如何能由适当的变量改变而消除.

首先, 代替 r 而引入下式定义的新独立变量 r_*,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} = \frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}, \tag{100}$$

① 虽然 $P_{+|s|}$ 和 $P_{-|s|}$ 一般支持 $\Delta^s R_{+s}$ 和 R_{-s}, 但这里并不假定这些函数已经以任何特别方式被相对归一化.

其中

$$\varpi^2 = r^2 + \alpha^2 \quad 和 \quad \alpha^2 = a^2 + (am/\sigma^+). \tag{101}$$

鉴于 α^2 可取负值 (当 m 为负和 $\sigma^+ \to 0$ 时), 来自方程 (100) 的 $r_*(r)$ 关系显然就能在一定条件下成为双值的. 必须在适当时候考虑, 这种可能性一旦出现, 将会是何情况; 而现在只考虑这个变量改变的正常结果.

独立变量改变为 r_* 所立即产生的一个结果是算符 $\mathscr{D}_0$ 和 $\mathscr{D}_0^\dagger$ 的简化:

$$\mathscr{D}_0 = \frac{\varpi^2}{\Delta}\Lambda_+ \quad 和 \quad \mathscr{D}_0^\dagger = \frac{\varpi^2}{\Delta}\Lambda_-, \tag{102}$$

其中, 与标准用法一致,

$$\Lambda_\pm = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} \pm \mathrm{i}\sigma^+. \tag{103}$$

简化是来自于由定义 (101) 有

$$K = \varpi^2\sigma^+. \tag{104}$$

第二, 除独立变量的改变外, 还改变依赖的变量. 设

$$Y = |\varpi^2|^{-s+1/2}P_{+s}. \tag{105}$$

对 s 的整数值, 这个变换当 ϖ^2 在 r 有意义的范围内改变符号时是奇异的, 即将回到这种可能性.

由所作的变量改变, 方程 (98) 成为

$$\Delta^{s-1}\varpi^2\left\{\Lambda_+\left[\frac{\varpi^2}{\Delta^s}\Lambda_-(|\varpi^2|^{s-1/2}Y)\right]\right\} \\ -2(2s-1)\mathrm{i}\sigma^+ r|\varpi^2|^{s-1/2}Y - \lambda|\varpi^2|^{s-1/2}Y = 0. \tag{106}$$

[399] 展开此方程, 得

$$\frac{|\varpi^2|^{s+3/2}}{\Delta}\left\{\Lambda^2 Y + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg\frac{|\varpi^2|^{2s}}{\Delta^s}\right]\Lambda_- Y + 2\mathrm{i}\sigma^+(2s-1)r\frac{\Delta}{\varpi^4}Y\right\} \\ +\Delta^{s-1}\varpi^2\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^2}{\Delta^s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}|\varpi^2|^{s-1/2}\right)\right]Y - [2(2s-1)\mathrm{i}\sigma^+ r|\varpi^2|^{s-1/2} \\ +\lambda|\varpi^2|^{s-1/2}]Y = 0. \tag{107}$$

由定义

$$P = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg\frac{|\varpi^2|^{2s}}{\Delta^s} = \frac{2s}{\varpi^4}[2r\Delta - \varpi^2(r-M)], \tag{108}$$

和

$$Q = \lambda\frac{\Delta}{\varpi^4} - \frac{\Delta^{s+1}}{|\varpi^2|^{s+3/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{\Delta^{s-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}|\varpi^2|^{s-1/2}\right)$$
$$= \frac{\Delta}{\varpi^4}\left\{\lambda - (2s-1)\left[\frac{\Delta - 2(s-1)r(r-M)}{\varpi^2} + (2s-3)\frac{r^2\Delta}{\varpi^4}\right]\right\}, \quad (109)$$

方程 (107) 可简化为

$$\Lambda^2 Y + P\Lambda_- Y - QY = 0 \quad (110)$$

这是在处理史瓦西黑洞的扰动时已经见过的形式 (第 4 章方程 (284)).

(*a*) $r_*(r)$ **关系**

积分方程 (100), 得关系

$$r_* = r + \frac{2Mr_+ + (am/\sigma^+)}{r_+ - r_-}\lg\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2Mr_- + (am/\sigma^+)}{r_+ - r_-}\cdot$$
$$\lg\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) \quad (r > r_+). \quad (111)$$

在考虑克尔黑洞的外部扰动时, 对事件视界 $r = r_+$ 以内在 "发生" 什么是不关心的. 所以, 需涉及的只是对 $r > r_+$ 的 $r_*(r)$ 关系.

现在由方程 (111) 已明显, 只要有下列关系, 则 $r_*(r)$ 关系对 $r > r_+$ 是单值的,

$$r_+^2 + \alpha^2 = 2Mr_+ - a^2 + \alpha^2 = 2Mr_+ + (am/\sigma^+) > 0. \quad (112)$$

当此不等式存在时,

$$r_* \to +\infty \text{ 当 } r \to \infty \text{ 和 } r_* \to -\infty \text{ 当 } r \to r_+ + 0, \quad (113)$$

而 $r_*(r)$ 关系是单调的. 令

$$\sigma_s^+ = -am/2Mr_+ \text{ (对 } m \text{ 为负)}, \quad (114)$$

并记得对 σ^+ 的约定是其为正, 结论是, 只要 $\sigma^+ > \sigma_s$, $r_*(r)$ 关系在事件视界之外 [400]
是单值的, 而 r_* 有意义的范围是整个区间 $(-\infty, +\infty)$. 但是如果 $0 < \sigma^+ < \sigma_s^+$ 和 $r_+^2 + \alpha^2 < 0$, 则 $r_*(r)$ 关系是双值的: 当 $r \to \infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 时都有 $r_* \to +\infty$. 在后面的情形, 在 $r = |\alpha|$ 的邻域, $r_*(r)$ 关系有行为

$$r_* = r_*(|\alpha|) + \frac{|\alpha|}{\Delta_{|\alpha|}}(r - |\alpha|)^2 + O((r - |\alpha|)^3). \quad (115)$$

而且, 当 $0 < \sigma^+ < \sigma_s^+$ 时, 方程 (110) 中的函数 P 和 Q 在 $r = |\alpha|$ 成为奇异. 相应地, 在这些情形, 方程必须在 $r_*(r)$ 关系的两个分支上分开考虑, 即对 $\infty > r > |\alpha|$ 和 $|\alpha| > r > r_+$.

将在 §74 和 §79 中显示, 在区间 $0<\sigma^{+}<\sigma_{s}^{+}$, 整数自旋的入射波的反射系数大于 1. 这就是超辐射现象: 这是粒子动力学领域的彭罗斯过程在波传播领域的类似情况. 虽然尚待在 §74 中方程 (96) 和 (97) 的框架内考虑这种超辐射的起源, 这里仍不妨注意不等式

$$2Mr_{+}\sigma^{+}<-am \tag{116}$$

(等价于 $\sigma^{+}<\sigma_{s}^{+}$) 与第 7 章的不等式 (352) 的类似性: 如果认明 $h\sigma^{+}$ 为 $\delta M, hm$ 为 δJ, 其中 h 是普朗克常量, 则两式是同样的!

最后须注意, α^{2} 在 σ_{s}^{+} 之前已经成为负的:

$$\alpha^{2}\leqslant 0 \quad \text{对} \quad \sigma^{+}\leqslant\sigma_{c}^{+}=-m/a; \tag{117}$$

而当 σ^{+} 是 "共转" 时 $\alpha^{2}=0$. 在区间 $\sigma_{s}^{+}<\sigma^{+}<\sigma_{c}^{+}$, 虽然 α^{2} 为负, 但 $r_{+}^{2}+\alpha^{2}>0$, 且 $r_{*}(r)$ 关系继续是单值的.

73. 一般变换理论和向一维波动方程的简化

§72 中一般楚科尔斯基方程 (98) 简化成的形式 (110), 与 §20 中关于史瓦西黑洞扰动的纽曼 – 彭罗斯方程简化成的形式是同一的. 也如 §20 中那样, 这里来寻找将方程 (110) 带到下列形式一维波动方程的变换,

$$\Lambda^{2}Z=VZ, \tag{118}$$

其中 V 是待定的势函数.

[401] 现在讲述的理论与 §30 中给出的只在一个方面有差别, 即对 P 的不同定义 (见方程 (106) 和第 4 章方程 (286)). 但将基础公式写为所需的形式仍是便利的.

于是假定, Y 与 Z 的关联方式是 (见第 4 章方程 (287) 和 (288))

$$Y=f\Lambda_{+}\Lambda_{+}Z+W\Lambda_{+}Z, \tag{119}$$

其中 f 和 W 是 r_{*} 的待定函数. 方程 (119) 还能写为

$$Y=fVZ+T\Lambda_{+}Z, \tag{120}$$

其中

$$T=W+2\mathrm{i}\sigma^{+}f. \tag{121}$$

将算符 Λ_{-} 作用于方程 (119), 并利用 Z 已被假定满足方程 (118) 的事实, 就能写出 (见第 4 章方程 (290) — (292))

$$\Lambda_{-}Y=-\frac{\Delta^{s}}{\varpi^{4s}}\beta Z+R\Lambda_{+}Z, \tag{122}$$

其中

$$-\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}\beta(r_*)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}fV+WV, \tag{123}$$

和

$$R=fV+\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}. \tag{124}$$

现在必须要求, 由于 Z 满足的方程, 方程 (119) 定义的 Y 的确满足方程 (110). 通过第 4 章 §30 所描述的消除过程, 得方程 (见第 4 章方程 (298) 和 (299))

$$RV-\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*}=QfV \tag{125}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}R\right)=\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}\left(QT-2\mathrm{i}\sigma^+R\right)+\beta. \tag{126}$$

现可验证, 方程 (122) — (126) 允许积分

$$\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}RfV+\beta T=K=\text{常量}. \tag{127}$$

此积分能用来写出方程 (120) 和 (122) 的逆式

$$\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}KZ=RY-T\Lambda_-Y \tag{128}$$

和 [402]

$$K\Lambda_+Z=\beta Y+\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}fV\Lambda_-Y. \tag{129}$$

现可验证, 由于方程 (123) — (126), 方程 (120)、(122)、(128) 和 (129) 是保证方程 (110) 意指方程 (118), 并且反之亦然的必要和充分条件.

由于方程 (122) — (126) 允许积分 (127), 考虑下列方程已足够:

$$R-fV=\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}, \tag{130}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}R\right)=\frac{\varpi^{4s}}{\Delta^s}(QT-2\mathrm{i}\sigma^+R)+\beta, \tag{131}$$

$$R\left(R-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}\right)+\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}\beta T=\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}K, \tag{132}$$

和

$$(R-Qf)V=\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*}, \tag{133}$$

这里可注意, 方程 (132) 是积分 (127) 的替代形式, 其中 fV 已按照方程 (130) 被替换为 $R-T_{,r_*}$.

方程 (130) — (133) 提供了五个函数 f、β、R、T 和 V 的四个方程. 因而有可观的余地来寻求这些方程的有用的解. 但是对 $s = 1/2$、1 和 2 的方程 (109) 的特定函数 Q 而言, 将看到能得出方程的明确解. 方程 (110) 向一维波动方程形式的变换能够实现, 势 V 的明确表示能够得到.

假定方程 (110) 能变换为一维波动方程形式 (118), 设 Z_1 和 Z_2 表示两个独立的解. 它们的朗斯基行列式显然是一个常数 (见第 4 章方程 (354) 及其后), 即

$$[Z_1, Z_2]_{r_*} = \text{常数}, \tag{134}$$

其中下标 r_* 表示计算朗斯基行列式时的导数是对 r_*. 当 σ^+ 是在超辐射区间时, 对 (134) 的解释需要小心. 因为在那种情形, 势 V 将在 $r = |\alpha| > r_+$ 表现为奇异 (如同方程 (110) 中的函数 P 和 Q 那样). 如前面已指出的, 方程必须
[403] 在 $r_*(r)$ 关系的两个分支上分开考虑. 两个独立解的朗斯基行列式将在两个分支上分开取常数值; 但二者无需相等. 另一方面, 如果所考虑的两个解 Z_1 和 Z_2 是对应于楚科尔斯基方程的两个不同的解, 那么两个分支的朗斯基行列式 $[Z_1, Z_2]_{r_*}$ 必定相关; 二者之间的关系能如下得到.

设 Y_1 和 Y_2 对应于两个解 Z_1 和 Z_2, 于是

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = Y_1\Lambda_- Y_2 - Y_2\Lambda_- Y_1. \tag{135}$$

现在按照方程 (120) 和 (122) 来代换 Y 和 $\Lambda_- Y$, 得

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = \left(RfV + \frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}\beta T\right)(Z_1\Lambda_+ Z_2 - Z_2\Lambda_+ Z_1); \tag{136}$$

或, 用积分 (127), 有

$$[Y_1, Y_2]_{r_*} = -K\frac{\Delta^s}{\varpi^{4s}}[Z_1, Z_2]_{r_*}. \tag{137}$$

但由方程 (105),

$$\begin{aligned}[Y_1, Y_2]_{r_*} &= -\frac{1}{|\varpi^2|^{2s-1}}[P_s(1), P_s(2)]_{r_*} \\ &= -\frac{\Delta}{\varpi^2|\varpi^2|^{2s-1}}[P_s(1), P_s(2)]_r,\end{aligned} \tag{138}$$

其中 $P_s(1)$ 和 $P_s(2)$ 是解 Y_1 和 Y_2 从中得出的楚科尔斯基方程的独立解. 将方程 (137) 和 (138) 结合, 得到

$$K[Z_1, Z_2]_{r_*} = -\Delta^{1-s}\frac{\varpi^{4s-2}}{|\varpi^2|^{2s-1}}[P_s(1), P_s(2)]_r. \tag{139}$$

由于楚科尔斯基方程的解能在区间 $r_+ < r < \infty$ 没有奇异性, 由方程 (139) 可得结论, 对 $\alpha^2 < 0$ 和 $r_+ < |\alpha|$,

$$\{[Z_1, Z_2]_{r_*}\}_{r<|\alpha|} = (-1)^{2s-1}\{[Z_1, Z_2]_{r_*}\}_{r>|\alpha|}, \tag{140}$$

这是将在超辐射区间 $0 < \sigma^+ < \sigma_s^+$ 发生的情形. 所以, 对 $s = 1$ 和 2, 在越过 $r = |\alpha|(> r_+)$ 的奇点时朗斯基行列式 $[Z_1, Z_2]_{r_*}$ 仅改变符号; 而对 $s = 1/2$, 朗斯基行列式 $[Z_1, Z_2]_{r_*}$ 保持其值.

迄今的考虑限于支配 P_{+s} 的方程 (110). 现在要问的是, 这些考虑在支配 P_{-s} 的复数共轭方程的情形会受何影响. 当运用这两个方程的机会出现时将看到, 用 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 来区分复数共轭方程的相应解 Y 是便利的, 即写

$$\Lambda^2 Y^{(\pm\sigma^+)} + P\Lambda_\pm Y^{(\pm\sigma^+)} - QY^{(\pm\sigma^+)} = 0 \tag{141}$$

[404]

为支配它们的方程. 在按照与对支配 $Y^{(+\sigma^+)}$ 的方程采用的类似变换顺序, 寻求将支配 $Y^{(-\sigma^+)}$ 的方程变换为函数 $Z^{(-\sigma^+)}$ (与 $Z^{(+\sigma^+)}$ 形成对照) 的一维波动方程时发现, 当 σ^+ 在其明确出现之处反转符号时, 方程同样成立; 而这一点特别适用于方程 (130) — (133). 但须注意, α^2 在两组方程中保持不变: 因为 "复数共轭" 要求 σ^+ 和 m 的符号同时反转: 例如, 所定义的 $\mathscr{D}_n$ 和 $\mathscr{D}_n^\dagger$ 仅对 σ^+ 和 m 符号的同时反转才是复数共轭.

74. 入射电磁波的势垒

上两节的考虑忽略或回避了由所涉变换的奇异性导致的几个问题: $r_*(r)$ 关系在超辐射区间 $0 < \sigma^+ < \sigma_s^+$ 的双值, 以及导出的势在 $r = |\alpha|(> r_+)$ 的相关奇异性. 现对正在考虑的电磁扰动 ($s = 1$) 来澄清这些问题. 幸运的是, 对现在的情形, 各个方程的解都充分地简单, 以致于问题的不同方面能被分离和解决.

对 $s = 1$, 方程 (109) 和 (130) — (133) 给出

$$Q = \frac{\Delta}{\varpi^4}\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4}\right) \tag{142}$$

和

$$R - fV = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}, \tag{143}$$

$$\frac{\Delta}{\varpi^4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^4}{\Delta}R\right) = QT - 2\mathrm{i}\sigma^+ R + \frac{\Delta}{\varpi^4}\beta, \tag{144}$$

$$R\left(R - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}\right) + \frac{\Delta}{\varpi^4}\beta T = \frac{\Delta}{\varpi^4}K, \tag{145}$$

$$RV - Qf V = \frac{\Delta}{\varpi^4}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*}. \tag{146}$$

现在来显示, 这些方程具有符合以下假定的解,

[405]
$$T = \text{常量和 } R = q\frac{\Delta}{\varpi^4}, \tag{147}$$

其中 q 是另一个常量. 由这些假定, 方程 (144) 给出

$$\beta = 2\mathrm{i}\sigma^+ q - T\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4}\right). \tag{148}$$

将对 β 的这个解和对 R 的假定形式代入方程 (145), 得

$$q^2\frac{\Delta}{\varpi^4} + T\left[2\mathrm{i}\sigma^+ q - T\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right] = K. \tag{149}$$

此方程清楚地要求

$$q^2 = -T^2\alpha^2 \quad \text{或} \quad q = \pm\mathrm{i}T\alpha \tag{150}$$

并且

$$K = 2\mathrm{i}\sigma^+ qT - T^2\lambda = -T^2(\lambda \pm 2\sigma^+\alpha) = \text{常量}. \tag{151}$$

最后, 方程 (146) 给出

$$\pm\mathrm{i}(V - Q) = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right), \tag{152}$$

或

$$\begin{aligned} V &= Q \mp \mathrm{i}\alpha\frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right) \\ &= \frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \mp \mathrm{i}\alpha\varpi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{153}$$

于是, 对方程 (142) 所给的 Q, 方程 (143) — (146) 确有符合假定 (147) 的解. 还可看到, 对 V 的解独立于常量 T 的选择; 通过选择方程 (153) 的一个或另一个符号得到两个相区分的解; 最后有 V 对 $\sigma^+ > \sigma_c^+ (= -m/a)$ 为复数.

由于 T 是作为一个简单的标度因子出现于 R、β和 K 的解中, 可以不失一般性地假定

$$T = 2\mathrm{i}\sigma^+, \tag{154}$$

于是有

和

$$\left.\begin{aligned} R &= \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}, K = 4\sigma^{+2}(\lambda \pm 2\sigma^+\alpha), \\ \beta &= -2\mathrm{i}\sigma^+\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right); \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

而连接方程 (110) 和 (118) 的解的方程 (对 $s=1$ 的情形) 成为 [406]

$$Y = \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}Z + 2\mathrm{i}\sigma^+\Lambda_+ Z, \tag{156}$$

$$\Lambda_- Y = 2\mathrm{i}\sigma^+\frac{\Delta}{\varpi^4}\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right)Z \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}\Lambda_+ Z, \tag{157}$$

$$KZ = \mp 2\sigma^+\alpha Y - 2\mathrm{i}\sigma^+\frac{\varpi^4}{\Delta}\Lambda_- Y, \tag{158}$$

$$K\Lambda_+ Z = -2\mathrm{i}\sigma^+\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right)Y \mp 2\sigma^+\alpha\Lambda_- Y. \tag{159}$$

用 Z_+ 和 Z_- 区分的、由选择上号和下号而得自方程 (156) — (159) 的两个解简单地相关联 (如同属于史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的轴向和极向扰动的解相关联那样). 于是, 对适用于 Z_+ 的关系,

$$K_+ Z_+ = -2\sigma^+\alpha Y - 2\mathrm{i}\sigma^+\frac{\varpi^4}{\Delta}\Lambda_- Y, \tag{160}$$

代入将 Y 和 $\Lambda_- Y$ 与 Z_- 相连接的表示, 得

$$K_+ Z_+ = -2\sigma^+\alpha\left(+2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\omega^4}Z_- + 2\mathrm{i}\sigma^+\Lambda_+ Z_-\right)$$
$$-2\mathrm{i}\sigma^+\left[2\mathrm{i}\sigma^+\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - 2\sigma^+\alpha\right)Z_- + 2\sigma^+\alpha\Lambda_+ Z_-\right]. \tag{161}$$

此方程经简化后给出

$$K_+ Z_+ = 4\sigma^{+2}\left(\lambda - 2\alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - 2\sigma^+\alpha\right)Z_- - 8\mathrm{i}\sigma^{+2}\alpha\Lambda_+ Z. \tag{162}$$

所以, 有了属于势 V_- 的任何解 Z_-, 就能导出属于 V_+ 的解 Z_+. 特别是, 由方程 (162) 有

$$K_+ Z_+ \to K_- Z_- - 8\mathrm{i}\alpha\sigma^{+2}\Lambda_+ Z_- (r\to\infty \text{ 和 } r\to r_+ + 0). \tag{163}$$

(a) $Z^{(+\sigma^+)}$ 与 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的区别

用 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 来区分 Y 和满足复数共轭方程的函数 (如在方程 (141) 中那样), 用 $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 来区分满足相关的一维波动方程的函数, [407] 经过在 σ^+ 的符号反转的方程 (143) — (146) 中与 (154) 和 (155) 类似的代入后得出, $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 满足有着同样势 (153) 的波动方程:

$$\Lambda^2 Z^{(\pm\sigma)} = VZ^{(\pm\sigma^+)}. \tag{164}$$

由于 V 对 $\sigma^+ > \sigma_c^+ (= -m/a)$ 为复数, 可得在这些情形中 $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 与 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 不同, 并不满足复数共轭方程.

如果将 $Z^{(+\sigma^+)}$ 的解选为属于势

$$V_+ = \frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - \mathrm{i}\alpha\varpi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right] \tag{165}$$

的解 (即方程 (160) — (163) 中用 Z_+ 标记), 那么就有关系

$$\begin{gathered} T^{(\pm\sigma^+)} = \pm 2\mathrm{i}\sigma^+, \quad R^{(\pm\sigma^+)} = \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}, \\ \beta^{(\pm\sigma^+)} = \mp 2\mathrm{i}\sigma^+\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right); \quad K^{(\pm\sigma^+)} = 4\sigma^{+2}(\lambda \pm 2\sigma^+\alpha); \end{gathered} \tag{166}$$

而联系 $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的方程是:

$$Y^{(\pm\sigma^+)} = \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}Z^{(\pm\sigma^+)} \pm 2\mathrm{i}\sigma^+\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)}, \tag{167}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)} = {} & \pm 2\mathrm{i}\sigma^+\frac{\Delta}{\varpi^4}\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right)Z^{(\pm\sigma^+)} \\ & \mp 2\sigma^+\alpha\frac{\Delta}{\varpi^4}\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)}, \end{aligned} \tag{168}$$

$$K^{(\pm\sigma^+)}Z^{(\pm\sigma^+)} = \mp 2\sigma^+\alpha Y^{(\pm\sigma^+)} \mp 2\mathrm{i}\sigma^+\frac{\varpi^4}{\Delta}\Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)}, \tag{169}$$

$$\begin{aligned} K^{(\pm\sigma^+)}\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)} = {} & \mp 2\mathrm{i}\sigma^+\left(\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} \pm 2\sigma^+\alpha\right)Y^{(\pm\sigma^+)} \\ & \mp 2\sigma^+\alpha\Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)}. \end{aligned} \tag{170}$$

(注意, 若在两者中都选上号, 则方程 (156) — (159) 和 (167) — (170) 是同样的, 它们按定义必然如此.)

由方程 (167) — (170) 可显示, 通过与前面对连接方程 (160) — (163) 中以 Z_+ 和 Z_- 来区分的解用过的类似程序, 得出 $Z^{(+\sigma^+)}$ 与解 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的复数共轭的关系是

$$\begin{aligned} K^{(+\sigma^+)}Z^{(+\sigma^+)} = {} & 4\sigma^{+2}\left(\lambda - 2\alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - 2\sigma^+\alpha\right)\cdot \\ & [Z^{(-\sigma^+)}]^* - 8\mathrm{i}\alpha\sigma^{+2}\Lambda_+[Z^{(-\sigma^+)}]^*. \end{aligned} \tag{171}$$

[408] 特别地,

$$\begin{aligned} & K^{(\pm\sigma^+)}Z^{(\pm\sigma^+)} \to K^{(\mp\sigma^+)}[Z^{(\mp\sigma^+)}]^* - 8\mathrm{i}\alpha\sigma^{+2}\cdot \\ & \Lambda_\pm[Z^{(\mp\sigma^+)}]^* \quad (r\to\infty, \ \text{和} \ \ r\to r_+ + 0). \end{aligned} \tag{172}$$

最后, 注意下列关系 (见方程 (69)):

$$K^{(+\sigma^+)}K^{(-\sigma^+)} = 16\sigma^{+4}(\lambda^2 - 4\sigma^{+2}\alpha^2) = 16\sigma^{+4}\mathscr{C}^2. \tag{173}$$

(*b*) 解的渐近行为

方程 (153) 所给的势 V 随 $r \to r_+ + 0$ 而对 r_* 指数衰减, 在事件视界上为零; 并随 $r \to \infty$ 而按 r^{-2} 减小. 所以, 只要 σ^+ 是在超辐射区间之外, 势是窄范围的: 它对 r_* 的积分是有限的, 而且的确总是实的. 在超辐射区间内, 势在 $r = |\alpha| > r_+$ 上有奇异性 (见下面 §75 (*c*)); 但它在无穷远处和视界上的行为不受影响. 因此, 在所有情形中, 波动方程的解具有渐近行为

$$Z \to \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r \to \infty \ \text{和} \ r \to r_+ + 0). \tag{174}$$

将 Z 的这些行为代入方程 (156) — (159) 和 (167) — (170), 可推出 Y (从而楚科尔斯基函数) 的相应行为. 此外, 利用方程 (163) 和 (172), 还能将属于两个势的解与属于同一个势的解 $Z^{(+\sigma^+)}$、$Z^{(-\sigma^+)}$ 的渐近行为相联系.

由关系 (163) 可得, 具有渐近行为

$$Z_-^{(+\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \ \text{和} \ Z_-^{(+\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$$
$$(r \to \infty \ \text{和} \ r \to r_+ + 0) \tag{175}$$

的 Z_- 解导致分别具有下列渐近行为的对 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 的解,

$$Z_+^{(+\sigma^+)} \to \frac{\lambda - 2\sigma^+\alpha}{\lambda + 2\sigma^+\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \ \text{和} \ Z_+^{(+\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$$
$$(r \to \infty \ \text{和} \ r \to r_+ + 0). \tag{176}$$

类似地, 由关系 (172) 可得结论, 具有渐近行为

$$Z_+^{(-\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \ \text{和} \ Z_+^{(-\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} (r \to \infty \ \text{和} \ r \to r_+ + 0). \tag{177}$$

的 $Z_+^{(-\sigma^+)}$ 解导致分别具有下列渐近行为的对 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 的解,

$$Z_+^{(+\sigma^+)} \to \frac{\lambda - 2\alpha\sigma^+}{\lambda + 2\alpha\sigma^+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \ \text{和} \ Z_+^{(+\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$$
$$(r \to \infty \ \text{和} \ r \to r_+ + 0). \tag{178}$$

表 VIII 与属于 V_+ 的 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 的渐近行为相符的 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 和 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 的渐近行为

	$V_+ = \frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} - \mathrm{i}\alpha\varpi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right]$		$V_- = \frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda - \alpha^2\frac{\Delta}{\varpi^4} + \mathrm{i}\alpha\varpi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right]$		
$Z(+\sigma^+)$	$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{\lambda-2\sigma^+\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$r_* \to \pm\infty$
$Z(-\sigma^+)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{\lambda-2\sigma^+\alpha}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$r_* \to \pm\infty$
$Y(+\sigma^+)$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$r \to +\infty$
$Y(+\sigma^+)$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{(\lambda+2\sigma^+\alpha)\Delta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\varpi_+^2[\varpi_+^2+\mathrm{i}(r_+-M)/\sigma^+]}$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{(\lambda+2\sigma^+\alpha)\Delta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\varpi_+^2[\varpi_+^2+\mathrm{i}(r_+-M)/\sigma^+]}$	$r \to r_+ + 0$
$Y(-\sigma^+)$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{r^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{\lambda+2\sigma^+\alpha}{r^2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$r \to +\infty$
$Y(-\sigma^+)$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{(\lambda+2\sigma^+\alpha)\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\varpi_+^2[\varpi_+^2-\mathrm{i}(r_+-M)/\sigma^+]}$	$-4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$	$-\frac{(\lambda+2\sigma^+\alpha)\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\varpi_+^2[\varpi_+^2-\mathrm{i}(r_+-M)/\sigma^+]}$	$r \to r_+ + 0$

注: $\varpi_+^2 = r_+^2 + a^2 + (am/\sigma^+) = 2Mr_+(1-\sigma_s^+/\sigma^+)$.

表 VIII 概括了与属于 V_+ 的 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 的 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 渐近行为相符的 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 和 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 的渐近行为. [410]

列于表 VIII 的 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 渐近行为的一个重要方面值得强调. 虽然在导致关系 (156) — (159) 和 (167) — (170) 的分析中没有作关于它们相对归一化的预先假定, 但是事实上一个相对归一化已在表 VIII 中定义, 因为所列的 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 的行为已经与属于 V_+ 的 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 的 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 行为 (对 $r\to\infty$ 和 $r\to r_+ + 0$) 相符地推出.

75. 反射和透射问题

对楚科尔斯基方程 (对 $s=1$) 简化为一维波动方程问题的正式解答业已完成, 现在转到如何运用这些方程来决定入射电磁波的反射和透射系数的问题. 但是从一开始就需有一点保留: 虽然基本方程简化成的一维波动方程自然地提出对势垒穿透相关问题的考虑, 但仍有待确立借助这些方程决定的反射和透射系数是物理上相关的系数. 且将对关于物理解释的这个和其它问题推迟到 §76, 现在仍继续由方程自身提出的形式上的问题.

在考虑由方程 (153) 所定义势垒的反射和透射问题时, 将区分三种情形: 当 $\alpha^2>0$ 时的 $\sigma^+>\sigma_c^+$ $(=-a/m)$; 当 $\alpha^2<0$ 但 $r_+>|\alpha|$ 时的 $\sigma_s^+<\sigma^+<\sigma_c^+$; 当 $\alpha^2<0$ 和 $r_+<|\alpha|$ 时的 $0<\sigma^+<\sigma_s^+$.

(a) $\sigma^+>\sigma_c^+(=-a/m)$ 和 $\alpha^2>0$ 的情形

由于 $\alpha^2>0, r_*(r)$ 关系在 r 的有意义范围是单值的, 表 VIII 中用 $V_\pm$ 标记的势是束缚的和窄范围的. 所以, 波动方程 (164) 允许适合下列边界条件的解,

$$\left.\begin{aligned} Z_+^{(+\sigma^+)} &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A_+^{(+\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\sigma^+ r_*} \quad (r_*\to+\infty),\\ &\to \qquad\qquad B_+^{(+\sigma^+)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_*\to-\infty), \end{aligned}\right\} \tag{179}$$

和

$$\left.\begin{aligned} Z_+^{(-\sigma^+)} &\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A_+^{(-\sigma^+)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_*\to+\infty),\\ &\to \qquad\qquad B_+^{(-\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_*\to-\infty). \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

在写出上述行为时, 已将解进一步用下标 "+" 来区分, 以指明现在考虑的是属于 V_+ 的解.

由于 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z_+^{(-\sigma^+)}$ 两者都满足有着同一个势 V_+ 的波动方程, 以下列方式定义的反射和透射系数, [411]

$$\mathbb{R}=A_+^{(+\sigma^+)}A_+^{(-\sigma^+)} \quad 和 \quad \mathbb{T}=B_+^{(+\sigma^+)}B_+^{(-\sigma^+)}, \tag{181}$$

将遵守守恒律

$$\mathbb{R}+\mathbb{T}=1. \tag{182}$$

另一方面, 由表 VIII 所列的解 $Z_+^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z_+^{(-\sigma^+)}$ 的渐近行为之间的关系,

$$A_+^{(-\sigma^+)}=\frac{\lambda+2\alpha\sigma^+}{\lambda-2\alpha\sigma^+}[A_+^{(+\sigma^+)}]^* \quad 和 \quad B_+^{(-\sigma^+)}=[B_+^{(+\sigma^+)}]^*. \tag{183}$$

于是, 方程 (181) 所给的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 可重写为

$$\mathbb{R}=\frac{\lambda+2\alpha\sigma^+}{\lambda-2\alpha\sigma^+}|A_+^{(+\sigma^+)}|^2 \quad 和 \quad \mathbb{T}=|B_+^{(+\sigma^+)}|^2. \tag{184}$$

$\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 的这些替代形式表明, 如方程 (181) 所定义的, 它们确是实数. 但是, 对 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 的表示 (184) 的重要性还在于显示出, 为计算这些系数, 并不需要积分波动方程两次以得到有着不同渐近行为 (179) 和 (180) 的解: 积分方程一次即已足够, 例如, 适于边界条件 (179).

方程 (184) 所给的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 的表示适用于属于势 V_+ 的解. 若代之以考虑属于 V_- 的解, 则会得到

$$\mathbb{R}=\frac{\lambda-2\alpha\sigma^+}{\lambda+2\alpha\sigma^+}|A_-^{(+\sigma^+)}|^2 \quad 和 \quad \mathbb{T}=|B_-^{(+\sigma^+)}|^2. \tag{185}$$

另一方面, 按照列于表 VIII 的关系,

$$A_+^{(+\sigma^+)}=\frac{\lambda-2\alpha\sigma^+}{\lambda+2\alpha\sigma^+}A_-^{(+\sigma^+)} \quad 和 \quad B_+^{(+\sigma^+)}=B_-^{(+\sigma^+)}. \tag{186}$$

所以, 方程 (184) 和 (185) 确定了同样的反射和透射系数.

上述讨论指明, 处理实数一维势垒穿透的标准方法, 当势是复数的、且满足复数共轭边界条件的解本身不是复数共轭函数时, 将必须如何修正.

[412]

(*b*) $\sigma_s^+<\sigma^+<\sigma_c^+$ **情形**

现在是 $\alpha^2<0$ 但 $r_+>|\alpha|$. 所以, $r_*(r)$ 关系在 r 的有意义范围继续是单值的. 另一方面, 由于 α 现在是虚数, 势 (153) 变成实的:

$$V_\pm=\frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda+|\alpha|^2\frac{\Delta}{\varpi^4}\pm|\alpha|\varpi^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{\varpi^4}\right)\right], \tag{187}$$

其中

$$\varpi^2=r^2-|\alpha|^2 \quad 和 \quad |\alpha|^2=-\alpha^2. \tag{188}$$

势还是束缚的和窄范围的, 基础量子理论中熟知的一维势垒穿透理论现在可

[413] 以运用. 但须注意, 势 V_+ 和 V_- 两者给出同样的反射和透射系数. 原因在于,

反射和透射波的相应振幅以下列方式关联 (见方程 (186)),

$$A_+ = \frac{\lambda - 2\mathrm{i}|\alpha|\sigma^+}{\lambda + 2\mathrm{i}|\alpha|\sigma^+} A_- \quad 和 \quad B_+ = B_-; \tag{189}$$

因此,

$$|A_+|^2 = |A_-|^2 \quad 和 \quad |B_+|^2 = |B_-|^2. \tag{190}$$

虽然方程 (187) 所给的势只要有 $\sigma^+ > \sigma_s^+$ 就是束缚的, 但随 $\sigma^+ \to \sigma_s^+ + 0$ [414]
而在视界上成为奇异: 相应地, 入射波面对的势垒将随着 σ^+ 趋近 σ_s^+ 而变得越来越难以穿越. (见图 41, 其中绘有区间 $\sigma_s^+ < \sigma^+ \leqslant \sigma_c^+$ 的势族.) 因此可以预期

$$\mathbb{R} \to 1 \quad 和 \quad \mathbb{T} \to 0 \ 当 \ \ \sigma^+ \to \sigma_s^+ + 0. \tag{191}$$

这个论证虽与对伴随有反射系数 $\mathbb{R} > 1$ 的超辐射是从 $\sigma^+ = \sigma_s^+$ 开始的预期一致, 却不如第 10 章 §105 (a) 中可见的那样严格. 但在下节 (c) 仍将显示, 对 $\sigma^+ < \sigma_s^+$ 事实上有 $\mathbb{R} > 1$; 而连续性要求对 $\sigma^+ = \sigma_s^+$ 有 $\mathbb{R} = 1$.

(c) $0 \leqslant \sigma^+ < \sigma_s^+$ **情形**

如已看到的, 当 $\sigma^+ < \sigma_s^+$ 和 $r_+^2 - |\alpha|^2 < 0$ 时, $r_*(r)$ 关系在 $r = |\alpha|$ 达到极小值, 并当 $r \to \infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 时都趋于 $+\infty$. 所以, 对解的考虑必须沿 $r_*(r)$ 关系的两个分支分开进行, 即从 $r = |\alpha|$ 开始, 朝向 $r \to \infty$ 或朝向 $r \to r_+ + 0$ 进行. 对解沿两个分支分开考虑的这一需求进一步由方程 (187) 给的势在 $r = |\alpha|$ 有奇异性的事实所迫使. 将 $V_\pm$ 的表示重写为

$$V_\pm = \frac{\Delta}{\varpi^4}\left[\lambda + \frac{\Delta}{\varpi^4}|\alpha|(|\alpha| \mp 4r) \mp 2|\alpha|\frac{r-M}{\varpi^2}\right], \tag{192}$$

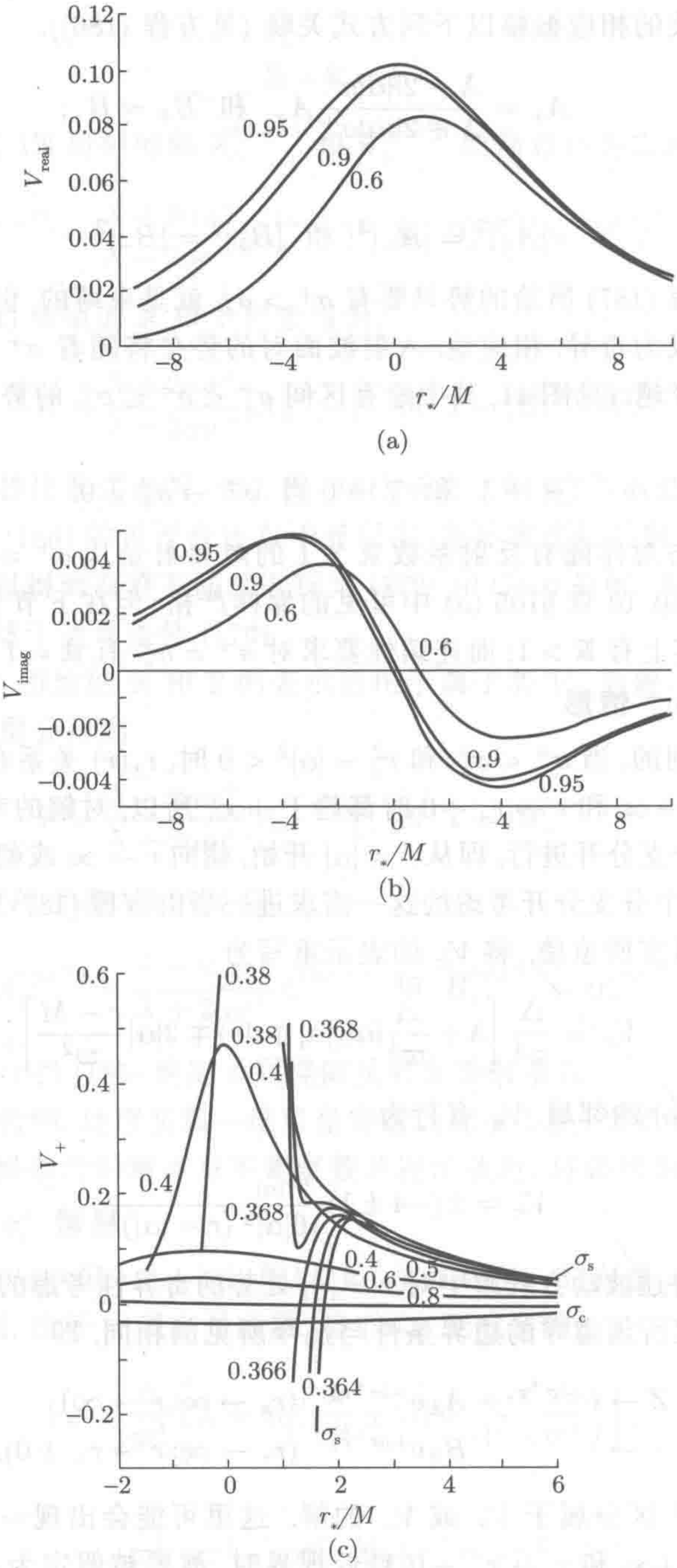
可见, 在 $r = |\alpha|$ 的邻域, $V_\pm$ 有行为

$$V_\pm = \pm(-4 \pm 1)\frac{\Delta_{|\alpha|}^2}{16|\alpha|^2}\frac{1}{(r-|\alpha|)^4}. \tag{193}$$

且推迟讲述波动方程解中对 $r = |\alpha|$ 处势的奇异性考虑的方式, 可以看到, 求解波动方程所须遵守的边界条件与迄今所见的相同, 即

$$\left.\begin{aligned} Z &\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A_\pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to \infty; r \to \infty) \\ &\to \qquad\qquad B_\pm \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to \infty; r \to r_+ + 0), \end{aligned}\right\} \tag{194}$$

其中下标 "±" 区分属于 V_+ 或 V_- 的解. 这里可能会出现一个问题, 为什么沿分支 $r_* \to +\infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 趋近视界时, 波要被假定为与 $\sigma^+ > \sigma_s^+$、沿 $r_* \to -\infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 趋近视界时有同样的 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 依赖呢? 这个问题将在下面的 §76 中考虑, 现在仍继续在边界条件 (194) 基础上的讨论.


0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0
V_{real}
0.95
0.9
0.6
−8
−4
0
4
8
r_*/M
(a)
0.004
0.002
0
−0.002
−0.004
V_{imag}
0.95
0.9
0.6
0.6
0.9
0.95
−8
−4
0
4
8
r_*/M
(b)
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
V_+
0.38
0.38
0.368
0.4
0.4
0.368
0.4
0.6
0.5
0.8
σ_s
σ_c
0.366
0.364
σ_s
−2
0
2
4
6
r_*/M
(c)

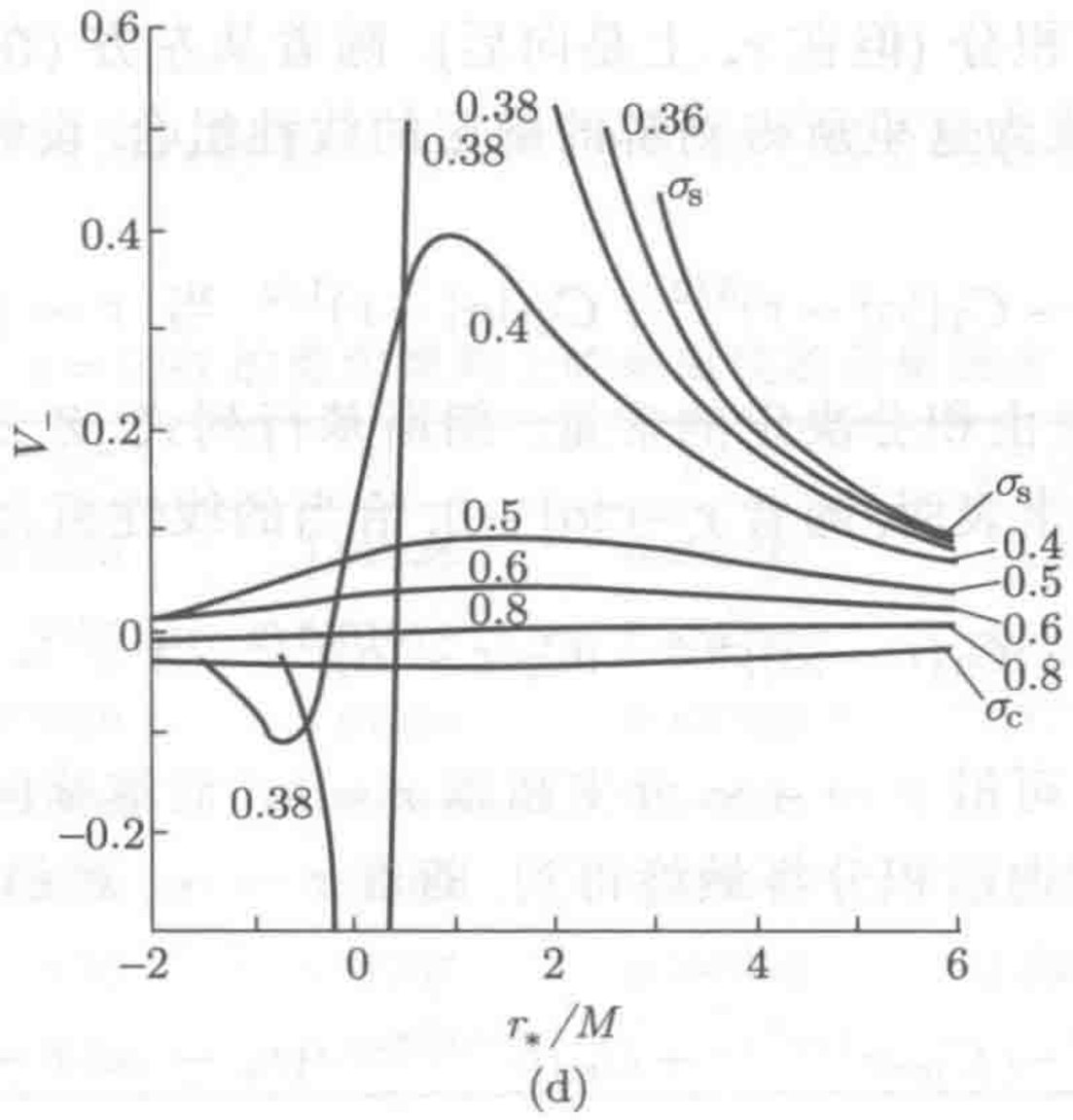


图 41 围绕克尔黑洞 ($a = 0.95$) 的对电磁波入射的势垒. (a)、(b): 属于 $l = 1$ 和 $m = -1$ 的复数势的实部 (a) 和虚部 (b). 曲线由对应的 $a\sigma$ 值标记. (c)、(d): 区间 $\sigma_s^+ < \sigma^+ \leqslant \sigma_c^+$ 的实数势 V_+ 和 V_- 族. 曲线由对应的 σ 值标记.

即使由所假定的边界条件, 仍必须有一个重要的附加考虑: 按照方程 (146), [415]
朗斯基行列式 $[Z, Z^*]_{r_*}$ 的符号在越过奇点 $r = |\alpha|$ 时必定反转. 因此, 由通常的定义,

$$\mathbb{R} = |A_\pm|^2 \text{ 和 } \mathbb{T} = |B_\pm|^2, \tag{195}$$

现在得到守恒律

$$\mathbb{R} - \mathbb{T} = 1. \tag{196}$$

也就是说, 在区间 $0 < \sigma^+ < \sigma_s^+$ 有 $\mathbb{R} > 1$. 这就是超辐射现象.

仍有待说明, 如何得到满足边界条件 (194) 的波动方程解, 而又恰当地允许 $r = |\alpha|$ 处势的奇异性 (193). 为此目的, 必须考察奇点附近 Z 的行为. 直接计算表明, 在 $r = |\alpha|$ 的邻域, Z 允许两个有着下列行为的独立解,

$$\left.\begin{aligned} Z_+ &\sim |(r - |\alpha|)|^{3/2} \text{ 和 } |(r - |\alpha|)|^{1/2} \text{ 对 } V_+, \\ Z_- &\sim |(r - |\alpha|)|^{5/2} \text{ 和 } |(r - |\alpha|)|^{-1/2} \text{ 对 } V_-; \end{aligned}\right\} \tag{197}$$

而 Z 在 $|\alpha|$ 邻域的一般解将是这些解的线性组合.

求取满足边界条件 (194) 的波动方程解的方法如下. 由具有下列行为的 Z_+ 的解 (比如说, 对势 V_+) 出发,

$$Z_+ \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \text{ 和 } r_* \to \infty \text{ 沿分支 } r \to r_+ + 0; \tag{198}$$

从视界继续向前积分 (但在 r_* 上是向后). 随着从左方 (在 r 上) 趋近 $r=|\alpha|$ 处的奇点, 解将成为这里所得到解的确定的线性组合. 设线性组合是 (见方程 (197))

$$Z_+ \to C_1(|\alpha|-r)^{3/2}+C_2(|\alpha|-r)^{1/2} \quad \text{当} \quad r\to|\alpha|-0, \tag{199}$$

其中 C_1 和 C_2 是由积分决定的常量. 朗斯基行列式 $[Z,Z^*]_{r_*}$ 的符号在奇点 $r=|\alpha|$ 反转的要求表明, 随着 $r\to|\alpha|+0$, 恰当的线性组合是

$$Z_+ \to \mathrm{i}C_1(r-|\alpha|)^{3/2}-\mathrm{i}C_2(r-|\alpha|)^{1/2} \quad \text{当} \quad r\to|\alpha|+0. \tag{200}$$

由此形式的 Z_+, 可沿 $r\to+\infty$ 分支超越 $r=|\alpha|$ 而继续向前积分 (在 r 上和 r_* 上). 由这样的向前积分将最终得到, 随着 $r\to\infty$, 解趋于下列形式的极限行为,

$$Z_+ \to C_{\mathrm{inc}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}+C_{\mathrm{ref}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_*\to\infty, r\to\infty), \tag{201}$$

[416] 其中 C_{inc} 和 C_{ref} 是由积分决定的常量. 由于所出发的解对应于趋近视界的单位振幅的透射波, 显然所要求的反射和透射系数是由下式给出,

$$\mathbb{R}=|C_{\mathrm{ref}}|^2/|C_{\mathrm{inc}}|^2 \quad \text{和} \quad \mathbb{T}=|C_{\mathrm{inc}}|^{-2}. \tag{202}$$

此形式的系数 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 遵守守恒律 (196).

[417] 图 42 所示为由对 Z_+ 的方程直接积分得到的、适于 $\sigma^+=\frac{1}{2}\sigma_s^+$ 值的 Z 的

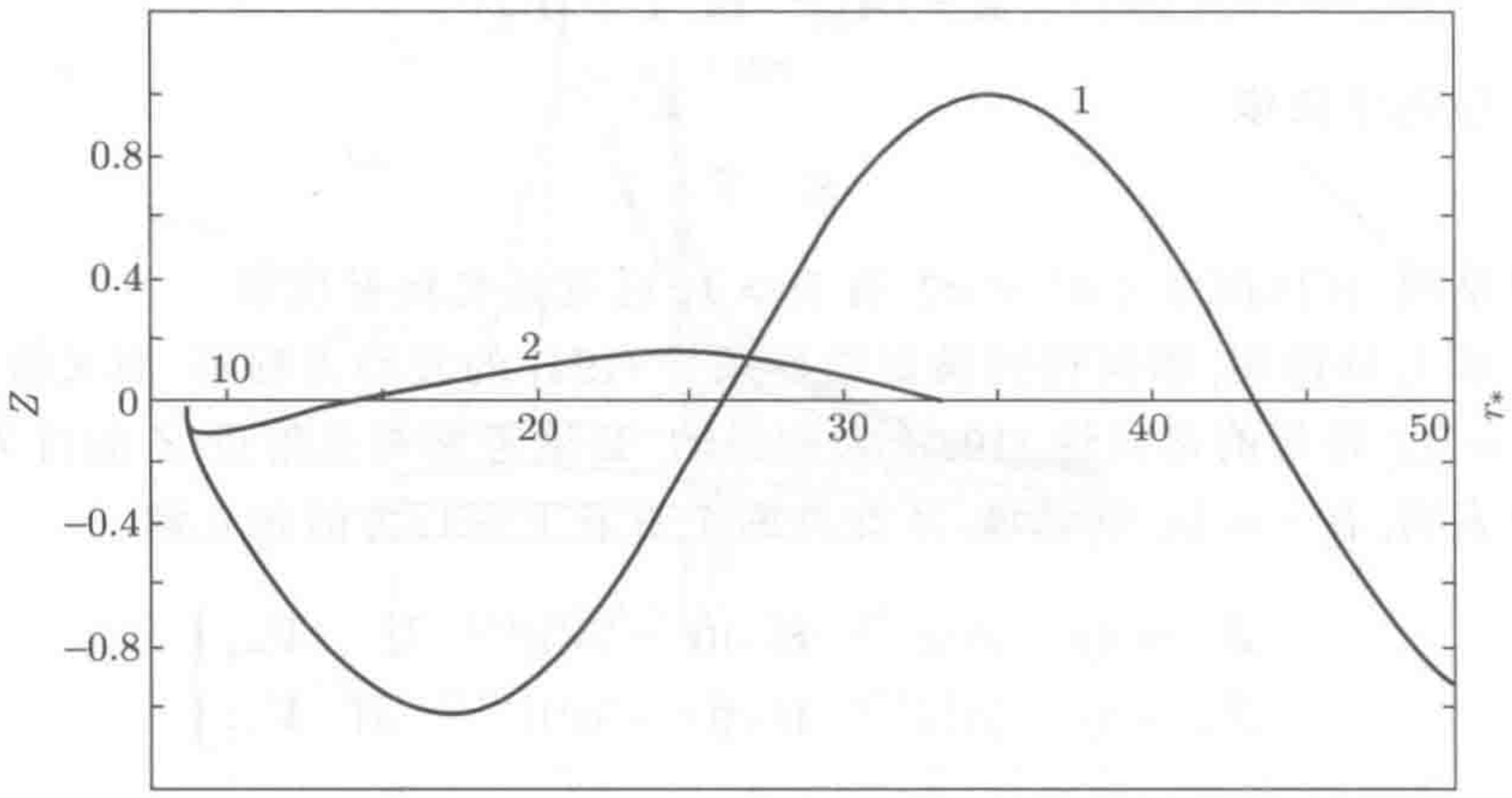


图 42 克尔黑洞 ($a=0.95$) 场中波动方程对 Z 的表示驻电磁波 ($l=-m=1$)、有超辐射频率 ($\sigma^+=\frac{1}{2}\sigma_s^+$) 的解之图示. 用 "1" 标记的曲线部分表示对 $\infty>r>|\alpha|$ 的波的实振幅, 而用 "2" 标记的曲线部分表示对 $|\alpha|>r>r_+$ 的波的虚振幅 (由于方程 (200) 而为虚数). 转折点在 $r_*=8.707$.

解 (这里是驻波).

最后, 表 IX 所列为入射到 $a=0.95$ 的克尔黑洞上的各种频率电磁波的反射和透射系数.

表 IX　入射到 $a=0.95$ 的克尔黑洞上的电磁波的反射频率 $(l=1,m=-1)$

σ^+	σ^+/σ_s^+	$\mathbb{R}$	σ^+	σ^+/σ_s^+	$\mathbb{R}$
0.325000	0.8979	1.02428	0.405593	1.1205	0.70998
0.345000	0.9531	1.01919	0.415593	1.1481	0.56810
0.350000	0.9669	1.01565	0.425593	1.1758	0.41943
0.365593	1.0100	0.99241	0.435593	1.2034	0.28686
0.375593	1.0376	0.96100	0.445593	1.2310	0.18435
0.385593	1.0653	0.90807	0.455593	1.2586	0.11332
0.395593	1.0929	0.82563			

76. 进一步放大和物理解释

在 §75 的开头讲过, 有待确立的是, 由 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 满足的一维波动方程推出的反射和透射系数, 的确是描述克尔黑洞与入射电磁波相互作用的相关物理量. 但在进入对这些物理解释问题的有意义讨论之前, 有必要说明这些同样的反射和透射系数如何能由满足恰当边界条件的楚科尔斯基方程的解推出.

首先记取 (见方程 (12))

$$\left.\begin{aligned}\phi_0=\Phi_0=R_{+1}S_{+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+t+m\varphi)},\\ 2(\overline{\rho}^*)^2\phi_2=\Phi_2=R_{-1}S_{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+t+m\varphi)},\end{aligned}\right\}\tag{203}$$

和

其中已恢复了 t-和 φ-依赖因子. 楚科尔斯基函数 R_{+1} 和 R_{-1} 转过来又与 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 相关联 (见方程 (105)),

$$R_{+1}=\frac{|\varpi^2|^{1/2}}{\Delta}Y^{(+\sigma^+)}\ \text{ 和 }\ R_{-1}=|\varpi^2|^{1/2}Y^{(-\sigma^+)},\tag{204}$$

其中

$$\varpi^2=r^2+a^2+(am/\sigma^+).\tag{205}$$

为避免混淆, 将严格地限制于 $\sigma^+>\sigma_c^+$ (当 $\alpha^2>0$) 的情形和属于势 V_+ 并满足边界条件 (179) 和 (180) 的解 $Z^{(\pm\sigma^+)}$. 这些限制并不意味着一般性的任何实质性丢失: 允许 $\alpha^2<0$ 和属于 V_- 的解 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 所需的修正是很小的, 并且基本上只是个形式.

由表 VIII 所列的行为可推出, 当对 $Z_+^{(\pm\sigma^+)}$ 的解满足边界条件 (179) 和

(180) 时, 由方程 (167) 得出的解 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 所满足的边界条件是

$$\begin{aligned} Y^{(+\sigma^+)} &\to -4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} - (\lambda + 2\sigma^+\alpha)A^{(+\sigma^+)}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^2} \quad (r\to\infty), \\ &\to \qquad\qquad -4\sigma^{+2}B^{(+\sigma^+)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \qquad\qquad (r\to r_+ + 0), \end{aligned} \tag{206}$$

[418] 和

$$\begin{aligned} Y^{(-\sigma^+)} &\to -(\lambda + 2\sigma^+\alpha)\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^2} - 4\sigma^{+2}A^{(-\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r\to\infty), \\ &\to -\frac{(\lambda + 2\sigma^+\alpha)B^{(-\sigma^+)}\Delta}{\varpi_+^2[\varpi_+^2 - \mathrm{i}(r_+ - M)/\sigma^+]}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \qquad (r\to r_+ + 0), \end{aligned} \tag{207}$$

其中应记取 (见方程 (183))

$$[A^{(+\sigma^+)}]^* = \frac{\lambda - 2\alpha\sigma^+}{\lambda + 2\alpha\sigma^+}A^{(-\sigma^+)}; [B^{(+\sigma^+)}]^* = B^{(-\sigma^+)}. \tag{208}$$

由关系 (204) 现可得出, 楚科尔斯基径向方程的相应解满足边界条件

$$\begin{aligned} R_{+1} &\to R_{+1}^{(\mathrm{inc})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r} + R_{+1}^{(\mathrm{ref})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^3} \quad (r\to\infty), \\ &\to \qquad\qquad R_{+1}^{(\mathrm{trans})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\Delta} \quad (r\to r_+ + 0), \end{aligned} \tag{209}$$

和

$$\begin{aligned} R_{-1} &\to R_{-1}^{(\mathrm{inc})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r} + R_{-1}^{(\mathrm{ref})} r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r\to\infty), \\ &\to \qquad\qquad R_{-1}^{(\mathrm{trans})}\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r\to r_+ + 0), \end{aligned} \tag{210}$$

其中, 由与方程 (206) 和 (207) 的比较,

$$\begin{aligned} &R_{+1}^{(\mathrm{inc})} = -4\sigma^{+2}; && R_{-1}^{(\mathrm{inc})} = -(\lambda + 2\sigma^+\alpha), \\ &R_{+1}^{(\mathrm{ref})} = -(\lambda + 2\sigma^+\alpha)A^{(+\sigma^+)}; && R_{-1}^{(\mathrm{ref})} = -4\sigma^{+2}A^{(-\sigma^+)}, \\ &R_{+1}^{(\mathrm{trans})} = -4\sigma^{+2}(\varpi_+^2)^{1/2}B^{(+\sigma^+)}; && R_{-1}^{(\mathrm{trans})} = -[(\lambda + 2\sigma^+\alpha)(\varpi_+^2)^{1/2}/H^*]B^{(-\sigma^+)}. \end{aligned} \tag{211}$$

在方程 (211) 中已经用了缩写

$$\varpi_+^2 = r_+^2 + \alpha^2 = 2Mr_+(1 - \sigma_s^+/\sigma^+) \tag{212}$$

和

$$\begin{aligned} H &= \varpi_+^2[\varpi_+^2 + \mathrm{i}(r_+ - M)/\sigma^+] \\ &= \frac{4M^2r_+^2}{\sigma^{+2}}(\sigma^+ - \sigma_s^+)[(\sigma^+ - \sigma_s^+) + \mathrm{i}\sqrt{M^2 - a^2}/2Mr_+]. \end{aligned} \tag{213}$$

由关系 (211) 现可得出

$$\left|\frac{R_{+1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2=\frac{(\lambda+2\sigma^+\alpha)^2}{16\sigma^{+4}}|A^{(+\sigma^+)}|^2 \quad 和 \quad \left|\frac{R_{-1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2=\frac{16\sigma^{+4}}{(\lambda+2\alpha\sigma^+)^2}|A^{(-\sigma^+)}|^2. \tag{214}$$

或, 利用方程 (208) 所给的 $A^{(+\sigma^+)}$ 与 $A^{(-\sigma^+)}$ 之间的关系, [419]

$$\left|\frac{R_{+1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+1}^{(\mathrm{inc})}}\right|=\frac{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}{16\sigma^{+4}}A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)} \quad 和$$

$$\left|\frac{R_{-1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2=\frac{16\sigma^{+4}}{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)}. \tag{215}$$

由方程 (181), 反射系数 $\mathbb{R}$ 由下列两式之一给出,

$$\mathbb{R}=\frac{16\sigma^{+4}}{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}\left|\frac{R_{+1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 \quad 和 \quad \mathbb{R}=\frac{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}{16\sigma^{+4}}\left|\frac{R_{-1}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2. \tag{216}$$

类似地可得, 对透射系数 $\mathbb{T}$ 也有两个式子,

$$\mathbb{T}=|B^{(+\sigma^+)}|^2=\frac{1}{\varpi_+^2}\left|\frac{R_{+1}^{(\mathrm{trans})}}{R_{+1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2=\frac{\sigma^+}{2Mr_+(\sigma^+-\sigma_s^+)}\left|\frac{R_{+1}^{(\mathrm{trans})}}{R_{+1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 \tag{217}$$

和

$$\mathbb{T}=|B^{(-\sigma^+)}|^2=\frac{|H|^2}{\varpi_+^2}\left|\frac{R_{-1}^{(\mathrm{trans})}}{R_{-1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2=\frac{8M^3r_+^3}{\sigma^{+3}}(\sigma^+-\sigma_s^+)\cdot$$

$$[(\sigma^+-\sigma_s^+)^2+(M^2-a^2)/4M^2r_+^2]\left|\frac{R_{-1}^{(\mathrm{trans})}}{R_{-1}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2. \tag{218}$$

守恒律 (182) 现在要求

$$\frac{4\sigma^{+4}}{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}|R_{+1}^{(\mathrm{ref})}|^2+\frac{\sigma^+}{8Mr_+(\sigma^+-\sigma_s^+)}|R_{+1}^{(\mathrm{trans})}|^2=\frac{1}{4}|R_{+1}^{(\mathrm{inc})}|^2 \tag{219}$$

和

$$\frac{\lambda^2-4\alpha^2\sigma^{+2}}{16\sigma^{+4}}|R_{-1}^{(\mathrm{ref})}|^2+\frac{8M^3r_+^3}{\sigma^{+3}}(\sigma^+-\sigma_s^+)\cdot$$

$$\left[(\sigma^+-\sigma_s^+)^2+\frac{M^2-a^2}{4M^2r_+^2}\right]|R_{-1}^{(\mathrm{trans})}|^2=|R_{-1}^{(\mathrm{inc})}|^2 \tag{220}$$

这个关系事实上等价于朗斯基等式 (139), 如果楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式被恰当运用的话.

虽已严格地限于 $\alpha^2 > 0$, 仍不难验证, 方程 (216) 和 (217) 是不受限制地普遍成立的. 并可看到, 与在 §75 (c) 中得到的一致,

$$\mathbb{T} < 0 \quad 对 \quad \sigma^+ < \sigma_s^+, \tag{221}$$

即如预期的有超辐射.

(a) 幺正性的应用

很清楚, 要得出相同的反射和透射系数 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$, 寻找的 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 的解须满足边界条件

[420]

$$\begin{aligned} Z^{(+\sigma^+)} &\to C^{(+\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r \to r_+ + 0), \\ &\to D^{(+\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r \to \infty), \end{aligned} \tag{222}$$

和

$$\begin{aligned} Z^{(-\sigma^+)} &\to C^{(-\sigma^+)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r \to r_+ + 0), \\ &\to D^{(-\sigma^+)}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} && (r \to \infty), \end{aligned} \tag{223}$$

而不是边界条件 (179) 和 (180).

代替关系 (183), 现有

$$\frac{[C^{(+\sigma^+)}]^*}{C^{(-\sigma^+)}} = \frac{[D^{(+\sigma^+)}]^*}{D^{(-\sigma^+)}} = \frac{\lambda - 2\alpha\sigma^+}{\lambda + 2\alpha\sigma^+}; \tag{224}$$

而反射和透射系数由下式给出,

$$\mathbb{R} = \frac{1}{C^{(+\sigma^+)}C^{(-\sigma^+)}} = \frac{\lambda \mp 2\alpha\sigma^+}{\lambda \pm 2\alpha\sigma^+}\frac{1}{|C^{(\pm\sigma^+)}|^2}, \tag{225}$$

和

$$\mathbb{T} = \left|\frac{D^{(\pm\sigma^+)}}{C^{(\pm\sigma^+)}}\right|^2. \tag{226}$$

由满足边界条件 (219) 和 (220) 的解 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 出发, 现可导出 (如已考虑的情形), 楚科尔斯基方程的相关解满足边界条件

$$\begin{aligned} R_{+1} &\to R_{+1}^{(\mathrm{inc})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + R_{+1}^{(\mathrm{ref})}\frac{\mathrm{e}^{+\sigma^+ r_*}}{\Delta} && (r \to r_+ + 0), \\ &\to R_{+1}^{(\mathrm{trans})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^3} && (r \to \infty); \end{aligned} \tag{227}$$

和

$$\begin{aligned} R_{-1} &\to R_{-1}^{(\mathrm{inc})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + R_{-1}^{(\mathrm{ref})}\Delta\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r \to r_+ + 0), \\ &\to R_{-1}^{(\mathrm{trans})} r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r \to \infty), \end{aligned} \tag{228}$$

其中

$$R^{(\mathrm{inc})}_{+1} = -[(\lambda + 2\alpha\sigma^+)(\varpi_+^2)^{1/2}/H]C^{(+\sigma^+)};\ \ R^{(\mathrm{inc})}_{-1} = -4\sigma^{+2}(\varpi_+^2)^{1/2}C^{(-\sigma^+)},$$
$$R^{(\mathrm{ref})}_{+1} = -4\sigma^{+2}(\varpi_+^2)^{1/2};\ \ R^{(\mathrm{ref})}_{-1} = -[(\lambda + 2\alpha\sigma^+)(\varpi_+^2)^{1/2}/H^*],$$
$$R^{(\mathrm{trans})}_{+1} = -(\lambda + 2\sigma^+\alpha)D^{(+\sigma^+)};\ \ R^{(\mathrm{trans})}_{-1} = -4\sigma^{+2}D^{(-\sigma^+)}. \tag{229}$$

由上述方程可得, 反射和透射系数现由下式给出,

$$\mathbb{R} = \frac{\lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2}}{16\sigma^{+4}|H|^2}\left|\frac{R^{(\mathrm{ref})}_{+1}}{R^{(\mathrm{inc})}_{+1}}\right|^2 = \frac{16\sigma^{+4}|H|^2}{\lambda^2 - 4\alpha^2\sigma^{+2}}\left|\frac{R^{(\mathrm{ref})}_{-1}}{R^{(\mathrm{inc})}_{-1}}\right|^2 \tag{230}$$

[421]

和

$$\mathbb{T} = \frac{\varpi_+^2}{|H|^2}\left|\frac{R^{(\mathrm{trans})}_{+1}}{R^{(\mathrm{inc})}_{+1}}\right| = \frac{1}{\varpi_+^2}\left|\frac{R^{(\mathrm{trans})}_{-1}}{R^{(\mathrm{inc})}_{-1}}\right|^2. \tag{231}$$

最后, 可注意已能由一维波动方程的解 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 的已知渐近行为 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$, 导出楚科尔斯基方程的解 R_{+1} 和 R_{-1} 的渐近行为的事实. 可由方程 (209)、(210)、(227) 和 (228) 的第一行读出的这些行为, 也可以从楚科尔斯基方程自身直接得出; 但是从这些行为到反射和透射系数的表示式 (216) — (218) 和 (230) — (231) 的过程却既不直接、也不容易 (见下面 § (*b*)).

(*b*) 无穷远处和事件视界上辐射流的直接计算

当面对有着相关守恒律的势垒穿透问题时, 波的反射和透射概念是如此自然和直接, 以至于很难避免对所得到的反射和透射系数有其自然物理解释的认定. 迄今的讨论 (自 §75 起) 已是基于这样的认定. 现在来显示, 它确实是正确的.

为证实对所导出的反射和透射系数已赋予的物理意义, 必须回到 (在现在的情形是麦克斯韦场) 的能量 – 动量张量的表示, 并确立下面的事实. 首先, 必须证明, 对 $r \to \infty$,

$$\lim_{r\to\infty} r^2 T^r_t \ \text{存在;} \tag{232}$$

即能量 – 动量张量的分量 T^r_t 在大距离上有着与波的传播相称的 $1/r^2$ 行为; 进一步, 无穷远处的能流 (单位时间、单位立体角) 在对外出 (即反射) 和内进 (即入射) 波按以下的适当定义计算时,

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \lim_{r\to\infty} r^2 T^r_t, \tag{233}$$

导致已导出的同样反射系数 $\mathbb{R}$. 第二, 必须证明, 在视界上, 量 [422]

$$T^j_i \xi^i(t)\mathrm{d}\Sigma_j, \tag{234}$$

其中 $\xi(t)$ 是背景时空具有的类时基灵矢量, 而 $\mathrm{d}\Sigma_j$ 是视界上垂直于朝内径向的三维面元, 经适当计算会导致已导出的同样透射系数 $\mathbb{T}$.

用麦克斯韦标量, 纽曼 – 彭罗斯形式的能量 – 动量张量由下式给出 (见第 5 章方程 (339)),

$$\begin{aligned} 4\pi T_{ij} = \{&\phi_0\phi_0{}^* n_i n_j + \phi_2\phi_2{}^* l_i l_j + 2\phi_1\phi_1{}^*[l_{(i}n_{j)} + m_{(i}\overline{m}_{j)}] \\ &-4\phi_0^*\phi_1 n_{(i}m_{j)} - 4\phi_1^*\phi_2 l_{(i}m_{j)} + 2\phi_2\phi_0^* m_i m_j\} \\ &+\text{复数共轭}. \end{aligned} \tag{235}$$

由第 6 章方程 (170) 和 (173) 所选的基矢可得, 对 $\mathbb{R}$ 作适当计算所必须考虑的量是

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{2\pi}\left(-\frac{1}{4}\phi_0\phi_0^* + \phi_2\phi_2^*\right). \tag{236}$$

对 ϕ_0 和 ϕ_2, 现在有解 (见方程 (70))

$$\phi_0 = R_{+1}S_{+1} \quad \text{和} \quad \phi_2 = \frac{1}{2(\overline{\rho}^*)^2}R_{-1}S_{-1}, \tag{237}$$

其中角向函数 S_{+1} 和 S_{-1} 是归一化的, 而径向函数 R_{+1} 和 R_{-1} 是相对归一化的, 以与方程 (33) 和 (34) 一致, 这是对运用方程 (236) 所必要的完整知识. 由已知的对 ϕ_0 和 ϕ_2 的解, 无穷远处的能流由下式给出,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_\infty = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{2\pi}\left\{-\frac{1}{4}S_{+1}^2[R_{+1}^{(+\sigma^+)}R_{+1}^{(-\sigma^+)}] + \frac{1}{4r^4}S_{-1}^2[R_{-1}^{(+\sigma^+)}R_{-1}^{(-\sigma^+)}]\right\}. \tag{238}$$

方程 (209) 和 (210) 表明, 楚科尔斯基方程的确允许其极限 (238) 存在的解. 的确, 由方程 (209) 和 (210) 中系数 $R_+^{(\mathrm{inc})}$ 和 $R_{-1}^{(\mathrm{ref})}$ 的定义,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{inc})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_\infty = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{1}{4}[R_{+1}^{(\mathrm{inc}),+\sigma^+)}R_{+1}^{(\mathrm{inc},-\sigma^+)}] \tag{239}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_\infty = \frac{S_{-1}^2}{2\pi}\frac{1}{4}[R_{-1}^{(\mathrm{ref},+\sigma^+)}R_{-1}^{(\mathrm{ref},-\sigma^+)}].$$

插入列于方程 (211) 的系数 $R_{+1}^{(\mathrm{inc},+\sigma^+)}$ 等等, 在对上述方程对角度积分后得出反射系数是

[423]

$$\mathbb{R} = A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)}, \tag{240}$$

与前面由对 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 所满足的一维波动方程的考虑导出的反射系数表示一致

(见方程 (181)).

为计算穿越事件视界的能流 (234), 由迄今所用的基 (第 6 章方程 (170) 和 (171) 定义) 表示的能量 – 动量张量是不适宜的, 因为矢量 $\boldsymbol{l}$ 在视界上 (那里 Δ 为零) 是奇异的. 为得到无奇异性的基, 采用霍金和哈特尔的做法, 对第 6 章 (170) 的基作有 "A" $= 2(r^2+a^2)/\Delta$ 的第 Ⅲ 类旋转 (见第 1 章 §8 (g)). 经过这种旋转, 矢量 $\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 不受影响, 而 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 变为

$$\boldsymbol{l} \to \frac{\Delta}{2(r^2+a^2)}\boldsymbol{l} = \left[\frac{1}{2}, \frac{\Delta}{2(r^2+a^2)}, 0, \frac{a}{2(r^2+a^2)}\right]$$

和 (241)

$$n \to \frac{2(r^2+a^2)}{\Delta}n = \left[\frac{(r^2+a^2)^2}{\rho^2\Delta}, -\frac{(r^2+a^2)}{\rho^2}, 0, a\frac{(r^2+a^2)}{\rho^2\Delta}\right].$$

另外, 按下列变换回到克尔 – 席尔德标架 (见第 6 章 §57 (a)),

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}t + \frac{r^2+a^2}{\Delta}\mathrm{d}r \quad 和 \quad \mathrm{d}\widetilde{\varphi} = \mathrm{d}\varphi + \frac{a}{\Delta}\mathrm{d}r. \tag{242}$$

选择的这个标架适于对向内的辐射 (正是现在的情形) 的考虑; 相反的是, 第 6 章方程 (215) 的选择适于向外的辐射. 新基的零矢量 $\boldsymbol{l}^{(HH)}$ 和 $\boldsymbol{n}^{(HH)}$ 是

$$\boldsymbol{l}^{(HH)} = \left[1, \frac{\Delta}{2(r^2+a^2)}, 0, \frac{a}{r^2+a^2}\right]$$

和 (243)

$$\boldsymbol{n}^{(HH)} = \left[0, -\frac{r^2+a^2}{\rho^2}, 0, 0\right].$$

可见, 按此选择, 基在未来事件视界上, 即对落入观测者而言, 有着良好行为.

视界上垂直于朝内径向的三维面元由下式给出,

$$\mathrm{d}\Sigma_j = l_j^{(HH)} 2Mr_+ \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\widetilde{\varphi}\mathrm{d}v. \tag{244}$$

这个表示是来自第 6 章方程 (219) 所给的克尔 – 席尔德标架中的度规和第 6 章方程 (272) 的计算 (适用于现在的情形). 由于变换的雅可比 $\partial(\widetilde{\varphi}, v)/\partial(\varphi, t) = 1$, 还可写有

$$\mathrm{d}\Sigma_j = l_j^{(HH)} 2Mr_+ \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t. \tag{245}$$ [424]

克尔时空是定常态和轴对称的, 所以有类时基灵矢量 $\xi(t)(= \partial/\partial t = \partial/\partial v)$ 和轴向基灵矢量 $\xi(\varphi)(= \partial/\partial\varphi = \partial/\partial\widetilde{\varphi})$. 于是, 任何有良好定义的能量 – 动量张量的场将允许定义流矢量

$$T_i^j\xi^i(t) \quad 和 \quad T_i^j\xi^i(\varphi), \tag{246}$$

它们与能量守恒和角动量守恒相关联. 而穿越由视界元与被 $\mathrm{d}v$ 分离的两个常量 v 面交叉形成的二维面元的能量和角动量流由下式给出,

$$\mathrm{d}E = T_i^j \xi^i(t) \mathrm{d}\Sigma_j \quad \mathrm{d}L_z = T_i^j \xi^i(\varphi) \mathrm{d}\Sigma_j. \tag{247}$$

插入方程 (245) 的 $\mathrm{d}\Sigma_j$, 得到对越过事件视界进入黑洞的能量和角动量流的表示

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = 2Mr_+ T_i^j \xi^i(t) l_j^{(HH)} \tag{248}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 L_z}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = 2Mr_+ T_i^j \xi^i(\varphi) l_j^{(HH)}. \tag{249}$$

由方程 (243) 很清楚, 在视界上 (那里 $\Delta = 0$)

$$l^{(HH)} = \xi(t) + \frac{a}{2Mr_+}\xi(\varphi). \tag{250}$$

相应地, 从方程 (248) 和 (249) 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} + \frac{a}{2Mr_+}\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = 2Mr_+ T_{ij} l^{(HH)i} l^{(HH)j}. \tag{251}$$

另一方面, 对所选的扰动的 t-和 φ-依赖,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{i}\sigma^+ \quad 和 \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \mathrm{i}m; \tag{252}$$

而由与方程 (247) 所给的 $\mathrm{d}E$ 和 $\mathrm{d}Lz$ 表示的比较得出

$$\mathrm{d}L_z = (m/\sigma^+)\mathrm{d}E. \tag{253}$$

[425] 由于这个关系, 方程 (251) 给出

$$\left(1 + \frac{am}{2Mr_+\sigma^+}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = 2Mr_+ T_{ij} l^{(HH)i} l^{(HH)j}, \tag{254}$$

或, 记取 $\sigma_s^+ = -am/2Mr_+$, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = \frac{2Mr_+\sigma^+}{\sigma^+ - \sigma_s^+} T_{ij} l^{(HH)i} l^{(HH)j}. \tag{255}$$

用方程 (235) 所给的 T_{ij},

$$T_{ij} l^{(HH)i} l^{(HH)j} = \frac{1}{2\pi}\phi_0^{(HH)} \phi_0^{*(HH)}. \tag{256}$$

在解 (237) 所由以得到的基中的麦克斯韦标量 ϕ_0, 与在由方程 (243) 定义的基中计算的 $\phi_0^{(HH)}$ 之间的关联是

$$\phi_0^{(HH)} = \frac{\Delta}{2(r^2+a^2)}\phi_0. \tag{257}$$

于是, 方程 (255) 现在给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = \frac{\sigma^+}{8Mr_+(\sigma^+-\sigma_s^+)}\frac{\Delta^2}{2\pi}\phi_0\phi_0^*, \tag{258}$$

或, 插入 ϕ_0 的解, 有

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{\sigma^+}{8Mr_+(\sigma^+-\sigma_s^+)}[\Delta^2 R_{+1}^{(+\sigma^+)}R_{+1}^{(-\sigma^+)}]_{r_+}. \tag{259}$$

由方程 (209) 所给的视界上 R_{+1} 的行为可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{trans})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\right)_{r_+} = \frac{S_{+1}^2}{2\pi}\frac{\sigma^+}{8Mr_+(\sigma^+-\sigma_s^+)}[R_{+1}^{(\mathrm{trans},+\sigma^+)}R_{+1}^{(\mathrm{trans},-\sigma^+)}]. \tag{260}$$

现已明显, 与方程 (239) 所给的对 $(\mathrm{d}E^{(\mathrm{inc})}/\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega)_\infty$ 的表示一起, 方程 (260) 给出了与较早已导出的相一致的透射系数 $\mathbb{T}$ (见方程 (217) 和 (219)).

对 §75 中导出的反射和透射系数具有所赋予物理意义的证实工作现已完成.

(c) 进一步放大

还有一些关于 ϕ_0 在视界上恰当边界条件的问题需要说明.

方程 (209) 中选择的适于视界上入射波的对 R_{+1} 的解, 有行为 [426]

$$R_{+1} \to \Delta^{-1}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r \to r_+ + 0). \tag{261}$$

它因此是奇异的; 问题在于为什么它是可接受的. 它可接受是因为, 奇异性是单单来自于 ϕ_0 解在其中导出的基在视界上的病态行为. 事实上正是由于这个原因, 在上一节已经变到了无奇异的霍金 – 哈特尔基 (245). 如在方程 (257) 中已看到的, 在霍金 – 哈特尔基里, 麦克斯韦标量 ϕ_0 被乘以因子 $\Delta/2(r^2+a^2)$ (在视界上 $=\Delta/4Mr_+$); 而这个因子去除了 (261) 中的奇异性.

第二个问题是关于视界上入射波由 $\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 的表示. 记得变量 r_* 含蓄地有着对 σ^+ 的依赖. 为使对 σ^+ 的依赖明确, 方便的做法是变换到更常规的变量 $r_*^{(c)}$, 定义为 (见方程 (100))

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*^{(c)}} = \frac{\Delta}{r^2+a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}, \tag{262}$$

或更明晰地,

$$r_*^{(c)} = r + \frac{2Mr_+}{r_+ - r_-} \lg\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) - \frac{2Mr_+}{r_+ - r_-} \lg\left(\frac{r}{r_-} - 1\right) (r > r_+). \tag{263}$$

这个 $r_*^{(c)}(r)$ 关系与 $r^*(r)$ 关系不同, 它总是单值的 (这正是它被普遍采用的原因):

$$r_*^{(c)} \to +\infty \text{ 对 } r \to \infty \text{ 和 } r_*^{(c)} \to -\infty \text{ 对 } r \to r_+ + 0. \tag{264}$$

从方程 (111) 与 (263) 的对比可得, 虽然 $r_* \to r_*^{(c)}$ 对 $r \to \infty$, 但有

$$r_* \to \left(1 + \frac{am}{2Mr_+\sigma^+}\right) r_*^{(c)} = \left(1 - \frac{\sigma_s^+}{\sigma^+}\right) r_*^{(c)} \quad (r \to r_+ + 0). \tag{265}$$

因此, 选择的入射波在视界上的表示是

$$\exp[\mathrm{i}(\sigma^+ - \sigma_s^+) r_*^{(c)} + \mathrm{i}\sigma^+ t] = \exp[\mathrm{i}(k r_*^{(c)} + \sigma^+ t)], \tag{266}$$

其中

$$k = \sigma^+ - \sigma_s^+. \tag{267}$$

所以, 视界上波的群速度是

$$v_{\text{group}} = -\mathrm{d}\sigma^+ / \mathrm{d}k = -1, \tag{268}$$

而相速度则由下式给出,

$$v_{\text{phase}} = -\sigma^+ / k = -(1 - \sigma_s^+ / \sigma^+)^{-1}. \tag{269}$$

[427] 于是, 对任何局域标架中的观测者, 波都表现为朝视界前进 (以光速!); 但对处于无穷远、相速度才有意义的观测者而言, 就并不总是如此. 对无穷远处观测者, (266) 所表示的波只有对 $\sigma^+ > \sigma_s^+$ 才表现为朝向黑洞前进; 但当 σ^+ 是在超辐射区间时, 波将表现为从黑洞发出, 这正是超辐射现象的出现. 在任何情形, 对入射波的唯一物理要求是其群速度为负, 这个要求由表示 (266) 满足.

结论是, 表示视界上入射波的 R_{+1} 解的行为 (261), 与所有的物理要求完全一致. 值得注意的是, 对变量 r_* 的选择和随之而来的分析似乎已经预见了这一切.

77. 对理论的一些综合观察

已经完成的麦克斯韦方程解, 给了对克尔时空解析丰富性的第一瞥. 这里扼要地概括一些显著的特征.

在一定意义上, 最引人注目的事实是方程在写为纽曼 – 彭罗斯形式时的可分离性. 它立即显示了在以基础方式抓住时空代数特征的标架中写出方程的恰当性. 同样值得注意的是, 分离的实现不仅是对经典分析中已知的超越函数, 而且是对新定义的新函数. 特别地, 角向函数包含了角频率 σ^+ 作为参量. 这在支配 $S_{+1}(\theta)$ 的方程写成其展开形式时是很显然的,

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}S_{+1}}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-2a\sigma^+m-a^2\sigma^{+2}\sin^2\theta\right.$$
$$\left.+2a\sigma^+\cos\theta-\frac{m^2+1+2m\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)S_{+1}=0. \tag{270}$$

(支配 $S_{-1}(\theta)$ 的方程可以简单地将方程 (270) 中 $\cos\theta$ 项的符号反转而得到.) 只有当 a (或 σ^+) 为零时 $S_{+1}(\theta)$ 才简化为经典超越函数, 即盖根包尔函数或通常所称的 "自旋加权" 谐波. $a\sigma^+$ 作为参量在角向函数中的出现意味着, 只由径向方程的解是不可能进行关于稳定性的讨论的.

不只是方程的可分离性使人惊奇. 通过楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式相关联的一对函数 (已用下标 $+1$ 和 -1 来区分) 的存在也被覆盖着神秘性. 具体地说, 如果两个角向函数都归一化, 则 $S_{+1}(\theta)\equiv S_{-1}(\pi-\theta)$. 但是为什么 [428] 这个 "离散对称性", 或许是 "可以理解的", 却要包含在楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式中呢? 同样的问题也会对满足复数共轭方程的径向函数 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 产生. 楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式的一个重要并且必然出现的结果是, R_{+1}、R_{-1} 和 S_{+1}、S_{-1} 的导数能被分别表示为 R_{+1}、R_{-1} 和 S_{+1}、S_{-1} 的线性组合. 而所有这一切中最神秘的是径向和角向函数的斯塔罗宾斯基常量的相等性.

当转到 §73 的变换理论及其应用时, 不同类型的问题产生了. 例如, $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 允许 "双重" 变换, 导致了给出同样反射和透射系数的一对势, 这一事实有任何含义吗? 在史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗时空的情形, 双重变换的存在是关联着物理上不同的扰动类型 (已区分为轴向和极向). 对现在的情形有任何相应的物理区分吗?

在更详细的层次上, 还有其它情节可以提及. 例如, 在基础量子理论中熟知的关于势垒穿透的基本理论, 现在呈现出新奇的方面: 复数势如何能表示守恒散射, 而有着奇异性的实数势又如何成为超辐射现象的关键.

在下一章对引力扰动的研究中将发现, 已描述的所有这些特征, 以及此外更多, 都将在一种难以置信地更洛可可式的组合中出现.

文献注释

支配麦克斯韦和外尔标量的纽曼 – 彭罗斯方程的解耦和分离是由楚科尔斯基发现的:

1. S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.*, 29, 1114–8 (1972).

楚科尔斯基的发现使得后续的进展成为可能. 关于该发现及后续进展的更详细表述, 见:

2. S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, 185, 635–49 (1973).

下列文献进一步考虑了已解耦和分离的方程对入射电磁波被克尔黑洞反射、吸收和放大问题的应用:

3. A. A. Starobinsky and S. M. Churilov, *Zh. Exp. i. Teoret. Fiz.*, 65, 3–8 (1973);

translated in *Soviet Phys. JETP*, 38, 1–5 (1973).

4. W. H. Press and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, 185, 649–73 (1973).

本书所称的 "楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式" 就是在文献 3 和 4 中给出的. 与之相关的一篇论文是:

5. J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D*, 7, 949–53 (1973).

[429] 本章几乎是完全地基于下列论文:

6. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 348, 39–55 (1976).

7. ——, ibid., 349, 1-8 (1976).

8. ——, ibid., 358, 421–37 (see Appendix A, 434–7) (1978).

另见:

9. S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 352, 325–38 (see Appendix, 335–8) (1977).

§73 中讲述的变换理论与在下列论文中首先得出的基本相同:

10. S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 345, 145–67 (1975).

对此课题的综述 (以有所不同的观点) 见:

11. S. Chandrasekhar in *General Relativity—An Einstein Centenary survey* (§§7.5 and 7.81–7.84), edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979.

§73–§75. 这几节中的处理在很大程度上是基于文献 6 和 7. 另一种处理可见:

12. S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc. (London)*, 349, 217–30 (1976).

§76 (b)、(c). 本节中的讨论密切地遵从楚科尔斯基和珀勒斯的文献 2 和 4. 另见:

13. S. W. Hawking and J. B. Hartle, *Commun. Math. Phys.*, 27, 283–90 (1972).

对克尔几何中麦克斯韦方程的另一种处理见:

14. J. M. Cohen and L. S. Kegeles, *Phys. Rev. D*, 10, 1070–84 (1974).

15. P. L. Chrzanowski, *Phys. Rev. D*, Ⅱ, 2042–62 (1975).

16. ——, ibid., 13, 806–18 (1976).

本章提供了机会来解释, 为什么本书作者选择使用原初的纽曼 – 彭罗斯形式, 而不是后来由下列论文给出的更对称的版本:

17. R. Geroch, A. Held, and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, 14, 874–81 (1973).

原因是, 如果采用了后来的版本, 就不得不将第 5 章方程 (170) 的基代之以更对称的一种,

$$\boldsymbol{l}^i = \frac{1}{(2\rho^2\Delta)^{1/2}}(r^2+a^2, \Delta, 0, a),$$

$$\boldsymbol{n}^i = \frac{1}{(2\rho^2\Delta)^{1/2}}(r^2+a^2, \Delta, 0, -a).$$

和

$$\boldsymbol{m}^i = \frac{1}{(2\rho^2)^{1/2}}(\mathrm{i}a\sin\theta, 0, 1, i\mathrm{cosec}\theta),$$

其中 $\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$. 后面这个基可以通过对前面的基施以 Ⅲ 类旋转而得到 (第 1 章方程 (347)). 于是, 现在的矢量 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 就都不是仿射参数化的. 而且, 这个基要求使用 $(r^2+a^2\cos^2\theta)^{1/2}$ 而不是 $(r \pm \mathrm{i}a\cos\theta)$ 的事实会在形式构建中导致代数上的不精致. 此外, 在第 9 章将充分清楚地看到, 问题的根本复杂性要更深刻得多, 不可能被早期的良好外观消除.

第九章

克尔黑洞的引力扰动

[430]

78. 引言

本章内容是关于克尔黑洞的引力扰动理论. 这个课题相当复杂; 本章的篇幅虽长, 所作的讲述在很大程度上仍只是一个轮廓.

且从对问题的简短表述开始.

在第 6 章 §56 对纽曼 – 彭罗斯形式的克尔时空的描述中, 外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4, 以及自旋系数 κ、σ、λ、ν 和 ε, 都在所选零基 $(\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$、$\overline{\boldsymbol{m}})$ 中为零. 这些量为零反映出时空的 D 型特征、主零方向 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的无切变短程特征和零短程 $\boldsymbol{l}$ 的仿射参数化. 自旋系数 $\widetilde{\rho}$、τ、μ、π、α、β 和 γ, 以及外尔标量 Ψ_2 不为零, 它们的值由第 6 章方程 (175) 和 (180) 给出.

当克尔黑洞受到引力扰动时 (例如由于引力波的入射), 在定常态为零的量一般将不再为零, 而变成一阶小量; 而在定常态为有限值的量也将类似地经受一阶改变. 因此, 引力扰动将由下列量描述,

$$\Psi_0, \Psi_1, \Psi_3, \Psi_4, \kappa, \sigma, \lambda \text{ 和 } \nu, \tag{1}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_2^{(1)}, \widetilde{\rho}^{(1)}, \tau^{(1)}, \mu^{(1)}, \pi^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \gamma^{(1)}, \varepsilon^{(1)} \\ &\boldsymbol{l}^{(1)}, \boldsymbol{n}^{(1)}, \boldsymbol{m}^{(1)}, \text{ 和 } \overline{\boldsymbol{m}}^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中第二组量的上标 “(1)” 将它们与定常态的未扰动值区别. 第一组量则无需这样区别, 因为它们在定常态为零.(注意 ε 并不在第一组中, 因为它在定常态为零是 “人为的”, 而不是时空的代数特征所要求的.)

现在的问题是确定两组量 (1) 和 (2). 将会看到, 问题很自然地分成两部分: 一部分与第一组量有关 (在 §79 – §81 考虑), 另一部分与第二组量有关 (在

§82 – §95 中考虑). 而理论则是一个一致的整体.

79. 支配外尔标量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3 和 Ψ_4 的方程的简化和解耦 [431]

如在第 4 章 (§29 (*a*)) 已看到的, 在纽曼 – 彭罗斯方程中, 有一组六个方程对在背景几何中为零的量 Ψ_0、Ψ_1、Ψ_3、Ψ_4、κ、σ、λ 和 ν 是线性和齐次的. 于是, 比安基恒等式中的四个 (第 1 章方程 (321, a、d、e 和 h)) 和里奇恒等式中的两个 (第 1 章方程 (310, b 和 j)) 是

$$\left.\begin{aligned}(\delta^*-4\alpha+\pi)\Psi_0-(D-2\varepsilon-4\widetilde{\rho})\Psi_1&=3\kappa\Psi_2,\\(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0-(\delta-4\tau-2\beta)\Psi_1&=3\sigma\Psi_2,\\(D-\widetilde{\rho}-\widetilde{\rho}^*-3\varepsilon+\varepsilon^*)\sigma-(\delta-\tau+\pi^*-\alpha^*-3\beta)\kappa&=\Psi_0;\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

和

$$\left.\begin{aligned}(D+4\varepsilon-\widetilde{\rho})\Psi_4-(\delta^*+4\pi+2\alpha)\Psi_3&=-3\lambda\Psi_2,\\(\delta+4\beta-\tau)\Psi_4-(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3&=-3\nu\Psi_2,\\(\Delta+\mu+\mu^*+3\gamma-\gamma^*)\lambda-(\delta^*+3\alpha+\beta^*+\pi-\tau^*)\nu&=-\Psi_4.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

这些是与第 4 章 §29 中对史瓦西黑洞扰动所考虑过的相同的方程.

方程 (3) 和 (4) 已经是线性化的, 其意是, 由于方程 (3) 中的 Ψ_0、Ψ_1、κ、σ 和方程 (4) 中的 Ψ_4、Ψ_3、λ、ν 是被视为一阶小量, 就能把方程中出现的所有其它量 (包括导数算符) 以其未扰动值来代替. 这些方程的一个重要附加特征是, 支配 Ψ_0、Ψ_1、κ、σ 和 Ψ_4、Ψ_3、λ、ν 的两个三方程组是完全解耦的. 因此两组量中每一组的解都是独立的.

如以前已做的, 假定各个量所经受的扰动有着 t-和 φ-依赖,

$$e^{\mathrm{i}\sigma^+ t+m\varphi},\tag{5}$$

其中 σ^+ 是一个常量 (在大多数情况视为实数和正数), m 是一个整数 (正, 负, 或零). 基矢 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ (第 6 章方程 (170) — (173) 给出) 在作为正切矢量作用于具有上述 t-和 φ-依赖的函数时, 成为第 8 章方程 (2) 所定义的导数算符. 这里实际上将继续使用第 8 章 §68 的记号和定义. 特别是, 将删去所有表示扰动的量中的因子 (5), 因而表示它们的符号就只是其振幅.

如已讲过的, 可以将方程 (3) 和 (4) 中的各个自旋系数 (除 κ、σ、λ 和 ν 外) 和 Ψ_2 以其由第 6 章方程 (175) 和 (180) 所给的值来代替, 将导数算符以第 8 章方程 (2) — (5) 中所定义的来代替. 所得的方程在用下列变量写出时将成为简单和对称的形式, [432]

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0=\Psi_0,\Phi_1=\Psi_1\overline{\rho}^*\sqrt{2},k=\kappa/(\overline{\rho}^*)^2\sqrt{2},&\quad\text{和}\quad s=\sigma\overline{\rho}/(\overline{\rho}^*)^2,\\\Phi_4=\Psi_4(\overline{\rho}^*)^4,\Phi_3=\Psi_3(\overline{\rho}^*)^3/\sqrt{2},l=\lambda\overline{\rho}^*/2,&\quad\text{和}\quad n=\nu\rho^2/\sqrt{2}.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

在各种置换和代入之后, 方程 (3) 和 (4) 简化为

$$\left(\mathscr{L}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 - \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = -6Mk, \tag{7}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 + \left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = +6Ms, \tag{8}$$

$$\left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)s - \left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)k = +\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_0, \tag{9}$$

和

$$\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_4 - \left(\mathscr{L}_{-1} + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_3 = +6Ml, \tag{10}$$

$$\left(\mathscr{L}_2^\dagger - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_4 + \Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_3 = +6Mn, \tag{11}$$

$$\Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)l + \left(\mathscr{L}_{-1} + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)n = +\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_4. \tag{12}$$

两组方程 (7) — (9) 和 (10) — (12) 中方程的解耦可以像第 8 章方程 (13) — (16) 的情况那样来实现. 将 $(\mathscr{L}_{-1}^\dagger + 3\mathrm{i}a\sin\theta/\overline{\rho}^*)$ 作用于方程 (7), 将 $(\mathscr{D}_0 + 3/\overline{\rho}^*)$ 作用于方程 (8), 再将二者相加, 从而从方程 (7) 和 (8) 中消去 Φ_1. 所得方程的右边, 除了一个因子 $6M$ 外, 精确地就是方程 (9) 左边的量. 于是就得到解耦方程

$$\left[\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) + \left(\mathscr{D}_0 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\right]\Phi_0 = 6M\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_0. \tag{13}$$

[433] 以类似的方式, 从方程 (10) — (12) 得到解耦方程

$$\left[\left(\mathscr{L}_{-1} + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_2^\dagger - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) + \Delta\left(\mathscr{D}_{-1}^\dagger + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\right]\Phi_4 = 6M\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_4. \tag{14}$$

考虑方程 (13) 左边的两组项, 经简化后有

$$\Delta\left(\mathscr{D}_1 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) = \Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger + \frac{6}{\overline{\rho}^*}[-\mathrm{i}K + (r - M)] - \frac{6\Delta}{(\overline{\rho}^*)^2}, \tag{15}$$

和

$$\left(\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}+\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^{*}}\right)\left(\mathscr{L}_{2}-\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^{*}}\right)$$
$$=\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\mathscr{L}_{2}+\frac{6\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^{*}}(Q+\cot\theta)+\frac{6a^{2}\sin^{2}\theta}{(\overline{\rho}^{*})^{2}}. \tag{16}$$

将简化结果结合, 并进一步运用第 8 章方程 (10) 中的基本等式, 可得出方程 (13) 简化为

$$[\Delta\mathscr{D}_{1}\mathscr{D}_{2}^{\dagger}+\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\mathscr{L}_{2}-6\mathrm{i}\sigma^{+}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)]\Phi_{0}=0. \tag{17}$$

类似地, 方程 (14) 简化为

$$[\Delta\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}\mathscr{D}_{0}+\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{2}^{\dagger}+6\mathrm{i}\sigma^{+}(r+\mathrm{i}a\cos\theta)]\Phi_{4}=0. \tag{18}$$

方程 (17) 和 (18) 清楚地允许变量的分离. 代入

$$\Phi_{0}=R_{+2}(r)S_{+2}(\theta)\ \text{ 和 }\ \Phi_{4}=R_{-2}(r)S_{-2}(\theta), \tag{19}$$

其中 $R_{\pm2}(r)$ 和 $S_{\pm2}(\theta)$ 分别都只是 r 和 θ 的函数, 可得两对方程,

$$(\Delta\mathscr{D}_{1}\mathscr{D}_{2}^{\dagger}-6\mathrm{i}\sigma^{+}r)R_{+2}=\lambda R_{+2}, \tag{20}$$
$$(\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\mathscr{L}_{2}+6a\sigma^{+}\cos\theta)S_{+2}=-\lambda S_{+2}, \tag{21}$$

和

$$(\Delta\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}\mathscr{D}_{0}+6\mathrm{i}\sigma^{+}r)R_{-2}=\lambda R_{-2}, \tag{22}$$
$$(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_{2}^{\dagger}-6a\sigma^{+}\cos\theta)S_{-2}=-\lambda S_{-2}. \tag{23}$$

可以看到 (再次 !), 并未区分从方程 (17) 和 (18) 导出的分离常量, 理由与前文中的相同.

与 (20) — (23) 等价的方程由楚科尔斯基首先得出, 这里称为楚科尔斯基 [434]
方程.

方程 (20) 可重写为

$$(\Delta\mathscr{D}_{-1}\mathscr{D}_{0}^{\dagger}-6\mathrm{i}\sigma^{+}r)\Delta^{2}R_{+2}=\lambda\Delta^{2}R_{+2}. \tag{24}$$

所以, $\Delta^{2}R_{+2}$ 和 R_{-2} (像第 8 章的 ΔR_{+1} 和 R_{-} 那样) 满足复数共轭方程. 还可注意, 方程 (22) 和 (24) 对 $|s|=2$ 与第 8 章的方程 (96) 和 (97) 一致, 亦即此二方程适用于自旋为 2 的引力子.

80. 规范的选择和自旋系数 κ、σ、λ、ν 的解

相当一般地, 支配扰动的线性化方程必须与对四次标架和对坐标系的选择中具有的自由度一致. 精确地说, 有 6 个自由度来造成局域四次标架的无限小旋转, 有 4 个自由度来造成无限小的坐标变换, 合起来共有 10 阶规范自由度. 可以按方便和场合的要求来运用这些可得的自由度.

如在第 4 章 §29 (b) 中已说明的, 在线性扰动理论中,Ψ_0 和 Ψ_4 是规范不变的, 而 Ψ_1 和 Ψ_3 则不是. 相应地, 可以选择一个规范 (即给四次零基施加一个无限小旋转), 在其中 Ψ_1 和 Ψ_3 为零, 而不影响 Ψ_0 和 Ψ_4.

如果选择了 Ψ_1 和 Ψ_3 在其中为零的规范, k、s、l 和 ν 的对应解就能从方程 (7)、(8)、(10) 和 (11) 直接得出. 回复到原初变量 κ、σ、λ 和 ν, 有

$$\kappa = -\frac{\sqrt{2}}{6M}(\overline{\rho}^*)^2 R_{+2}\left(\mathscr{L}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) S_{+2}, \tag{25}$$

$$\sigma = +\frac{1}{6M}\frac{(\overline{\rho}^*)^2}{\overline{\rho}} S_{+2}\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) R_{+2}, \tag{26}$$

$$\lambda = +\frac{1}{6M}\frac{2}{\overline{\rho}^*} S_{-2}\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) R_{-2}, \tag{27}$$

$$\nu = +\frac{\sqrt{2}}{6M}\frac{1}{\rho^2} R_{-2}\left(\mathscr{L}_2^\dagger - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) S_{-2}, \tag{28}$$

应注意, 其中尚须具体指定函数 $\Phi_0(= R_{+2}S_{+2})$ 和 $\Phi_4(= R_{-2}S_{-2})$ 的相对归一化; 在这个程度上,κ 和 σ 的解有一个与 λ 和 ν 的解相关的不确定性.

[435]

(a) 影子规范

能够作出 Ψ_1 和 Ψ_3 在其中为零的规范以外的其它选择, 特别是能够矫正方程 (7) — (9) 和 (10) — (12) 的奇怪的截短表现、并使它们重获所缺失的明显对称性的那种选择. 对称性缺失的含义如下.

例如, 考虑方程 (7) — (9), 已经看到前二个方程如何允许消去 Φ_1, 而最后一个方程精确地就是能得到 Φ_0 的解耦方程的 k 与 s 之间的 "正确" 关系. 由于算符 $(\mathscr{L}_2 - 3\mathrm{i}a\sin\theta/\overline{\rho}^*)$ 和 $\Delta(\mathscr{D}_2^\dagger - 3/\overline{\rho}^*)$ 的可交换性, 前二个方程也同样允许消去 Φ_0, 但却没有 k 与 s 之间的 "正确关系" 来得到解耦方程. 而运用给局域地扰动的四次标架施加一个无限小旋转的自由度, 就能够通过 (特定地?) 提供所需关系来矫正这种状况. 也就是, 由附加方程

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) k + \left(\mathscr{L}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) s = 2\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_1 \tag{29}$$

能完成消除而得到

$$\left[\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger-\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_0+\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)+\left(\mathscr{L}_2-\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger+\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\right]\Phi_1$$
$$=12M\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_1. \tag{30}$$

展开这个方程, 得

$$[\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0+\mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger-6\mathrm{i}\sigma^+(r+\mathrm{i}a\cos\theta)]\Phi_1=0. \tag{31}$$

这个方程显然是可分离的: 代入

$$\Phi_1=R_{+1}(r)S_{+1}(\theta) \tag{32}$$

—— 现在用下标 "+1" 是指明这些函数是合理的 —— 可得方程对

$$(\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0-6\mathrm{i}\sigma^+r)R_{+1}=(\lambda^{(1)}-2)R_{+1}, \tag{33}$$

和

$$(\mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger+6a\sigma^+\cos\theta)S_{+1}=-(\lambda^{(1)}-2)S_{+1}. \tag{34}$$

利用容易验证的等式

和

$$\left.\begin{aligned}\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0&=\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger+4\mathrm{i}r\sigma^+-2,\\ \mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger&=\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1-4a\sigma^+\cos\theta+2,\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

可将方程 (33) 和 (34) 重写为 [436]

$$(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_1^\dagger-2\mathrm{i}\sigma^+r)R_{+1}=\lambda^{(1)}R_{+1}, \tag{36}$$

和

$$(\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1+2a\sigma^+\cos\theta)S_{+1}=-\lambda^{(1)}S_{+1} \tag{37}$$

而这些就是在第 8 章 §69 中对麦克斯韦标量 ϕ_0 导出的同样方程 (第 8 章方程 (24) 和 (25)).

类似地, 对方程 (10) — (12) 附加方程

$$\left(\mathscr{D}_0-\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)n-\left(\mathscr{L}_2^\dagger-\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)l=2\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_3, \tag{38}$$

可得到对 Φ_3 的解耦方程, 该方程经变量分离后可将 Φ_3 表示为$R_{-1}(r)S_{-1}(\theta)$, 其中 $R_{-1}(r)$ 和 $S_{-1}(\theta)$ 满足对麦克斯韦标量 ϕ_2 的方程对, 即第 8 章 (26) 和 (27).

所以, 在使方程 (7) — (12) 重获所缺失的对称性的规范中, 外尔标量 Ψ_1 和 Ψ_3 与描述克尔几何中电磁波传播的麦克斯韦标量 ϕ_0 和 ϕ_2 满足同样的方程. 在第 11 章 §111 中将显示, 在表现为最适宜于处理克尔 – 纽曼带电黑洞扰动的规范中, 会重新获得现在由对称性考虑的要求来假定的方程 (29) 和 (38).

81. 楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式

可得到函数 $\Delta^2 R_{+2}$ 与 R_{-2} 之间和 S_{+2} 与 S_{-2} 之间的、与第 8 章 §70 中所建立的类似的等式. 这些等式的证明 (与 §70 对照) 要求很精细的代数操作. 但由于它们在整个理论中所起的非常关键的作用, 这里还是给出证明过程中的一些主要步骤, 而不只是简单地列出它们.

定理 1

$$\Delta^2 \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 R_{-2} \text{ 是 } \Delta^2 R_{+2} \text{ 的常量倍}$$

和

$$\Delta^2 \mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger \Delta^2 R_{+2} \text{ 是 } R_{-2} \text{ 的常量倍.}$$

证明 由支配 R_{-2} 和 $\Delta^2 R_{+2}$ 的方程 (20) 和 (24), 此定理是等价于主张等式

$$\Delta^2 \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma^+ r) = (\Delta\mathscr{D}_{-1}\mathscr{D}_0^\dagger - 6\mathrm{i}\sigma^+ r)\Delta^2\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 \tag{39}$$

及其复数共轭.

[437] 考虑方程 (39) 的左边, 可通过接连推演而得出等式, 其主要步骤是

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0(\Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma^+ r)\\
&= (\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger + 6\mathrm{i}\sigma^+ r\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 + 24\mathrm{i}\sigma^+\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0)\mathscr{D}_0\\
&= [\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\Delta - 2(\mathrm{i}K + r - M)\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 - 10\mathrm{i}\sigma^+ r\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 - 8\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0]\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\\
&= [\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 + 6(r - M)\mathscr{D}_0 - 2\mathrm{i}K\mathscr{D}_0 - 10\mathrm{i}\sigma^+ r + 4]\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\\
&= (\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger - 6\mathrm{i}\sigma^+ r)\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0.
\end{aligned} \tag{40}$$

推论 通过对函数 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 的相对归一化的适当选择, 可安排

$$\Delta^2 \mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 R_{-2} = \mathscr{C}\Delta^2 R_{+2} \tag{41}$$

和

$$\Delta^2 \mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger \Delta^2 R_{+2} = \mathscr{C}^* R_{-2}, \tag{42}$$

其中 $\mathscr{C}$ 是一个复数常量.

由于 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 满足复共轭方程, 所以能以指定方式安排相对归一化.

定理 2 如果函数 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 相对归一化的安排是能使方程 (41) 和 (42) 成立, 则常量 $\mathscr{C}$ 模的平方是

$$|\mathscr{C}|^2 = \lambda^2(\lambda+2)^2 - 8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6) - 12a^2] + 144\sigma^{+4}\alpha^4 + 144\sigma^{+2}M^2, \tag{43}$$

其中

$$\alpha^2 = a^2 + am/\sigma^+. \tag{44}$$

证明 方程 (41) 和 (42) 的一个显然结果是

$$\Delta^2\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta^2\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0R_{-2} = |\mathscr{C}|^2R_{-2}. \tag{45}$$

于是有等式

$$\Delta^2\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\mathscr{D}_0^\dagger\Delta^2\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 = |\mathscr{C}|^2 \mod \Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma^+r = \lambda, \tag{46}$$

而 $|\mathscr{C}|^2$ 的值 (43) 必定能由对此等式的直接计算得出, 尽管此计算并不容易.

首先, 以 $\Delta\mathscr{D}_{-1}^\dagger\mathscr{D}_0 + 6\mathrm{i}\sigma^+r = \lambda$ 为模, 建立下列恒等式:

$$\Delta\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 \equiv 2(\mathrm{i}K + r - M)\mathscr{D}_0 + (\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+r), \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 \equiv{}& [4\mathrm{i}K(\mathrm{i}K + r - M) + (\lambda + 2 + 2\mathrm{i}\sigma^+r)\Delta]\mathscr{D}_0\\ &+2\mathrm{i}K(\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+r) - 6\mathrm{i}\sigma^+\Delta,\end{aligned} \tag{48}$$

和 [438]

$$\begin{aligned}\Delta^3\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0 \equiv{}& \{-8\mathrm{i}K[K^2 + (r-M)^2] + [4\mathrm{i}K(\lambda+2) + 8\mathrm{i}\sigma^+r(r-M)]\Delta\\ &-8\mathrm{i}\sigma^+\Delta^2\}\mathscr{D}_0\\ &+[(\lambda + 2 + 2\mathrm{i}\sigma^+r)(\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+r) - 12\mathrm{i}\sigma^+(\mathrm{i}K - r + M)]\Delta\\ &+4\mathrm{i}K(\mathrm{i}K - r + M)(\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+r)\\ \equiv{}& A_0\mathscr{D}_0 + B_0 \text{ (比如说).}\end{aligned} \tag{49}$$

现在必须将算符 $\mathscr{D}_{-1}^\dagger$ 接连四次作用于等式 (49), 可以借助于下列递推关系来做,

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{-1}^\dagger(A_n\mathscr{D}_0 + B_n) \equiv{}& (A_{n,r} + B_n)\mathscr{D}_0 +\\ &\frac{1}{\Delta}[(\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+r)A_n - 2(\mathrm{i}K + r - M)B_n + \Delta B_{n,r}]\\ \equiv{}& A_{n+1}\mathscr{D}_0 + B_{n+1} \text{ (比如说).}\end{aligned} \tag{50}$$

按此方法, 可得

$$\left.\begin{aligned}A_1 &= [\lambda(\lambda+2) + 4\mathrm{i}\sigma^+r(\lambda+3) + 12\sigma^{+2}r^2 - 12\mathrm{i}\sigma^+(\mathrm{i}K + r - M)]\Delta\\ &\quad +4\mathrm{i}K(\mathrm{i}K + r - M)(\lambda + 6\mathrm{i}\sigma^+r),\\ B_1 &= 2\mathrm{i}K(\lambda^2 + 36\sigma^{+2}r^2) - 12\mathrm{i}\sigma^+\lambda\Delta;\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= -8\mathrm{i}\sigma^+(\lambda+6\mathrm{i}\sigma^+ r)\Delta - 24\mathrm{i}\sigma^+[K^2+(r-M)^2] \\ &\quad +2(\mathrm{i}K+r-M)(\lambda+6\mathrm{i}\sigma^+ r)(\lambda+2+2\mathrm{i}\sigma^+ r), \\ B_2 &= (\lambda^2+36\sigma^{+2}r^2)(\lambda+2+2\mathrm{i}\sigma^+ r)+12\mathrm{i}\sigma^+(\lambda-6\mathrm{i}\sigma^+ r)(\mathrm{i}K-r+M); \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= 48\sigma^{+2}\Delta+(\lambda+6\mathrm{i}\sigma^+ r)[(\lambda+2)^2+4\sigma^{+2}r^2], \\ &\quad -12\mathrm{i}\sigma^+(r-M)(\lambda+2-2\mathrm{i}\sigma^+ r)-4\sigma^+ K(7\lambda+6+18\mathrm{i}\sigma^+ r) \\ B_3 &= -6\mathrm{i}\sigma^+(\lambda+6\mathrm{i}\sigma^+ r)(\lambda+2+2\mathrm{i}\sigma^+ r)+72\sigma^{+2}(\mathrm{i}K-r+M); \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

和

$$\left.\begin{aligned} A_4 &= 0, \\ B_4 &= \frac{1}{\Delta}\{\lambda^2(\lambda+2)^2-8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6)-12a^2]+144\sigma^{+2}(M^2+\sigma^{+2}\alpha^4)\}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

导出序列的最后一行给出斯塔罗宾斯基常量 $|\mathscr{C}|^2$ 的值.

重要的是看到, 虽然 $|\mathscr{C}|^2$ 已经得出, 但其幅角仍有待确定.

定理 3

$$\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 S_{+2} \text{ 是 } S_{-2} \text{ 的常量倍}$$

和

$$\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}^\dagger_2 S_{-2} \text{ 是 } S_{+2} \text{ 的常量倍.}$$

[439] **证明** 此定理显然是等价于主张等式

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2(\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}_2+6a\sigma^+\cos\theta) \\ &=(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}^\dagger_2-6a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2, \end{aligned} \tag{55}$$

及其由 $\pi-\theta$ 取代 θ 而得到的伴随式.

考虑等式 (55) 的左边, 可通过接连推演得到:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2(\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}_2+6a\sigma^+\cos\theta) \\ &=[\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\mathscr{L}^\dagger_{-1}+(6a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1-(24a\sigma^+\sin\theta)\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1]\mathscr{L}_2 \\ &=[\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}^\dagger_0+(2a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0-(12a\sigma^+\sin\theta)\mathscr{L}_0+2\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0]\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \\ &=[\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}^\dagger_1-(2a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}+2\mathscr{L}_{-1}-4a\sigma^+\sin\theta]\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \\ &=(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}^\dagger_2-6a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2, \end{aligned} \tag{56}$$

其中已在不同步骤里运用了下列等式,

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_2\mathscr{L}^\dagger_{-1} &= \mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}_1-4a\sigma^+\cos\theta+2, \\ \mathscr{L}_1\mathscr{L}^\dagger_0 &= \mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}_0-4a\sigma^+\cos\theta, \\ \mathscr{L}_0\mathscr{L}^\dagger_1 &= \mathscr{L}^\dagger_2\mathscr{L}_{-1}-4a\sigma^+\cos\theta-2, \\ \mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}^\dagger_1 &= \mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}^\dagger_2\mathscr{L}_1-(4a\sigma^+\cos\theta)\mathscr{L}_{-1}-2\mathscr{L}_{-1}+4a\sigma^+\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

推演 (56) 的最后一步确立了等式 (55), 从而确立了定理.

定理 3 的另一种表述是存在下列关系,

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2}&=D_1S_{-2}\\ \text{和}\qquad\qquad\qquad\qquad\\ \mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}^\dagger_2S_{-2}&=D_2S_{+2},\end{aligned}\right\}\tag{58}$$

其中 D_1 和 D_2 是两个实常量.

定理 4 如果 $S_{+2}(\theta)$ 和 $S_{-2}(\theta)$ 二者都归一化, 则在关系式 (58) 中 $D_1=D_2$, 并有

$$\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2}=DS_{-2}\ \text{和}\ \mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}^\dagger_2S_{-2}=DS_{+2}.\tag{59}$$

证明 如同对第 8 章的定理 4 那样, 将引理 4(§68) 接连四次运用于归一化积分:

$$\begin{aligned}D_1^2&=D_1^2\int_0^\pi S_{-2}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2})(\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2})\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi S_{+2}(\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}^\dagger_2\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2})\sin\theta\mathrm{d}\theta\\&=D_1D_2\int_0^\pi S_{+2}^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=D_1D_2;\end{aligned}\tag{60}$$

[440]

从而得到 D_1 与 D_2 相等.

定理 5 定理 3 中的常量 D 有值

$$\left.\begin{aligned}D^2&=\lambda^2(\lambda+2)^2-8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6)-12a^2]+144\sigma^{+4}\alpha^4\\&=|\mathscr{C}|^2-144\sigma^{+2}M^2\end{aligned}\right\}\tag{61}$$

证明 D^2 的值必须由对下列等式的直接计算得到,

$$\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}^\dagger_0\mathscr{L}^\dagger_1\mathscr{L}^\dagger_2\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2=D^2\mod\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}_2+6a\sigma^+\cos\theta=-\lambda,\tag{62}$$

该等式来自方程 (58)(实际上已在推演 (60) 的倒数第二行运用). 对等式 (62) 的直接计算也不是一个容易的工作. 计算的主要步骤如下:

首先, 借助于递推关系,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_n\mathscr{L}_2\equiv&-(\lambda+6a\sigma^+\cos\theta)+[2Q+(n+1)\cot\theta]\mathscr{L}_2\\&\mod\mathscr{L}^\dagger_{-1}\mathscr{L}_2+6a\sigma^+\cos\theta=-\lambda,\end{aligned}\tag{63}$$

可得

$$\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\equiv-(\lambda+6a\sigma^+\cos\theta)+2(Q+\cot\theta)\mathscr{L}_2,\tag{64}$$

$$\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \equiv [6a\sigma^+\sin\theta - 2Q(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta)] + [-(\lambda+2) - 2a\sigma^+\cos\theta + 4Q(Q+\cot\theta)]\mathscr{L}_2, \tag{65}$$

和

$$\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \equiv (\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta)(\lambda + 2 - 4Q^2 + 4Q\cot\theta - 2a\sigma^+\cos\theta) + 12a\sigma^+(Q\sin\theta - \cos\theta) + [8a\sigma^+\mathrm{cosec}\theta - 4Q(\lambda + 2 - 2Q^2 + 2\cot^2\theta)]\mathscr{L}_2. \tag{66}$$

现在必须对等式 (66) 接连作用算符 $\mathscr{L}_2^\dagger$、$\mathscr{L}_1^\dagger$、$\mathscr{L}_0^\dagger$ 和 $\mathscr{L}_{-1}^\dagger$. 借助于递推关系

$$\mathscr{L}_n^\dagger(A + B\mathscr{L}_2) \equiv [(n-2)A\cot\theta - 2QA + A_{,\theta} - B(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta)] + [(n+1)B\cot\theta + B_{,\theta} + A]\mathscr{L}_2, \tag{67}$$

[441] 可逐步地得到,

$$\mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 = 2Q(\lambda^2 - 36a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta) - 12a\sigma^+\lambda\sin\theta + \{4Q[3a\sigma^+\sin\theta - (Q+\cot\theta)(\lambda - 6a\sigma^+\cos\theta)] + \lambda(\lambda+2) - 4\lambda a\sigma^+\cos\theta - 12a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta\}\mathscr{L}_2, \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 &= 4a\sigma^+(\lambda^2 - 36a^2\sigma^+\cos^2\theta)\cos\theta \\ &+(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta)\{12a\sigma^+Q\sin\theta - [\lambda(\lambda+2) - 4\lambda a\sigma^+\cos\theta \\ &-12a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta]\} + \{4(\lambda - 6a\sigma^+\cos\theta)\cdot \\ &(Q - 4a\sigma^+Q\cos\theta - 2a\sigma^+\mathrm{cosec}\theta) \\ &+2Q(\lambda^2 - 36a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta) - 24a\sigma^+Q^2\sin\theta \\ &+2[\lambda(\lambda+2) - 4\lambda a\sigma^+\cos\theta - 12a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta]\cot\theta\}\mathscr{L}_2,\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \\ &\equiv 6a\sigma^+(\lambda^2 + 2\lambda - 8a\sigma^+\lambda\cos\theta + 12a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta \\ &-12a\sigma^+Q\sin\theta)\sin\theta + \{-48a^2\sigma^{+2} - 4\lambda - (\lambda - 6a\sigma^+\cos\theta)\cdot \\ &(\lambda^2 + 2\lambda - 4a\sigma^+\cos\theta - 4a^2\sigma^{+2}\cos^2\theta) - 2(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta)\cdot \\ &(\lambda - 4a\sigma^+\cos\theta) + 4a\sigma^+Q(6 + 7\lambda - 18a\sigma^+\cos\theta)\sin\theta\}\mathscr{L}_2,\end{aligned} \tag{70}$$

最后有,

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_{-1}^\dagger\mathscr{L}_0^\dagger\mathscr{L}_1^\dagger\mathscr{L}_2^\dagger\mathscr{L}_{-1}\mathscr{L}_0\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 \\ &\equiv \lambda^2(\lambda+2)^2 - 8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6) - 12a^2] + 144\sigma^{+4}\alpha^4 = D^2.\end{aligned} \tag{71}$$

(*a*) 有用公式汇集

记

$$\Delta^2 R_{+2} = P_{+2} \quad 和 \quad R_{-2} = P_{-2} \tag{72}$$

其中的径向函数 R_{+2} 和 R_{-2} 是如方程 (41) 和 (42) 所要求的相对归一化的.

现已清楚, 借助于已建立的等式, 可以像第 8 章 §70 中那样用楚科尔斯基函数 (径向和角向二者) 自身来表示它们的导数.

由于方程 (49) 以 P_{-2} 所满足的方程为模是正确的, 所以它是下列方程的简化形式,

$$\Delta^3 \mathscr{D}_0 \mathscr{D}_0 \mathscr{D}_0 \mathscr{D}_0 P_{-2} = \Delta \mathscr{C} P_{+2}, \tag{73}$$

其中 P_{-2} 的所有更高阶导数已经借助于 P_{-2} 所满足的二阶方程除去. 所以, 方程 (49) 和它的复数共轭能用来将 P_{+2} 和 P_{-2} 的导数表示为 P_{+2} 和 P_{-2} 的线性组合. 可得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}B_1 \frac{\mathrm{d}P_{-2}}{\mathrm{d}r} &= \Delta(\mathscr{C}_1 + \mathrm{i}\mathscr{C}_2)P_{+2} - \left[\left(A_1 - \frac{B_1 K}{\Delta}\right) + \mathrm{i}A_2\right] P_{-2} \\ 和 \quad -\mathrm{i}B_1 \frac{\mathrm{d}P_{+2}}{\mathrm{d}r} &= \Delta(\mathscr{C}_1 - \mathrm{i}\mathscr{C}_2)P_{-2} - \left[\left(A_1 - \frac{B_1 K}{\Delta}\right) - \mathrm{i}A_2\right] P_{+2}, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

[442]

其中

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathrm{i}\mathscr{C}_2, \Gamma_1 = \lambda(\lambda+2) - 12\sigma^{+2}\alpha^2, \Gamma_2 = 12\sigma^+ M, \tag{75}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= +\Delta\Gamma_1 - 4\lambda K^2 + 24\sigma^+ K(a^2 - Mr), \\ A_2 &= -\Delta\Gamma_2 - 4\lambda[K(r-M) + r\sigma^+\Delta] + 24\sigma^+ rK^2 = -\frac{1}{2}B_{1,r}, \\ B_1 &= -8K[K^2 + (r-M)^2] + 4\Delta[K(\lambda+2) + 2\sigma^+ r(r-M)] - 8\sigma^+\Delta^2 \\ &= -8K^3 + 8K(a^2 - M^2) - 8\sigma^+\Delta(a^2 - Mr) + 4\lambda K\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

类似地, 由方程 (58) 和 (66) 可得

$$\beta_1 \mathscr{L}_2 S_{+2} = DS_{-2} - (\alpha_1 + \alpha_2) S_{+2}, \tag{77}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= 8Q^3 - 8Q\cot^2\theta - 4(\lambda+2)Q + 8a\sigma^+ \mathrm{cosec}\theta, \\ \alpha_1 &= \lambda(\lambda+2) - 12\alpha^2\sigma^{+2} + 24a\sigma^+ Q\mathrm{cosec}\theta - 4\lambda Q^2, \\ \alpha_2 &= -24a\sigma^+ Q^2\cos\theta + 4\lambda(Q\cot\theta + a\sigma\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

将方程 (77) 与其 “伴随” 结合, 可得方程对

$$\left.\begin{aligned}\beta_1\frac{\mathrm{d}(S_{+2}+S_{-2})}{\mathrm{d}\theta}&=-(\alpha_2+2\beta_1\cot\theta)(S_{+2}+S_{-2})\\&\quad-(\alpha_1+\beta_1Q+D)(S_{+2}-S_{-2}),\\ \beta_1\frac{\mathrm{d}(S_{+2}-S_{-2})}{\mathrm{d}\theta}&=-(\alpha_1+\beta_1Q-D)(S_{+2}+S_{-2})\\&\quad-(\alpha_2+2\beta_1\cot\theta)(S_{+2}-S_{-2}).\end{aligned}\right\}\tag{79}$$

和

方程 (74) 和 (79) 将在后继的进展中起到实质性作用.

(*b*) **括号标记**

将会看到, 下列标记有助于对理论中方程的缩写. 令

$$[P]^{\pm}=P_{+2}\pm P_{-2};[S]^{\pm}=S_{+2}\pm S_{-2},\tag{80}$$

$$[\mathscr{D}P]^{\pm}=\mathscr{D}_0^{\dagger}P_{+2}\pm\mathscr{D}_0P_{-2},[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{\pm}=\mathscr{D}_0^{\dagger}\mathscr{D}_0^{\dagger}P_{+2}\pm\mathscr{D}_0\mathscr{D}_0P_{-2};\tag{81}$$

$$[\mathscr{L}S]^{\pm}=\mathscr{L}_2S_{+2}\pm\mathscr{L}_2^{\dagger}S_{-2};[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{\pm}=\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2S_{+2}\pm\mathscr{L}_1^{\dagger}\mathscr{L}_2^{\dagger}S_{-2}.\tag{82}$$

[443] 上述定义的初步结果是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[P]^{\pm}=[\mathscr{D}P]^{\pm}+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}[P]^{\mp},\tag{83}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\mathscr{D}P]^{\pm}=[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{\pm}+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}[\mathscr{D}P]^{\mp},\tag{84}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[S]^{\pm}=[\mathscr{L}S]^{\pm}-Q[S]^{\mp}-2[S]^{\pm}\cot\theta,\tag{85}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}[\mathscr{L}S]^{\pm}=[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{\pm}-Q[\mathscr{L}S]^{\mp}-[\mathscr{L}S]^{\pm}\cot\theta.\tag{86}$$

按此标记方式, 方程 (47) 及其复数共轭和方程 (64) 及其伴随取形式

$$\Delta[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{\pm}=-2\mathrm{i}K[\mathscr{D}P]^{\mp}+2(r-M)[\mathscr{D}P]^{\pm}+\lambda[P]^{\pm}+6\mathrm{i}\sigma^{+}r[P]^{\mp}\tag{87}$$

和

$$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{\pm}=2Q[\mathscr{L}S]^{\mp}+2[\mathscr{L}S]^{\pm}\cot\theta-\lambda[S]^{\pm}-6a\sigma^{+}[S]^{\mp}\cos\theta.\tag{88}$$

实际上这些就是对归一化函数的楚科尔斯基方程.

82. 度规扰动; 问题的表述

在关于时空扰动的考虑中, 主要的兴趣在于对度规系数导致的改变. 在纽曼 – 彭罗斯形式里, 这些改变是直接地与零基矢量的改变 $\boldsymbol{l}^{(1)}$、$\boldsymbol{n}^{(1)}$、$\boldsymbol{m}^{(1)}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}^{(1)}$ 关联, 并可以用后者来表示. 另外的兴趣则是对于自旋系数和外尔标量的改变. 于是就必须着手考虑 (2) 式中所列的量. 但在能够精确地表述所寻找的是什么之前, 重要的是弄清楚迄今的分析所已经和尚未达到的各是什么.

在 §79 中已经得到了 (1) 式中所列量的明晰解. 尤其是, 自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 在规范,

$$\Psi_1 = \Psi_3 = 0, \tag{89}$$

的解由方程 (25) — (28) 给出. 而外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_4 的解 (独立于任何规范选择) 可由楚科尔斯基函数 $R_{\pm 2}$ 和 $S_{\pm 2}$ 表示, 即有

$$\Psi_0 = R_{+2}S_{+2} \quad 和 \quad \Psi_4 = R_{-2}S_{-2}/(\overline{\rho}^*)^4, \tag{90}$$

其中应记得, 如果角向函数 S_{+2} 和 S_{-2} 二者都归化为 1, 且径向函数 $\Delta^2 R_{+2}$ 和 R_{-2} 选为 P_{+2} 和 P_{-2}(与方程 (41) 和 (42) 一致), 那么在 Ψ_0 或者 Ψ_4 的解中就还有一个未定的比例常量. 可以记取的是, 第 8 章 §71 麦克斯韦方程解中类似的不确定性能容易地解决, 因为支配麦克斯韦标量 ϕ_0 和 ϕ_2 的方程并不像方程 (7) — (12) 那样完全地解耦. 除了 Ψ_0 和 Ψ_4 解的相对归一化外, 复数斯塔罗宾斯基常量的幅角也未确定. [444]

(a) 基矢扰动的矩阵表示

引入对基矢 $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}})$ 的指标标记是便利的. 令

$$\boldsymbol{l}^1 = \boldsymbol{l}, \quad \boldsymbol{l}^2 = \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{l}^3 = \boldsymbol{m}, \quad 和 \quad \boldsymbol{l}^4 = \overline{\boldsymbol{m}}, \tag{91}$$

就能以如下方式将矢量 l^i 的扰动 $l^{i(1)}$ 表示为未扰动基矢 l^i 的线性组合,

$$\boldsymbol{l}^{i(1)} = A^i_j \boldsymbol{l}^j. \tag{92}$$

基矢的扰动于是就能完全地由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 来描述.

由于 $\boldsymbol{l}^1$ 和 $\boldsymbol{l}^2$ 是实数, 而 $\boldsymbol{l}^3$ 和 $\boldsymbol{l}^4$ 是复数共轭, 所以矩阵元 A^1_1、A^2_2、A^1_2 和 A^2_1 是实数, 而所有其余的元是复数; 而且, 指标 3 和 4 相互替换的元是复数共轭. 这样一来, $\boldsymbol{A}$ 的确定就需要有 16 个实函数.

将会看到, 下列 $A^i_j (i \neq j)$ 的倍数很自然地在后继的分析中出现:

$$\left.\begin{array}{llll}
F^1_2 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2} A^1_2; & F^2_1 = \dfrac{2\rho^2}{\Delta} A^2_1; & F^3_1 = \dfrac{1}{\overline{\rho}^*} A^3_1; & F^4_1 = \dfrac{1}{\overline{\rho}} A^4_1, \\
F^1_3 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}} A^1_3; & F^2_3 = \dfrac{1}{\overline{\rho}} A^2_3; & F^3_2 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}^*} A^3_2; & F^4_2 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}} A^4_2, \\
F^1_4 = \dfrac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}^*} A^1_4; & F^2_4 = \dfrac{1}{\overline{\rho}^*} A^2_4; & F^3_4 = \dfrac{1}{(\overline{\rho}^*)^2} A^3_4; & F^4_3 = \dfrac{1}{(\overline{\rho})^2} A^4_3.
\end{array}\right\} \tag{93}$$

还将看到, F_j^i 和 $A_j^i(i \neq j)$ 的下列组合在理论中起着重要作用:

$$\left.\begin{aligned} F &= F_3^1 + F_4^1; \quad B_1 = (F_1^3 + F_2^3) + (F_1^4 + F_2^4), \\ G &= F_3^2 + F_4^2; \quad B_2 = (F_1^3 + F_2^3) - (F_1^4 + F_2^4), \\ H &= F_1^3 - F_2^3; \quad C_1 = (F_3^1 + F_3^2) - (F_4^1 + F_4^2), \\ J &= F_1^4 - F_2^4; \quad C_2 = (F_3^1 - F_3^2) - (F_4^1 - F_4^2), \\ U &= A_1^1 + A_2^2, \quad \text{和} \quad V = A_3^3 + A_4^4. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

[445] 将会得出, 如所定义的,

$$F_2^1, F_1^2, U, V, F, G \text{ 和 } B_1 \text{ 是实数},$$

$$B_2, C_1 \text{ 和 } C_2 \text{ 是虚数},$$

而 F_4^1 和 F_3^1, F_i^4 和 $F_i^3(i=1,2), F_3^4$ 和 F_4^3, 以及 H 和 J 是复数共轭. (95)

(*b*) **度规系数的扰动**

如所已述, 时空几何扰动理论的中心问题是度规系数扰动的正则模式的确定. 这些度规扰动是按下式与零基矢的扰动关联 (见第 1 章方程 (246)),

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu(1)} = {} & l^\mu n^{\nu(1)} + l^{\mu(1)} n^\nu - m^\mu \overline{m}^{\nu(1)} - \overline{m}^{\mu(1)} m^\nu \\ & + l^{\nu(1)} n^\mu + l^\nu n^{\mu(1)} - m^{\nu(1)} \overline{m}^\mu - \overline{m}^\nu m^{\mu(1)}. \end{aligned} \tag{96}$$

按照上式、方程 (92) 和第 6 章方程 (170) 来计算 $g^{\mu\nu(1)}$ 的各个分量, 得

$$\begin{aligned} g^{tt(1)} = {} & \frac{(r^2+a^2)^2}{\rho^2\Delta}(A_1^1 + A_2^2) - \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2}(A_3^3 + A_4^4) \\ & + \frac{(r^2+a^2)^2}{\rho^2\Delta}(F_2^1 + F_1^2) + a^2(F_4^3 + F_3^4)\sin^2\theta \\ & + \frac{\sqrt{2}}{\Delta}\mathrm{i}a(r^2+a^2)(C_1 + B_2)\sin\theta, \\ g^{rr(1)} = {} & -\frac{\Delta}{\rho^2}(A_1^1 + A_2^2) + \frac{\Delta}{\rho^2}(F_2^1 + F_1^2), \\ g^{\theta\theta(1)} = {} & -\frac{1}{\rho^2}(A_3^3 + A_4^4) - (F_4^3 + F_3^4), \\ g^{\varphi\varphi(1)} = {} & \frac{a^2}{\rho^2\Delta}(A_1^1 + A_2^2) - \frac{1}{\rho^2}(A_3^3 + A_4^4)\mathrm{cosec}^2\theta \\ & + \frac{a^2}{\rho^2\Delta}(F_2^1 + F_1^2) + (F_4^3 + F_3^4)\mathrm{cosec}^2\theta + \frac{\sqrt{2}}{\Delta}\mathrm{i}a(C_1 + B_2)\mathrm{cosec}\theta, \\ g^{tr(1)} = {} & -\frac{r^2+a^2}{\rho^2}(F_2^1 - F_1^2) + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\sqrt{2}}(H - J - C_2), \\ g^{t\theta(1)} = {} & +\mathrm{i}a(F_4^3 - F_3^4)\sin\theta + \frac{r^2+a^2}{\Delta\sqrt{2}}(F + G - B_1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g^{t\varphi(1)} &= a\frac{r^2+a^2}{\Delta\rho^2}(A_1^1+A_2^2)-\frac{a}{\rho^2}(A_3^3+A_4^4)\\
&\quad +a\frac{r^2+a^2}{\rho^2\Delta}(F_2^1+F_1^2)+a(F_4^3+F_3^4)\\
&\quad +\frac{\mathrm{i}}{\Delta\sqrt{2}}[(r^2+a^2)+a^2\sin^2\theta](C_1+B_2)\mathrm{cosec}\theta,\\
g^{r\theta(1)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(F-G+J+H),\\
g^{r\varphi(1)} &= -\frac{a}{\rho^2}(F_2^1-F_1^2)+\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(H-J-C_2)\mathrm{cosec}\theta,\\
g^{\theta\varphi(1)} &= \mathrm{i}(F_4^3-F_3^4)\mathrm{cosec}\theta+\frac{a}{\Delta\sqrt{2}}(F+G-B_1).
\end{aligned}
\tag{97}
$$

[446]

可见度规系数的扰动只依赖于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元的下列 10 种组合:

$$
\left.
\begin{aligned}
&A_1^1+A_2^2, A_3^3+A_4^4, F_2^1\pm F_1^2, F_4^3\pm F_3^4, C_1+B_2,\\
&H-J-C_2, F+G-B_1 \ \text{和} \ F-G+J+H.
\end{aligned}
\right\}
\tag{98}
$$

(*c*) 须确定的量、可用的方程和具有的规范自由度的列举

须确定的量 (列于 (1) 和 (2)) 要求 10 个实数函数来指明 5 个复数外尔标量,24 个实数函数来指明 12 个复数自旋系数,16 个实数函数来指明矩阵 $\boldsymbol{A}$: 共计 50 个实数函数. 这 50 个函数受制于 10 个规范自由度. 这 10 个自由度的 6 个是建立局域四次标架的自由度,4 个是理论的普遍协变性的自由度.

如在第 1 章 §8 中已详细讲过的, 纽曼 – 彭罗斯形式提供了三组方程: 比安基恒等式、转换关系和里奇恒等式. 把每个复数方程都算作等价于两个实数方程, 就有 16 个方程来表述比安基恒等式 (对于正在考虑的真空场),24 个方程来表述转换关系, 还有 36 个方程来表述里奇恒等式 (或者, 如果允许第 1 章方程 (311) 的 16 个消元关系, 就只有 20 个). 这 76 个方程可用于确定受制于 10 个规范自由度的 50 个实数函数.

在作下列假定时已经利用了 6 个四次自由度中的 4 个,

$$
\Psi_1=\Psi_3=0, \tag{99}
$$

如在得出自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 的解 (25) — (28) 时所做的. 可以进一步利用 4 个坐标自由度中的 2 个, 即假定外尔标量的扰动也为零, [447]

$$
\Psi_2^{(1)}=0. \tag{100}
$$

在作出这些选择后, 仍余下 4 个规范自由度.

83. 剩余比安基恒等式的线性化

8 个比安基恒等式中的 4 个 (即包括在方程 (3) 和 (4) 中的) 已被使用. 剩余的 4 个等式是 (第 1 章方程 (321, b、c、f 和 g)) 是

$$D\Psi_2 = 3\widetilde{\rho}\Psi_2, \quad \Delta\Psi_2 = -3\mu\Psi_2, \quad \delta\Psi_2 = 3\tau\Psi_2 \text{ 和 } \delta^*\Psi_2 = -3\pi\Psi_2, \tag{101}$$

其中 $\lambda\Psi_0$、$\kappa\Psi_4$、$\nu\Psi_0$ 和 $\sigma\Psi_4$ 等二阶小量已忽略. 方程 (101) 的显著特征是, 在规范 $\Psi_1 = \Psi_3 = 0$ 中, 它们在形式上与定常态情形相同: 它们包含一阶小量在内成立.

由 $\Psi_2 = -M(\overline{\rho}^*)^{-3}$, 且已选择在其中 $\Psi_2^{(1)} = 0$ 的坐标规范, 于是方程 (101) 的线性化形式是

$$\widetilde{\rho}^{(1)} = -\boldsymbol{l}^{1(1)}\lg\overline{\rho}^*; \mu^{(1)} = \boldsymbol{l}^{2(1)}\lg\overline{\rho}^*;$$
$$\tau^{(1)} = -\boldsymbol{l}^{3(1)}\lg\overline{\rho}^*; \text{ 和 } \pi^{(1)} = +\boldsymbol{l}^{4(1)}\lg\overline{\rho}^*. \tag{102}$$

利用关系

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{l}^1\lg\overline{\rho}^* = D\lg\overline{\rho}^* = \frac{1}{\overline{\rho}^*}; \boldsymbol{l}^2\lg\overline{\rho}^* = \Delta\lg\overline{\rho}^* = \mu; \\ &\boldsymbol{l}^3\lg\overline{\rho}^* = \delta\lg\overline{\rho}^* = -\tau; \boldsymbol{l}^4\lg\overline{\rho}^* = \delta^*\lg\overline{\rho}^* = +\pi, \end{aligned}\right\} \tag{103}$$

并记取

$$\boldsymbol{l}^{i(1)} = A^i_j\boldsymbol{l}^j, \tag{104}$$

可得方程 (102) 的展开形式是

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{\rho}^{(1)} &= -\left(\frac{A^1_1}{\overline{\rho}^*} + A^1_2\mu - A^1_3\tau + A^1_4\pi\right) = -\frac{M^{(1)}}{\overline{\rho}^*}, \\ \mu^{(1)} &= +\left(\frac{A^2_1}{\overline{\rho}^*} + A^2_2\mu - A^2_3\tau + A^2_4\pi\right) = \frac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}^*}M^{(2)}, \\ \tau^{(1)} &= -\left(\frac{A^3_1}{\overline{\rho}^*} + A^3_2\mu - A^3_3\tau + A^3_4\pi\right) = -M^{(3)}, \\ \pi^{(1)} &= +\left(\frac{A^4_1}{\overline{\rho}^*} + A^4_2\mu - A^4_3\tau + A^4_4\pi\right) = \frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}M^{(4)}, \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

[448] 其中

$$\left.\begin{aligned} M^{(1)} &= +A^1_1 - F^1_2 + \mathrm{i}a\sqrt{2}\frac{\rho^2}{\Delta}F\sin\theta, \\ M^{(2)} &= -A^2_2 + F^2_1 + \mathrm{i}a\sqrt{2}\frac{\rho^2}{\Delta}G\sin\theta, \\ M^{(3)} &= H + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(F^3_4 + \frac{A^3_3}{\rho^2}\right), \\ M^{(4)} &= J + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(F^4_3 + \frac{A^4_4}{\rho^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

为今后的参照可注意, 下列方程是方程 (105) 的直接结果:

$$\left.\begin{aligned}
-(\tau^*+\pi)^{(1)} &= -\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}A_1^4+\frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4}A_2^4-\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}\left(\frac{A_4^4}{\overline{\rho}^*}+\frac{A_3^4}{\overline{\rho}}\right),\\
+(\mu^*-\mu)^{(1)} &= -\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}A_1^2+\frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4}A_2^2-\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}\left(\frac{A_4^2}{\overline{\rho}^*}+\frac{A_3^2}{\overline{\rho}}\right),\\
+(\widetilde{\rho}^*-\widetilde{\rho})^{(1)} &= +\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}A_1^1-\frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4}A_2^1+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}\left(\frac{A_4^1}{\overline{\rho}^*}+\frac{A_3^1}{\overline{\rho}}\right),\\
+(\tau-\pi^*)^{(1)} &= -\frac{2r}{\rho^2}A_1^3+\frac{r\Delta}{\rho^4}A_2^3+\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}\left(\frac{A_3^3}{\overline{\rho}}+\frac{A_4^3}{\overline{\rho}^*}\right).
\end{aligned}\right\}\tag{107}$$

可见比安基恒等式 (101) 能用来直接由规范 $\Psi_2^{(1)}=0$ 中四次基的扰动而表示自旋系数 $\widetilde{\rho}$、τ、μ 和 π 的扰动.

84. 转换关系的线性化; 三组方程

按现在的标记方式, 转换关系是包含在下式中的方程的展开形式,

$$[\boldsymbol{l}^i,\boldsymbol{l}^j]=C_k^{ij}\boldsymbol{l}^k,\tag{108}$$

其中的 $\boldsymbol{l}$ (作为正切矢量) 是被解释为方向导数, 而结构常数 C_k^{ij} 是用自旋系数来表示 (如第 1 章方程 (307) 所示). 由第 6 章方程 (175) 所给的自旋系数, 结构常数在定常态背景下具有下列值:

$$\begin{aligned}
&C_1^{21}=\gamma+\gamma^*=-\frac{r\Delta}{\rho^4}+\frac{r-M}{\rho^2}; && C_1^{31}=\alpha^*+\beta-\pi^*=0;\\
&C_2^{21}=\varepsilon+\varepsilon^*=0; && C_2^{31}=\kappa=0;\\
&C_3^{21}=-(\tau^*+\pi)=-\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2\overline{\rho}^*}; && C_3^{31}=-(\widetilde{\rho}^*+\varepsilon-\varepsilon^*)=\frac{1}{\overline{\rho}};\\
&C_4^{21}=-(\tau+\pi^*)=+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2\overline{\rho}}; && C_4^{31}=-\sigma=0;\\
&C_1^{32}=-\nu^*=0; && C_1^{43}=\mu^*-\mu=\frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4};\\
&C_2^{32}=\tau-\alpha^*-\beta=\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2\overline{\rho}}; && C_2^{43}=\widetilde{\rho}^*-\widetilde{\rho}=\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2};\\
&C_3^{32}=\mu-\gamma+\gamma^*=-\frac{\Delta}{2\rho^2\overline{\rho}}; && C_3^{43}=\alpha-\beta^*=-\frac{\overline{\rho}^*\cot\theta-\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2\sqrt{2}};\\
&C_4^{32}=\lambda^*=0; && C_4^{43}=\beta-\alpha^*=+\frac{\overline{\rho}\cot\theta+\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^2)\sqrt{2}}.
\end{aligned}\tag{109}$$

[449]

用方程 (92), 可将方程 (108) 的线性化形式写为

$$[A^i_k \boldsymbol{l}^k, \boldsymbol{l}^j] + [\boldsymbol{l}^i, A^j_k \boldsymbol{l}^k] = C^{ij}_k A^k_m \boldsymbol{l}^m + c^{ij}_m \boldsymbol{l}^m, \tag{110}$$

其中 c^{ij}_m 表示 C^{ij}_m 的扰动. 展开方程 (110), 得

$$A^i_k C^{kj}_m \boldsymbol{l}^m + A^j_k C^{ik}_m \boldsymbol{l}^m + (\boldsymbol{l}^i A^j_m)\boldsymbol{l}^m - (\boldsymbol{l}^j A^i_m)\boldsymbol{l}^m = C^{ij}_k A^k_m \boldsymbol{l}^m + c^{ij}_m \boldsymbol{l}^m, \tag{111}$$

或, 由于 $\boldsymbol{l}$ 是线性独立的, 有

$$\boldsymbol{l}^i A^j_m - \boldsymbol{l}^j A^i_m = A^i_k C^{jk}_m - A^j_k C^{ik}_m + C^{ij}_k A^k_m + c^{ij}_m. \tag{112}$$

在许多意义上, 方程 (112) 是理论的基本方程: 它给出了 $\boldsymbol{A}$ 的元的非齐次基本方程组, 而且非齐次项是直接与自旋系数的扰动关联.

方程 (112) 所表示的 24 个方程可分为三组, 每组 8 个方程.

由 (110) 的列表可得

$$\left.\begin{array}{ll} c^{21}_3 = -(\tau^* + \pi)^{(1)}; & c^{43}_1 = +(\mu^* - \mu)^{(1)}, \\ c^{21}_4 = -(\tau + \pi^*)^{(1)}; & c^{43}_2 = +(\widetilde{\rho}^* - \widetilde{\rho})^{(1)}, \\ c^{31}_1 + c^{32}_2 = +(\tau - \pi^*)^{(1)}; & c^{31}_3 + c^{41}_4 = -(\widetilde{\rho} + \widetilde{\rho}^*)^{(1)}, \\ c^{41}_1 + c^{42}_2 = +(\tau^* - \pi)^{(1)}; & c^{32}_3 + c^{42}_4 = +(\mu + \mu^*)^{(1)}. \end{array}\right\} \tag{113}$$

[450] 相应地, 借助于方程 (107), 可写下一组 8 个方程, 其中从方程 (112) 中的 c^{ij}_m 导出的非齐次项能直接用 $\boldsymbol{A}$ 的元来表示. 于是, 方程 (112) 就给出了对 $\boldsymbol{A}$ 的元的一组 8 个齐次方程 (称为 I 组).

下一步看到

$$\left.\begin{array}{llll} c^{31}_2 = \kappa; & c^{31}_4 = -\sigma; & c^{32}_1 = -\nu^*; & c^{32}_4 = \lambda^*, \\ c^{41}_2 = \kappa^*; & c^{41}_3 = -\sigma^*; & c^{42}_1 = -\nu; & c^{42}_3 = \lambda. \end{array}\right\} \tag{114}$$

然而已经有了用楚科尔斯基函数 (且不管未定的 R_{+2} 和 R_{-2} 的相对归一化) 表示的 κ、σ、λ 和 ν 的明晰解 (在方程 (25) — (28) 中给出). 因此, 方程 (112) 给出了对 $\boldsymbol{A}$ 的元的又一组 8 个方程 (称为 II 组), 其中的非齐次项可视为 "已知".

I 组和 II 组这两组方程共计提供了确定 $\boldsymbol{A}$ 所需的 16 个函数的 16 个方程. 但是将会看到, 这些方程还不足以完全确定 $\boldsymbol{A}$: 还必须进一步由里奇恒等式的线性化形式来补充.

再次, 从 (109) 的列表可得

$$\left.\begin{aligned}
&c_1^{31}-c_2^{32}=2(\alpha^*+\beta)^{(1)}-(\tau+\pi^*)^{(1)},\\
&c_1^{41}-c_2^{42}=2(\alpha+\beta^*)^{(1)}-(\tau^*+\pi)^{(1)},\\
&c_4^{41}-c_3^{31}=2(\varepsilon-\varepsilon^*)^{(1)}-(\widetilde{\rho}-\widetilde{\rho}^*)^{(1)},\\
&c_3^{42}-c_3^{32}=2(\gamma-\gamma^*)^{(1)}-(\mu-\mu^*)^{(1)},\\
&c_1^{21}=(\gamma+\gamma^*)^{(1)};\quad c_3^{43}=(\alpha-\beta^*)^{(1)},\\
&c_2^{21}=(\varepsilon+\varepsilon^*)^{(1)};\quad c_4^{43}=(\beta-\alpha^*)^{(1)}.
\end{aligned}\right\}\tag{115}$$

相应地, 可以写下另一组 8 个方程 (称为 Ⅲ 组), 其中从方程 (112) 中的 c_m^{ij} 导出的非齐次项能直接联系于剩余自旋系数 α、β、γ 和 ε 的扰动. 所以, 如果 $\boldsymbol{A}$ 已被确定, 则最后这一组方程将使解完成.

现在写出三组方程的明晰形式. 但应指出, 将方程简化为下面给出的形式不是一件轻松的工作.

Ⅰ 组

$$\eth_0^\dagger F_3^1+\eth_0 F_3^2=-\mathrm{i}rT\sin\theta+\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}J \qquad (21,3),$$

$$\eth_0^\dagger F_4^1+\eth_0 F_4^2=+\mathrm{i}rT\sin\theta-\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}H \qquad (21,4), \qquad [451]$$

$$\mathscr{L}_1 F_1^3-\mathscr{L}_1^\dagger F_1^4=\mathrm{i}\Delta T\cos\theta-\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}G \qquad (43,1),$$

$$\mathscr{L}_1 F_2^3-\mathscr{L}_1^\dagger F_2^4=\mathrm{i}\Delta T\cos\theta+\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}F \qquad (43,2),$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_0^\dagger U-\rho^2\eth_0 F_1^3+\rho^2\eth_0^\dagger F_2^3=+2\mathrm{i}a(F_4^1+F_4^2)\cos\theta \qquad (31,1)+(32,2),$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_0 U-\rho^2\eth_0 F_1^4+\rho^2\eth_0^\dagger F_2^4=-2\mathrm{i}a(F_3^1+F_3^2)\cos\theta \qquad (41,1)+(42,2),$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\eth_0 V+\rho^2\mathscr{L}_1 F_4^1+\rho^2\mathscr{L}_1^\dagger F_3^1=+2\mathrm{i}ar(F_2^3-F_2^4)\sin\theta \qquad (31,3)+(41,4),$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\eth_0^\dagger V+\rho^2\mathscr{L}_1 F_4^2+\rho^2\mathscr{L}_1^\dagger F_3^2=+2\mathrm{i}ar(F_1^4-F_1^3)\sin\theta \qquad (32,3)+(42,4),$$

(116)

其中

$$T=\frac{\sqrt{2}}{\rho^4}a(U-V),\quad U=A_1^1+A_2^2, V=A_3^3+A_4^4. \tag{117}$$

Ⅱ 组

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\mathscr{L}_0^\dagger F_2^1-\eth_{-1}\rho^4 F_2^3-2\mathrm{i}a\rho^2 F_4^1\cos\theta=\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}\kappa \qquad (31,2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\mathscr{L}_0F_2^1-\mathscr{D}_{-1}\rho^4F_2^4+2\mathrm{i}a\rho^2F_3^1\cos\theta=\frac{1}{2}\Delta\overline{\rho}^*\kappa^* \qquad (41,2),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^\dagger_{-1}\rho^4F_4^1-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\mathscr{D}_0\rho^2F_4^3+\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2F_2^3\sin\theta=-\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho})^2\sigma \qquad (31,4),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}\rho^4F_3^1-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\mathscr{D}_0\rho^2F_3^4-\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2F_2^4\sin\theta=-\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*)^2\sigma^* \qquad (41,3),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\mathscr{L}_0^\dagger F_1^2+\mathscr{D}^\dagger_{-1}\rho^4F_1^3-2\mathrm{i}a\rho^2F_4^2\cos\theta=-\frac{2\rho^4\overline{\rho}}{\Delta}\nu^* \qquad (32,1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\rho^2\mathscr{L}_0F_1^2+\mathscr{D}^\dagger_{-1}\rho^4F_1^4+2\mathrm{i}a\rho^2F_3^2\cos\theta=-\frac{2\rho^4\overline{\rho}^*}{\Delta}\nu \qquad (42,1),$$

[452]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^\dagger_{-1}\rho^4F_4^2+\frac{1}{2}\rho^2\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\rho^2F_4^3-\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2F_1^3\sin\theta=\rho^2(\overline{\rho})^2\lambda^* \qquad (32,4),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}\rho^4F_3^2+\frac{1}{2}\rho^2\Delta\mathscr{D}_0^\dagger\rho^2F_3^4+\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2F_1^4\sin\theta=\rho^2(\overline{\rho}^*)^2\lambda \qquad (42,3).$$

(118)

III 组

$$2(\alpha+\beta^*)^{(1)}=\frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\mathscr{L}_0(A_1^1-A_2^2)-\frac{1}{\overline{\rho}}\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^2F_1^4)-\frac{1}{\rho^2(\overline{\rho}^*)^3}\mathscr{D}^\dagger_{-2}[\rho^4(\overline{\rho}^*)^2F_2^4]$$

$$+\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\overline{\rho}^*}(F_3^1-F_3^2)+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\overline{\rho}F_3^4+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2}A_4^4 \qquad (41,1)-(42,2),$$

$$2(\varepsilon-\varepsilon^*)^{(1)}=\frac{\sqrt{2}}{\Delta\rho^2}\mathscr{L}_{-1}(\rho^4F_4^1)-\frac{\sqrt{2}}{\Delta\rho^2}\mathscr{L}^\dagger_{-1}(\rho^4F_3^1)-\mathscr{D}_0(A_4^4-A_3^3)$$

$$+2\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\Delta}(F_2^3+F_2^4) \qquad (41,4)-(31,3),$$

$$2(\gamma-\gamma^*)^{(1)}=\frac{1}{(\overline{\rho}^*)^4\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}[(\overline{\rho}^*)^4F_4^2]-\frac{1}{(\overline{\rho})^4\sqrt{2}}\mathscr{L}^\dagger_{-1}[(\overline{\rho})^4F_3^2]$$

$$-\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathscr{D}_0^\dagger(A_3^3-A_4^4)+\frac{2\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{\rho^4}(F_1^2-A_2^2)-\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F_1^3+F_1^4) \quad (42,3)-(32,3),$$

$$(\gamma+\gamma^*)^{(1)}=A_2^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\Delta}{2\rho^2}\right)+\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F_1^3-F_1^4)$$

$$-\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathscr{D}_0^\dagger A_1^1-\mathscr{D}_0A_1^2 \qquad (21,1),$$

$$(\varepsilon+\varepsilon^*)^{(1)}=+2\sqrt{2}\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\Delta}(F_2^3-F_2^4)-2\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\Delta}F$$

$$-\frac{1}{2}\Delta\mathscr{D}_1^\dagger\frac{A_2^1}{\rho^2}-\mathscr{D}_0A_2^2 \qquad (21,2)$$

$$(\alpha-\beta^*)^{(1)}=-\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\overline{\rho}^*}(F_3^1+F_3^2)-J+\frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\mathscr{L}_0A_3^3-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_1^\dagger\frac{A_3^4}{\overline{\rho}}$$

$$-\frac{A_4^4}{(\overline{\rho}^*)^2\sqrt{2}}(\overline{\rho}^*\cot\theta-\mathrm{i}a\sin\theta)\qquad(43,3).$$

(119)

(上一组中没有包括对 $(\alpha^*+\beta)^{(1)}$ 和 $(\alpha^*-\beta)^{(1)}$ 的方程, 因为它们可以直接由 [453]
对 $(\alpha+\beta^*)^{(1)}$ 和 $(\alpha-\beta^*)^{(1)}$ 的方程写出.)

85. I 组的简化

从 I 组 (方程 (116)) 的前 4 个方程消去 T, 得到方程对,

$$\mathscr{D}_0^\dagger F+\mathscr{D}_0G=\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(J-H)\qquad(120)$$

和

$$\mathscr{L}_1H-\mathscr{L}_1^\dagger J=-\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F+G),\qquad(121)$$

应记得其中的 F、G、J 和 H 由方程 (94) 定义.

下一步, 将方程 (21,3) 和 (21,4) 相减, 方程 (43,1) 和 (43,2) 相加, 得到方程对,

$$\mathscr{D}_0^\dagger(F_3^1-F_4^1)+\mathscr{D}_0(F_3^2-F_4^2)=-2\mathrm{i}rT\sin\theta+\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(J+H),\qquad(122)$$

和

$$\mathscr{L}_1(F_3^1+F_2^3)-\mathscr{L}_1^\dagger(F_1^4+F_2^4)=+2\mathrm{i}\Delta T\cos\theta+\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F-G).\qquad(123)$$

通过类似的相加和相减, 可将 I 组的后 4 个方程代之以等价的组,

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0(F_1^3+F_1^4)-\mathscr{D}_0^\dagger(F_2^3+F_2^4)=\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}C_1+\frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial\theta},\\
&\mathscr{D}_0(F_1^3-F_1^4)-\mathscr{D}_0^\dagger(F_2^3-F_2^4)=-\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(F+G)-\frac{\sqrt{2}}{\rho^2}QU,\\
&\mathscr{L}_1(F_4^1+F_4^2)+\mathscr{L}_1^\dagger(F_3^1+F_3^2)=\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(J-H)+\frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\mathrm{i}KV,\\
&\mathscr{L}_1(F_4^1-F_4^2)+\mathscr{L}_1^\dagger(F_3^1-F_3^2)=\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}B_2+\frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\Delta\frac{\partial V}{\partial r}.
\end{aligned}\right\}\qquad(124)$$

将方程 (122)、(123) 和 (124) 重写为另一种有用形式,

[454]

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}C_2 = \frac{\partial C_1}{\partial r} + 2\mathrm{i}rT\sin\theta - \frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(J+H), \tag{125}$$

$$QB_1 = -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\right)B_2 + 2\mathrm{i}\Delta T\cos\theta + \frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F-G), \tag{126}$$

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}B_1 = \frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}C_1 - \frac{\partial}{\partial r}(J+H) + \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\frac{\partial U}{\partial\theta}, \tag{127}$$

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}B_2 = -\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(F+G) + \frac{\partial}{\partial r}(J-H) - \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}QU, \tag{128}$$

$$QC_1 = -\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(J-H) + \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\right)(F+G) - \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\mathrm{i}KV, \tag{129}$$

$$QC_2 = -\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}B_2 + \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\right)(F-G) - \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\Delta\frac{\partial V}{\partial r}, \tag{130}$$

其中的 B_1、B_2、C_1 和 C_2 在方程 (96) 中定义.

可以证明, (120)、(121) 和 (125) — (130) 这 8 个方程并不都是独立的: 例如, 方程 (127) 和 (130) 能从其余 6 个方程导出. 所以, I 组的 8 个方程只有 6 个是独立的. 可将方程 (127) — (130) 和 (120)、(121) 一起取为基本方程组. 后两个方程可写为另一种形式,

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}(F-G) = \frac{\partial}{\partial r}(F+G) - \frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}(J-H), \tag{131}$$

$$Q(J+H) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\right)(J-H) - \frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}(F+G). \tag{132}$$

由方程 (127) — (132) 很明显, 量 B_1、B_2、C_1、C_2、$F-G$ 和 $J+H$ 全都能用 $F+G$、$J-H$、U 和 V 来表示. 最后表现为, 留下函数 U 和 V 是未定的; 而它们实际上可利用剩余 4 个规范自由度中的两个而设为等于零.

将看到, 方程 (131) 和 (132) 在后继的进展中起有核心作用.

86. Ⅱ 组的简化; 可积条件

通过相加和相减, 可将 Ⅱ 组 (方程 (118)) 的方程用以下四对方程取代:

$$\sqrt{2}\cdot Q\rho^2F_2^1 + \mathscr{D}_{-1}\rho^4(F_2^3 - F_2^4) + 2\mathrm{i}a\rho^2F\cos\theta = \frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^* - \overline{\rho}\kappa),$$

$$\sqrt{2}\cdot Q\rho^2F_1^2 - \mathscr{D}_{-1}^{\dagger}\rho^4(F_1^3 - F_1^4) + 2\mathrm{i}a\rho^2G\cos\theta = -\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu - \overline{\rho}\nu^*), \tag{a}$$

$$\sqrt{2}\cdot\rho^2\frac{\partial F_2^1}{\partial\theta} - \mathscr{D}_{-1}\rho^4(F_2^3 + F_2^4) + 2\mathrm{i}a\rho^2(F_3^1 - F_4^1)\cos\theta = \frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^* + \overline{\rho}\kappa),$$

[455]

$$\sqrt{2}\cdot\rho^2\frac{\partial F_1^2}{\partial\theta}+\mathscr{D}_{-1}^{\dagger}\rho^4(F_1^3+F_1^4)+2\mathrm{i}a\rho^2(F_3^2-F_4^2)\cos\theta$$
$$=-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu+\overline{\rho}\nu^*),\qquad(b)$$
$$-\mathrm{i}K\rho^4F_4^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\rho^4(F_4^1+F_4^2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2H\sin\theta$$
$$=(\overline{\rho})^2(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma),$$
$$-\mathrm{i}K\rho^4F_3^4+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}\rho^4(F_3^1+F_3^2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2J\sin\theta$$
$$=(\overline{\rho}^*)^2(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*),\qquad(c)$$
$$-\rho^2\Delta\frac{\partial}{\partial r}\rho^2F_4^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}^{\dagger}\rho^4(F_4^1-F_4^2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2(F_1^3+F_2^3)\sin\theta$$
$$=-(\overline{\rho})^2(\rho^2\lambda^*+\frac{1}{2}\Delta\sigma),$$
$$-\rho^2\Delta\frac{\partial}{\partial r}\rho^2F_3^4+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{-1}\rho^4(F_3^1-F_3^2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{i}ar\rho^2(F_1^4+F_2^4)\sin\theta$$
$$=-(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda+\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right).\qquad(d)$$

(133)

下一步, 将上面四对方程中每一对的方程相加, 并利用方程 (127) — (130) 再作简化, 可得 4 个方程,

$$\frac{Q}{\sqrt{2}}(F_2^1+F_1^2-U)+\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}$$
$$=\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*)\right],\qquad(134)$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_2^1+F_1^2-U)+\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{J+H}{\sqrt{\Delta}}$$
$$=\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*+\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu+\overline{\rho}\nu^*)\right],\qquad(135)$$
$$-\frac{\mathrm{i}K}{\sqrt{2}}[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]+\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F+G)$$
$$=\frac{+1}{\rho^2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right],\qquad(136)$$
$$\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial r}[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]-\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F-G)$$
$$=\frac{+1}{\rho^2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^*+\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda+\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right].\qquad(137)$$

[456] 由方程 (134) 和 (135) 消去 $(F_2^1+F_1^2-U)$, 由方程 (136) 和 (137) 消去 $[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]$, 可得 (经过利用了方程 (131) 和 (132) 的简化操作后)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{J+H}{\sqrt{\Delta}}-\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\sqrt{\Delta}}{Q}\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}\\
&=\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*+\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu+\overline{\rho}\upsilon^*)\right]\\
&\quad-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{2\rho^2Q}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*)\right]\right\}
\end{aligned}\tag{138}$$

和

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F-G)+\mathrm{i}\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F+G)=\frac{-1}{\rho^2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^*+\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)\right.\\
&\left.+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda+\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right]\\
&+\Delta\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\rho^2K\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right]\right\}
\end{aligned}\tag{139}$$

方程 (138) 和 (139) 可借助于方程 (131) 和 (132) 而进一步简化. 将方程 (138) 的左边重写为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}Q\rho^2\frac{J+H}{\sqrt{\Delta}}-\sqrt{\Delta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}+\sqrt{\Delta}\frac{Q_{,\theta}}{Q}\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}\\
&=\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[Q\rho^2(J+H)-\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(J-H)+\frac{Q_{,\theta}}{Q}\rho^2(J-H)\right],
\end{aligned}\tag{140}$$

利用方程 (132), 可按以下途径将上式右边方括号中的量逐步化简,

$$\begin{aligned}
&\rho^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\right)(J-H)-\rho^2\frac{\partial}{\partial\theta}(J-H)+2a^2(J-H)\sin\theta\cos\theta\\
&\quad+\frac{Q_{,\theta}}{Q}\rho^2(J-H)-2\mathrm{i}ar(F+G)\sin\theta\\
&=\frac{1}{Q}(Q_{,\theta}+Q\cot\theta)\rho^2(J-H)+2a^2(J-H)\sin\theta\cos\theta-2\mathrm{i}ar(F+G)\sin\theta\\
&=\frac{2a\sigma^+\cos\theta}{Q}\rho^2(J-H)+2a^2(J-H)\sin\theta\cos\theta-2\mathrm{i}ar(F+G)\sin\theta\\
&=\frac{2a}{Q}(\rho^2\sigma^++Qa\sin\theta)(J-H)\cos\theta-2\mathrm{i}ar(F+G)\sin\theta\\
&=\frac{2a}{Q}[K(J-H)\cos\theta-\mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta].
\end{aligned}\tag{141}$$

[457] 于是, 令

$$\Psi = K(J-H)\cos\theta - \mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta, \tag{142}$$

可得方程 (138) 简化为

$$\frac{2a\sqrt{\Delta}}{Q}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}} = \frac{Q}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^* + \overline{\rho}\kappa) - \frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu + \overline{\rho}\nu^*)\right]$$
$$-Q\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{2\rho^2 Q}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^* - \overline{\rho}\kappa) - \frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu - \overline{\rho}\nu^*)\right]\right\}. \tag{143}$$

以类似方式, 可得方程 (139) 能简化为

$$-\frac{2\mathrm{i}a}{K}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -\frac{\mathrm{i}K}{\rho^2\Delta\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^* + \frac{1}{2}\Delta\sigma\right) + (\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda + \frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right]$$
$$+\mathrm{i}K\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\mathrm{i}}{\rho^2 K\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^* - \frac{1}{2}\Delta\sigma\right) + (\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda - \frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right]\right\}. \tag{144}$$

将方程 (143) 和 (144) 右边的导数算符换成第 8 章 §68 中定义的算符 $\mathscr{L}$ 和 $\mathscr{D}$, 得方程对

$$2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}} = -\frac{1}{2}Q^2\left\{\mathscr{L}_0^\dagger\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}\Delta\frac{\kappa^*}{\overline{\rho}} - \frac{2\rho^2\overline{\rho}^*\nu}{\Delta}\right)\right.$$
$$\left.-\mathscr{L}_0\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}\Delta\frac{\kappa}{\overline{\rho}^*} - \frac{2\rho^2\overline{\rho}\nu^*}{\Delta}\right)\right\} \tag{145}$$

和

$$2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{i}K^2}{\sqrt{2}}\left\{\mathscr{D}_0^\dagger\frac{1}{K}\left[\frac{1}{2}\Delta\left(\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\sigma + \frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}}\sigma^*\right)\right] - \mathscr{D}_0\frac{1}{K}[(\overline{\rho})^2\lambda^* + (\overline{\rho}^*)^2\lambda]\right\}. \tag{146}$$

方程 (145) 和 (146) 显然要求可积条件须满足: 算符

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \text{ 和 } \sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{\Delta}}, \tag{147}$$

分别作用于方程 (145) 和 (146) 的右边必须导致相等的结果. 这个条件对理论是关键性的: 如在下面的 §87 将看到的, 它决定了径向函数 R_{+2}、R_{-2} 的相对归一化和斯塔罗宾斯基常量 $\mathscr{C}$ 的幅角.

87. 可积条件的解 [458]

可以看到, κ 和 ν 二者都在方程 (145) 的右边出现. 但按照这些自旋系数的解 (25) 和 (28), κ 是由 R_{+2} 和 S_{+2} 来表示, 而 ν 是由 R_{-2} 和 S_{-2} 来表示; 如已多次强调过的, 函数 R_{+2} 和 R_{-2} 的相对归一化 (当角向函数 S_{+2} 和 S_{-2} 二者都规化为 1 时) 尚待明确. 由于这个信息缺失, 方程 (145) 右边的表示并不完全确定. 同样的评论也适用于方程 (146) 右边的表示.

由 §81 中对楚科尔斯基 - 斯塔罗宾斯基等式的讨论明显可见, 明确函数 R_{+2} 和 R_{-2} 相关归一化的问题, 与分别地明确斯塔罗宾斯基常量 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 + \mathrm{i}\mathscr{C}_2$ 实部和虚部的问题密切关联. 就是说, 如果必须将 $\Delta^2 R_{+2} (= P_{+2})$ 和 $R_{-2} (= P_{-2})$ 归一化为与方程 (41) 和 (42) 一致, 则仅有对 Ψ_4 (或 Ψ_0) 的解中的数字因子需要确定. 但是分别地确定 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 的问题仍然存在.

这里提出的问题的本质在检查第 8 章 §(70) — §(71) 对麦克斯韦方程的处理时变得更清楚. 在那里看到, 当对 ΔR_{+1} 和 R_{-1} 是选为与第 8 章方程 (33) 和 (34) 一致时, 必须允许在 ϕ_2 的解中增加一个因子 1/2(见第 8 章方程 (70)); 而因子 1/2 的确定是与相应的斯塔罗宾斯基常量真实性的建立同时发生的.

转到现在面对的可积条件, 很早就在分析中得到, 若选择 P_{+2} 和 P_{-2} 为径向函数的基本解, 则 Ψ_0 和 Ψ_4 的解事实上必定是

$$\Delta^2 \Psi_0 = P_{+2} S_{+2} \quad 和 \quad \Psi_4 = \frac{1}{4(\overline{\rho}^*)^4} P_{-2} S_{-2}, \tag{148}$$

即, 有一个 1/4 因子, 而不是自旋为 1 情形的 1/2 因子. 从一开始就假定解 (148) 的有效性是便利的, 尽管这并非严格地必要: 可以在 Ψ_4 的表示式中包含一个附加因子, 比如说 q (后继的分析将证明, 在此情形 $q = 1$). 去掉 q 不会导致任何实质性的丢失: 它的恢复在任何阶段都是明了的, 但它将毁坏所希望显示的公式的对称性.

于是假定 Ψ_0 和 Ψ_4 的解由方程 (148) 给出, 并理解为 $P_{+2} = \Delta^2 R_{+2}$ 和 $P_{-2} = R_{-2}$ 是与方程 (41) 和 (42) 一致, 且满足方程 (74). 令 (见方程 (80))

$$X = P_{+2} + P_{-2} = [P]^+ \quad 和 \quad \mathrm{i}Y = P_{+2} - P_{-2} = [P]^-, \tag{149}$$

[459] 将看到, 把方程 (74) 重写为下列形式是便利的,

$$B_1 \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r} = (\Delta \mathscr{C}_2 - A_2) X + \left(\Delta \mathscr{C}_1 + A_1 - \frac{B_1 K}{\Delta} \right) Y \tag{150}$$

和

$$B_1 \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}r} = \left(\Delta \mathscr{C}_1 - A_1 + \frac{B_1 K}{\Delta} \right) X - (\Delta \mathscr{C}_2 + A_2) Y, \tag{151}$$

其中 A_1、A_2 和 B_1 有着与方程 (76) 中相同的意义.

由 Ψ_4 解中的附加 1/4 因子,κ、σ、λ 和 ν 的解 (25) — (28) 变为

$$\left.\begin{aligned}
\kappa &= -\frac{1}{6M}\frac{\sqrt{2}}{\Delta^2}(\overline{\rho}^*)^2 P_{+2}\left(\mathscr{L}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) S_{+2},\\
\sigma &= +\frac{1}{6M}\frac{1}{\Delta}\frac{(\overline{\rho}^*)^2}{\overline{\rho}} S_{+2}\left(\mathscr{D}_0^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) P_{+2},\\
\lambda &= +\frac{1}{6M}\frac{1}{2\overline{\rho}^*} S_{-2}\left(\mathscr{D}_0 - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right) P_{-2},\\
\nu &= +\frac{1}{6M}\frac{\sqrt{2}}{4\rho^2} P_{-2}\left(\mathscr{L}_2^\dagger - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right) S_{-2}.
\end{aligned}\right\} \tag{152}$$

回到方程 (145) 和 (146), 将上面对 κ、σ、λ 和 ν 的解代入方程右边的表示中, 在运用了方程 (87) 和 (88) 的可观的简化操作后得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12M\sqrt{2}}\frac{Q}{\Delta}\Bigg\{ -\overline{\rho}^*\Bigg[-\left(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta - \frac{6\mathrm{i}a^2\sigma^+\sin\theta\cos\theta}{Q\overline{\rho}^*}\right) S_{+2}\\
&+2\left(\cot\theta + Q - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*} - \frac{a\sigma^+\cos\theta}{Q}\right)\mathscr{L}_2 S_{+2}\Bigg] P_{+2}\\
&+\overline{\rho}\Bigg[-\left(\lambda - 6a\sigma^+\cos\theta + \frac{6\mathrm{i}a^2\sigma^+\sin\theta\cos\theta}{Q\overline{\rho}}\right) S_{-2}\\
&+2\left(\cot\theta - Q + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}} - \frac{a\sigma^+\cos\theta}{Q}\right)\mathscr{L}_2^\dagger S_{-2}\Bigg] P_{+2}\\
&+\overline{\rho}^*\Bigg[-\left(\lambda - 6a\sigma^+\cos\theta - \frac{6\mathrm{i}a^2\sigma^+\sin\theta\cos\theta}{Q\overline{\rho}^*}\right) S_{-2}\\
&+2\left(\cot\theta - Q - \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*} - \frac{a\sigma^+\cos\theta}{Q}\right)\mathscr{L}_2^\dagger S_{-2}\Bigg] P_{-2}\\
&-\overline{\rho}\Big[-\left(\lambda + 6a\sigma^+\cos\theta + \frac{6\mathrm{i}a^2\sigma^+\sin\theta\cos\theta}{Q\overline{\rho}}\right) S_{+2}\\
&+2\left(\cot\theta + Q + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}} - \frac{a\sigma^+\cos\theta}{Q}\right)\mathscr{L}_2 S_{+2}\Big] P_{-2}\Bigg\}\\
&= 2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}},
\end{aligned} \tag{153}$$

和 [460]

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\frac{K}{\Delta}\Bigg\{\overline{\rho}^*\Bigg[\left(\lambda + 6\mathrm{i}\sigma^+ r + \frac{6r\sigma^+\Delta}{K\overline{\rho}^*}\right) P_{+2}\\
&+2\left(r - M - \mathrm{i}K - \frac{r\sigma^+\Delta}{K} - \frac{\Delta}{\overline{\rho}^*}\right)\mathscr{D}_0^\dagger P_{+2}\Bigg] S_{+2}\\
&+\overline{\rho}\left[\left(\lambda + 6\mathrm{i}\sigma^+ r + \frac{6r\sigma^+\Delta}{K\overline{\rho}}\right) P_{+2} + 2\left(r - M - \mathrm{i}K - \frac{r\sigma^+\Delta}{K} - \frac{\Delta}{\overline{\rho}}\right)\mathscr{D}_0^\dagger P_{+2}\right] S_{-2}\\
&-\overline{\rho}^*\left[\left(\lambda - 6\mathrm{i}\sigma^+ r + \frac{6r\sigma^+\Delta}{K\overline{\rho}^*}\right) P_{-2} + 2\left(r - M + \mathrm{i}K - \frac{r\sigma^+\Delta}{K} - \frac{\Delta}{\overline{\rho}^*}\right)\mathscr{D}_0 P_{-2}\right] S_{-2}
\end{aligned}$$

$$-\overline{\rho}\left[\left(\lambda-6\mathrm{i}\sigma^{+}r+\frac{6r\sigma^{+}\Delta}{K\overline{\rho}}\right)P_{-2}+r\left(r-M+\mathrm{i}K-\frac{r\sigma^{+}\Delta}{K}-\frac{\Delta}{\overline{\rho}}\right)\mathscr{D}_{0}P_{-2}\right]S_{+2}\Big\}$$
$$=2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}. \tag{154}$$

进一步简化后, 上面的方程成为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\mathrm{i}a\{[Q\mathscr{L}_{1}\mathscr{L}_{2}S_{+2}-(2a\sigma^{+}\cos\theta)\mathscr{L}_{2}S_{+2}]\cos\theta\\
&-2[(3a\sigma^{+}\cos\theta)S_{+2}-Q\mathscr{L}_{2}S_{+2}]\sin\theta\\
&+[Q\mathscr{L}_{1}^{\dagger}\mathscr{L}_{2}^{\dagger}S_{-2}-(2a\sigma^{+}\cos\theta)\mathscr{L}_{2}^{\dagger}S_{-2}]\cos\theta\\
&-2[(3a\sigma^{+}\cos\theta)S_{-2}-Q\mathscr{L}_{2}^{\dagger}S_{-2}]\sin\theta\}(P_{+2}-P_{-2})\\
&-\{[Q\mathscr{L}_{1}\mathscr{L}_{2}S_{+2}-(2a\sigma^{+}\cos\theta)\mathscr{L}_{2}S_{+2}]\\
&-[Q\mathscr{L}_{1}^{\dagger}\mathscr{L}_{2}^{\dagger}S_{-2}-(2a\sigma^{+}\cos\theta)\mathscr{L}_{2}^{\dagger}S_{-2}\}r(P_{+2}+P_{-2})]\Big]\!\Big]\\
&=2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}},
\end{aligned} \tag{155}$$

[461] 和

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\Big\{[r(K\mathscr{D}_{0}^{\dagger}\mathscr{D}_{0}^{\dagger}P_{+2}-2r\sigma^{+}\mathscr{D}_{0}^{\dagger}P_{+2})+2(3r\sigma^{+}P_{+2}-K\mathscr{D}_{0}^{\dagger}P_{+2})\\
&-r(K\mathscr{D}_{0}\mathscr{D}_{0}P_{-2}-2r\sigma^{+}\mathscr{D}_{0}P_{-2})-2(3r\sigma^{+}P_{-2}-K\mathscr{D}_{0}P_{-2})](S_{+2}+S_{-2})\\
&-\mathrm{i}a[(K\mathscr{D}_{0}^{\dagger}\mathscr{D}_{0}^{\dagger}P_{+2}-2r\sigma^{+}\mathscr{D}_{0}^{\dagger}P_{+2})+(K\mathscr{D}_{0}\mathscr{D}_{0}P_{-2}-2r\sigma^{+}\mathscr{D}_{0}P_{-2})]\\
&\times(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta\Big\}\\
&=2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta};
\end{aligned} \tag{156}$$

或, 用 §81(b) 的括号标记, 有

$$\begin{aligned}
2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}=-\frac{1}{12M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[&\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{-}-(2a\sigma^{+}\cos\theta)[\mathscr{L}S]^{-}\}rX\\
&+a\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{+}\cos\theta+2(Q\sin\theta-a\sigma^{+}\cos^{2}\theta)[\mathscr{L}S]^{+}\\
&-6a\sigma^{+}(\sin\theta\cos\theta)[S^{+}]\}Y\Big]\!\Big],
\end{aligned} \tag{157}$$

和

$$\begin{aligned}
2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\Big[\!\Big[&\{rK[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{-}-2(r^{2}\sigma^{+}+K)[\mathscr{D}P]^{-}+6r\sigma^{+}[P]^{-}\}[S]^{+}\\
&-\mathrm{i}a\{K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{+}-2r\sigma^{+}[\mathscr{D}P]^{+}\}[S]^{-}\cos\theta\Big]\!\Big].
\end{aligned} \tag{158}$$

现在必须要求, 算符 ∂_θ 作用于方程 (155) 左边表示的结果与算符 $\Delta^{1/2}\partial_r\Delta^{-1/2}$ 作用于方程 (156) 左边表示的相同. 开始时会全然不知如何操作: 须相等的表示包含仅由所满足的楚科尔斯基方程来定义的径向和角向函数的高达三阶的导数. 然而, 很快就能意识到, 能得到所要求条件的唯一途径是, 借助于方程 (79)、(150) 和 (151) 在每个阶段都把 $P_{\pm2}(r)$ 和 $S_{\pm2}(\theta)$ 的导数代之以函数的适当组合. 经过这样的代换, 方程 (155) 和 (156) 成为

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{12M\Delta\beta_1\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{2(Q\cot\theta-a\sigma^+\cos\theta)(D-\Gamma_1)+8a\sigma^+\lambda Q^2\cos\theta\}(S_{+2}+S_{-2})\\
&+\{-2Q^2(D-\Gamma_1)-8a\sigma^+\lambda(Q\mathrm{cosec}\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)\}(S_{+2}-S_{-2})\Big]\!\Big]rX\\
&-\frac{a}{12M\Delta\beta_1\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{2Q^2(D+\Gamma_1)-8a\sigma^+\lambda(Q\mathrm{cosec}\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)\}\\
&(S_{+2}+S_{-2})\cos\theta+\{-2(Q\cot\theta-a\sigma^+\cos\theta)(D+\Gamma_1)+8a\sigma^+\lambda Q^2\cos\theta\}\\
&(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta-2\{[(3a\sigma^+\cos\theta)\beta_1+\alpha_2Q](S_{+2}+S_{-2})\\
&+Q(\alpha_1+D)(S_{+2}-S_{-2})\}\sin\theta\Big]\!\Big]Y\\
&=2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}
\end{aligned}
\tag{159}
$$

[462]

和

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{12MB_1\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{2K^2(\mathscr{C}_2-\Gamma_2-4\lambda\sigma^+r)-2[K(r-M)-\sigma^+r\Delta](\mathscr{C}_1-\Gamma_1)\}rX\\
&+\{2K^2(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)+2[K(r-M)-\sigma^+r\Delta](\mathscr{C}_2-\Gamma_2-4\lambda\sigma^+r)+8\lambda\sigma^+K\Delta\}rY\\
&+2K(\Delta\mathscr{C}_1-A_1)X-2[3r\sigma^+B_1+K(\Delta\mathscr{C}_2+A_2)]Y\Big]\!\Big](S_{+2}+S_{-2})\\
&+\frac{a}{12MB_1\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{2K^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)+2[K(r-M)-\sigma^+r\Delta](\mathscr{C}_2+\Gamma_2+4\lambda\sigma^+r)\\
&-8\lambda\sigma^+K\Delta\}X+\{-2K^2(\mathscr{C}_2+\Gamma_2+4\lambda\sigma^+r)\\
&+2[K(r-M)-\sigma^+r\Delta](\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\}Y\Big]\!\Big](S_{+2}-S_{-2})\cos\theta\\
&=2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},
\end{aligned}
\tag{160}
$$

应记得其中有 (见方程 (43)、(71) 和 (75))

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathscr{C}=\mathscr{C}_1+\mathrm{i}\mathscr{C}_2,\Gamma_1=\lambda(\lambda+2)-12\sigma^{+2}\alpha^2,\Gamma_2=12\sigma^+M,\\
&D^2=\lambda^2(\lambda+2)^2-8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6)-12a^2]+144\sigma^{+4}\alpha^4,\\
&|\mathscr{C}|^2=D^2+144\sigma^{+2}M^2,\ \text{和}\ \alpha^2=a^2+am/\sigma^+,
\end{aligned}
\right\}
\tag{161}
$$

其余的符号 A_1、A_2、B_1、α_1、α_2 和 β_1 有着与方程 (76) 和 (78) 中同样的意义. 还应注意到, 在导致方程 (159) 和 (160) 的简化中已经利用了方程 (47)、(48)、(64) 和 (65)(以及它们的复数共轭和伴随).

现在将算符 ∂_θ 和 $\Delta^{1/2}\partial_r\Delta^{-1/2}$ 分别作用于方程 (159) 和 (160) 的左边表示, 并同样把导数用函数来代换, 经过很可观的简化和同样显著的抵消, 最后得到

[463]

$$\begin{aligned}2a\frac{\partial}{\partial\theta}\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{48M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[a\{&(D+\Gamma_1)(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta\\ &+\frac{4\sigma^+}{a}(\lambda\alpha^2-6a^2)(S_{+2}+S_{-2})\}Y\\ &+\{-(D-\Gamma_1)(S_{+2}+S_{-2})+4a\sigma^+\lambda\,(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta\}rX\Big]\!\Big]\end{aligned} \tag{162}$$

和

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{2a}{\Delta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = \frac{1}{48M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[a\{&[(\mathscr{C}_2+\Gamma_2)+4\lambda\sigma^+r]X\\ &+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)Y\}(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta+\{-(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)rX\\ &+[r(\mathscr{C}_2+\Gamma_2)+4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)]Y\}(S_2+S_{-2})\Big]\!\Big].\end{aligned} \tag{163}$$

方程 (162) 和 (163) 右边表示的比较表明, 它们的相等仅仅 (!) 要求

$$\mathscr{C}_1 = D \quad 和 \quad \mathscr{C}_2 = -\Gamma_2 = -12\sigma^+M \tag{164}$$

—— 在漫长征途后得到的异常简单的结果.

现在定义函数

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{S}_+ = \int(S_{+2}+S_{-2})\mathrm{d}\theta, \mathscr{S}_{-1} = \int(S_{+2}-S_{-2})\cos\theta\mathrm{d}\theta,\\ &\mathscr{R}_+ = \Delta^{1/2}\int\frac{rX}{\Delta^{3/2}}\mathrm{d}r, \quad 和 \quad \mathscr{R}_- = \Delta^{1/2}\int\frac{Y}{\Delta^{3/2}}\mathrm{d}r,\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

于是就能将方程 (162) 和 (163) 的积分写为

$$\begin{aligned}\Psi = \frac{1}{96M\sqrt{2}}\Big[&(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R}_-\mathscr{S}_- + \frac{4\sigma^+}{a}(\lambda\alpha^2-6a^2)\mathscr{R}_-\mathscr{S}_+\\ &+4\lambda\sigma^+\mathscr{R}_+\mathscr{S}_- - \frac{1}{a}(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)\mathscr{R}_+\mathscr{S}_+\Big],\end{aligned} \tag{166}$$

其中记取了

$$\Psi = K(J-H)\cos\theta - \mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta. \tag{167}$$

方程 (166) 表示由方程 (145) 和 (146) 呈现的可积条件的解. 而且在推导这个解的过程中, 已同时解决了与斯塔罗宾斯基常量的实部和虚部, 以及与径向楚科尔斯基函数的相对归一化相关联的问题.

本节最后指出, 由定义 (167), 方程 (131) 和 (132) 还有一种替代形式 [464]

$$\left.\begin{aligned}\rho^2(J+H)&=\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2\frac{J-H}{Q}+\frac{2a\Psi}{Q^2}\\ \mathrm{i}\rho^2\frac{F-G}{\Delta}&=\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{F+G}{K}-\frac{2\mathrm{i}a\Psi}{K^2}.\end{aligned}\right\}\tag{168}$$

和

88. Ψ 的可分离性和函数 $\mathscr{R}$、$\mathscr{S}$

值得注意的是, §87 得到的 Ψ 的解是对变量可分离的, 并有用以表示解的积分的明晰计算.

首先看到, $a\to 0$ 时 Ψ 的有限性要求 $\mathscr{C}_1$ 定义为 D^2 的正平方根 (见方程 (61) 和 (164)), 因为只有这样才有当 $a\to 0$ 时 $\mathscr{C}_1-\Gamma_1\to 0$. 实际上有等式

$$\mathscr{C}_1^2-\Gamma_1^2=-16\sigma^{+2}\lambda(\lambda\alpha^2-6a^2).\tag{169}$$

相应地可写出

$$\frac{1}{a}(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)=\frac{\mathscr{C}_1^2-\Gamma_1^2}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}=-\frac{16\sigma^{+2}\lambda(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}.\tag{170}$$

利用最后这个关系式, 可将 Ψ 的解 (166) 重写为

$$\begin{aligned}\Psi=\frac{1}{96M\sqrt{2}}\Big\{&[(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R}_-+4\lambda\sigma^+\mathscr{R}_+]\mathscr{S}_-\\&+\frac{4\sigma^+}{a}(\lambda\alpha^2-6a^2)\left[\mathscr{R}_-+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}\mathscr{R}_+\right]\mathscr{S}_+\Big\},\end{aligned}\tag{171}$$

或

$$\Psi=\frac{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}{96M\sqrt{2}}\left[\mathscr{R}_-+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}\mathscr{R}_+\right]\left[\mathscr{S}_-+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}\mathscr{S}_+\right].\tag{172}$$

Ψ 的可分离性是显然的:

$$\Psi=\frac{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}{96M\sqrt{2}}\mathscr{R}(r)\mathscr{S}(\theta),\tag{173}$$

其中

$$\mathscr{R}(r)=\mathscr{R}_-+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}\mathscr{R}_+$$

和 (174)

$$\mathscr{S}(\theta)=\mathscr{S}_{-}+\frac{4\sigma^{+}(\lambda\alpha^{2}-6a^{2})}{\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1}}\mathscr{S}_{+}.$$

[465] 由 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的定义可得

$$\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathscr{R}}{\sqrt{\Delta}}=\frac{1}{\Delta}\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^{+}}{\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1}}rX\right) \tag{175}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta}=[S]^{-}\cos\theta+\frac{4\sigma^{+}(\lambda\alpha^{2}-6a^{2})}{a(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})}[S]^{+}. \tag{176}$$

(a) 用楚科尔斯基函数表示 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{L}$

据方程 (173) 和 (176), 方程 (158) 给出

$$\begin{aligned}2a\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}&=\frac{a(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})}{48M\sqrt{2}}\mathscr{R}\left\{[S]^{-}\cos\theta+\frac{4\sigma^{+}(\lambda\alpha^{2}-6a^{2})}{a(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})}[S]^{+}\right\}\\&=\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\Big[\Big[\{rK[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{-}-2(r^{2}\sigma^{+}+K)[\mathscr{D}P]^{-}+6r\sigma^{+}[P]^{-}\}[S]^{+}\\&\quad-\mathrm{i}a\{K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{+}-2r\sigma^{+}[\mathscr{D}P]^{+}\}[S]^{-}\cos\theta\Big]\Big].\end{aligned} \tag{177}$$

将右边两个表示中的 $[S]^{-}\cos\theta$ 和 $[S]^{+}$ 的系数相等, 可得 $\mathscr{R}$ 的下面两个可供选择的表示式:

$$\frac{1}{4}(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})\mathscr{R}=K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{+}-2r\sigma^{+}[\mathscr{D}P]^{+}, \tag{178}$$

和

$$\sigma^{+}(\lambda\alpha^{2}-6a^{2})\mathscr{R}=\mathrm{i}\{rK[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{-}-2(r^{2}\sigma^{+}+K)[\mathscr{D}P]^{-}+6r\sigma^{+}[P]^{-}\}. \tag{179}$$

由对方程 (158) 和 (160) 的比较, 可得到用函数 X 和 Y 对方程 (178) 和 (179) 右方的明晰表示式, 即有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})\mathscr{R}=\frac{1}{B_{1}}\Big[\Big[&\{2K^{2}(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})+8\lambda\sigma^{+}r[K(r-M)-\sigma^{+}r\Delta]\\&-8\lambda\sigma^{+}K\Delta\}X\\&+\{-8K^{2}\lambda\sigma^{+}r+2(\mathscr{C}_{1}+\Gamma_{1})[K(r-M)-\sigma^{+}r\Delta]\}Y\Big]\Big]\end{aligned} \tag{180}$$

和

$$\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)\mathscr{R}=\frac{1}{B_1}\Big[\!\Big[\{-8K^2\sigma^+(6M+\lambda r)$$
$$-2[K(r-M)-\sigma^+r\Delta](\mathscr{C}_1-\Gamma_1)rX$$
$$+\{2K^2(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)-8\sigma^+(6M+\lambda r)[K(r-M)-\sigma^+r\Delta]+8\lambda\sigma^+K\Delta\}rY$$
$$+2K(\Delta\mathscr{C}_1-A_1)X-2[3r\sigma^+B_1+K(\Delta\mathscr{C}_2+A_2)]Y\Big]\!\Big]. \tag{181}$$

再有, 据方程 (173) 和 (175), 方程 (157) 给出 [466]

$$2a\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}=\frac{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{48M\Delta\sqrt{2}}\mathscr{S}\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)$$
$$=-\frac{1}{12M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^--(2a\sigma^+\cos\theta)[\mathscr{L}S]^-\}rX$$
$$+a\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta+2(Q\sin\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)[\mathscr{L}S]^+$$
$$-6a\sigma^+(\sin\theta\cos\theta)[S]^+\}Y\Big]\!\Big]. \tag{182}$$

将右边两个表示中 rX 和 Y 的系数相等, 可得 $\mathscr{S}$ 的下面两个可供选择的表示式:

$$-\lambda a\sigma^+\mathscr{S}=Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^--2a\sigma^+[\mathscr{L}S]^-\cos\theta \tag{183}$$

和

$$-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{S}=Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta+2(Q\sin\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)$$
$$[\mathscr{L}S]^+-6a\sigma^+[S]^+\sin\theta\cos\theta. \tag{184}$$

由对方程 (157) 和 (159) 的比较, 可得到用 $[S]^+$ 和 $[S]^-$ 对方程 (183) 和 (184) 右方的明晰表示式, 即有

$$-\lambda a\sigma^+\mathscr{S}=\frac{1}{\beta_1}\Big[\!\Big[\{2(Q\cot\theta-a\sigma^+\cos\theta)(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)+8a\sigma^+\lambda Q^2\cos\theta\}[S]^+$$
$$+\{-2Q^2(\mathscr{C}_1-\Gamma_1)-8a\sigma^+\lambda(Q\mathrm{cosec}\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)\}[S]^-\Big]\!\Big] \tag{185}$$

和

$$-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{S}=\frac{1}{\beta_1}\Big[\!\Big[\{2Q^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)-8a\sigma^+\lambda(Q\mathrm{cosec}\theta-a\sigma^+\cos^2\theta)\}[S]^+\cos$$
$$+\{-2(Q\cot\theta-a\sigma^+\cos\theta)(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)+8a\sigma^+\lambda Q^2\cos\theta\}[S]^-\cos\theta$$
$$-2\{[(3a\sigma^+\cos\theta)\beta_1+\alpha_2Q][S]^++Q(\alpha_1+\mathscr{C}_1)[S]^-\}\sin\theta\Big]\!\Big]. \tag{186}$$

读者无需被告知, 关系式 (178)、(179)、(183) 和 (184) 是令人惊讶的: 不仅在于它们自身, 而且在于对最初用以定义 Ψ 的不定积分给出了明晰的表示. 在 §94 中将会回到可积条件解的这些特征.

[467]

89. Ⅱ 组简化的完成和 $\mathscr{R}$、$\mathscr{S}$ 满足的微分方程

§86 — §88 的考虑是限于从 (133) 的 8 个方程 (等价于 Ⅱ 组的方程) 导出的 4 个方程 (134)—(137). 在满足由这些方程得出的可积条件后, 除已得到的 Ψ 解外只余下两个方程 (134) 和 (136). 仍需考虑独立于已考虑的方程的另外 4 个方程.

将 (133) 中四对方程每一对的第一个方程减去第二个 (而不是相加), 可得

$$\sqrt{2}Q\rho^2(F_2^1-F_1^2)+\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho^4}{\Delta}B_2+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}\rho^4(J-H)$$

$$+2\mathrm{i}a\rho^2(F-G)\cos\theta=\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)+\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*),\tag{187}$$

$$\sqrt{2}\rho^2\frac{\partial}{\partial\theta}(F_2^1-F_1^2)-\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho^4}{\Delta}B_1+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}\rho^4(J+H)$$

$$+2\mathrm{i}a\rho^2C_2\cos\theta=\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*+\overline{\rho}\kappa)+\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu+\overline{\rho}\nu^*),\tag{188}$$

$$-\mathrm{i}K\rho^4(F_4^3-F_3^4)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\right)\rho^4C_1-\frac{Q}{\sqrt{2}}\rho^4(F+G)$$

$$-\sqrt{2}\mathrm{i}ar\rho^2(J+H)\sin\theta=(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)-(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right),\tag{189}$$

$$-\rho^2\Delta\frac{\partial}{\partial r}\rho^2(F_4^3-F_3^4)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\right)\rho^4C_2-\frac{Q}{\sqrt{2}}\rho^4(F-G)$$

$$+\sqrt{2}\mathrm{i}ar\rho^2B_1\sin\theta=-(\overline{\rho})^2(\rho^2\lambda^*+\frac{1}{2}\Delta\sigma)+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda+\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right).\tag{190}$$

从方程 (187) 和 (188) 消去 $(F_2^1-F_1^2)$, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{Q\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)+\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*)\right]\\&-\frac{\Delta}{2\rho^2}(\overline{\rho}^*\kappa^*+\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^2}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu+\overline{\rho}\nu^*)\\&=\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{Q^2\rho^2}\Delta\left[\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{\partial}{\partial r}(J-H)+\frac{4a^2\cos^2\theta}{\rho^2}(J-H)\right]\\&+\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{rQ}\Delta\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{F-G}{\Delta}-\frac{2\mathrm{i}aK}{Q^2\Delta}\Psi\\&=\frac{2\mathrm{i}a\Delta}{Q^2K}\left[\frac{\partial}{\partial r}K\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{K}+\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{K^2}-\frac{K^2}{\Delta^2}\right)\Psi\right].\end{aligned}\tag{191}$$

类似地, 从方程 (189) 和 (190) 消去 $\rho^2(F_4^3 - F_3^4)$, 得到 [468]

$$\begin{aligned}
&\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{i}\sqrt{2}}{K\rho^2}\left[(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^* - \frac{1}{2}\Delta\sigma\right) - (\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda - \frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right] \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{\rho^2}\left[-(\overline{\rho})^2\left(\rho^2\lambda^* + \frac{1}{2}\Delta\sigma\right) + (\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda + \frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right] \\
&= -\frac{2\mathrm{i}ar\Delta\sin\theta}{K^2\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\right)(F+G) + \frac{4a^2r^2\sin^2\theta}{\rho^2}(F+G)\right] \\
&\quad + \frac{2a\Delta\sin\theta}{K\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}(J+H) + \frac{2a\Delta Q}{K^2}\Psi \\
&= \frac{2a\Delta}{K^2Q}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}Q\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\Psi}{Q} - \left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{Q^2} - Q^2\right)\Psi\right].
\end{aligned} \tag{192}$$

注意, 在导致方程 (191) 和 (192) 的最后结果的简化中, 方程 (168) 是关键性的. 方程 (191) 和 (192) 可重写为另一种形式,

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}a\Delta}{K}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(K\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{K}\right) + \left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{K^2} - \frac{K^2}{\Delta^2}\right)\Psi\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2}Q^2\left\{\mathscr{L}_0^\dagger\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}\Delta\frac{\kappa^*}{\overline{\rho}} + \frac{2\rho^2\overline{\rho}^*}{\Delta}\nu\right) - \mathscr{L}_0\frac{1}{Q}\left(\frac{1}{2}\Delta\frac{\kappa}{\overline{\rho}^*} + \frac{2\rho^2\overline{\rho}}{\Delta}\nu^*\right)\right\}
\end{aligned} \tag{193}$$

和

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{Q}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Q\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\Psi}{Q}\right) - \left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{Q^2} - Q^2\right)\Psi\right\} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}K^2\left\{\mathscr{D}_0^\dagger\frac{1}{K}\left[-\frac{1}{2}\Delta\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\sigma + \frac{1}{2}\Delta\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}}\sigma^*\right] - \mathscr{D}_0\frac{1}{K}\left[-(\overline{\rho})^2\lambda^* + (\overline{\rho}^*)^2\lambda\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{194}$$

在方程 (193) 右边插入 κ 和 ν 的已知解, 在经过类似于方程 (153) 中的简化后, 得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{i}}{12M\Delta\sqrt{2}}\Big[\Big\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^- - 2a\sigma^+[\mathscr{L}S]^-\cos\theta\Big\}rY \\
&\quad -a\Big\{Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta + 2(Q\sin\theta - a\sigma^+\cos^2\theta)[\mathscr{L}S]^+ \\
&\quad -6a\sigma^+[S]^+\cos\theta\sin\theta\Big\}X\Big] \\
&= \mathrm{i}a\frac{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1}{48M\Delta\sqrt{2}}\left(X - \frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1}rY\right)\mathscr{S},
\end{aligned} \tag{195}$$

其中, 在最后一步用了关系式 (183) 和 (184) 二者. 另一方面, Ψ 可分离的事实 [469]
(如方程 (173) 所示) 使得能够将方程 (193) 的右边写为

$$\frac{\mathrm{i}a\Delta}{K}\frac{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1}{96M\sqrt{2}}\mathscr{S}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathscr{R}}{K}\right) - \left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{K^2} - \frac{K^2}{\Delta^2}\right)\mathscr{R}\right]. \tag{196}$$

于是就得到下列关于径向函数 $\mathscr{R}$ 的微分方程:

$$\frac{\Delta^2}{K}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathscr{R}}{K}\right)+\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{K^2}-\frac{K^2}{\Delta^2}\right)\mathscr{R}\right]=2\left(X-\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rY\right). \tag{197}$$

考虑另一个方程 (194), 类似地可得其右边能简化为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\Big[\!\Big[-\{rK[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^- -2(r^2\sigma^+ +K)[\mathscr{D}P]^- +6r\sigma^+[P]^-\}[S]^-\\&\qquad +\mathrm{i}a\{K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+ -2r\sigma^+[\mathscr{D}P]^+\}[S]^+\cos\theta\Big]\!\Big]\\&=\frac{\mathrm{i}}{12M\sqrt{2}}\left\{\mathrm{i}\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)\mathscr{R}[S]^- +\frac{1}{4}\mathrm{i}a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R}[S]^+\cos\theta\right\}\\&=-\frac{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{48M\sqrt{2}}\mathscr{R}\left\{[S]^+\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^-\right\},\end{aligned} \tag{198}$$

其中的最后一步用了关系式 (178) 和 (179) 二者; 而左边给出

$$\frac{a}{Q}\frac{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}{96M\sqrt{2}}\mathscr{R}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathscr{S}}{Q}\right)-\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{Q^2}-Q^2\right)\mathscr{S}\right]. \tag{199}$$

于是就得到下面的关于角向函数 $\mathscr{S}$ 的微分方程:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Q}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathscr{S}}{Q}\right)-\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{Q^2}-Q^2\right)\mathscr{S}\right]\\&\quad=-2\left\{[S]^+\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^-\right\}.\end{aligned} \tag{200}$$

方程 (197) 和 (200) 另外的形式是

$$\frac{\Delta^2}{K}\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{R}}{\mathrm{d}r^2}-\frac{2r\sigma^+}{K}\frac{\mathrm{d}\mathscr{R}}{\mathrm{d}r}+\frac{2\sigma^+\Delta^2-K^2}{K\Delta^2}\mathscr{R}\right)=2\left(X-\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rY\right) \tag{201}$$

[470] 和

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Q}\left[\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta^2}-\left(\frac{2a\sigma^+}{Q}\cos\theta-\cot\theta\right)\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta}+\left(Q^2-\mathrm{cosec}^2\theta-\frac{2a\sigma^+}{Q}\mathrm{cosec}\theta\right)\mathscr{S}\right]\\&\quad=-2\left\{[S]^+\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda a^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^-\right\}.\end{aligned} \tag{202}$$

于是, 方程 (187) — (190) 的可积条件导致 (201) 和 (202) 这两个值得注意的等式. 除此之外, 方程 (187) 和 (189) 可视为 $(F_2^1-F_1^2)$ 和 $\rho^2(F_4^3-F_3^4)$ 的借助于其它量的方程.

90. 四个线性化的里奇恒等式

在继续进行之前且暂停, 确定一下还有什么仍待解决的.

已经看到, I 组的方程能用来以 $F+G$、$J-H$、U 和 V 表示函数 B_1、B_2、C_1、C_2、$F-G$ 和 $J+H$.

II 组的方程除确定径向函数 R_{+2} 和 R_{-2} 的相对归一化, 并分别地确定斯塔罗宾斯基常量 $\mathscr{C}$ 的实部和虚部外, 还给出了对

$$\Psi = K(J-H)\cos\theta - \mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta \tag{203}$$

的分离解和将 $(F_2^1 \pm F_1^2)$、$\rho^2(F_4^3 \pm F_3^4)$ 用已列举的其它函数来表示的 4 个方程 (即 (134)、(136)、(187) 和 (189)).

III 组的方程只用于在对 $\boldsymbol{A}$ 的解完成后确定自旋系数 α、β、γ 和 ε 的扰动. 将会看到函数 U 和 V 直到最后仍保持未定, 因而可利用剩余 4 个规范自由度的两个来设它们等于零.

所以, 完成解所仍需的是分别确定 $F+G$ 和 $J-H$.

由于 16 个比安基恒等式和 24 个转换关系已全都使用, 就必须转到里奇恒等式. 对列于第 1 章 (方程 (310)) 的这些等式的检查表明, 应考虑第 1 章的方程 (310, a、n、g 和 p). 这些等式的线性化形式是

$$\begin{aligned}
&D\widetilde{\rho}^{(1)} + 2\widetilde{\rho}^{(1)}/\overline{\rho}^* - D^{(1)}(\overline{\rho}^*)^{-1} + (\varepsilon+\varepsilon^*)^{(1)}/\overline{\rho}^* = \delta^*\kappa - \kappa(3\alpha+\beta^*-\pi) - \kappa^*\tau,\\
&\boldsymbol{\Delta}\mu^{(1)} + (2\mu+\gamma+\gamma^*)\mu^{(1)} + \boldsymbol{\Delta}^{(1)}\mu + (\gamma+\gamma^*)^{(1)}\mu = \delta\nu - \nu(\tau-3\beta-\alpha^*) + \nu^*\pi,\\
&\delta^*\pi^{(1)} + (2\pi+\alpha-\beta^*)\pi^{(1)} + \delta^{*(1)}\pi + (\alpha-\beta^*)^{(1)}\pi = D\lambda + \lambda/\overline{\rho}^* - \sigma^*\mu,\\
&\delta\tau^{(1)} - (2\tau+\beta-\alpha^*)\tau^{(1)} + \delta^{(1)}\tau + (\alpha^*-\beta)^{(1)}\tau\\
&\quad = \boldsymbol{\Delta}\sigma + \sigma\mu - \lambda^*/\overline{\rho}^* - \sigma(3\gamma-\gamma^*).
\end{aligned} \tag{204}$$

在上面的方程中插入方程 (152) 给出的 κ、σ、λ 和 ν 的解, 方程 (105) 给出的 [471]
$\widetilde{\rho}^{(1)}$、$\tau^{(1)}$、$\mu^{(1)}$ 和 $\pi^{(1)}$ 的解, 以及 III 组的方程 (119) 给出的 $\alpha^{(1)}$、$\beta^{(1)}$、$\gamma^{(1)}$ 和 $\varepsilon^{(1)}$ 的解, 经过可观的演绎后得出

$$-\mathrm{i}KF_2^1 + \frac{1}{2}\Delta\mathscr{D}_0 U + \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta)\mathscr{D}_{-1}\rho^2 F + \sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)F$$
$$-\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)(F_2^3 - F_2^4) = -\frac{\Delta}{2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho}^*)^2\mathscr{L}_1\frac{\kappa}{(\overline{\rho}^*)^2} + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}\kappa^*\right], \tag{205}$$
$$+\mathrm{i}KF_1^2 + \frac{1}{2}\Delta\mathscr{D}_0^\dagger U - \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta)\mathscr{D}_{-1}^\dagger\rho^2 G - \sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)G$$
$$-\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)(F_1^3 - F_1^4) = \sqrt{2}\frac{\rho^4\overline{\rho}^*}{\Delta}\left[\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}}\mathscr{L}_1^\dagger(\rho^2\nu) + \frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2}\nu^*\right], \tag{206}$$

$$(\mathrm{i}aQ\sin\theta)F_3^4+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{2\rho^2}\mathscr{L}_0V+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_{-1}J-\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}J\right)$$
$$+\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(F_3^1+F_3^2)=\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}}\left[\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\lambda)+\frac{\Delta}{2\rho^2}\sigma^*\right], \tag{207}$$

$$(\mathrm{i}aQ\sin\theta)F_4^3-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{2\rho^2}\mathscr{L}_0^\dagger V-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger H-\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}H\right)$$
$$+\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(F_4^1+F_4^2)=-\left[\frac{\Delta\overline{\rho}^*}{2\overline{\rho}}\mathscr{D}_1^\dagger\frac{\overline{\rho}\sigma}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\lambda^*\right]. \tag{208}$$

将方程 (205) 和 (206) 相减, 方程 (207) 和 (208) 相加, 得到方程对

$$\mathrm{i}K(F_2^1+F_1^2-U)-\sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)(F+G)+\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)(J-H)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta)(\mathscr{D}_{-1}\rho^2F+\mathscr{D}_{-1}^\dagger\rho^2G)=\sqrt{2}\frac{\rho^4\overline{\rho}^*}{\Delta}$$
$$\times\left[\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}}\mathscr{L}_1^\dagger(\rho^2\nu)+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2}\nu^*\right]+\frac{\Delta}{2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho}^*)^2\mathscr{L}_1\frac{\kappa}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}\kappa^*\right] \tag{209}$$

和

$$\frac{\mathrm{i}aQ\sin\theta}{\rho^2}[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]+\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(F+G)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathscr{L}_{-1}J-\mathscr{L}_{-1}^\dagger H-\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}(J-H)\right]=\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}}\left[\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\lambda)+\frac{\Delta}{2\rho^2}\sigma^*\right]$$
$$-\left[\frac{\Delta\overline{\rho}^*}{2\overline{\rho}}\mathscr{D}_1^\dagger\frac{\overline{\rho}\sigma}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\lambda^*\right]. \tag{210}$$

[472] 类似地, 将方程 (205) 和 (206) 相加, 方程 (207) 和 (208) 相减, 得到补充方程对

$$-\mathrm{i}K(F_2^1-F_1^2)+\frac{1}{2}\Delta(\mathscr{D}_0+\mathscr{D}_0^\dagger)U+\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}a\sin\theta)(\mathscr{D}_{-1}\rho^2F-\mathscr{D}_{-1}^\dagger\rho^2G)$$
$$+\sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)(F-G)-\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)B_2$$
$$=-\frac{\Delta}{2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho}^*)^2\mathscr{L}_1\frac{\kappa}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}\kappa^*\right]$$
$$+\sqrt{2}\frac{\rho^4\overline{\rho}^*}{\Delta}\left[\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}}\mathscr{L}_1^\dagger(\rho^2\nu)+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{(\overline{\rho}^*)^2}\nu^*\right], \tag{211}$$

和

$$-(\mathrm{i}aQ\sin\theta)(F_4^3-F_3^4)+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{2\rho^2}(\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_0^\dagger)V+\sqrt{2}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}C_1$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_{-1}J+\mathscr{L}_{-1}^\dagger H-\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}J-\frac{2\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}-H\right)$$
$$=\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}}\left[\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\lambda)+\frac{\Delta}{2\rho^2}\sigma^*\right]+\left[\frac{\Delta\overline{\rho}^*}{2\overline{\rho}}\mathscr{D}_1^\dagger\frac{\overline{\rho}\sigma}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\lambda^*\right]. \tag{212}$$

91. 方程 (209) 和 (210) 的解

现在来显示, 如何通过从方程 (209) 和 (210) 消去 $(F_2^1+F_1^2-U)$ 和 $[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]$ (借助于方程 (134) 和 (136)), 而得到下面的支配 $K(J-H)\cos\theta(=Z_1)$ 和 $-\mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta(=Z_2)$ 的异常简单的方程组 (242) — (245).

首先考虑方程 (209) 和 (210) 的虚部, 有

$$(\mathrm{i}a\sin\theta)\left\{\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^2\frac{F+G}{\sqrt{\Delta}}\right)-[r(F+G)+(\mathrm{i}a\cos\theta)(J-H)]\right\}$$
$$=[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^* \tag{213}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(J-H)-(\mathrm{i}a\sin\theta)[r(F+G)+(\mathrm{i}a\cos\theta)(J-H)]=[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma^*], \tag{214}$$

其中

$$[\kappa,\nu]=\frac{\rho^4\overline{\rho}}{2\Delta}\left[\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}^*}\mathscr{L}_1(\rho^2\nu^*)-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^2}\nu\right]+\frac{1}{8}\Delta\left[\overline{\rho}^2\mathscr{L}_1^\dagger\frac{\kappa^*}{\overline{\rho}^2}-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\kappa\right] \tag{215}$$

和 [473]

$$[\lambda,\sigma]=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\rho}^*)^2\left[\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\lambda)+\frac{\Delta}{2\rho^2}\sigma^*\right]-\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^2\left[\frac{\Delta\overline{\rho}^*}{2\overline{\rho}}\mathscr{D}_1^\dagger\frac{\overline{\rho}\sigma}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\lambda^*\right]. \tag{216}$$

可见在方程 (213) 和 (214) 中都有组合 $[r(F+G)+\mathrm{i}a(J-H)\cos\theta]$ 出现. 在方程 (213) 中将其代之以 $F+G$ 和 Ψ 的组合, 而在方程 (214) 中代之以 $J-H$ 和 Ψ 的组合, 办法是利用下面两个关系的一个或另一个,

$$r(F+G)+(\mathrm{i}a\cos\theta)(J-H)=\frac{r\sigma^+}{K}\rho^2(F+G)+\frac{\mathrm{i}a\Psi}{K}$$
$$=-\frac{\mathrm{i}\sigma^+}{Q\sin\theta}\rho^2(J-H)\cos\theta+\frac{\mathrm{i}\Psi}{Q\sin\theta}. \tag{217}$$

经过这样代换后, 方程 (213) 和 (214) 成为

$$(\mathrm{i}a\sin\theta)\left[\sqrt{\Delta K}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^2\frac{F+G}{\sqrt{\Delta K}}\right)-\frac{\mathrm{i}a\Psi}{K}\right]=[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^* \tag{218}$$

和

$$\sqrt{Q\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{Q\sin\theta}}\right)+\frac{a\Psi}{Q}=[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^*. \tag{219}$$

回到方程 (209) 和 (210), 再考虑它们的实部:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}K(F_2^1+F_1^2-U)+(a\sin\theta)[\mathrm{i}r(J-H)-a(F+G)\cos\theta]$$
$$=[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^* \tag{220}$$

和

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}Q(a\sin\theta)[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]-(a\sin\theta)$$
$$[\mathrm{i}r(J-H)-a(F+G)\cos\theta]=[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma^*]. \tag{221}$$

利用下面两个关系的一个或另一个,

$$\mathrm{i}r(J-H)-a(F+G)\cos\theta=\frac{\mathrm{i}\alpha^2\sigma^+}{arQ\sin\theta}\rho^2(J-H)-\frac{\mathrm{i}a\cos\theta}{rQ\sin\theta}\Psi$$
$$=-\frac{\alpha^2\sigma^+}{aK\cos\theta}\rho^2(F+G)+\frac{\mathrm{i}r}{K\cos\theta}\Psi, \tag{222}$$

可使方程 (220) 和 (221) 成为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}K(F_2^1+F_1^2-U)+\frac{\mathrm{i}\alpha^2\sigma^+}{rQ}\rho^2(J-H)-\frac{\mathrm{i}a^2\cos\theta}{rQ}\Psi=[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^* \tag{223}$$

[474] 和

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}Q(a\sin\theta)[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]+\frac{\alpha^2\sigma^+\sin\theta}{K\cos\theta}\rho^2(F+G)-\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{K\cos\theta}\Psi$$
$$=[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma]^*. \tag{224}$$

现在利用方程 (134) 和 (136) 来从方程 (223) 和 (224) 消去 $(F_2^1+F_1^2-U)$ 和 $[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]$. 将方程 (134) 和 (136) 写为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}Q(F_2^1+F_1^2-U)+\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}\right)=(\kappa,\nu) \tag{225}$$

和

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}K[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]+\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F+G)=(\lambda,\sigma), \tag{226}$$

其中

$$(\kappa,\nu)=\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)-\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*)\right] \tag{227}$$

和

$$(\lambda,\sigma)=\frac{1}{\rho^2\sqrt{2}}\left[(\overline{\rho})^2(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma)+(\overline{\rho}^*)^2\left(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*\right)\right]. \tag{228}$$

进行所说的消去, 得到方程对

$$K\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho^2\frac{J-H}{\sqrt{\Delta}}\right)-\frac{\alpha^2\sigma^+}{r}\rho^2(J-H)+\frac{a^2\cos\theta}{r}\Psi$$
$$=\mathrm{i}Q\{[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^*\}+K(\kappa,\nu), \tag{229}$$

和

$$(Qa\sin\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2(F+G)+\frac{\alpha^2\sigma^+\sin\theta}{\cos\theta}\rho^2(F+G)-\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{\cos\theta}\Psi$$
$$=K\{[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma]^*\}+(Qa\sin\theta)(\lambda,\sigma), \tag{230}$$

注意这些方程的左边有着另一种形式,

$$r\sqrt{\Delta K}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sqrt{K}}{r\sqrt{\Delta}}\rho^2(J-H)\right)+\frac{a^2\cos\theta}{r^2\sqrt{\Delta K}}\Psi\right] \tag{231}$$

和

$$(a\cos\theta)\sqrt{Q\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sqrt{Q\sin\theta}}{\cos\theta}\rho^2(F+G)\right)-\frac{\mathrm{i}r\sin\theta}{(\cos^2\theta)\sqrt{Q\sin\theta}}\Psi\right]. \tag{232}$$

已经导出的支配 $F+G$ 和 $J-H$ 的 4 个方程是 [475

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\sqrt{\Delta K}}\rho^2(F+G)\right]-\frac{\mathrm{i}a}{\sqrt{K^3\Delta}}\Psi$$
$$=\frac{1}{(\mathrm{i}a\sin\theta)\sqrt{\Delta K}}\{[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^*\}, \tag{233}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sqrt{Q\sin\theta}}{\cos\theta}\rho^2(F+G)\right]-\frac{\mathrm{i}r\sin\theta}{(\cos^2\theta)\sqrt{Q\sin\theta}}\Psi$$
$$=\frac{1}{(a\cos\theta)\sqrt{Q\sin\theta}}\left[\!\left[K\{[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma]^*\}+(Qa\sin\theta)(\lambda,\sigma)\right]\!\right], \tag{234}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\sqrt{K}}{r\sqrt{\Delta}}\rho^2(J-H)\right]+\frac{a^2\cos\theta}{r^2\sqrt{\Delta K}}\Psi$$
$$=\frac{1}{r\sqrt{\Delta K}}\left[\!\left[\mathrm{i}Q\{[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^*\}+K(\kappa,\nu)\right]\!\right], \tag{235}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{\sqrt{Q\sin\theta}}\rho^2(J-H)\right]+\frac{a}{\sqrt{Q^3\sin\theta}}\Psi$$
$$=\frac{1}{\sqrt{Q\sin\theta}}\{[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^*\}. \tag{236}$$

(a) 方程 (233) — (236) 的简化

令

$$Z_1=K(J-H)\cos\theta \text{ 和 } Z_2=-\mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta, \tag{237}$$

致有

$$\Psi=Z_1+Z_2, \tag{238}$$

现在来寻找方程 (233) — (236) 的变换, 致使 $J-H$ 和 $F+G$ 在 Z_1 和 Z_2 的组合中出现. 所需的变换可由对方程 (233)、(234)、(235) 和 (236) 分别乘以 $-\mathrm{i}\sqrt{Q\sin\theta}/\cos\theta$、$-\mathrm{i}/\sqrt{\Delta K}$、$1/\sqrt{Q\sin\theta}$ 和 $\sqrt{K}/r\sqrt{\Delta}$ 来实现. 由定义

$$E=\frac{\rho^2}{(r\cos\theta)\sqrt{\Delta KQ\sin\theta}}, \tag{239}$$

$$A_1=\frac{r^2\sin\theta}{\rho^2\cos\theta},\quad B_1=\frac{aK\cos\theta}{\rho^2Q},$$

$$A_2=\frac{arQ\sin\theta}{K\rho^2},\quad B_2=\frac{a^2\cos^2\theta}{r\rho^2}, \tag{240}$$

[476] 和

$$\left.\begin{aligned} X_1&=\frac{rQ}{a\rho^2}\{[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^*\},\\ Y_1&=\frac{K\cos\theta}{\rho^2}\{[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^*\}\\ X_2&=\frac{\cos\theta}{\rho^2}\left[\!\left[\mathrm{i}Q\{[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^*\}+K(\kappa,\nu)\right]\!\right],\\ Y_2&=\frac{\mathrm{i}r}{a\rho^2}\left[\!\left[K\{[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma]^*\}+(Qa\sin\theta)(\lambda,\sigma)\right]\!\right], \end{aligned}\right\} \tag{241}$$

可得, 经所说的相乘后, 方程成为异常简单的形式,

$$\frac{\partial}{\partial r}EZ_2-A_2E\Psi=-EX_1, \tag{242}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}EZ_2-A_1E\Psi=-EY_2, \tag{243}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}EZ_1+B_2E\Psi=+EX_2, \tag{244}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\theta}EZ_1+B_1E\Psi=+EY_1. \tag{245}$$

为今后的参照, 应注意 X_1、X_2、Y_1 和 Y_2 的定义中出现的包含自旋系数的各个括号表示是

$$(\kappa,\nu)=\frac{1}{12M\Delta\sqrt{2}}\left[rX[\mathscr{L}S]^-+aY\{[\mathscr{L}S]^+\cos\theta+3[S]^+\sin\theta\}\right],$$

$$[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^*=\frac{1}{24M\Delta\sqrt{2}}\left[\!\left[X\{(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-\right.\right.$$
$$-2a^2[\mathscr{L}S]^-\sin\theta\cos\theta\}$$
$$\left.\left.+2arY\{[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta+[\mathscr{L}S]^+\sin\theta\}\right]\!\right],$$

$$[\kappa,\nu]+[\kappa,\nu]^*=\frac{\mathrm{i}}{24M\Delta\sqrt{2}}\left[\!\left[2arX\{[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-\cos\theta+2[\mathscr{L}S]^-\sin\theta\}\right.\right.$$

$$+Y\{-(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+ + 4a^2[\mathscr{L}S]^+\sin\theta\cos\theta$$
$$+6a^2[S]^+\sin^2\theta\}\Big]\!\Big]; \tag{246}$$

[477]

$$(\lambda,\sigma) = \frac{1}{12M\sqrt{2}}\left[\!\left[\{-r[\eth P]^- + 3[P]^-\}[S]^+ + \mathrm{i}a[\eth P]^+[S]^-\cos\theta\right]\!\right],$$

$$[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^* = \frac{1}{24M\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{-(r^2-a^2\cos^2\theta)[\eth\eth P]^+$$
$$+2r[\eth P]^+\}[S]^- + 2\mathrm{i}a\{r[\eth\eth P]^- - [\eth P]^-\}[S]^+\cos\theta\Big]\!\Big],$$

$$[\lambda,\sigma]+[\lambda,\sigma]^* = \frac{1}{24M\sqrt{2}}\Big[\!\Big[2\mathrm{i}a\{r[\eth\eth P]^+ - 2[\eth P]^+\}[S]^-\cos\theta$$
$$+\{-(r^2-a^2\cos^2\theta)[\eth\eth P]^- + 4r[\eth P]^- - 6[P]^-\}[S]^+\Big]\!\Big]. \tag{247}$$

在系数 E、A_1、A_2、B_1 和 B_2 之间有一些未曾预期的关系, 它们对方程 (242) — (245) 的可解性起有关键作用. 这些关系列于下面的引理中.

引理:

(i) $A_1B_2 = A_2B_1; (A_1+B_1)(A_2-B_2) = (A_1-B_1)(A_2+B_2)$;

(ii) $A_1+B_1 = \alpha^2\sigma^+/(aQ\cos\theta)$ (仅是 θ 的函数);

(iii) $A_2+B_2 = \alpha^2\sigma^+/rK$ (仅是 r 的函数);

(iv) $\partial A_1/\partial r = \partial A_2/\partial\theta; \partial B_1/\partial r = \partial B_2/\partial\theta$;

(v) $\partial\lg E/\partial r = A_2 - B_2 - (r-M)/\Delta; \partial\lg E/\partial\theta = A_1 - B_1$;

(vi) $A_1\partial\lg E/\partial r - A_2\partial\lg E/\partial\theta = -A_1(r-M)/\Delta$;

(vii) $B_1\partial\lg E/\partial r - B_2\partial\lg E/\partial\theta = -B_1(r-M)/\Delta$. (248)

由于 $\Psi = Z_1+Z_2$, 方程 (242) — (245) 的基本要旨是,Z_1 和 Z_2 对 r 和 θ 的导数能表示为 Z_1 和 Z_2 的线性组合. 利用引理中的关系, 由方程 (242) — (245) 可得

$$\frac{\partial Z_1}{\partial r} = -\left(A_2 - \frac{r-M}{\Delta}\right)Z_1 - B_2Z_2 + X_2, \tag{249}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial\theta} = -A_1Z_1 - B_1Z_2 + Y_1, \tag{250}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial r} = +A_2Z_1 + \left(B_2 + \frac{r-M}{\Delta}\right)Z_2 - X_1, \tag{251}$$

$$\frac{\partial Z_2}{\partial\theta} = +A_1Z_1 + B_1Z_2 - Y_2 \tag{252}$$

[478]

(*b*) 可积条件

方程 (242) — (245)(或等价地, 方程 (249) — (252)) 导致具有一定意义的可积条件. 记住 $\Psi = Z_1 + Z_2$, 将方程 (249) 和 (251) 相加, 方程 (250) 和 (252) 相加, 得到方程对

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}} = -(X_1 - X_2), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = +(Y_1 - Y_2). \tag{253}$$

由于 Ψ 的已知性质 (见方程 (173)、(175) 和 (176)), 这些方程给出

$$X_1 - X_2 = -\frac{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1}{96M\Delta\sqrt{2}}\left(Y + \frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1} rX\right)\mathscr{S} \tag{254}$$

和

$$Y_1 - Y_2 = +\frac{\mathscr{C}_1 + \Gamma_1}{96M\sqrt{2}}\left\{[S]^- \cos\theta + \frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2 - 6a^2)}{a(\mathscr{C}_1 + \Gamma_1)}[S]^+\right\}\mathscr{R}. \tag{255}$$

鉴于定义 X_1、$\cdots$、Y_2 的方程的复杂性, 上述关系是很值得注意的等式: 它们是不能被预见的. 但是现在, 如果恰当地利用关系 (178)、(179)、(183) 和 (184), 它们能被直接验证 (经过一些努力).

再有, 方程 (242) 和 (243) 以及方程 (244) 和 (245) 导致可积条件对

$$\frac{\partial}{\partial r}(A_1 E\Psi) - \frac{\partial}{\partial \theta}(A_2 E\Psi) = \frac{\partial}{\partial r}(EY_2) - \frac{\partial}{\partial \theta}(EX_1) \tag{256}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial r}(B_1 E\Psi) - \frac{\partial}{\partial \theta}(B_2 E\Psi) = \frac{\partial}{\partial r}(EY_1) - \frac{\partial}{\partial \theta}(EX_2). \tag{257}$$

利用引理中的关系, 上述方程给出

$$A_1\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}\right) - A_2\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial r}EY_2 - \frac{\partial}{\partial \theta}EX_1\right) \tag{258}$$

和

$$B_1\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}\right) - B_2\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial}{\partial r}EY_1 - \frac{\partial}{\partial \theta}EX_2\right). \tag{259}$$

由方程 (253) 来取代方程 (258) 和 (259) 右边的量, 得到方程对

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y_1}{\sqrt{\Delta}}\right) - \frac{\partial X_2}{\partial \theta} = -B_1X_1 + A_1X_2 - A_2Y_1 + B_2Y_2 \tag{260}$$

[479] 和

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y_2}{\sqrt{\Delta}}\right) - \frac{\partial X_1}{\partial \theta} = -B_1X_1 + A_1X_2 - A_2Y_1 + B_2X_2. \tag{261}$$

这两个方程相减给出

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y_1-Y_2}{\sqrt{\Delta}}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}(X_1-X_2)=0; \tag{262}$$

而这个关系只是方程 (253) 所要求的. 但是方程 (260) 和 (261) 相加 (经过利用引理中的关系所作的一些演绎之后) 却给出一个新关系:

$$\frac{\partial}{\partial r}E[(Y_1+Y_2)-(A_1+B_1)\Psi]=\frac{\partial}{\partial\theta}E[(X_1+X_2)-(A_2+B_2)\Psi]. \tag{263}$$

这个关系必定成立, 因为其中出现的所有量都是已知函数. 在 §94 将考虑这个等式的应用.

回到方程 (242) — (245), 方程 (242) 和 (244) 相减以及 (243) 和 (245) 相减产生方程对

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}E(Z_1-Z_2)&=E[(X_1+X_2)-(A_2+B_2)\Psi]\\ \text{和}\qquad\frac{\partial}{\partial\theta}E(Z_1-Z_2)&=E[(Y_1+Y_2)-(A_1+B_1)\Psi].\end{aligned}\right\} \tag{264}$$

方程 (263) 保证了这些方程的可积性, 以致 $E(Z_1-Z_2)$ 的解是由

$$E(Z_1-Z_2)=\int^r E[(X_1+X_2)-(A_2+B_2)\Psi]\mathrm{d}r, \tag{265}$$

或由

$$E(Z_1-Z_2)=\int^\theta E[(Y_1+Y_2)-(A_1+B_1)\Psi]\mathrm{d}\theta \tag{266}$$

正确地给出. 这只是一个形式上的解, 因为它包括对许多函数的积分. 将在下面的 §92 显示, 如何借助于方程 (249) — (252) 而从余下的方程对 (211) 和 (212) 得到 Z_1 和 Z_2 的明晰解.

92. Z_1 和 Z_2 的明晰解 [480]

对方程对 (209) 和 (210)(从 4 个里奇恒等式的线性化形式 (204) 导出) 所作考虑的主要结果是方程 (249) — (252), 它们将 Z_1 和 Z_2 的导数表示为函数自身的线性组合. 现在来显示, 如何由余下的方程对 (211) 和 (212) 来完成 Z_1 和 Z_2 的解.

首先看到,Z_1 和 Z_2 的导数能表示为函数自身的线性组合的事实意味着, 在有 Z_1 和 Z_2 的导数出现的任何方程里 (无论阶有多高), 总能将它们以函数来代替. 以方程 (131) 和 (132) 为例. 用 Z_1 和 Z_2 来重写这两个方程的右边, 有

$$\frac{rKQ\sin\theta}{\Delta}(F-G)=\frac{\partial Z_2}{\partial r}-\frac{Z_2}{r}-\frac{2arQ\sin\theta}{K\rho^2}Z_1 \tag{267}$$

和

$$KQ(J+H)\cos\theta=\frac{\partial Z_1}{\partial\theta}+\frac{Z_1}{\cos\theta\sin\theta}+\frac{2aK\cos\theta}{Q\rho^2}Z_2. \tag{268}$$

现在用方程 (250) 和 (251) 来代换上述方程右边出现的 Z_1 和 Z_2 的导数, 得

$$\frac{rKQ\sin\theta}{\Delta}(F-G)=-\frac{arQ\sin\theta}{K\rho^2}Z_1+\left(\frac{r-M}{\Delta}-\frac{r}{\rho^2}\right)Z_2-X_1, \tag{269}$$

和

$$KQ(J+H)\cos\theta=\frac{(r^2+a^2)\cot\theta}{\rho^2}Z_1+\frac{aK\cos\theta}{Q\rho^2}Z_2+Y_1. \tag{270}$$

对将来的研究而言的基本方程是方程 (211) 的虚部和方程 (212) 的实部. 这些方程能被重写为

$$\mathscr{D}_{-1}\rho^2F-\mathscr{D}^\dagger_{-1}\rho^2G=\frac{2}{\mathrm{i}a\sin\theta}[\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*] \tag{271}$$

和

$$\rho^2\left[\mathscr{L}_{-1}J+\mathscr{L}^\dagger_{-1}H-\frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}(J+H)\right]=2[\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma\}^*], \tag{272}$$

其中

$$\{\kappa,\nu\}=\frac{1}{8}\Delta\left[\overline{\rho}^2\mathscr{L}_1^\dagger\frac{\kappa^*}{\overline{\rho}^2}-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\kappa\right]-\frac{\rho^4\overline{\rho}}{2\Delta}\left[\frac{1}{\rho^2\overline{\rho}^*}\mathscr{L}_1(\rho^2\nu^*)-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^2}\nu\right] \tag{273}$$

[481] 和

$$\begin{aligned}\{\lambda,\sigma\}=&\frac{1}{2\sqrt{2}}(\overline{\rho}^*)^2\left[\mathscr{D}_0(\overline{\rho}^*\lambda)+\frac{\Delta}{2\rho^2}\sigma^*\right]\\&+\frac{1}{2\sqrt{2}}\rho^2\left[\frac{\Delta\overline{\rho}^*}{2\overline{\rho}}\mathscr{D}_1^\dagger\frac{\overline{\rho}\sigma}{(\overline{\rho}^*)^2}+\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}^*}\lambda^*\right].\end{aligned} \tag{274}$$

重写方程 (271) 为

$$\begin{aligned}&\Delta\frac{\partial}{\partial r}\rho^2\frac{F-G}{\Delta}+\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}\rho^2(F+G)\\&=\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho^2}{rKQ\sin\theta}\left[\frac{rKQ\sin\theta}{\Delta}(F-G)\right]-\frac{K\rho^2}{r\Delta Q\sin\theta}Z_2\\&=-\frac{2\mathrm{i}}{a\sin\theta}[\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*],\end{aligned} \tag{275}$$

并利用方程 (269), 得到

$$\begin{aligned}&rK\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho^2}{rK}\left[-\frac{arQ\sin\theta}{K\rho^2}Z_1+\left(\frac{r-M}{\Delta}-\frac{r}{\rho^2}\right)Z_2-X_1\right]-\frac{K^2\rho^2}{\Delta}Z_2\\&=-2\mathrm{i}\frac{rKQ}{a}[\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*].\end{aligned} \tag{276}$$

类似地, 将方程 (272) 重写为

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\rho^2\frac{J+H}{\sin\theta}+Q\rho^2(J-H)=2[\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma\}^*] \tag{277}$$

并利用方程 (270), 得到

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\rho^2}{KQ\cos\theta\sin\theta}\left[\frac{(r^2+a^2)\cot\theta}{\rho^2}Z_1+\frac{aK\cos\theta}{Q\rho^2}Z_2+Y_1\right]$$
$$+\frac{Q\rho^2}{K\cos\theta}Z_1=2[\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma^*\}]. \tag{278}$$

现在将方程 (276) 和 (278) 的左边展开, 并再次将其中的 Z_1 和 Z_2 的导数用方程 (249) — (252) 来替代, 在作了可观的演绎后得到方程对

$$\left[\frac{\rho^2}{\Delta}(a^2-M^2-K^2)-\frac{\sigma^+}{K}\{\Delta a^2\cos^2\theta+2r\rho^2(r-M)-2r^2\Delta\}\right]Z_2$$
$$+\frac{3a\sigma^+}{K^2}(r^2\Delta Q\sin\theta)Z_1=\frac{arQ\sin\theta}{K}\Delta X_2+[\rho^2(r-M)-r\Delta]X_1$$
$$+\frac{rMQ}{a}\left\{\Delta\frac{\partial}{\partial r}\frac{[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^*}{K}-2\mathrm{i}[\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*]\right\} \tag{279}$$

和 [482]

$$\left[\rho^2(Q^2-\mathrm{cosec}^2\theta)+\frac{a\sigma^+}{Q\sin\theta}(3r^2\sin^2\theta-2\rho^2)\right]Z_1-\frac{3a^2\sigma^+}{Q^2}(K\cos^2\theta)Z_2$$
$$=-[(r^2+a^2)\cot\theta]Y_1+\frac{aK\cos\theta}{Q}Y_2$$
$$+(QK\cos\theta)\left\{-\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^*}{Q\sin\theta}+2[\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma\}^*]\right\}, \tag{280}$$

其中应注意

$$\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*=\frac{\mathrm{i}}{24M\Delta\sqrt{2}}\Big[\!\Big[Y\{(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-$$
$$-2a^2[\mathscr{L}S]^-\sin\theta\cos\theta\}$$
$$-2arX\{[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta+[\mathscr{L}S]^+\sin\theta\}\Big]\!\Big], \tag{281}$$

$$\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma\}^*=\frac{1}{24M\sqrt{2}}\Big[\!\Big[\{(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+-2r[\mathscr{D}P]^+\}[S]^+$$
$$-2\mathrm{i}a\{r[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^--[\mathscr{D}P]^-\}[S]^-\cos\theta\Big]\!\Big]. \tag{282}$$

现已明显, 两个方程 (279) 和 (280) 之任一个都足以确定 Z_1 和 Z_2, 因为已知它们的和是 Ψ. 但将看到, 更便利的做法是如下面 §(a) 那样对称地处理这两个方程.

(a) Z_1 和 Z_2 解的确定

在方程 (279) 中用 $\Psi - Z_2$ 来代替其左边的 Z_1, 而在方程 (280) 中用 $\Psi - Z_1$ 来代替 Z_2. 再利用关系 (254) 和 (255), 分别用 X_1 和 Y_1 来代替 X_2 和 Y_2 (在方程的右边). 这样就将方程 (279) 和 (280) 变为

$$\begin{aligned}
&\rho^2\left[\frac{1}{\Delta}(a^2-M^2-K^2)-\frac{\sigma^+\Delta}{K}\left\{1+\frac{2r(r-M)}{\Delta}-\frac{3r^2\sigma^+}{K}\right\}\right]Z_2\\
&=\frac{arQ\sin\theta}{K}\Delta\left(\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}-\frac{3r\sigma^+}{K}\Psi\right)\\
&\quad+\frac{rKQ}{a}\left\{\frac{\Delta}{K}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{r-M}{\Delta}-\frac{3r\sigma^+}{K}\right)\{[\kappa,\nu]-[\kappa,\nu]^*\}\right.\\
&\quad\left.-2\mathrm{i}[\{\kappa,\nu\}-\{\kappa,\nu\}^*]\right\}
\end{aligned}\tag{283}$$

[483] 和

$$\begin{aligned}
&\rho^2\left[(Q^2-\operatorname{cosec}^2\theta)+\frac{a\sigma^+}{Q\sin\theta}\left(3\sin^2\theta-2+\frac{3a\sigma^+}{Q}\cos^2\theta\sin\theta\right)\right]Z_1\\
&=-\frac{aK\cos\theta}{Q}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{3a\sigma^+\cos\theta}{Q}\Psi\right)\\
&\quad+(QK\cos\theta)\left\{\frac{1}{Q}\left[-\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\right)+\frac{3a\sigma^+}{Q}\cos\theta\right]\{[\lambda,\sigma]-[\lambda,\sigma]^*\}\right.\\
&\quad\left.+2[\{\lambda,\sigma\}+\{\lambda,\sigma\}^*]\right\}.
\end{aligned}\tag{284}$$

现在将上面方程中的自旋系数项用方程 (246)、(247)、(281) 和 (282) 代入, 得到下列 Z_1 和 Z_2 的解, 其中已略去了公共因子 $1/(24M\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned}
&\rho^2\left[(Q^2-\operatorname{cosec}^2\theta)+\frac{a\sigma^+}{Q\sin\theta}\left(3\sin^2\theta-2+\frac{3a\sigma^+}{Q}\cos^2\theta\sin\theta\right)\right]Z_1\\
&=-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\frac{aK\cos\theta}{Q}\left\{\mathscr{R}\left[[S]^-\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^+\right]\right.\\
&\quad\left.-\frac{3a\sigma^+\cos\theta}{Q}\mathscr{R}\mathscr{S}\right\}\\
&\quad+K\cos\theta\left[\!\left[\left\{[\mathscr{L}S]^--\left(\cot\theta+\frac{3a\sigma^+}{Q}\cos\theta\right)[S]^{-1}+Q[S]^+\right\}\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\times\{(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+-2r[\mathscr{D}P]^+\}\right.\right.\\
&\quad\left.-2\mathrm{i}a\left\{[\mathscr{L}S]^+-\left(\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}+\frac{3a\sigma^+\cos\theta}{Q}\right)[S]^+\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+Q[S]^-\Big\}\{r[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^- - [\mathscr{D}P]^-\}\cos\theta$$
$$+2a^2[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+[S]^-\sin\theta\cos\theta\Big]\!\Big] \tag{285}$$

和

$$\rho^2\left[\frac{1}{\Delta}(a^2-M^2-K^2)-\frac{\sigma^+\Delta}{K}\left\{1+\frac{2r(r-M)}{\Delta}-\frac{3r^2\sigma^+}{K}\right\}\right]Z_2$$
$$=\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\frac{arQ\sin\theta}{K}\Delta\left\{\frac{\mathscr{S}}{\Delta}\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)-\frac{3r\sigma^+}{K}\mathscr{R}\mathscr{S}\right\}$$
$$+\frac{rQ}{a}\Big[\!\Big[\left\{[\mathscr{D}P]^+-\left(\frac{r-M}{\Delta}+\frac{3r\sigma^+}{K}\right)X+K\frac{Y}{\Delta}\right\} \tag{484}$$
$$\times\{(r^2-a^2\cos^2\theta)[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^- - 2a^2[\mathscr{L}S]^-\sin\theta\cos\theta\}$$
$$-2ar\left\{\mathrm{i}[\mathscr{D}P]^-+\left(\frac{Mr-a^2}{r\Delta}+\frac{3r\sigma^+}{K}\right)Y+K\frac{X}{\Delta}\right\}$$
$$\times\{[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta+[\mathscr{L}S]^+\sin\theta\}+2r[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-X\Big]\!\Big]. \tag{286}$$

当然, 作为一个必要的验证, 按照方程 (285) 和 (286) 确定的 Z_1 和 Z_2 是与下列要求一致的,

$$Z_1+Z_2=\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R}\mathscr{S}. \tag{287}$$

(*b*) 方程 (211) 和 (212) 的进一步应用

已经考虑了方程 (211) 的虚部和方程 (212) 的实部. 而方程 (211) 的实部和方程 (212) 的虚部还有待考虑, 它们是:

$$-\mathrm{i}K(F_2^1-F_1^2)+\Delta\frac{\partial U}{\partial r}-\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)B_2$$
$$+\sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)(F-G)=-\sqrt{2}[\{\kappa,\nu\}+\{\kappa,\nu\}^*] \tag{288}$$

和

$$-(\mathrm{i}aQ\sin\theta)\rho^2(F_4^3-F_3^4)+\mathrm{i}a\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}+\sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)C_1$$
$$-\sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)(J+H)=\sqrt{2}[\{\lambda,\sigma\}-\{\lambda,\sigma\}^*]. \tag{289}$$

方程 (288) 和 (289) 看似决定着迄今保持未定的 U 和 V: 在从 §86 开始的分析中,U 和 V 总是出现在结合 $(F_2^1+F_1^2-U)$ 和 $[\rho^2(F_4^3+F_3^4)+V]$ 中, 尽管它们在 B_1、B_2、C_1 和 C_2 的表示式 (127) — (130) 中明晰地出现. 但将验证, 方程 (288) 和 (289) 中含 U 和 V 的项都同样抵消. 在方程 (288) 中, 除了 $\Delta U_{,r}$

外, 由方程 (128) 和 (187) 给出的 B_2 和 $(F_2^1 - F_1^2)$ 的解中也有含 U 的项出现. 写出这些项, 得到

$$\frac{\mathrm{i}K}{Q\rho^2\sqrt{2}}\Delta\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\rho^4}{\Delta}\frac{\Delta}{\mathrm{i}K}\frac{-Q\sqrt{2}}{\rho^2}U\right] - \sqrt{2}(\mathrm{i}ar\sin\theta)\frac{\Delta}{\mathrm{i}K}\frac{-Q\sqrt{2}}{\rho^2}U$$
$$+\Delta\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{K\Delta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho^2}{K}U\right) + \frac{2\Delta r}{\rho^2 K}(aQ\sin\theta)U + \Delta\frac{\partial U}{\partial r} = 0. \tag{290}$$

[485] 类似地, 在方程 (289) 中, 除了 $(\mathrm{i}a\sin\theta)V_{,\theta}$ 外, 由方程 (129) 和 (189) 给出的 C_1 和 $(F_4^3 - F_3^4)$ 的解中也有含 V 的项出现. 写出这些项, 再得到

$$+(\mathrm{i}aQ\sin\theta)\left[\frac{1}{\mathrm{i}K\rho^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right)\left(\rho^4\frac{-\sqrt{2}}{Q\rho^2}\mathrm{i}KV\right)\right]$$
$$+\sqrt{2}(a^2\sin\theta\cos\theta)\frac{-\sqrt{2}}{Q\rho^2}\mathrm{i}KV + \mathrm{i}a\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}$$
$$= -\frac{\mathrm{i}aQ\sin\theta}{\rho^2}V\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\right)\frac{\rho^2}{Q} - \frac{2\mathrm{i}a^2\sin\theta\cos\theta}{Q\rho^2}KV = 0. \tag{291}$$

结论是, 对所选规范,

$$\Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_2^{(1)} = 0, \tag{292}$$

函数

$$U = A_1^1 + A_2^2 \ \text{ 和 } \ V = A_3^3 + A_4^4, \tag{293}$$

是未定的. 这与选择 (292) 后仍余下 4 个规范自由度的事实相符. 可以利用这个自由度设

$$U = V = 0; \tag{294}$$

的确, 可以设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 4 个对角线元素等于零.

93. 解的完成

有了对

$$Z_1 = K(J - H)\cos\theta \ \text{ 和 } \ Z_2 = -\mathrm{i}rQ(F + G)\sin\theta \tag{295}$$

的明晰解, 现在可以用 Z_1 和 Z_2 来写出决定度规扰动的所有其它函数的解. 于是, 方程 (269) 和 (270), 即,

$$\frac{rKQ\sin\theta}{\Delta}(F - G) = -\frac{arQ\sin\theta}{K\rho^2}Z_1 + \left(\frac{r - M}{\Delta} - \frac{r}{\rho^2}\right)Z_2 - X_1 \tag{296}$$

和

$$KQ(J+H)\cos\theta = \frac{(r^2+a^2)\cot\theta}{\rho^2}Z_1 + \frac{aK\cos\theta}{\rho^2 Q}Z_2 + Y_1, \tag{297}$$

给出 $F-G$ 和 $J+H$ 的解.

用 Z_1 和 Z_2 来写出的方程 (128) 和 (129) 给出 B_2 和 C_1 的解. 可得 (对规范 $U=V=0$)

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}B_2 = \frac{a(K+\rho^2\sigma^+)\cos\theta}{r\rho^2 KQ\sin\theta}Z_2 + \frac{1}{K\cos\theta}\left[X_2 - \left(\frac{r\sigma^+}{K} + \frac{r}{\rho^2} - \frac{r-M}{\Delta}\right)Z_1\right] \tag{298}$$

和 [486]

$$QC_1 = \frac{\mathrm{i}r(\rho^2\sigma^+ - aQ\sin\theta)}{\rho^2 KQ\sin\theta}Z_1 - \frac{\mathrm{i}}{rQ\sin\theta}\left[Y_2 + \left(\frac{a\sigma^+\cos\theta}{Q} - \frac{(r^2+a^2)\cot\theta}{\rho^2}\right)Z_2\right]. \tag{299}$$

X_1+X_2 和 Y_1+Y_2 的明晰形式在下面的 §94 给出 (方程 (319) 和 (320)); 这些方程同给出 X_1-X_2 和 Y_1-Y_2 的方程 (254) 和 (255) 一起明晰地确定 X_1、$\cdots$、Y_2.

由方程 (298) 和 (299) 所给的 B_2 和 C_1, B_1 和 C_2 的解从方程 (127) 和 (130) 得出, 即,

$$\frac{\mathrm{i}K}{\Delta}B_1 = +\frac{2\mathrm{i}a\cos\theta}{\rho^2}C_1 - \frac{\partial}{\partial r}(J+H) \tag{300}$$

和

$$QC_2 = -\frac{2\mathrm{i}ar\sin\theta}{\rho^2}B_2 + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F-G)\sin\theta. \tag{301}$$

最后, 方程 (134) 和 (136)(或 (220) 和 (221)) 连同 (187) 和 (189) 完成了解. 以 Z_1 和 Z_2 来表示, 这些方程是

$$\frac{\mathrm{i}K}{\sqrt{2}}(F_2^1+F_1^2) = -\frac{\mathrm{i}a}{rKQ\cos\theta}[(r^2Q\sin\theta)Z_1 - (aK\cos^2\theta)Z_2] + [\kappa,\nu] + [\kappa,\nu]^*, \tag{302}$$

$$\frac{\mathrm{i}aQ\sin\theta}{\sqrt{2}}\rho^2(F_3^4+F_4^3) = +\frac{\mathrm{i}a}{rKQ\cos\theta}[(r^2Q\sin\theta)Z_1 - (aK\cos^2\theta)Z_2] + [\lambda,\sigma] + [\lambda,\sigma]^*, \tag{303}$$

$$\frac{Q}{\sqrt{2}}(F_2^1-F_1^2) + \mathrm{i}\frac{K^2\rho^4 - 2a^2\Delta^2\cos^2\theta}{2\Delta K^2\rho^2\cos^2\theta}Z_1 + \frac{\mathrm{i}a\Delta\cos\theta}{rKQ\sin\theta}\left[\left(\frac{r-M}{\Delta} - \frac{r}{\rho^2}\right)Z_2 - X_1\right] + \frac{\Delta}{2\rho^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\rho^4}{\Delta}B_2 = \langle\kappa,\nu\rangle, \tag{304}$$

和

$$-\frac{\mathrm{i}K}{\sqrt{2}}\rho^2(F_4^3-F_3^4)-\mathrm{i}\frac{Q^2\rho^4+2a^2r^2\sin^2\theta}{2r\rho^2Q^2\sin^2\theta}Z_2$$
$$-\frac{\mathrm{i}ar\sin\theta}{KQ\cos\theta}\left[\frac{(r^2+a^2)\cot\theta}{\rho^2}Z_1+Y_1\right]-\frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\right)\rho^4C_1$$
$$=\langle\lambda,\sigma\rangle. \tag{305}$$

出现在方程 (302) 和 (303) 右边的自旋系数函数已列于方程 (246) 和 (247); 出现在方程 (304) 和 (305) 中的另外的函数是

[487]
$$\langle\kappa,\nu\rangle=\frac{1}{2\rho^2}\left[\frac{1}{2}\Delta(\overline{\rho}^*\kappa^*-\overline{\rho}\kappa)+\frac{2\rho^4}{\Delta}(\overline{\rho}^*\nu-\overline{\rho}\nu^*)\right]$$
$$=\frac{\mathrm{i}}{12M\Delta\sqrt{2}}\left[\!\left[rY[\mathscr{L}S]^- - aX\{[\mathscr{L}S]^+\cos\theta+3[S]^+\sin\theta\}\right]\!\right] \tag{306}$$

和

$$\langle\lambda,\sigma\rangle=\frac{1}{\rho^2\sqrt{2}}\left[\overline{\rho}^2\left(\rho^2\lambda^*-\frac{1}{2}\Delta\sigma\right)-(\overline{\rho}^*)^2(\rho^2\lambda-\frac{1}{2}\Delta\sigma^*)\right]$$
$$=\frac{1}{12M\sqrt{2}}\left[\!\left[\{-r[\mathscr{D}P]^-+3[P]^-\}[S]^-+\mathrm{i}a[\mathscr{D}P]^+[S]^+\cos\theta\right]\!\right]. \tag{307}$$

上述对规范 $U=V=0$ 的度规函数的解之间有等式

$$\frac{\mathrm{i}K}{\sqrt{2}}(F_2^1-F_1^2)+(\mathrm{i}ar\sin\theta)B_2-(a^2\sin\theta\cos\theta)(F-G)=[\{\kappa,\nu\}+\{\kappa,\nu\}^*] \tag{308}$$

和

$$\frac{Q\rho^2}{\sqrt{2}}(F_4^3-F_3^4)+(\mathrm{i}a\cos\theta)C_1+r(J+H)=\frac{\mathrm{i}}{a\sin\theta}[\{\lambda,\sigma\}-\{\lambda,\sigma\}^*]. \tag{309}$$

这些等式来自方程 (288) 和 (289); 因为如已看到的, 这些方程中的 U 和 V 项一致地为零.

94. 积分等式

在寻求纽曼 – 彭罗斯方程的解时, 曾经匆忙地越过了几个重要之处. 其中之一是, 函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 提供了明确的不定积分计算

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{R}&=\sqrt{\Delta}\int^r\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\Delta^3}},\\ \text{和}\qquad\mathscr{S}&=\int^\theta\left\{[S]^-\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^+\right\}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}\right\} \tag{310}$$

如果有人遇到这些积分, 会知道它们能被明晰地计算吗?

第二处是关于将函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 与楚科尔斯基函数相联系的微分方程 (201) 和 (202). 这些方程的真正 "深度" 只是在问如何证实它们时才变得明显. 这些方程左边的项能用 $X(=P_{+2}+P_{-2})$ 和 $Y(=-\mathrm{i}P_2+\mathrm{i}P_{-2})$ 或者 $[S]^+(=S_{+2}+S_{-2})$ 和 $[S]^-(=S_{+2}-S_{-2})$ 来表示, 这是借助于方程

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{R}}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{\Delta}\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)+\frac{r-M}{\Delta}\mathscr{R}, \tag{311}$$

[488]

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{R}}{\mathrm{d}r^2}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}r}+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}r\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}X\right)-\frac{r-M}{\Delta^2}\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)$$
$$+\frac{a^2-M^2}{\Delta^2}\mathscr{R}, \tag{312}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta}=[S]^-\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^+, \tag{313}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta^2}=-[S]^-\sin\theta+\frac{\mathrm{d}[S]^-}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}\frac{\mathrm{d}[S]^+}{\mathrm{d}\theta}, \tag{314}$$

因为用 X、Y 和 $[S]^+$、$[S]^-$ 来表示 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 是已知的 (由方程 (180)(或 (181)) 和 (185)(或 (186))), 而 X、Y 和 $[S]^+$、$[S]^-$ 的导数又能用这些函数自身来表示 (由方程 (74) 和 (79)). 必须代入到方程 (201) 和 (202) 中来将它们简化为等式的所有这些关系的复杂性就是它们 "深度" 的量度.

反之, 可以写出不含与楚科尔斯基函数关联的 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的微分方程. 将方程 (312) 中出现的 X 和 Y 的导数用函数自身来表示 (借助于方程 (150) 和 (151)), 可得将 X、Y 与 $\mathscr{R}$ 的导数相联系的第二个方程; 这个方程与方程 (311) 一起能将 X 和 Y 分别地用 $\mathscr{R}$ 及其第一和第二阶导数来表示. 将后面这些关系代入方程 (197) 的右边, 得出不含与 X、Y 关联的 $\mathscr{R}$ 的二阶微分方程. 这样得到的方程是

$$\frac{\Delta^2}{K}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(K\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathscr{R}}{K}\right)+\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{K^2}-\frac{K^2}{\Delta^2}\right)\mathscr{R}\right]$$
$$=-\frac{2}{[\det]_r}\left\{(\mathfrak{p}^2r^2+1)\left[\Delta^2\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{R}}{\mathrm{d}r^2}-(a^2-M^2)\mathscr{R}\right]\right.$$
$$-\left[2\mathfrak{p}r\frac{\Delta^2\mathscr{C}_1}{B_1}+(\mathfrak{p}^2r^2-1)\left(\frac{\Delta^2\mathscr{C}_2}{B_1}-M\right)-(\mathfrak{p}^2r^2+1)\frac{\Delta A_2}{B_1}+r(\mathfrak{p}^2a^2-1)\right]$$
$$\left.\times\left[\Delta\frac{\mathrm{d}\mathscr{R}}{\mathrm{d}r}-(r-M)\mathscr{R}\right]\right\}, \tag{315}$$

其中

[489]

$$[\det]_r=\Delta\left[(\mathfrak{p}^2r^2-1)\frac{\Delta\mathscr{C}_1}{B_1}+(\mathfrak{p}^2r^2+1)\left(\frac{A_1}{B_1}-\frac{K}{\Delta}\right)-2\mathfrak{p}r\frac{\Delta\mathscr{C}_2}{B_1}-\mathfrak{p}\right], \tag{316}$$

和 $\mathfrak{p}=4\lambda\sigma^{+}/(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)$.

类似地, 得到对 $\mathscr{S}$ 的方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Q}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathscr{S}}{Q}\right)-\left(\frac{4\alpha^2\sigma^{+2}}{Q^2}-Q^2\right)\mathscr{S}\right]\\&=\frac{2}{[\det]_\theta}\left\{(\mathfrak{q}^2-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{1}{\beta_1}\left[(\alpha_2+2\beta_1\cot\theta)(\mathfrak{q}^2-\cos^2\theta)\right.\right.\\&\left.\left.-2\mathscr{C}_1\mathfrak{q}\cos\theta-\beta_1\cos\theta\sin\theta\right]\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta}\right\},\end{aligned}\tag{317}$$

其中

$$[\det]_\theta=\frac{1}{\beta_1}[\beta_1\mathfrak{q}\sin\theta+(\alpha_1+\beta_1 Q)(\mathfrak{q}^2-\cos^2\theta)+\mathscr{C}_1(\mathfrak{q}^2+\cos^2\theta)],\tag{318}$$

和 $\mathfrak{q}=4\sigma^{+}(\lambda\alpha^2-6a^2)/a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)$.

(a) 由可积条件 (263) 导出的进一步等式

应记得, $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的用楚科尔斯基函数作出的明晰表示, 是通过在 §87 中考虑的可积条件所意指的等式而得到的. 于是会有, 方程 (265) 和 (266) 的可积条件 (263) 必定导致类似的等式. 为得出它们, 需要 X_1+X_2 和 Y_1+Y_2 的明晰表示. 按照它们的定义 (241) 以及方程 (246) 和 (247) 所给的各个 "括号" 的表示来计算它们, 在经过可观的演绎后得出, 它们可写为

$$X_1+X_2=\frac{rX}{a\Delta}\left[G_1(\theta)-\frac{4a^2Q\cos\theta}{\rho^2}G_2(\theta)\right]+\frac{Y}{\Delta}\left[G_3(\theta)-\frac{4a^2Q\cos\theta}{\rho^2}G_4(\theta)\right]\tag{319}$$

和

$$Y_1+Y_2=[S]^{-}(\cos\theta)\left[F_1(r)-\frac{4rK}{\rho^2}F_2(r)\right]+\frac{\mathrm{i}}{a}[S]^{+}\left[F_3(r)-\frac{4rK}{\rho^2}F_4(r)\right],\tag{320}$$

其中已略去一个公共因子 $1/(24M\sqrt{2})$, 且

$$\begin{aligned}&F_1(r)=K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{+}+2r\sigma^{+}[\mathscr{D}P]^{+};\ F_2(r)=r[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{+}-[\mathscr{D}P]^{+};\\&F_3(r)=3Kr[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{-}-2\alpha^2\sigma^{+}[\mathscr{D}P]^{-}-6r\sigma^{+}[P]^{-};\\&F_4(r)=r^2[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^{-}-r[\mathscr{D}P]^{-}\\[490]\quad&G_1(\theta)=Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{-}+2a\sigma^{+}[\mathscr{L}S]^{-}\cos\theta;\\&G_2(\theta)=[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{-}\cos\theta+[\mathscr{L}S]^{-}\sin\theta;\\&G_3(\theta)=3Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{+}\cos\theta+(2\alpha^2\sigma^{+}/a)[\mathscr{L}S]^{+}+6a\sigma^{+}[S]^{+}\cos\theta\sin\theta;\\&G_4(\theta)=[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^{+}\cos^2\theta+[\mathscr{L}S]^{+}\cos\theta\sin\theta.\end{aligned}\tag{321}$$

可验证, 在函数 F_1、$\cdots$、G_4 之间存在下列关系:

$$\left.\begin{aligned} &F_1-2K[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+=-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R};\ G_1-2Q[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-=\lambda a\sigma^+\mathscr{S};\\ &F_3-4KF_4/r=\mathrm{i}\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)\mathscr{R};\ G_3-4QG_4/\cos\theta=\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{S}. \end{aligned}\right\} \tag{322}$$

函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 在这些关系中的出现是值得注意的.

转到可积条件 (263), 可看到它要求下列两个表示相等,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}E(Z_1-Z_2)\right]=\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{Y_1+Y_2}{\sqrt{\Delta}}\right)+(A_2-B_2)(Y_1+Y_2)\\ &+(A_2+B_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\left\{(A_1+B_1)\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}\right)+(A_2+B_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right.\\ &\left.+(A_1+B_1)(A_2-B_2)\Psi\right\} \end{aligned} \tag{323}$$

和

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}E(Z_1-Z_2)\right]=\frac{\partial}{\partial\theta}(X_1+X_2)+(A_1-B_1)(X_1+X_2)\\ &+(A_1+B_1)\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}\right)-\left\{(A_1+B_1)\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}\right)\right.\\ &\left.+(A_2+B_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+(A_1-B_1)(A_2+B_2)\Psi\right\}. \end{aligned} \tag{324}$$

注意, 两个方程第三行的量是同样的. 所以, 只考虑第二行的量所需的相等性就够了.

由方程 (319) 和 (320) 来代换 X_1+X_2 和 Y_1+Y_2 可得, 如果恰当地利用方程 (248) 和 (322) 中包含的各个关系以及涉及函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的等式, 则方程 (323) 和 (324) 右边第一行的项成为下列形式:

$$\begin{aligned} &\left[\left\{\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{F_1}{\sqrt{\Delta}}\right)-\frac{2}{r}F_1+\frac{2\alpha^2\sigma^+}{r}[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+\right\}\right.\\ &\left.-\frac{4r}{\rho^2}\left\{\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{KF_2}{\sqrt{\Delta}}\right)-r\sigma^+F_2-\frac{1}{2}F_1\right\}\right][S]^-\cos\theta\\ &+\left[\left\{\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{F_3}{\sqrt{\Delta}}\right)-\frac{2}{r}F_3+\frac{4\alpha^2\sigma^+}{r^2}F_4\right\}\right.\\ &\left.-\frac{4r}{\rho^2}\left\{\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{KF_4}{\sqrt{\Delta}}\right)-r\sigma^+F_4-\frac{1}{2}F_3\right\}\right]\frac{\mathrm{i}[S]^+}{a} \end{aligned} \tag{325}$$

[491]

和

$$\left[\left\{\frac{\mathrm{d}G_1}{\mathrm{d}\theta}+2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}G_1-\frac{2\alpha^2\sigma^+}{a\cos\theta}[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-\right\}\right.$$

$$-\frac{4a^2\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(QG_2)-a\sigma^+G_2\cos\theta+\frac{1}{2}G_1\sin\theta\right]\Bigg\}\frac{rX}{a\Delta}$$
$$+\left[\left\{\frac{\mathrm{d}G_3}{\mathrm{d}\theta}+2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}G_3-\frac{4\alpha^2\sigma^+}{a\cos^2\theta}G_4\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{4a^2\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(QG_4)-a\sigma^+G_4\cos\theta+\frac{1}{2}G_3\sin\theta\right]\right\}\frac{Y}{\Delta}. \tag{326}$$

现在的目标是将表示式 (325) 和 (326) 简化为这样的形式, 其中除简单的因子如 r^2 或 $\cos^2\theta$ 外, 只有函数 X、Y、$[S]^+$ 和 $[S]^-$ 而没有它们的导数出现. 所需的简化工作, 虽然不及 §87 中对可积条件所做的那样繁重, 却也决不轻松. 得到的是

$$\frac{[S]^-\cos\theta}{\rho^2\Delta}\left[\!\!\left[\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(-3r^2+a^2\cos^2\theta)\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\sigma^+r(\alpha^2+a^2\cos^2\theta)(\lambda X-6\sigma^+rY)\right]\!\!\right]$$
$$+\frac{[S]^+}{a\rho^2\Delta}\left[\!\!\left[\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)(-r^2+3a^2\cos^2\theta)\left(Y+\frac{4\lambda\sigma^+}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}rX\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-2a^2\sigma^+\{6\sigma^+r(r^2-\alpha^2)X+[(\lambda\alpha^2-6a^2)+3(\lambda+2)r^2]Y\}\cos^2\theta\right]\!\!\right] \tag{327}$$

和

$$\frac{rX}{a\rho^2\Delta}\left[\!\!\left[\lambda a\sigma^+(-r^2+3a^2\cos^2\theta)\left\{[S]^-\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^+\right\}\right.\right.$$
$$\left.\left.-2a\sigma^+(r^2-\alpha^2)\{\lambda[S]^-+6a\sigma^+[S]^+\cos\theta\}\cos\theta\right]\!\!\right]$$
$$+\frac{Y}{\rho^2\Delta}\left[\!\!\left[\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(-3r^2+a^2\cos^2\theta)\left\{[S]^-\cos\theta+\frac{4\sigma^+(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}[S]^+\right\}\right.\right.$$
$$-\frac{2\sigma^+}{a}r^2\{6a\sigma^+(\alpha^2+a^2\cos^2\theta)[S]^-\cos\theta$$
[492] $$\left.\left.-[(\lambda\alpha^2-6a^2)-3a^2(\lambda+2)\cos^2\theta][S]^+\}\right]\!\!\right]. \tag{328}$$

对这两个表示的比较表明, 它们的确是相同的.

在将 (327) 和 (328) 中的项重新整理后, 可将 (323) 和 (324) 代之以单个方程

$$\frac{1}{E}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}E(Z_1-Z_2)$$
$$=\lambda\sigma^+[-3(r^2-a^2\cos^2\theta)+2\alpha^2]\frac{rX[S]^-\cos\theta}{\rho^2\Delta}$$
$$+\left\{\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(-3r^2+a^2\cos^2\theta)-12\sigma^{+2}r^2(\alpha^2+a^2\cos^2\theta)\right\}\frac{Y[S]^-\cos\theta}{\rho^2\Delta}$$

$$+\left\{\frac{4\lambda\sigma^{+}(\lambda\alpha^2-6a^2)}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}(-r^2+3a^2\cos^2\theta)\right.$$
$$\left.-12a^2\sigma^{+2}(r^2-\alpha^2)\cos^2\theta\right\}\frac{rX[S]^{+}}{a\rho^2\Delta}$$
$$+\{\sigma^{+}(\lambda\alpha^2-6a^2)(-r^2+a^2\cos^2\theta)-6a^2\sigma^{+}(\lambda+2)r^2\cos^2\theta\}\frac{Y[S]^{+}}{a\rho^2\Delta}$$
$$-\left\{(A_1+B_1)\sqrt{\Delta}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\Psi}{\sqrt{\Delta}}+(A_2+B_2)\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+(A_1+B_1)(A_2-B_2)\Psi\right\}. \quad (329)$$

令

$$\mathfrak{p}=\frac{4\lambda\sigma^{+}}{\mathscr{C}_1+\Gamma_1}\quad 和\quad \mathfrak{q}=\frac{4\sigma^{+}(\lambda\alpha^2-6a^2)}{a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}, \quad (330)$$

可将方程 (329) 重写为更便利的形式

$$\frac{\rho^2\Delta}{E}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}E(Z_1-Z_2)$$
$$=-\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)r^2(Y+\mathfrak{p}rX)\{[S]^{-}\cos\theta+\frac{1}{3}\mathfrak{q}[S]^{+}\}$$
$$+\frac{1}{4}a^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(Y+3\mathfrak{p}rX)\{[S]^{-}\cos\theta+\mathfrak{q}[S]^{+}\}\cos^2\theta$$
$$-12\sigma^{+2}r^2Y(\alpha^2+a^2\cos^2\theta)[S]^{-}\cos\theta-12a\sigma^{+2}(r^2-\alpha^2)rX[S]^{+}\cos^2\theta$$
$$+2\alpha^2\lambda\sigma^{+}rX[S]^{-}\cos\theta-6a\sigma^{+}(\lambda+2)r^2Y[S]^{+}\cos^2\theta$$
$$-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\rho^2\Delta\Big[\Big\{\frac{\alpha^2\sigma^{+}}{aQ\cos\theta}\frac{\mathscr{S}}{E}\frac{\partial}{\partial r}E\mathscr{R}+\frac{\alpha^2\sigma^{+}}{rK}\mathscr{R}\{[S]^{-}\cos\theta+\mathfrak{q}[S]^{+}\}\Big\}$$
$$或\ \Big\{\frac{\alpha^2\sigma^{+}}{rK}\frac{\mathscr{R}}{E}\frac{\partial}{\partial\theta}E\mathscr{S}+\frac{\alpha^2\sigma^{+}}{aQ\cos\theta}\frac{\mathscr{S}}{\Delta}(Y+\mathfrak{p}rX)\Big\}\Big], \quad (331)$$

其中最后两行的两种可选形式是来自方程 (248) 中的关系. [493]

(Z_1-Z_2) 的解现在可以通过将方程 (311) 右边的表示乘以下列因子, 再对 r 和 θ 积分而直接得出,

$$\frac{E}{\rho^2\Delta}=(r^2\Delta^3K)^{-1/2}(Q\cos^2\theta\sin\theta)^{-1/2}. \quad (332)$$

由于 $E/\rho^2\Delta$ 是一个 r 的函数和一个 θ 的函数的乘积, 对 r 和 θ 的积分所得到的 Z_1-Z_2 的解就显然是对 r 积分和对 θ 积分的乘积的和. 出现的径向积分有 6 种:

$$对\ rX、r^3X、Y\ 和\ r^2Y,\ 有权函数\ (r^2K\Delta^3)^{-1/2}, \quad (333)$$

和

$$对\ \mathscr{R}\ 和\ r^2\mathscr{R},\ 有权函数\ (r^4K^3\Delta)^{-1/2}. \quad (334)$$

类似地, 出现的角向积分也有 6 种:

. 对 $[S]^+$、$[S]^+\cos^2\theta$、$[S]^-\cos\theta$ 和 $[S]^-\cos^3\theta$, 有权函数 $(Q\cos^2\theta\sin\theta)^{-1/2}$, (335)

和

对 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}\cos^2\theta$, 有权函数 $(a^2Q^3\cos^4\theta\sin\theta)^{-1/2}$. (336)

将各个积分 (对给定的权函数) 用包含被积量的角括号来标记, 于是有

$$\langle r^3X\rangle=\int^r\frac{r^3X}{\sqrt{r^2K\Delta^3}}\mathrm{d}r \text{ 和 } \langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle=\int^\theta\frac{(\mathscr{S}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2Q^3\cos^4\theta\sin\theta}}. \tag{337}$$

而用这样标记的 Z_1-Z_2 的解是

$$\begin{aligned}
&E(Z_1-Z_2)\\
&\quad=-\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle r^2Y\rangle+\mathfrak{p}\langle r^3X\rangle\}\left\{\langle[S]^-\cos\theta\rangle+\frac{1}{3}\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle\right\}\\
&\quad+\frac{1}{4}a^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle Y\rangle+3\mathfrak{p}\langle rX\rangle\}\{\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle+\mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\}\\
&\quad-12\sigma^{+2}\langle r^2Y\rangle\{\alpha^2\langle[S]^-\cos\theta\rangle+a^2\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle\}\\
&\quad-12a\sigma^{+2}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\{\langle r^3X\rangle-\alpha^2\langle rX\rangle\}\\
&\quad+2\alpha^2\lambda\sigma^+\langle rX\rangle\langle[S]^-\cos\theta\rangle-6a\sigma^+(\lambda+2)\langle r^2Y\rangle\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\\
&\quad-\frac{1}{4}\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\Big\{\Big[\frac{\mathscr{R}}{r\sqrt{\Delta K}}\{r^2\langle\mathscr{S}\rangle+a^2\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\}\\
&\quad+\langle r^2\mathscr{R}\rangle\{\langle[S]^-\cos\theta+\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle\}+a^2\langle\mathscr{R}\rangle\{\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle\\
&\quad+\mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\}\Big]
\end{aligned}$$

[494]

或

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{\mathscr{S}}{\sqrt{Q\cos^2\theta\sin\theta}}\{\langle r^2\mathscr{R}\rangle+a^2\langle\mathscr{R}\rangle\cos^2\theta\}\\
&+\langle\mathscr{S}\rangle\{\langle r^2Y\rangle+\mathfrak{p}\langle r^3X\rangle\}+a^2\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\{\langle Y\rangle+\mathfrak{p}\langle rX\rangle\}\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{338}$$

积分等式来自对 (Z_1-Z_2) 的解 (338), 正如积分等式曾来自对 Ψ 的解 (166) 那样. 为得到等式, 将解 (338) 对 r 和对 θ 求导, 将所得结果与方程 (264) 所给的已知表示相等. 这样就得到方程

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial r}E(Z_1-Z_2)=X_1+X_2-\frac{\alpha^2\sigma^+}{rK}\Psi\\
&=(\rho^2G_1-4a^2QG_2\cos\theta)\frac{rX}{a\Delta\rho^2}+(\rho^2G_3-4a^2QG_4\cos\theta)\frac{Y}{\Delta\rho^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{4rK}\mathscr{R}\mathscr{S}\\
=&\Big[\!\Big[-\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)r^2(Y+\mathfrak{p}rX)\{\langle[S]^-\cos\theta\rangle+\frac{1}{3}\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle\}\\
&+\frac{1}{4}a^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(Y+3\mathfrak{p}rX)\{\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle+\mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\}\\
&-12\sigma^{+2}r^2Y\{\alpha^2\langle[S]^-\cos\theta\rangle+a^2\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle\}\\
&-12a\sigma^{+2}(r^2-\alpha^2)rX\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\\
&+2\lambda\alpha^2\sigma^+rX\langle[S]^-\cos\theta\rangle-6a\sigma^+(\lambda+2)r^2Y\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle\\
&-\frac{1}{4}\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)(Y+\mathfrak{p}rX)\\
&\times\{r^2\langle\mathscr{S}\rangle+a^2\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\}\Big]\!\Big]\frac{(Q\sin\theta)^{1/2}\cos\theta}{\Delta\rho^2}\\
&-\frac{\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{4rK}\mathscr{R}\mathscr{S},
\end{aligned}
\tag{339}
$$

和 [495]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial\theta}E(Z_1-Z_2)=Y_1+Y_2-\frac{\alpha^2\sigma^+}{aQ\cos\theta}\Psi\\
&=(\rho^2F_1-4rKF_2)\frac{[S]^-\cos\theta}{\rho^2}+(\rho^2F_3-4rKF_4)\frac{\mathrm{i}[S]^+}{a\rho^2}\\
&\quad-\frac{\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{4aQ\cos\theta}\mathscr{R}\mathscr{S}\\
&=\Big[-\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle r^2Y\rangle+\mathfrak{p}\langle r^3X\rangle\}\Big\{[S]^-\cos\theta+\frac{1}{3}\mathfrak{q}[S]^+\Big\}\\
&\quad+\frac{1}{4}a^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle Y\rangle+3\mathfrak{p}\langle rX\rangle\}\{[S]^-\cos^3\theta+\mathfrak{q}[S]^+\cos^2\theta\}\\
&\quad-12\sigma^{+2}\langle r^2Y\rangle(\alpha^2+a^2\cos^2\theta)[S]^-\cos\theta\\
&\quad-12a\sigma^{+2}\{\langle r^3X\rangle-\alpha^2\langle rX\rangle\}[S]^+\cos^2\theta\\
&\quad+2\lambda\alpha^2\sigma^+\langle rX\rangle[S]^-\cos\theta-6a\sigma^+(\lambda+2)\langle r^2Y\rangle[S]^+\cos^2\theta\\
&\quad-\frac{1}{4}\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle r^2\mathscr{R}\rangle+a^2\langle\mathscr{R}\rangle\cos^2\theta\}\\
&\quad\times\{[S]^-\cos\theta+\mathfrak{q}[S]^+\}\Big]\frac{r\sqrt{\Delta K}}{\rho^2}-\frac{\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)}{4aQ\cos\theta}\mathscr{R}\mathscr{S}.
\end{aligned}
\tag{340}
$$

可见, 在方程 (339) 和 (340) 中 $\mathscr{R}\mathscr{S}$ 项都抵消.(339) 中剩余的项由具有因子 rX、r^3X、Y 和 r^2Y 的 θ 的函数组成. 因此可将带有这些径向因子出现的 θ 的函数相等. 类似地, 可将方程 (340) 中带有角向因子 $[S]^+$、$[S]^+\cos^2\theta$、$[S]^-\cos\theta$ 和 $[S]^-\cos^3\theta$ 出现的 r 的函数相等. 这样就得到下列 8 个等式:

$$E_\theta G_1 = -3\lambda a\sigma^+\left\{\langle[S]^-\cos\theta\rangle + \frac{1}{3}\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle + \frac{1}{3}\alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{S}\rangle\right\}$$
$$-12a^2\sigma^{+2}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle, \tag{341}$$

$$E_\theta(G_1\cos^2\theta - 4QG_2\cos\theta) = 3\lambda a\sigma^+\{\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle$$
$$+\mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle - \frac{1}{3}\alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\} + 12\alpha^2\sigma^{+2}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle$$
$$+2\lambda(\alpha^2\sigma^+/a)\langle[S]^-\cos\theta\rangle, \tag{342}$$

$$E_\theta G_3 = -\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\left\{\langle[S]^-\cos\theta\rangle + \frac{1}{3}\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{S}\rangle\right\} - 6a\sigma^+(\lambda+2)\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle$$
$$-12\sigma^{+2}\{\alpha^2\langle[S]^-\cos\theta\rangle + a^2\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle\}, \tag{343}$$

$$E_\theta(G_3\cos^2\theta - 4QG_4\cos\theta) = \frac{1}{4}E_\theta(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{S}\cos^2\theta$$
$$= \frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle + \mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle$$
$$-\alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\}, \tag{344}$$

$$E_r F_1 = \frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle Y\rangle + 3\mathfrak{p}\langle rX\rangle - \alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{R}\rangle\} - 12\sigma^{+2}\langle r^2Y\rangle, \tag{345}$$

$$E_r(r^2F_1 - 4rKF_2) = -\frac{3}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\{\langle r^2Y\rangle + \mathfrak{p}\langle r^3X\rangle + \frac{1}{3}\alpha^2\sigma^+\langle r^2\mathscr{R}\rangle\}$$
$$-12\alpha^2\sigma^{+2}\langle r^2Y\rangle + 2\lambda\alpha^2\sigma^+\langle rX\rangle, \tag{346}$$

$$\mathrm{i}E_r F_3 = \frac{1}{4}a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathfrak{q}\{\langle Y\rangle + 3\mathfrak{p}\langle rX\rangle - \alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{R}\rangle\}$$
[496]
$$-12\sigma^{+2}\{\langle r^3X\rangle - \alpha^2\langle rX\rangle\} - 6\sigma^+(\lambda+2)\langle r^2Y\rangle, \tag{347}$$

和

$$\mathrm{i}E_r(r^2F_3 - 4rKF_4) = -\frac{1}{4}E_r a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathfrak{q}r^2\mathscr{R}$$
$$= -\frac{1}{4}a(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathfrak{q}\{\langle r^2Y\rangle + \mathfrak{p}\langle r^3X\rangle + \alpha^2\sigma^+\langle r^2\mathscr{R}\rangle\}, \tag{348}$$

其中

$$E_r = (r^2\Delta K)^{-1/2}, E_\theta = (Q\cos^2\theta\sin\theta)^{-1/2}, \text{ 和 } E = E_r E_\theta\rho^2. \tag{349}$$

注意在方程 (344) 和 (348) 中已经合并了方程 (322) 所含关系中的两个. 更多的等式来自于对下列方程积分,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E\mathscr{S} = E\left[\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\theta} + (A_1 - B_1)\mathscr{S}\right] = E\Big[\{[S]^-\cos\theta + \mathfrak{q}[S]^+\}$$
$$+\frac{\sigma^+}{\rho^2 aQ\cos\theta}(r^2\alpha^2 - a^2\alpha^2\cos^2\theta - 2a^2r^2\cos^2\theta)\mathscr{S}\Big] \tag{350}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial r}E\mathscr{R}=E\left[\sqrt{\Delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathscr{R}}{\sqrt{\Delta}}+(A_2-B_2)\mathscr{R}\right]=E\left[\frac{1}{\Delta}(Y+\mathfrak{p}rX)\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma^+}{\rho^2 rK}(r^2\alpha^2-a^2\alpha^2\cos^2\theta-2a^2r^2\cos^2\theta)\mathscr{R}\right]. \tag{351}$$

得到

$$E_\theta\mathscr{S}=\langle[S]^-\cos\theta\rangle+\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle+\sigma^+[\alpha^2\langle\mathscr{S}\rangle-2a^2\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle], \tag{352}$$
$$E_\theta\mathscr{S}\cos^2\theta=\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle+\mathfrak{q}\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle-\alpha^2\sigma^+\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle, \tag{353}$$
$$E_r\mathscr{R}=\langle Y\rangle+\mathfrak{p}\langle rX\rangle-\sigma^+[\alpha^2\langle\mathscr{R}\rangle+2\langle r^2\mathscr{R}\rangle], \tag{354}$$

和

$$r^2E_r\mathscr{R}=\langle r^2Y\rangle+\mathfrak{p}\langle r^3X\rangle+\alpha^2\sigma^+\langle r^2\mathscr{R}\rangle. \tag{355}$$

但其中两个, 即 (353) 和 (355), 与前面 8 个方程中的 (344) 和 (348) 是相同的.

最后看到, 还有下面两个途径来利用 8 个等式 (恢复在方程 (319) 和 (320) 中已略去的因子 $1/(24M\sqrt{2})$) 写出 (Z_1-Z_2) 的解 (338):

$$\begin{aligned}Z_1-Z_2=\frac{\sqrt{r^2\Delta K}}{(24M\sqrt{2})\rho^2}\Big\{&\frac{G_1}{a}\langle r^3X\rangle+a(G_1\cos^2\theta-4QG_2\cos\theta)\langle rX\rangle\\&+G_3\langle r^2Y\rangle+\frac{1}{4}a^2(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\langle Y\rangle\mathscr{S}\cos^2\theta\\&-\frac{1}{4}\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{S}[\langle r^2\mathscr{R}\rangle+a^2\langle\mathscr{R}\rangle\cos^2\theta]\Big\}\\=\frac{\sqrt{Q\cos^2\theta\sin\theta}}{(24M\sqrt{2})\rho^2}&\{a^2F_1\langle[S]^-\cos^3\theta\rangle+(r^2F_1-4rKF_2)\langle[S]^-\cos\theta\rangle\\&+\mathrm{i}aF_3\langle[S]^+\cos^2\theta\rangle-\frac{1}{4}(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathfrak{q}\langle[S]^+\rangle r^2\mathscr{R}\\&-\frac{1}{4}\alpha^2\sigma^+(\mathscr{C}_1+\Gamma_1)\mathscr{R}[r^2\langle\mathscr{S}\rangle+a^2\langle\mathscr{S}\cos^2\theta\rangle\}.\end{aligned} \tag{356}$$

[497]

对于在上述两个表示 (Z_1-Z_2) 解的途径中的每一个都出现的 6 个积分, 只有 5 个方程来将它们联系于已知函数. 因此现在的情形与对 Ψ 的解所得到的是不同的: 那里的解是唯一地确定的. 幸运的是,Z_1 和 Z_2 的明晰解已经由独立的考虑得到. 然而, 出现的各个积分等式所表示的关系的起源仍是未解之谜.

95. 回顾

鉴于刚完成的分析的令人困惑的复杂性, 将主要的组成部分再阐释一下是有益的.

分析是针对通过纽曼 – 彭罗斯形式方程表达的克尔时空的引力扰动问题. 这里问题的核心是确定扰动所导致的度规系数的改变. 在纽曼 – 彭罗斯形式里, 度规扰动是直接地与基矢 $\boldsymbol{l}^i$ $(=\boldsymbol{l}、\boldsymbol{n}、\boldsymbol{m}、\overline{\boldsymbol{m}})$ 的改变 $\boldsymbol{l}^{i(1)}$ 相关联. 这些改变可由变换矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示,

$$\boldsymbol{l}^{i(1)} = A^i_j \boldsymbol{l}^j. \tag{357}$$

除了 $\boldsymbol{A}$ 的元外, 还必须求解 5 个外尔标量和 12 个自旋系数的扰动, 总共有 50 个实数量. 对这些量的解, 有 8 个比安基恒等式、12 个转换关系和 18 个里奇恒等式, 总共 76 个实数方程. 所寻求的解必须与 10 个规范自由度相符: 6 个自由度来自四次基的无限小洛伦兹变换的可允许性, 4 个自由度来自无限小坐标变换的可允许性.

[498] 分析表明, 对面临的问题表现为最自然的规范是其中有下式的那种,

$$\Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_2^{(1)} = 0 \ \text{ 和 } \ A^1_1 = A^2_2 = A^3_3 = A^4_4 = 0. \tag{358}$$

这个选择用完了所允许的全部 10 个自由度, 完全固定了规范. 下面对所作分析的讲述就是在这个规范选择的意义上.

比安基恒等式的 4 个和里奇恒等式的 2 个能给出外尔标量 Ψ_0、Ψ_1 和自旋系数 κ、σ、λ、ν 的明晰解, 这些量由于背景克尔几何的 D 型特征而在其中为零. 正是支配 Ψ_0 和 Ψ_4 的方程的可分离性, 以及它们的解借助于楚科尔斯基径向和角向函数 $R_{\pm 2}$ 和 $S_{\pm 2}$ 的表达, 甚至使对剩余的量求解的意图成为可能. 对后继的分析几乎同样重要的, 是非凡的楚科尔斯基和斯塔罗宾斯基等式. 但是, 分析仍留下 R_{+2} 和 R_{-2} 解的相对归一化以及复数斯塔罗宾斯基常量的幅角未定, 这是所需信息的严重缺失.

剩余的 4 个比安基恒等式能将自旋系数 $\widetilde{\rho}$、τ、μ 和 π 的扰动直接用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元来表示.

决定 $\boldsymbol{A}$ 的元的基本方程是由 12 个转换关系的线性化导出的. 导出的方程是线性和非齐次的, 非齐次项是扰动的自旋系数的线性组合. 最后这个事实使得能将得到的 24 个方程分为 3 组 (I 组、II 组和 III 组), 每组 8 个. 于是, 由用 $\boldsymbol{A}$ 的元表示的自旋系数 $\widetilde{\rho}$、τ、μ 和 π 扰动的解, 以及用楚科尔斯基函数表示的自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 的解, 两组方程, 即齐次的 I 组和非齐次的 II 组, 变成对 $\boldsymbol{A}$ 的元的如下 12 个线性组合的方程,

$$F+G, J-H, F-G, J+H, B_1, B_2, C_1, C_2, F^1_2 \pm F^2_1 \ \text{ 和 } \ F^3_4 \pm F^4_3 \tag{359}$$

一旦对 $\boldsymbol{A}$ 的解完成, 最后剩下的 III 组 8 个方程用于决定自旋系数 α、β、γ 和 ε 的扰动.

I 组的 8 个方程中只有 6 个是独立的. 但它们能用来表示线性组合 (359) 中的 6 个, 即, [499]

$$F-G, J+H, B_1, B_2, C_1, \text{ 和 } C_2, \tag{360}$$

该表示是借助于 $F+G$ 和 $J-H$.

II 组的 8 个方程 (以其等价形式 (133)) 给出两小组方程, 每小组 4 个 (方程 (134) — (137) 和 (187) — (190)). 第一小组导致对下列解的关键性的可积条件,

$$\Psi = K(J-H)\cos\theta - \mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta. \tag{361}$$

可积条件的解成为整个分析简化工作中最繁重的部分. 它还是理论的核心支点: 它解开了两个主要的疑难, 即 Ψ_0 和 Ψ_4 的解的相对归一化和斯塔罗宾斯基常量的幅角. 甚至还不止于解开这些疑难, 它揭示了远超想象的理论领域: Ψ 的可分离性及其作为径向函数 $\mathscr{R}$ 和角向函数 $\mathscr{S}$ 乘积的可表示性; 将 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 与楚科尔斯基函数相联系的两组公式的存在; 而最惊人的是, $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 提供的对楚科尔斯基函数的不定积分的明晰计算.

II 组的第二小组 4 个方程作为可积条件提供了将 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 非常简单地联系于楚科尔斯基函数的微分方程. 利用这些方程, 又能得到 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的不含与楚科尔斯基函数关联的微分方程, 也就是原则上可能完全消除任何与楚科尔斯基函数的直接关联的微分方程! 这个小组剩余的方程, 与第一小组类似的一对方程一起, 能用来表示剩余的 4 个函数, 即,

$$F_2^1 \pm F_1^2 \text{ 和 } F_4^3 \pm F_3^4, \tag{362}$$

此表示也是用 $F+G$ 和 $J-H$.

完成了对 II 组的处理后, 确定 (359) 中列出的全部函数所需的信息只差一个空缺: 分别地决定 $F+G$ 和 $J-H$. 更精确地说, 令

$$Z_1 = K(J-H)\cos\theta \text{ 和 } Z_2 = -\mathrm{i}rQ(F+G)\sin\theta, \tag{363}$$

已经知道 $Z_1+Z_2(=\Psi)$. 需要解出 Z_1 和 Z_2 的另一个线性组合.

在这个阶段, 已经充分利用了比安基恒等式和转换关系之后, 必须转到里奇恒等式.

选作考虑的 4 个里奇恒等式分为两对方程. 第一对能将 Z_1 和 Z_2 对 r 和 θ 的导数表示为 Z_1 和 Z_2 的线性组合, 还能提供进一步的可积条件. 第二对方程与由第一对得到的关系一起, 能分别给出 Z_1 和 Z_2 的明晰表示而完成解. 同时, 可积条件又产生出 8 个很复杂的积分等式. [500]

总之, 共计需要 26 个复数方程 (包括 8 个比安基恒等式、12 个转换关系和 6 个里奇恒等式) 来确定 40 个不同的量和 10 个积分等式的解. 这些与 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 联系的积分等式中的两个对于分析工作是基本的: 没有它们, 解就不能完成.

分析中 (特别是 §94) 出现的一个重大问题是: 纽曼 – 彭罗斯方程的过剩, 也就是对受制于 10 个规范自由度的 50 个变量有 60 个方程, 能用来发现出现在爱因斯坦方程的解中的数理函数之间新类型的积分等式吗?

暂不细说, 简单的事实是, 已经可能接受支配时空基本特征的 60 个方程的系统, 并且完全地解出它们.

96. 史瓦西极限 $a \to 0$ 时解的形式

史瓦西极限 $a \to 0$ 时解的形式具有一定的普遍意义, 意义之一是能够给出基本等式的最简单的、在某些情况下能直接验证的形式. 此外, 如由理论中的一些方程 (例如方程 (179) 和 (185)) 明显可见的, 对趋于极限 $a \to 0$ 的过程需要小心.

首先看到, 对极限 $a \to 0$,

$$\left.\begin{aligned} &Q = m\mathrm{cosec}\theta, K = r^2\sigma^+, \overline{\rho} = \overline{\rho}^* = r, \rho^2 = r^2, \\ &\Delta = r^2 - 2Mr, \ \text{和} \ \mathscr{C}_1 = \Gamma_1 = \lambda(\lambda+2). \end{aligned}\right\} \tag{364}$$

而由方程 (170) 可得结论

$$\mathscr{C}_1 - \Gamma_1 = -\frac{8\lambda\sigma^+ m}{\lambda+2}a + O(a^2). \tag{365}$$

又, 方程 (76) 和 (78) 中所列系数的极限形式是

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \lambda(\lambda+2)\Delta - 4\lambda\sigma^{+2}r^4 - 24M\sigma^{+2}r^3, \\ A_2 &= -12M\sigma^+\Delta - 4\lambda\sigma^+ r^2(2r-3M) + 24\sigma^{+3}r^5, \\ B_1 &= 4\sigma^+ r^2[\lambda\Delta + 2M(r-3M) - 2\sigma^{+2}r^4]; \end{aligned}\right\} \tag{366}$$

[501] 和

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \lambda(\lambda+2) - 4\lambda m^2\mathrm{cosec}^2\theta, \\ \alpha_2 &= 4\lambda m\cos\theta\mathrm{cosec}^2\theta, \\ \beta_1 &= 4m[2(m^2-1) - \lambda\sin^2\theta]\mathrm{cosec}^3\theta. \end{aligned}\right\} \tag{367}$$

最大的意义显然是属于 $\mathscr{R}$、$\mathscr{S}$、Z_1 和 Z_2 表示的极限形式. 利用方程 (366) 和 (367) 可得, 方程 (180) 和 (181), 类似地还有方程 (185) 和 (186), 相互一致地

给出 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的如下表示:

$$\frac{1}{2}[\lambda\Delta + 2M(r-3M) - 2\sigma^{+2}r^4]\mathscr{R}$$
$$= \left[r - \frac{2}{\lambda+2}(r-3M)\right]\sigma^+ rX + \left[M - \frac{2\sigma^{+2}}{\lambda+2}r^3\right]Y \tag{368}$$

和

$$\frac{1}{2}[\lambda\sin^2\theta - 2(m^2-1)]\mathscr{S} = \frac{m\lambda}{\lambda+2}[S]^+\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{2m^2}{\lambda+2} - 1\right)[S]^-\sin\theta. \tag{369}$$

这些对 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 的表示计算出了积分

$$\mathscr{R} = \sqrt{\Delta}\int\left(Y + \frac{2\sigma^+ r}{\lambda+2}X\right)\frac{\mathrm{d}r}{\Delta^{3/2}} \tag{370}$$

和

$$\mathscr{S} = \int\left\{[S]^-\cos\theta + \frac{2m}{\lambda+2}[S]^+\right\}\mathrm{d}\theta. \tag{371}$$

如在 §95 已讲述的, 纽曼 – 彭罗斯形式在应用于时空扰动理论时的一个惊人特征是, 它给出了经典解析函数之间诸如 (370) 和 (371) 这样的新颖积分关系.

转到由方程 (285) 和 (286) 给出的 Z_1 和 Z_2 的解, 在作了仔细的分析后得到, 在极限 $a \to 0$ 时它们给出 (再次略去因子 $1/(24M\sqrt{2})$)

$$Z_1 = -\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)\mathscr{R}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\lambda\sin^2\theta - 2(m^2-1)}\{m[S]^+ - [S]^-\cos\theta\} \tag{372}$$

和

$$Z_2 = \mathscr{R}\frac{2\lambda\sin\theta}{\lambda\sin^2\theta - 2(m^2-1)}\left\{m(\lambda+1)[S]^+\cos\theta + \left[m^2 - \frac{1}{2}(\lambda+2)(1+\cos^2\theta)\right][S]^-\right\}. \tag{373}$$

在得出上式时利用了下列在极限 $a \to 0$ 时成立的关系:

$$m[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-\mathrm{cosec}\theta = -\sigma^+(\lambda\mathscr{S} - 2[\mathscr{L}S]^-\cos\theta)a + O(a^2), \tag{374}$$

[502]

$$m\{[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+\cos\theta + 2[\mathscr{L}S]^+\sin\theta\}\mathrm{cosec}\theta = -\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)\mathscr{S}, \tag{375}$$

$$r\sigma^+\{r[\mathscr{D}\mathscr{D}P]^+ - 2[\mathscr{D}P]^+\} = \frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)\mathscr{R}, \tag{376}$$

和

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)\mathscr{S}+m[\mathscr{L}S]^{+}\\
&=-\frac{1}{4}(\lambda+2)\{-\lambda\mathscr{S}+2[\mathscr{L}S]^{-}\cos\theta\}\\
&=\frac{\lambda\sin\theta}{\lambda\sin^{2}\theta-2(m^{2}-1)}\{m(\lambda+1)[S]^{+}\cos\theta\\
&\quad+\left[m^{2}-\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)(1+\cos^{2}\theta)[S]^{-}\right\}.
\end{aligned}\tag{377}$$

由方程 (372) 和 (373) 所给的 Z_1 和 Z_2 可直接验证, 如所要求地有

$$Z_1+Z_2=\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)\mathscr{R}\mathscr{S}.\tag{378}$$

其余度规函数的解可由 §93 所列的各个表示恰当地趋于极限 $a\to 0$ 而得到.

97. 变换理论和入射引力波的势垒

现在转到入射引力波如何被克尔黑洞反射和吸收的问题. 如在第 8 章考虑的入射电磁波情形那样, 首先通过 §72 和 §73 描述的程序将问题简化为一维势垒的反射和透射.

记取, 由变量的改变 (见第 8 章方程 (100) 和 (105)),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}=\frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ \text{和}\ Y=|\varpi^2|^{-3/2}P_{+2}$$

其中

$$\varpi^2=r^2+\alpha^2=r^2+a^2+(am/\sigma^{+}),\tag{379}$$

支配 P_{+2} 的楚科尔斯基方程 (24) 成为 (见第 8 章方程 (108) — (110))

$$\Lambda^2Y+P\Lambda_{-}Y-QY=0,\tag{380}$$

其中

$$P=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\lg\frac{\varpi^8}{\Delta^2},\tag{381}$$

[503] 和

$$\begin{aligned}
Q&=\frac{\Delta}{\varpi^4}\left\{\lambda-3\left[\frac{\Delta-2r(r-M)}{\varpi^2}+\frac{r^2\Delta}{\varpi^4}\right]\right\}\\
&=\frac{\Delta}{\varpi^8}[\lambda\varpi^4+3\varpi^2(r^2-a^2)-3r^2\Delta].
\end{aligned}\tag{382}$$

并寻求将方程 (380) 变换为下列形式的一维波动方程,

$$\Lambda^2Z=VZ.\tag{383}$$

§73 中建立的变换理论可应用于现在的问题: 只需在相关的方程中取 $s=2$. 对第 8 章方程 (120) 和 (122) 作代换 (用 $s=2$), 得到下列待考虑的方程 (见第 8 章方程 (130) — (133)):

$$fV = R - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}, \quad T = W + 2\mathrm{i}\sigma^+ f, \tag{384}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^8}{\Delta^2}R\right) = \frac{\varpi^8}{\Delta^2}(QT - 2\mathrm{i}\sigma^+ R) + \beta, \tag{385}$$

$$R\left(R - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}\right) + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta T = \frac{\Delta^2}{\varpi^8}K, \tag{386}$$

和

$$RV - Q\left(R - \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r_*}\right) = \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}r_*}. \tag{387}$$

(*a*) 一个明晰解

寻求方程 (385) — (387) 的下列形式的解,

$$T = T_1(r_*) + 2\mathrm{i}\sigma^+, \quad \beta = \beta_1(r_*) + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2, \tag{388}$$

和

$$K = \kappa_1 + 2\mathrm{i}\sigma^+\kappa_2, \tag{389}$$

其中 β_2、κ_1 和 κ_2 是常量 (待定); R 和 V 是明确地独立于 σ^+, 即它们不含任何对 $\mathrm{i}\sigma^+$ 为线性的项 (而 T 和 β 却是). 进一步假定, 当将所选形式的解代入方程 (385) — (387) 时, 可以分别地将含有 $\mathrm{i}\sigma^+$ 因子的项和没有这种因子的项相等. 在作这些假定时, 是对已允许的自由施加了更多的限制. 然而将看到, 如前面的情形那样 (见第 4 章方程 (311) 和第 5 章方程 (267)), 得益于满足一定的非线性微分方程 (下面的方程 (404)) 的 Q (而不是 $F = \varpi^8 Q/\Delta^2$), 所假定形式的解的确存在.

现在将方程 (388) 的 T 和 β 代入方程 (385), 并将具有和没有 $\mathrm{i}\sigma^+$ 因子的项相等 (如已说过要做的), 得到方程对 [504]

$$R = Q + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta_2, \tag{390}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^8}{\Delta^2}R\right) = \frac{\varpi^8}{\Delta^2}QT_1 + \beta_1. \tag{391}$$

类似地, 由方程 (386) 得到方程对

$$\beta_1 + \beta_2 T_1 = \kappa_2 \tag{392}$$

和

$$R^2 - R\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*} + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta_1 T_1 = \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\kappa, \tag{393}$$

其中

$$\kappa = \kappa_1 + 4\sigma^{+2}\beta_2. \tag{394}$$

由于最后这个关系, 可写出 (见方程 (389))

$$K = (\kappa - 4\sigma^{+2}\beta_2) + 2\mathrm{i}\sigma^{+}\kappa_2. \tag{395}$$

按方程 (390) 和 (392) 来取代方程 (391) 中的 R 和 β_1, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\varpi^8}{\Delta^2}Q\right) = \frac{\varpi^8}{\Delta^2}QT_1 - \beta_2 T_1 + \kappa_2. \tag{396}$$

令

$$F = \frac{\varpi^8}{\Delta^2}Q = \frac{1}{\Delta}[\lambda\varpi^4 + 3\varpi^2(r^2 - a^2) - 3r^2\Delta]. \tag{397}$$

于是,

$$R = \frac{\Delta^2}{\varpi^8}(F + \beta_2), \tag{398}$$

而方程 (396) 成为

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*} = T_1(F - \beta_2) + \kappa_2, \tag{399}$$

或, 等价地,

$$T_1 = \frac{F' - \kappa_2}{F - \beta_2} \quad \text{其中} \quad F' = F_{,r_*}. \tag{400}$$

回到方程 (393), 将它用 F 来写出, 有

$$\frac{\Delta^2}{\varpi^8}(F + \beta_2)^2 - (F + \beta_2)\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*} + T_1(\kappa_2 - \beta_2 T_1) = \kappa. \tag{401}$$

[505] 现在用方程 (400) 和下面的方程来从上面方程中消去 T_1,

$$T_1' = \frac{1}{(F - \beta_2)^2}[(F - \beta_2)F'' - (F' - \kappa_2)F']; \tag{402}$$

得到

$$\frac{\Delta^2}{\varpi^8}(F^2 - \beta_2^2)^2 - (F^2 - \beta_2^2)F'' + (F'^2 - \kappa_2^2)F = \kappa(F - \beta_2)^2. \tag{403}$$

展开这个方程, 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_*}\right)^2 - F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r_*^2} + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}F^3 = (\kappa_2^2 - 2\beta_2\kappa) + \left(\kappa + 2\frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta_2^2\right)F - \frac{\beta_2^2}{F}\left(\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r_*^2} + \beta_2^2\frac{\Delta^2}{\varpi^8} - \kappa\right), \tag{404}$$

应记得, 其中 F 是已知函数. 因此, 如果所选形式的解存在, 方程 (404) 是对 F 的条件. 方程 (404) 是第 4 章方程 (311) 的推广, 当 $\beta_2 = 0$ 时简化为后者.

值得注意的是, 对选择

$$\kappa = \lambda(\lambda + 2), \quad \beta_2 = \pm 3\alpha^2, \tag{405}$$

和

$$\kappa_2 = \pm\{36M^2 - 2\lambda[\alpha^2(5\lambda + 6) - 12a^2] + 2\beta_2\lambda(\lambda + 2)\}^{1/2}, \tag{406}$$

方程 (397) 所定义的 F 的确满足方程 (404), 其中 β_2 和 κ_2 的符号可以独立地指定; 但是验证工作颇为艰难.

对 V 的解现在可从最后的方程 (387) 得出. 将该方程重写为

$$R(V - Q) = -Q\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*} + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\frac{\mathrm{d}\beta_1}{\mathrm{d}r_*}, \tag{407}$$

利用方程 (390) 和 (392) 可得

$$R(V - Q) = -\left(Q + \frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta_2\right)\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*} = -R\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*}. \tag{408}$$

所以,

$$V = Q - \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}r_*}, \tag{409}$$

其中可由方程 (402) 代入 T_1'. 但便利的是利用 F 所满足的微分方程 (403) 来消去方程 (402) 中的 F''; 在作了消去后得到

$$T_1' = \frac{\Delta^2}{\varpi^8}(F + \beta_2) - \frac{\kappa}{F + \beta_2} + \frac{(F' - \kappa_2)(\kappa_2 F - \beta_2 F')}{(F - \beta_2)(F^2 - \beta_2^2)}. \tag{410}$$ [506]

对 V 的表示现在变为

$$V = -\frac{\Delta^2}{\varpi^8}\beta_2 + \frac{\kappa}{F + \beta_2} - \frac{(F' - \kappa_2)(\kappa_2 F - \beta_2 F')}{(F - \beta_2)(F^2 - \beta_2^2)}. \tag{411}$$

(*b*) $Z^{(+\sigma^+)}$ 与 $Z^{(-\sigma^+)}$ 的区别

如在 §74(*a*) 中那样, 将用 $Y^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y^{(-\sigma^+)}$ 来区分 Y 和满足复数共轭方程的函数, 用 $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 来区分满足相关联的一维波动方程的函数. 可得到 (再次如在 §74(*a*) 中那样) $Z^{(+\sigma^+)}$ 和 $Z^{(-\sigma^+)}$ 满足具有同样势 (411) 的波动方程.

用 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 来表示 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 和反过来表示的各个方程是

$$\left.\begin{aligned} Y^{(\pm\sigma^+)} &= fVZ^{(\pm\sigma^+)} + (T_1 \pm 2\mathrm{i}\sigma^+)\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)}, \\ \Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)} &= -\frac{\Delta^2}{\varpi^8}(\beta_1 \pm 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2)Z^{(\pm\sigma^+)} + R\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)}, \\ K^{(\pm\sigma^+)}Z^{(\pm\sigma^+)} &= \frac{\varpi^8}{\Delta^2}RY^{(\pm\sigma^+)} - \frac{\varpi^8}{\Delta^2}(T_1 \pm 2\mathrm{i}\sigma^+)\Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)}, \\ K^{(\pm\sigma^+)}\Lambda_\pm Z^{(\pm\sigma^+)} &= (\beta_1 \pm 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2)Y^{(\pm\sigma^+)} + \frac{\varpi^8}{\Delta^2}fV\Lambda_\mp Y^{(\pm\sigma^+)}, \end{aligned}\right\} \tag{412}$$

其中可注意有 (见方程 (395) 和 (405))

$$K^{(\pm\sigma^+)} = [\lambda(\lambda+2) - 4\sigma^{+2}\beta_2] \pm 2\mathrm{i}\sigma^+\kappa_2. \tag{413}$$

常量 $K^{(+\sigma^+)}$ 和 $K^{(-\sigma^+)}$ 以一种重要的方式联系着斯塔罗宾斯基常量 $\mathscr{C}$, 即有

$$\begin{aligned} K^{(+\sigma^+)}K^{(-\sigma^+)} &= [\lambda(\lambda+2) - 4\sigma^{+2}\beta_2]^2 + 4\sigma^{+2}\kappa_2^2 \\ &= \lambda^2(\lambda+2)^2 - 8\sigma^{+2}\lambda[\alpha^2(5\lambda+6) - 12a^2] \\ &\quad +144\sigma^{+2}(M^2 + \alpha^4\sigma^{+2}) = |\mathscr{C}|^2 \end{aligned} \tag{414}$$

这个关系与 β_2 和 κ_2 符号的不确定无关. 如上式这样的斯塔罗宾斯基常量 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}^*$ 与 $K^{(+\sigma^+)}$ 和 $K^{(-\sigma^+)}$ 之间关系的存在或许是可以预期的: 两对不同方式的常量联系着属于 $s=+2$ 和 $+\sigma^+$ 以及 $s=-2$ 和 $-\sigma^+$ 的函数. 关系 (414) 事实上是整个理论的一致性所需要的, 这一点将在下面的 §98 中看得更清楚.

[507] (*c*) **势的性质**

由于 β_2 和 κ_2 的符号可以相互独立地选择, 方程 (411) 一般给出 4 个可能的势用于方程 (383). 也很清楚, 由于 κ_2 的定义式 (406) 中平方根量的符号, 可有一对复数共轭势 (正如第 8 章中对入射电磁波曾有的).

方程 (411) 所给势的明晰形式是

$$\begin{aligned} V = \Delta\Bigg\{ &-\beta_2\frac{\Delta}{\varpi^8} + \frac{\lambda(\lambda+2)}{q+\beta_2\Delta} \\ &+\frac{[\kappa_2\varpi^2\Delta - (q'\Delta - \Delta' q)][\kappa_2\varpi^2 q - \beta_2(q'\Delta - \Delta q')]}{\varpi^4(q+\beta_2\Delta)(q-\beta_2\Delta)^2}\Bigg\}, \end{aligned} \tag{415}$$

其中

$$q = \lambda\varpi^4 + 3\varpi^2(r^2 - a^2) - 3r^2\Delta = \Delta F, \tag{416}$$

$$\left.\begin{aligned} q - \beta_2\Delta &= \varpi^2(\lambda\varpi^2 + 6Mr - 6a^2) && (\beta_2 = +3\alpha^2), \\ q - \beta_2\Delta &= \lambda\varpi^4 + 6r^2(\alpha^2 - a^2) + 6Mr(r^2 - \alpha^2) && (\beta_2 = -3\alpha^2), \end{aligned}\right\} \tag{417}$$

和

$$q'\Delta - \Delta' q = -2(r-M)\lambda\varpi^4 + 2\varpi^2(2\lambda r\Delta \\ -3Mr^2 - 3Ma^2 + 6ra^2) + 12r\Delta(Mr - a^2). \tag{418}$$

方程 (415) 所给的势在一些典型情形下的走向示于图 43 和图 44.

首先看到, 在史瓦西极限 $a \to 0$ 时有,

和
$$\left.\begin{aligned} \beta_2 = 0, \kappa_2 = \pm 6M, \lambda = (l-1)(l+2) = \mu^2 = 2n, \\ K^{(\pm\sigma^+)} = \mu^2(\mu^2+2) \pm 12\mathrm{i}\sigma^+ M, \end{aligned}\right\} \tag{419}$$

与第 4 章方程 (327) 一致. 所以,4 个势对此极限简并为两个, 这两个就是适合于史瓦西黑洞轴向和极向扰动的雷杰 – 惠勒势和泽里立势. 于是出现问题: 对克尔黑洞一般有的 4 个势是否事实上并不表明对等以外的内部对称性的存在.

其次可见, 所有的势都有以下共同特征: 它们对 $r \to \infty$ 都有反平方行为; 随着趋近视界 $r_+ + 0$, 它们对 $r_* \to -\infty$ (在 $\sigma^+ > \sigma_s^+$ 情形) 和 $r_* \to +\infty$ (在 $\sigma^+ < \sigma_s^+$ 情形) 都指数式地趋于零. 结论是, 在所有情形的一维波动方程的解都有渐近行为

$$Z \to \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} (r \to \infty \ \text{ 和 } \ r \to r_+ + 0). \tag{420}$$

对 $\sigma^+ > \sigma_s^+$, 当 $r_*(r)$ 关系是单值时, 所有 4 个势都是连续、束缚和窄范围的. 而且, 由方程 (409) 可得, 所有 4 个势对 r_* 的全范围 $(-\infty, +\infty)$ 的积分是相同的: [509]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V \mathrm{d}r_* = \int_{-\infty}^{+\infty} Q \mathrm{d}r_* + (T_1)_{\Delta=0} \quad (\sigma^+ > \sigma_s^+), \tag{421}$$

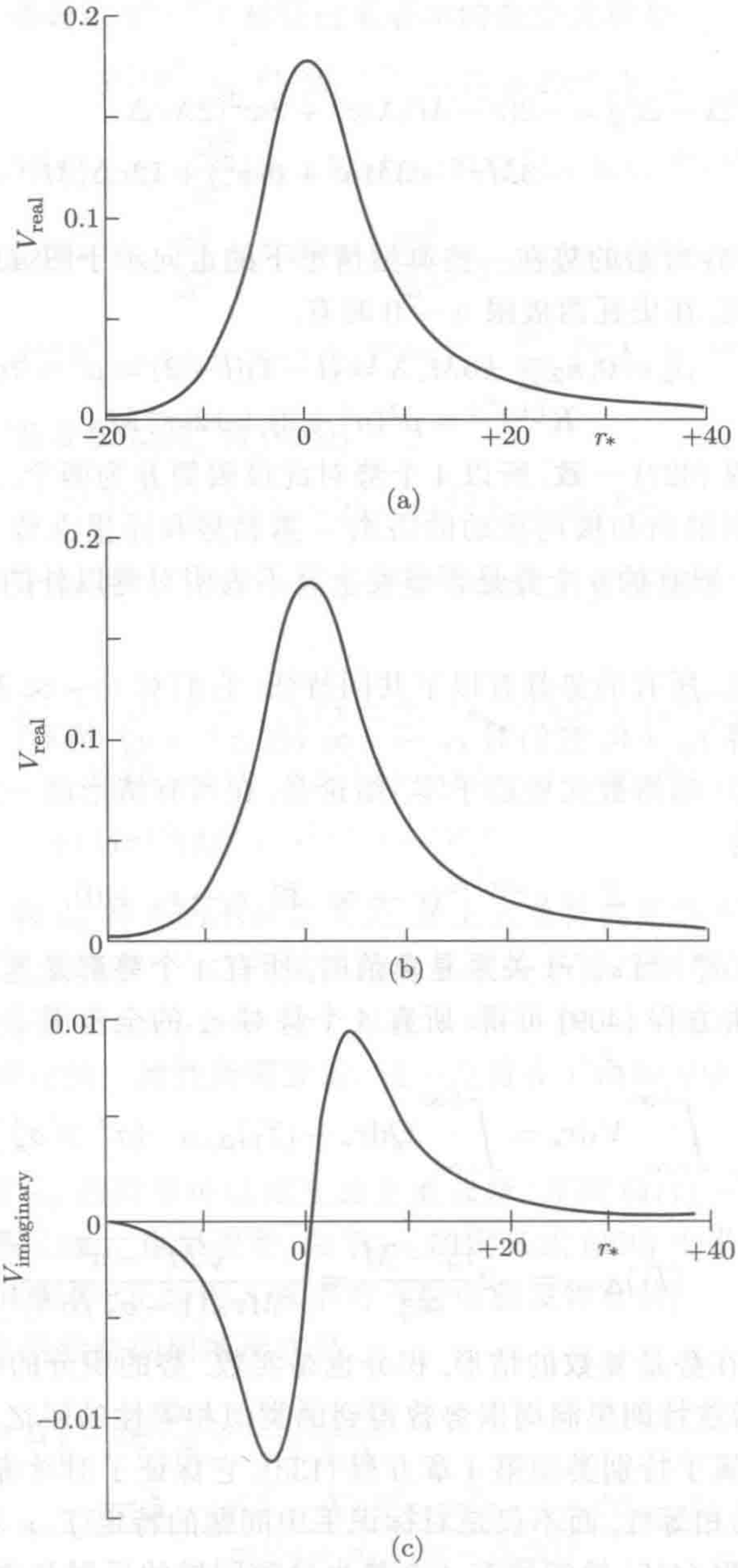
其中

$$(T_1)_{\Delta=0} = -2\frac{r_+ - M}{\varpi_+^2} = -\frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{Mr_+(1 - \sigma_s^+/\sigma^+)}. \tag{422}$$

特别地, 即使在势是复数的情形, 积分也是实数. 势的积分的相等是对史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞周围势曾得到的类似相等性的回忆. 的确, 当 $\beta_2 = 0$ 时, V 的表示属于特别类型第 4 章方程 (133), 它保证了对所有 f、κ、β 的反射和透射系数的相等性, 而不仅是对标识手中问题的特定 f、κ 和 β. 在下面 §98 中将看到, 方程 (415) 给的所有 4 个势也导致同样的反射和透射系数. 出现的问题是, 方程 (411) 是否单独给出一个类似 (和更大) 的势类型, 它保证反射和透射系数的相等性.

当 $m = 0$ 和 $\alpha^2 = a^2$ 时的轴对称情形显然是最简单的. 此时的 4 个势 (束缚和窄范围的) 可以全都是实数的 (如即将看到的, 对足够小的 a/M 值); 或者

[508]



(a)

(b)

(c)

图 43 克尔黑洞周围对入射引力波的势垒. 属于 $l=2, m=0, a=0.9$, $\sigma^{+2}=0.13$ 的 4 个势中, 2 个是实数 (对应于值 $\kappa_2=\pm 7.848$ 和 $\beta_2=+2.43$); 2 个是共轭复数 (对应于值 $\kappa_2=\pm 13.288\mathrm{i}$ 和 $\beta_2=-2.43$). 属于 $\kappa_2=+7.848$ 和 $\beta_2=+2.43$ 的实数势绘于 (a); 属于 $\kappa_2=-7.848$ 和 $\beta_2=+2.43$ 的势在图的标度内不能与前一个势区分. 属于 $\kappa_2=+13.288\mathrm{i}$ 和 $\beta_2=-2.43$ 的势的实部和虚部绘于 (b) 和 (c).

一对是实数, 另一对是共轭复数; 或者是两对共轭复数. 一对共轭复数势出现的条件是 (见方程 (406))

$$2a^2\lambda(5\lambda-6)-2\beta_2\lambda(\lambda+2)>36M^2. \tag{423}$$

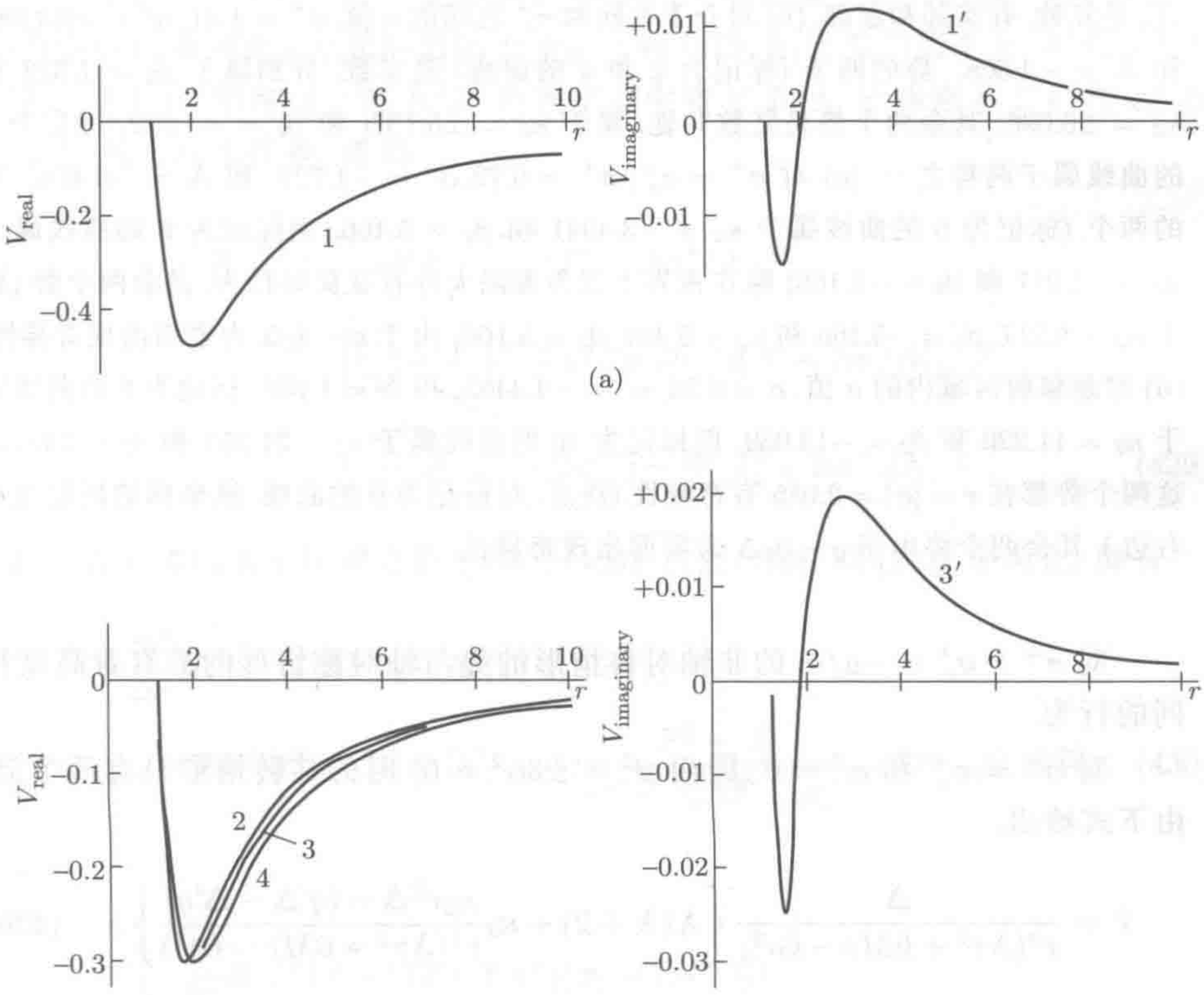
对 β_2 的两个允许值, 即 $-3a^2$ 和 $+3a^2$, 条件 (423) 分别给出

$$\lambda>3+3(1+M^2/a^2)^{1/2} \quad 和 \quad \lambda>3M/2a. \tag{424}$$

由于 λ 的最小值是 $(l-1)(l+1)$, 所以 4 个势对

$$a/M<3/[2(l-1)(l+2)], \tag{425}$$

即仅对足够小的 a/M 值, 全都是实数的. 由图 43 和图 44 可见, 一般说来, 势 [511]
的实部是主导的和接近相等的, 它们的小差别由相差的 (小) 虚部 "抵消". 如已显示的, 在任何情形, 虚部的积分必定为零, 而实部的积分必定相等.



[510]

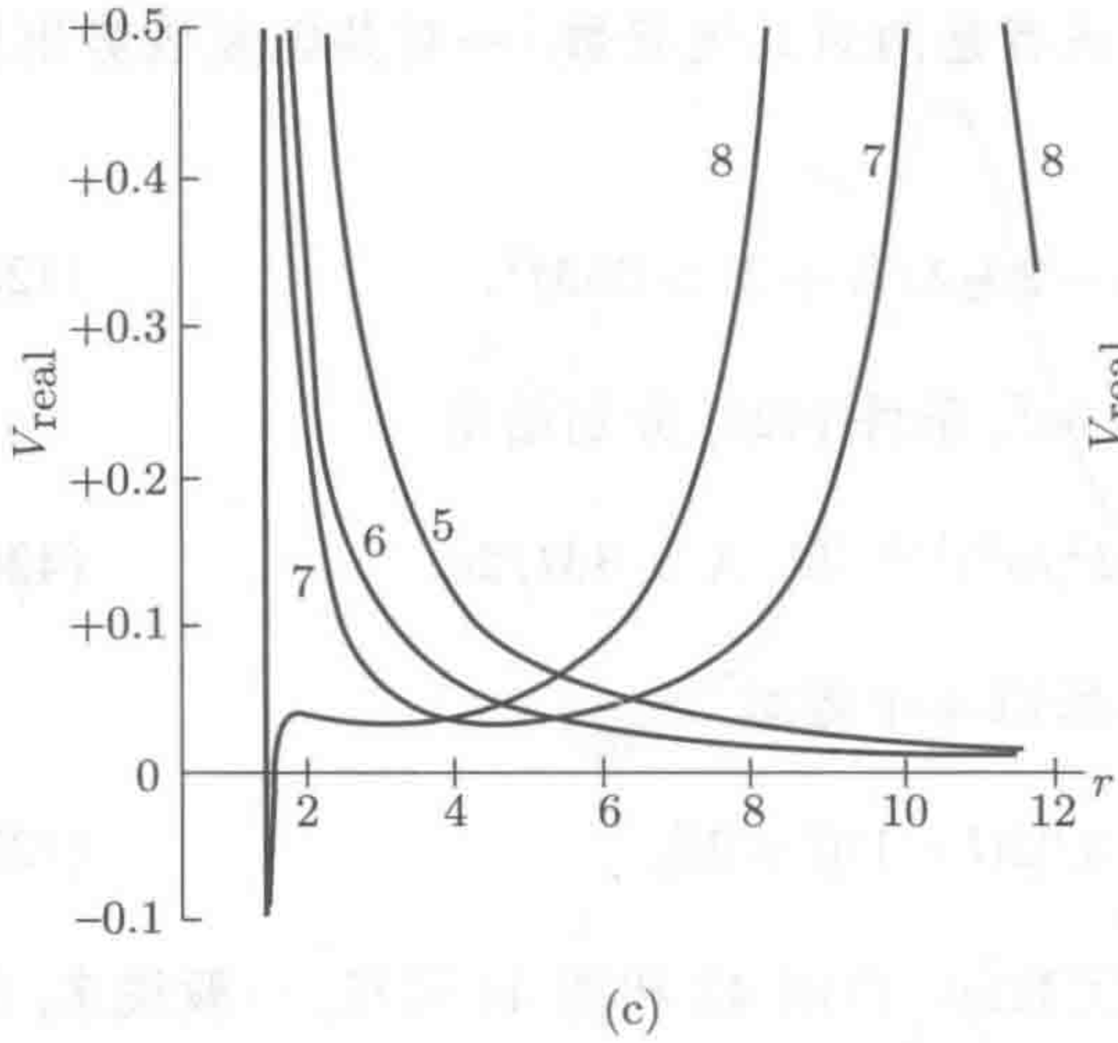


图 44 对 $a=0.95, l=-m=2$, 和 $0<\sigma^+\leqslant\sigma_s^+$ 范围内的 σ^+ 的入射引力波的势族. (a) 对 $\sigma^+=\sigma_c^+=2.11, \kappa_2=12.31\mathrm{i}, \alpha^2=0, \beta_2=0$, 和 $\lambda=-8.66$. 势 (标记为 1 和 $1'$ 的曲线) 是复数, 有实部和虚部. (b) 对介于共转和 σ_s^+ 之间的 σ 值; $\sigma^+=1.41, \alpha^2=-0.4406$, 和 $\lambda=-4.608$. 势的两个 (标记为 2 和 4 的曲线) 是实数, 分别属于 $\beta_2=1.322$ 和 $\kappa_2=\pm6.096$; 其余两个势是复数共轭, 属于 $\kappa_2=\pm5.137\mathrm{i}$ 和 $\beta_2=-1.322$, 标记为 3 的曲线属于两势之一. (c) 对 $\sigma^+=\sigma_s^+$; $\sigma^+=0.72, \alpha^2=-1.722$, 和 $\lambda=-0.478$. 势的两个 (标记为 5 的曲线属于 $\kappa_2=-3.4941$ 和 $\beta_2=5.166$, 而标记为 6 的曲线属于 $\kappa_2=-5.217$ 和 $\beta_2=-5.166$) 除在视界上变为无限大外有着良好行为. 其余两个势 (属于 $\kappa_2=5.217, \beta_2=-5.166$ 和 $\kappa_2=3.491, \beta_2=5.166$) 由于 $q-\beta_2\Delta$ 为零而出现奇异性. (d) 对超辐射区域内的 σ 值; $\sigma=0.36$, $\alpha^2=-4.3465$, 和 $\lambda=1.736$. 标记为 9 的曲线属于 $\kappa_2=11.226$ 和 $\beta_2=-13.039$, 而标记为 10 的曲线属于 $\kappa_2=21.551$ 和 $\beta_2=13.039$; 这两个势都在 $r=|\alpha|=2.085$ 有奇异性.(注意, 对标记为 9 的曲线, 纵坐标的标度是在右边.) 其余两个势由于 $q-\beta_2\Delta$ 为零而出现奇异性.

对 $\sigma^+>\sigma_c^+=-a/m$ 的非轴对称情形的势与轴对称情形的势有着高度相同的行为.

对 $\sigma^+=\sigma_s^+$ 和 $\alpha^2=0$ (因而 $\beta^2=\pm3\alpha^2=0$) 时的共转情形只有两个势, 由下式给出,

$$V=\frac{\Delta}{r^2(\lambda r^2+6Mr-6a^2)}\left\{\lambda(\lambda+2)+\kappa_2\frac{\kappa_2 r^2\Delta-(q'\Delta-\Delta' q)}{r^4(\lambda r^2+6Mr-6a^2)}\right\}, \tag{426}$$

其中

$$\kappa_2=\pm(36M^2+24a^2\lambda)^{1/2} \quad 和 \quad q=r^2(\lambda r^2+6Mr-6a^2); \tag{427}$$

取决于 κ_2 是实数或虚数, 它们可以是实数或复数. 对 $\sigma_s^+ < \sigma^+ < \sigma_c^+$, 势继续具有同样的行为. 但当 $\sigma^+ \to \sigma_s^+ + 0$ 时, 它们精确地在视界成为奇异; 它们导致单位反射系数, 预言超辐射的开始 (见下面 §98).

对 $\sigma^+ < \sigma_s^+$, 势在 $r = |\alpha| > r_+$ 有着一般的奇异性. 容易验证, 在这些情形势在 $r = |\alpha|$ 的行为由下式给出,

$$\left.\begin{aligned} V &\simeq -3\frac{\Delta_{|\alpha|}^2}{16|\alpha|^2(r-|\alpha|)^4} \quad (\beta_2 = +3|\alpha|^2), \\ \text{和} \qquad V &\simeq +5\frac{\Delta_{|\alpha|^2}}{16|\alpha|^2(r-|\alpha|)^4} \quad (\beta_2 = -3|\alpha|^2), \end{aligned}\right\} \tag{428}$$

也就是与对电磁扰动的势相同的行为 (见第 8 章方程 (193)). 由图 44(c) 可见, 除在 $r = |\alpha|$ 的奇异性外, 势的一个或另一个还在一些情况下呈现别的奇异性; 这些新加的奇异性是由 V 的表示式 (415) 分母中的 $q - \beta_2\Delta$ 为零导致的.

(d) 属于不同势的解之间的关系 [512]

用 $V^j (j = 1, \cdots, 4)$ 标记不同的势, 用 Z^j 标记属于它们的解, 现在来表明 (与前面已做的类似), 如何借助于变换方程 (412) 由已知的属于 V^j 的解 Z^j 来导出属于 V^i 的解 Z^i. 在 K^iZ^i 的表示式中将 Y 和 Λ_-Y 由联系它们与 Z^j 和 Λ_+Z_j 的方程来代换, 得到

$$\begin{aligned} K^iZ^i &= \frac{\varpi^8}{\Delta^2}R^iY - \frac{\varpi^8}{\Delta^2}(T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)\Lambda_-Y \\ &= \left[\frac{\varpi^8}{\Delta^2}R^i f^j V^j + (T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)(\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j)\right] Z^j \\ &\quad + \frac{\varpi^8}{\Delta^2}[R^i(T_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+) - R^j(T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)]\Lambda_+Z^j. \end{aligned} \tag{429}$$

此方程右边的表示可用方程 (398)、(400), 以及 (384) 和 (387) 来简化, 即有

$$\begin{aligned} &\frac{\varpi^8}{\Delta^2}[R^i(T_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+) - R^j(T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)] \\ &\quad = 2\mathrm{i}\sigma^+(\beta_2^i - \beta_2^j) + (\kappa_2^i - \kappa_2^j)\frac{F^2 - \beta_2^2}{(F-\beta_2^i)(F-\beta_2^j)} = D^{ij} \quad (\text{比如说}), \end{aligned} \tag{430}$$

和

$$\begin{aligned} &\frac{\varpi^8}{\Delta^2}\frac{R^i}{R^j}R^j f^j V^j + (T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)(\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j) \\ &= \frac{R^i}{R^j}[K^j - (\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j)(T_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+)] + (T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)(\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j) \end{aligned}$$

$$= \frac{R^i}{R^j}K^j - \frac{\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j}{\varpi^8 R^j/\Delta^2}\frac{\varpi^8}{\Delta^2}[R^i(T_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+) - R^j(T_1^i + 2\mathrm{i}\sigma^+)]$$

$$= \frac{R^i}{R^j}K^j - \frac{\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j}{F + \beta_2^j}D^{ij}; \tag{431}$$

而方程 (429) 成为

$$K^i Z^i = \left\{\frac{F + \beta_2^i}{F + \beta_2^j}K^j - \frac{\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j}{F + \beta_2^j}D^{ij}\right\}Z^j + D^{ij}\Lambda_+ Z^j. \tag{432}$$

再由方程 (392) 和 (400) 可得

$$\frac{\beta_1^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j}{F + \beta_2^j} = \frac{1}{F^2 - \beta_2^2}[(\kappa_2^j + 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^j)F - \beta_2^j F' - 2\mathrm{i}\sigma^+\beta_2^2]. \tag{433}$$

[513] 将此式代入方程 (432), 最后得到关系

$$K^i Z^i = \left\{\frac{F + \beta_2^i}{F + \beta_2^j}K^j + \left[\mathrm{i}\sigma^+\frac{F - \beta_2^j}{F + \beta_2^j} - \frac{\kappa_2^j F - \beta_2^j F'}{F^2 - \beta_2^2}\right]D^{ij}\right\}Z^j + D^{ij}\frac{\mathrm{d}Z^j}{\mathrm{d}r_*}. \tag{434}$$

这个关系很清楚地能用来由属于 V^j 的解 Z^j 导出属于 V^i 的解 Z^i.

由于 F 对 $r \to \infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 都趋于无限大, 由方程 (434) 有

$$K^i Z^i \to (K^j + \mathrm{i}\sigma^+ D^{ij})Z^j + D^{ij}Z^j_{,r_*} \quad (r \to \infty; r \to r_+ + 0). \tag{435}$$

这个关系能用来联系属于不同势的解的渐近行为. 在导出这些关系时, 下面的对 D^{ij} 的等价公式是有用的. 由于

$$K^i - K^j = -4\sigma^{+2}(\beta_2^i - \beta_2^j) + 2\mathrm{i}\sigma^+(\kappa_2^i - \kappa_2^j)$$

$$= 2\mathrm{i}\sigma^+[2\mathrm{i}\sigma^+(\beta_2^i - \beta_2^j) + (\kappa_2^i - \kappa_2^j)], \tag{436}$$

和 $(\beta_2^i)^2 = \beta_2^2 (= 9\alpha^4)$, 故可写 (见方程 (430)

$$D^{ij} = \frac{1}{2\mathrm{i}\sigma^+}(K^i - K^j) + (\kappa_2^i - \kappa_2^j)(\beta_2^i + \beta_2^j)\frac{F}{(F - \beta_2^i)(F - \beta_2^j)}. \tag{437}$$

由此式有

$$D^{ij} \to (K^i - K^j)/2\mathrm{i}\sigma^+ \quad (r \to \infty; r \to r_+ + 0). \tag{438}$$

已经看到, 一维波动方程的解对 $r \to \infty$ 和 $r \to r_+ + 0$ 都有渐近行为 $\exp(\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*)$. 所以, 如果 Z^j 有渐近行为

$$Z^j \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \text{ 和 } Z^j \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r \to \infty; r \to r_+ + 0), \tag{439}$$

则由方程 (435) 和 (438) 可得, 由 Z^j 导出的对应解 Z^i 分别具有渐近行为

$$Z^i \to \frac{K^j}{K^i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^r_*} \text{ 和 } Z^i \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r \to \infty; r \to r_+ + 0). \tag{440}$$

(e) 解的渐近行为

回到联系 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 和 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 的解的方程 (412), 现在能 (如前文那样) 由 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 的已知渐近行为导出 $Y^{(\pm\sigma^+)}$ 的渐近行为. 可得

$$\left.\begin{aligned} &Z^{(+\sigma^+)\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}} && (r\to\infty; r\to r_+ +0);\\ &Y_{+2}^{(+\sigma^+)} \to -4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to\infty),\\ &Y_{+2}^{(+\sigma^+)} \to -\frac{4\sigma^{+2}}{\sigma^+-\sigma_s^+}[(\sigma^+-\sigma_s^+)+2\mathrm{i}\varepsilon_0]\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to r_+ +0); \end{aligned}\right\} \tag{441}$$

$$\left.\begin{aligned} &Z^{(+\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to\infty; r\to r_+ +0);\\ &Y_{+2}^{(+\sigma^+)} \to -\frac{K^{(+\sigma^+)}}{4\sigma^{+2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^4} && (r\to\infty);\\ &Y_{+2}^{(+\sigma^+)} \to -\frac{K^{(+\sigma^+)}(\sigma^+-\sigma_s^+)^2\Delta^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{4(\varpi_+^2)^4\sigma^{+2}[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)+2\mathrm{i}\varepsilon_0][(\sigma^+-\sigma^+{}_s)+4\mathrm{i}\varepsilon_0]} && \\ &\qquad\qquad (r\to r_+ +0); \end{aligned}\right\} \tag{442}$$

[514]

$$\left.\begin{aligned} &Z^{(-\sigma^{+*})} \to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to\infty; r\to r_+ +0);\\ &Y_{-2}^{(-\sigma^+)} \to -\frac{K^{(-\sigma^+)}}{4\sigma^{+2}}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^4} && (r\to\infty),\\ &Y_{-2}^{(-\sigma^+)} \to -\frac{K^{(-\sigma^+)}(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{4(\varpi_+^2)^4\sigma^{+2}[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)-2\mathrm{i}\varepsilon_0][(\sigma^+-\sigma^+{}_s)-4\mathrm{i}\varepsilon_0]} && \\ &\qquad\qquad (r\to r+0); \end{aligned}\right\} \tag{443}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &Z^{(-\sigma^+)} \to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to\infty; r\to r_+ +0);\\ &Y_{-2}^{(-\sigma^+)} \to -4\sigma^{+2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r\to\infty),\\ &Y_{-2}^{(-\sigma^+)} \to -\frac{4\sigma^{+2}}{\sigma^+-\sigma^+{}_-}[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)-2\mathrm{i}\varepsilon_0]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} && (r-r_+ +0); \end{aligned}\right\} \tag{444}$$

其中

$$\varepsilon_0 = \frac{r_+ - M}{2(r_+^2+a^2)} = \frac{\sqrt{M^2-a^2}}{4Mr_+}. \tag{445}$$

98. 反射和透射问题

有了楚科尔斯基径向方程向一维波动方程形式的简化, 现在可以沿着与 §75 和 §76 中对入射电磁波的同样途径来完成对入射引力波反射和透射问题的考虑. 两种情形的主要差别是, 现在有 4 个势, 而不是两个; 但是这个差别对现在的问题并不重要, 因为如即将看到的, 所有 4 个势都给出同样的反射和透射系数.

由于势可以是复数的, 有着能同等地应用于实数和复数势的反射和透射问题的公式是便利的.

用 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 标记一维波动方程的属于束缚窄范围势 V (实数或复数) 的解, 解有着渐近行为

$$\left.\begin{aligned} Z^{(\pm\sigma^+)} &\to \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A^{(\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to +\infty) \\ &\to \qquad\qquad B^{(\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{446}$$

[515] 如果势 V 是实数, $A^{(+\sigma^+)}$ 和 $B^{(+\sigma^+)}$ 就会是 $A^{(-\sigma^+)}$ 和 $B^{(-\sigma^+)}$ 的共轭复数; 但若 V 是复数就不是如此. 但对所有情况, 由定义

$$\mathbb{R} = A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)} \quad \text{和} \quad \mathbb{T} = B^{(+\sigma^+)}B^{(-\sigma^+)}, \tag{447}$$

有守恒律

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1; \tag{448}$$

不过不能一般地保证 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 是实数.

现在来证明关于表征手中问题的特定势的两个定理.

为方便, 且限于 $r_*(r)$ 为单调和单值、势为束缚和窄范围时 $\sigma^+ > \sigma^+{}_s$ 的情形. 推广到包括 $\sigma^+ < \sigma^+{}_s$ 只需增加一些关于如何越过 V 将会出现的奇异性的陈述 (见第 8 章 §75(*c*)).

定理 1 所有的势都给出同样的反射和透射系数.

证明 考虑属于 V^j 的解 $Z^{(j,\pm\sigma^+)}$, 其渐近行为是

$$\left.\begin{aligned} Z^{(j,\pm\sigma^+)} &\to C^{(j,\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A^{(j,\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to +\infty) \\ &\to \qquad\qquad B^{(j,\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{449}$$

按照在 §97(*d*) 中建立的关系 (439) 和 (440), 由具有上述渐近行为的属于 V^j 的解导出的属于 V^i 的解 $Z^{(i,\pm\sigma^+)}$, 将呈现有着下列系数的类似行为,

$$\left.\begin{aligned} &C^{(i,+\sigma^+)} = C^{(j,+\sigma^+)}, \quad B^{(i,+\sigma^+)} = B^{(j,+\sigma^+)}, \quad A^{(i,+\sigma^+)} = \frac{K^j}{K^i}A(j,+\sigma^+); \\ &C^{(i,-\sigma^+)} = \frac{K^j}{K^i}C^{(j,-\sigma^+)}, \quad B^{(i,-\sigma^+)} = \frac{K^j}{K^i}B^{(j,-\sigma^+)}, \quad A^{(i,-\sigma^+)} = A^{(j,-\sigma^+)}. \end{aligned}\right\} \tag{450}$$

所以,

$$\mathbb{R} = \frac{A^{(i,+\sigma^+)}A^{(i,-\sigma^+)}}{C^{(i,+\sigma^+)}C^{(i,-\sigma^+)}} = \frac{A^{(j,+\sigma^+)}A^{(j,-\sigma^+)}}{C^{(j,+\sigma^+)}C^{(j,-\sigma^+)}}, \tag{451}$$

和

$$\mathbb{T} = \frac{B^{(i,+\sigma^+)}B^{(i,-\sigma^+)}}{C^{(i,+\sigma^+)}C^{(i,-\sigma^+)}} = \frac{B^{(j,+\sigma^+)}B^{(j,-\sigma^+)}}{C^{(j,+\sigma^+)}C^{(j,-\sigma^+)}}; \tag{452}$$

所述定理得证.

定理 2 如果 $Z^{(j,\pm\sigma^+)}$ 是属于复数势 V^j 的解, 具有渐近行为 [516]

$$\left.\begin{aligned} Z^{(j,\pm\sigma^+)} &\to \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A^{(j,\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to +\infty), \\ &\to \qquad\qquad B^{(j,\pm\sigma^+)}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to -\infty), \end{aligned}\right\} \tag{453}$$

那么反射和透射系数由下式给出,

$$\mathbb{R} = |A^{(j,+\sigma^+)}|^2 \frac{[K^{(j,+\sigma^+)}]^2}{|\mathscr{C}|^2} = |A^{(j,-\sigma^+)}|^2 \frac{[K^{(j,-\sigma^+)}]^2}{|\mathscr{C}|^2},$$

和

$$\mathbb{T} = |B^{(j,+\sigma^+)}|^2 = |B^{(j,-\sigma^+)}|^2, \tag{454}$$

其中 $|\mathscr{C}|^2 = K^{(j,+\sigma^+)}K^{(j,-\sigma^+)}$ 是斯塔罗宾斯基常量绝对值的平方.

证明 首先看到, 当且仅当由方程 (406) 给的 κ_2 为纯虚数时, 势 V^j 才能为复数; 在此情形能写出

$$\kappa_2 = \pm\mathrm{i}k_2, \text{ 其中 } k_2 \text{ 是实数.} \tag{455}$$

令 V^j 和 V^i 为分别属于 $-\mathrm{i}k_2$ 和 $+\mathrm{i}k_2$ 以及同一个值 β_2 的势. 于是势 V^j 和 V^i 是共轭复数函数, 相关的常量 K^j 和 K^i 是

和

$$\left.\begin{aligned} K^{(j,\sigma^+)} &= [\lambda(\lambda+2) - 4\sigma^{+2}\beta_2] + 2\sigma^+ k_2 \\ K^{(i,\sigma^+)} &= [\lambda(\lambda+2) - 4\sigma^{+2}\beta_2] - 2\sigma^+ k_2 = K^{(j,-\sigma^+)}, \end{aligned}\right\} \tag{456}$$

且是实数.

由于 V^i 和 V^j 是复数共轭函数,Z^i 和 Z^j 的复数共轭所满足的方程就是同样的. 相应地, 属于 V^i 且有着渐近行为

$$\left.\begin{aligned} Z^{(i,-\sigma^+)} &\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} + A^{(j,-\sigma^+)}\frac{K^i}{K^j}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to +\infty), \\ &\to \qquad\qquad B^{(j,-\sigma^+)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} \quad (r_* \to -\infty) \end{aligned}\right\} \tag{457}$$

的解将是有着方程 (453) 所示渐近行为的 $Z^{(j,+\sigma^+)}$ 解的复数共轭.(对此的验证可通过考虑有着 $Z^{(j,-\sigma^+)}$ 的渐近行为的解, 从它导出与关系 (450) 一致的 $Z^{(i,-\sigma^+)}$ 解, 再乘以 K^i/K^j 以使 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}$ 的系数在其对 $r_* \to \infty$ 的渐近行为中为 1.) 所以 (见方程 (456)),

$$[A^{(j,+\sigma^+)}]^* = A^{(j,-\sigma^+)}\frac{K^i}{K^j} = A^{(j,-\sigma^+)}\frac{K^{(j,-\sigma^+)}}{K^{(j,+\sigma^+)}}, \tag{458}$$

和 [517]

$$[B^{(j,+\sigma^+)}]^* = B^{(j,-\sigma^+)}. \tag{459}$$

由这些关系有

$$\mathbb{R} = A^{(j,+\sigma^+)}A^{(j,-\sigma^+)} = |A^{(j,+\sigma^+)}|^2 \frac{K^{(j,+\sigma^+)}}{K^{(j,-\sigma^+)}}$$
$$= |A^{(j,+\sigma^+)}|^2 \frac{[K^{(j,+\sigma^+)}]^2}{|\mathscr{C}|^2} = |A^{(j,-\sigma^+)}|^2 \frac{[K^{(j,-\sigma^+)}]^2}{|\mathscr{C}|^2}. \tag{460}$$

和

$$\mathbb{T} = |B^{(j,+\sigma^+)}|^2 = |B^{(j,-\sigma^+)}|. \tag{461}$$

这就完成了对定理的证明.

推论 相当一般地, 可写

$$\mathbb{R} = |A^{(j,+\sigma^+)}|^2 \frac{[K^{(j,+\sigma^+)}][K^{(j,+\sigma^+)}]^*}{|\mathscr{C}|^2} \text{ 和 } \mathbb{T} = |B^{(j,+\sigma^+)}|^2. \tag{462}$$

此关系是显然的, 因为当 V^j 是实数时, K^j 是复数; 而当 V^j 是复数时,

$$[K^{(j,+\sigma^+)}]^* = K^{(j,+\sigma^+)} \ (V^j \text{ 复数}). \tag{463}$$

现已清楚, 不同的情形 $\sigma^+ \geqslant {\sigma^+}_c, {\sigma^+}_c > \sigma^+ > {\sigma^+}_s$ 和 $\sigma^+ < {\sigma^+}_s$ 能完全如第 8 章 §75 中那样处理; 特别是, 超辐射现象同样自然地出现.

表 X 列出入射到 $a = 0.95$ 的克尔黑洞的不同频率引力波的反射和透射系数.

表 X 入射到 $a = 0.95$ 的克尔黑洞的引力波的反射和透射系数 $(l = 2, m = -2)$

σ^+	$\sigma^+/{\sigma^+}_s$	$\mathbb{R}$	σ^+	$\sigma^+/{\sigma^+}_s$	$\mathbb{R}$
0.50	0.6907	1.04422	0.77	1.0636	0.27057
0.55	0.7597	1.07031	0.78	1.0774	0.16754
0.60	0.8288	1.10693	0.79	1.0912	0.10007
0.65	0.8979	1.15358	0.80	1.1051	0.05844
0.70	0.9669	1.15101	0.81	1.1189	0.03372
0.73	1.0084	0.92530	0.82	1.1327	0.01932
0.74	1.0222	0.76882	0.83	1.1465	0.01103
0.75	1.0360	0.58828	0.84	1.1603	0.00628
0.76	1.0498	0.41376	0.85	1.1741	0.00357

(*a*) 用附有适当边界条件的楚科尔斯基方程的解表示 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$

首先记取 (见方程 (6))

和

$$\left.\begin{aligned}\Psi_0 = \Phi_0 &= R_{+2}S_{+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+ t+m\varphi)}\\ (\overline{\rho}^*)^4\Psi_4 = \Phi_4 &= R_{-2}S_{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+ t+m\varphi)},\end{aligned}\right\} \tag{464}$$

其中已恢复了依赖于 t 和 φ 的因子. 楚科尔斯基函数 R_{+2} 和 R_{-2} 又由下式联系着 $Y_{+2}^{(+\sigma^+)}$ 和 $Y_{-2}^{(-\sigma^+)}$ (见方程 (379)),

$$R_{+2} = \frac{(\varpi^2)^{3/2}}{\Delta^2}Y_{+2}^{(+\sigma^+)} \quad 和 \quad R_{-2} = (\varpi^2)^{3/2}Y_{-2}^{(-\sigma^+)}. \tag{465}$$

由于所有 4 个势都导致同样的反射和透射系数, 将不再用任何上标来区分解. 为避免混淆, 还将严格地限于势为复数和 $\sigma^+ > \sigma^+{}_s$ 的情形. 这种限制并不意味着对一般性的任何实质性丢失: 为允许 $\alpha^2 < 0$ 和实数势所需作的修改是很小的, 并且大多只是形式. 而且容易验证, 最后的结果不受影响. [518]

利用列于 §97(e) 的关系 (441) — (444), 由 $Z^{(+\sigma^+)}$ 的解有着方程 (446) 所给渐近行为时的变换理论方程 (412), 可写出 R_{+2} 和 R_{-2} 的解的渐近行为. 即有

$$\left.\begin{aligned}R_{+2} \to R_{+2}^{(\mathrm{inc})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r} + R_{+2}^{(\mathrm{ref})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r^5} &\quad (r\to\infty),\\ \to R_{+2}^{(\mathrm{trans})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{\Delta^2} &\quad (r\to r_+ + 0);\end{aligned}\right\} \tag{466}$$

和

$$\left.\begin{aligned}R_{-2} \to R_{-2}^{(\mathrm{inc})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*}}{r} + R_{-2}^{(\mathrm{ref})}r^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+ r_*} &\quad (r\to\infty),\\ \to R_{-2}^{(\mathrm{trans})}\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+ r_*} &\quad (r\to r_+ + 0);\end{aligned}\right\} \tag{467}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&R_{+2}^{(\mathrm{inc})} = -4\sigma^{+2}; \qquad R_{-2}^{(\mathrm{inc})} = -\frac{K^{(-\sigma^+)}}{4\sigma^{+2}},\\ &R_{+2}^{(\mathrm{ref})} = -\frac{K^{(+\sigma^+)}}{4\sigma^{+2}}A^{(+\sigma^+)}; \quad R_{-2}^{(\mathrm{ref})} = -4\sigma^{+2}A^{(-\sigma^+)},\\ &R_{+2}^{(\mathrm{trans})} = -4\frac{(\varpi_+^2)^{3/2}}{\sigma^+ - \sigma^+{}_s}\sigma^{+2}[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s) + 2i\varepsilon_0]B^{(+\sigma^+)};\\ &R_{-2}^{(\mathrm{trans})} = -\frac{K^{(-\sigma^+)}(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 B^{(-\sigma^+)}}{4(\varpi_+^2)^{5/2}\sigma^{+2}[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s) - 2i\varepsilon_0][(\sigma^+ - \sigma^+{}_s) - 4i\varepsilon_0]}.\end{aligned}\right\} \tag{468}$$

由上述关系现在可得

$$\left|\frac{R_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 = \frac{[K^{(+\sigma^+)}]^2|A^{(+\sigma^+)}|^2}{256\sigma^{+8}} \quad 和 \quad \left|\frac{R_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 = \frac{256\sigma^{+8}}{[K^{(-\sigma^+)}]^2}|A^{(-\sigma^+)}|^2, \tag{469}$$

或, 利用 $A^{(+\sigma^+)}$ 与 $A^{(-\sigma^+)}$ 的关系 (458),

$$\left|\frac{R_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 = \frac{|\mathscr{C}|^2}{256\sigma^{+8}}A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)} \quad 和 \quad \left|\frac{R_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 = \frac{256\sigma^{+8}}{|\mathscr{C}|^2}A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)}. \tag{470}$$

[519] 由方程 (447), 反射系数由下列二式之任一个给出:

$$\mathbb{R}=\frac{256\sigma^{+8}}{|\mathscr{C}|^2}\left|\frac{R_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 \quad \text{和} \quad \mathbb{R}=\frac{|\mathscr{C}|^2}{256\sigma^{+8}}\left|\frac{R_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2. \tag{471}$$

类似地, 对透射系数可得两个公式,

$$\mathbb{T}=|B^{(+\sigma^+)}|^2=\frac{\sigma^{+3}}{(2Mr_+)^3(\sigma^+-\sigma^+{}_s)[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+4\varepsilon_0^2]}\left|\frac{R_{+2}^{(\mathrm{trans})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2 \tag{472}$$

和

$$\mathbb{T}=|B^{(-\sigma^+)}|^2=\frac{(2Mr_+)^5}{\sigma^{+5}}(\sigma^+-\sigma^+{}_s)$$
$$[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+4\varepsilon_0^2][(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+16\varepsilon_0^2]\left|\frac{R_{-2}^{(\mathrm{trans})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}}\right|^2. \tag{473}$$

守恒律 (448) 现在要求

$$|R_{+2}^{(\mathrm{inc})}|^2=\frac{256\sigma^{+8}}{|\mathscr{C}|^2}|R_{+2}^{(\mathrm{ref})}|^2+\frac{\sigma^{+3}}{(2Mr_+)^3(\sigma^+-\sigma^+{}_s)[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+4\varepsilon_0^2]}|R_{+2}^{(\mathrm{trans})}|^2, \tag{474}$$

和

$$|R_{-2}^{(\mathrm{inc})}|^2=\frac{|\mathscr{C}|^2}{256\sigma^{+8}}|R_{-2}^{(\mathrm{ref})}|^2+\frac{(2Mr_+)^5}{\sigma^{+5}}$$
$$(\sigma^+-\sigma^+{}_s)[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+4\varepsilon_0^2][(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+16\varepsilon_0^2]|R_{-2}^{(\mathrm{trans})}|^2. \tag{475}$$

[520] 虽然已经严格地限于 $\alpha^2>0$ 和复数势, 但容易验证方程 (471) — (473) 事实上是不受限制地成立. 且可看到, 与由一维波动方程得到的一致, 有

$$T<0 \ \text{对} \ \sigma^+<\sigma^+{}_s, \tag{476}$$

即, 如所预期的有超辐射.

如 §76(a) 中那样, 可以利用从现在问题中同样得出的幺正性而写出反射和透射系数的另外表示. 寻找楚科尔斯基方程有着下列渐近行为的解,

$$\left.\begin{aligned} R_{+2}\to R_{+2}^{(\mathrm{inc})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+r_*}+R_{+2}^{(\mathrm{ref})}\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+r_*}}{\Delta^2} \quad & (r\to r_++0),\\ \to \qquad\qquad R_{+2}^{(\mathrm{trans})}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+r_*}}{r^5} \quad & (r\to\infty); \end{aligned}\right\} \tag{477}$$

和

$$\left.\begin{aligned} R_{-2}\to R_{-2}^{(\mathrm{inc})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+r_*}+R_{-2}^{(\mathrm{ref})}\Delta^2\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma^+r_*} \quad & (r\to r_++0),\\ \to \qquad\qquad R_{-2}^{(\mathrm{trans})}r^3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma^+r_*} \quad & (r\to\infty), \end{aligned}\right\} \tag{478}$$

可得

$$\mathbb{R} = \frac{|\mathscr{C}|^2}{256(2Mr_+)^8(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 4\varepsilon_0^2]^2[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 16\varepsilon_0^2]} \left| \frac{R_{+2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}} \right|^2,$$

$$= \frac{256}{|\mathscr{C}|^2}(2Mr_+)^8(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 4\varepsilon_0^2]^2[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 16\varepsilon_0^2] \left| \frac{R_{-2}^{(\mathrm{ref})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}} \right|^2 \tag{479}$$

和

$$\mathbb{T} = \frac{\sigma^{+5}}{(2Mr_+)^5(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 4\varepsilon_0^2][(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 16\varepsilon_0^2]} \left| \frac{R_{+2}^{(\mathrm{trans})}}{R_{+2}^{(\mathrm{inc})}} \right|^2$$

$$= (2Mr_+)^3[(\sigma^+ - \sigma^+{}_s)^2 + 4\varepsilon_0^2] \frac{\sigma^+ - \sigma^+{}_s}{\sigma^{+3}} \left| \frac{R_{-2}^{(\mathrm{trans})}}{R_{-2}^{(\mathrm{inc})}} \right|^2. \tag{480}$$

对史瓦西极限 ($a = 0$), 方程 (471) — (473)、(479) 和 (480) 所给的 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}$ 的表示简化为第 4 章中所给 (方程 (371)、(372)、(377) 和 (378)).

(b) 无穷远处辐射流的直接计算

仍待证实, 上面 §(a) 导出的反射和透射系数有着自然地归于它们的物理意义. 现在提出的问题比在第 8 章 §76(b) 中的要难一些: 现在对引力场没有像对电磁场那样唯一的和普遍适用的能量 – 动量张量定义. 但是, 如果背景时空是定常态和渐近平坦的, 那么对扰动的时空有若干途径来分离出这样的量, 它们具有可解释为引力能入射和反射流的必要物理意义. 相关严格处理所需的细节将会偏离本书的主题太远. 因此, 这里仅给出一个可由更仔细讨论支持的论证轮廓. [521]

可以证明, 由适当选择的规范, 即德东德 (de Donder) 或调和规范, 对闵可夫斯基时空线性化的爱因斯坦真空方程允许具有下列线元的平面波解,

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (1 - h_{11})(\mathrm{d}x^1)^2 - (1 + h_{11})(\mathrm{d}x^3)^2 + 2h_{31}\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^1, \tag{481}$$

其中由定义, h_{11} 和 h_{31} 是一阶小量, 是自变量 $x^0 \pm x^2$ 的函数:

$$h_{11} = h_{11}(x^0 \pm x^2) \quad \text{和} \quad h_{31} = h_{31}(x^0 \pm x^2); \tag{482}$$

也就是说, 该解表示向内 (+ 号) 或向外 (− 号) 传播的平面波. 的确, 由所选形式的度规, 用公式

$$\delta R_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 h_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 h_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + O(h^2) \tag{483}$$

计算的黎曼张量仅有的不为零分量是:

$$\left.\begin{aligned} &\delta R_{0303} = \delta R_{2323} = -\delta R_{0101} = -\delta R_{2121} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{11}, \\ &\delta R_{0301} = \delta R_{2321} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{31}, \\ &\delta R_{0323} = -\delta R_{0121} = \pm\frac{1}{2}\ddot{h}_{11}, \\ &\delta R_{2301} = \delta R_{0321} = \mp\frac{1}{2}\ddot{h}_{31}, \end{aligned}\right\} \tag{484}$$

其中的点号表示对自变量 $x^0 \pm x^2$ 求导; 恰当地收缩黎曼张量而得到里奇张量的分量, 发现它们全都为零, 从而证实由方程 (481) 和 (482) 定义的度规的确满足爱因斯坦真空方程.

现在来计算外尔标量 Ψ_0 和 Ψ_4, 属于解 (481), 关于零基 (见第 4 章方程 (333)),

$$\boldsymbol{l}^i = (1,0,1,0),\quad \boldsymbol{n}^i = \frac{1}{2}(1,0,-1,0) \text{ 和 } \boldsymbol{m}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,i,0,1). \tag{485}$$

[522] 对这个基有 (见第 4 章方程 (334))

$$\begin{aligned} \Psi_0 = &-\mathrm{i}(\delta R_{0301} + \delta R_{2321} + \delta R_{2301} + \delta R_{0321}) \\ &-\frac{1}{2}(\delta R_{0303} + 2\delta R_{0323} + \delta R_{2323} \\ &-\delta R_{0101} - 2\delta R_{0121} - \delta R_{2121}); \end{aligned} \tag{486}$$

从方程 (484) 代入黎曼张量的分量, 得

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_0 = 0 \text{ 对向外波} \\ \text{和}\quad &\Psi_0 = -2(\ddot{h}_{11} - \mathrm{i}\ddot{h}_{31}) \text{ 对向内波} \end{aligned}\right\} \tag{487}$$

类似地可得

$$\left.\begin{aligned} &\Psi_4 = -\frac{1}{2}(\ddot{h}_{11} + \mathrm{i}\ddot{h}_{31}) \text{ 对向外波} \\ \text{和}\quad &\Psi_4 = 0 \text{ 对向内波} \end{aligned}\right\} \tag{488}$$

可见 Ψ_0 仅对向内波不为零, 而 Ψ_4 仅对向外波不为零.

平面波,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma^+(x^0 \pm x^2)}, \tag{489}$$

具有的单位面积的能流是

$$\mathscr{F} = \frac{1}{4}\sigma^{+2}(|h_{11}|^2 + |h_{31}|^2). \tag{490}$$

用外尔标量作出的对向内和向外波能流的相应表示是

$$\mathscr{F}^{(\mathrm{in})} = \frac{1}{16\sigma^{+2}}|\Psi_0^{(\mathrm{in})}|^2 \quad 和 \quad \mathscr{F}^{(\mathrm{out})} = \frac{1}{\sigma^{+2}}|\Psi_4^{(\mathrm{out})}|^2. \tag{491}$$

上面的分析适用于平面波, 但也清楚地能适用于在渐近平坦区域沿径向向内 (入射方向) 或向外 (反射方向) 传播的球面波 (局域地). 于是, 代替方程 (490) 有

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{\sigma^{+2}}{16\pi}\operatorname*{limit}_{r\to\infty} r^2(|h_{11}|^2 + |h_{31}|^2) \tag{492}$$

用外尔标量作出的对入射和反射引力波能量的相应表示是

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{inc})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{64\pi\sigma^{+2}}\operatorname*{limit}_{r\to\infty} r^2|\Psi_0^{(\mathrm{inc})}|^2 \tag{493}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\sigma^{+2}}\operatorname*{limit}_{r\to\infty} r^2|\Psi_4^{(\mathrm{ref})}|^2. \tag{494}$$

现在对 Ψ_0 和 Ψ_4 有解 (见方程 (148)) [523]

和

$$\left.\begin{aligned}\Psi_0 &= R_{+2}S_{+2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+ t+m\varphi)}\\ 4(\overline{\rho}^*)^4\Psi_4 &= R_{-2}S_{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma^+ t+m\varphi)},\end{aligned}\right\} \tag{495}$$

其中角向函数 S_{+2} 和 S_{-2} 已归化为 1, 而 R_{+2} 和 R_{-2} 已相对归一化为与方程 (41) 和 (42) 一致, 这些完整知识是运用解 (495) 的首要条件.

由方程 (495) 所给的 Ψ_0 和 Ψ_4 的解, 方程 (493) 和 (494) 给出

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{inc})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{S_{+2}^2}{64\pi\sigma^{+2}}\operatorname*{limit}_{r\to\infty} r^2[R_{+2}^{(+\sigma^+)}R_{+2}^{(-\sigma^+)}] \tag{496}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{S_2^2}{64\pi\sigma^{+2}}\operatorname*{limit}_{r\to\infty} \frac{1}{r^6}[R_{-2}^{(+\sigma^+)}R_{-2}^{(-\sigma^+)}]. \tag{497}$$

方程 (466) 和 (467) 表明, 楚科尔斯基方程确实允许存在极限 (496) 和 (497) 的解. 由 (466) 和 (467) 中对系数 $R_{+2}^{(\mathrm{inc})}$ 和 $R_{-2}^{(\mathrm{ref})}$ 的定义, 现在的确能写出

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{inc})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{S_{+2}^2}{64\pi\sigma^{+2}}[R_{+2}^{(\mathrm{inc}+\sigma^+)}R_{+2}^{(\mathrm{inc}-\sigma^+)}] \tag{498}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{ref})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = \frac{S_{-2}^2}{64\pi\sigma^{+2}}[R_{-2}^{(\mathrm{ref}+\sigma^+)}R_{-2}^{(\mathrm{ref}-\sigma^+)}]. \tag{499}$$

代入方程 (468) 所列的系数 $R_{+2}^{(\mathrm{inc}+\sigma^+)}$ 等等, 由上述方程对角度积分后可得出反射系数

$$\mathbb{R} = A^{(+\sigma^+)}A^{(-\sigma^+)}, \tag{500}$$

与前面考虑 $Z^{(\pm\sigma^+)}$ 所满足的一维波动方程时导出的表示 (447) 一致.

(c) 穿过事件视界的能量流

可以相当一般地证明, 能够不带任何实质性的混淆, 为遍布于在定常态背景上扰动的时空的引力场定义一个守恒的能量 – 动量张量. 相应地, 由反射系数 $\mathbb{R}$ 表示引力能入射流被反射份额的事实可得结论, 与能量守恒要求 (448) 相符的透射系数 $\mathbb{T}$ 必须表示入射能量穿过事件视界并被黑洞吸收的份
[524] 额. 然而, 对已得到的穿过事件视界能流速率的表达式是与霍金面积定理 (见第 7 章 §65(d)) 相一致作出验证仍是重要的, 后者指的是穿过事件视界的能量流直接联系着视界面积增大的速率.

克尔黑洞视界的面积 Σ, 用其质量 M 和关于自转轴的角动量 $L_z(=aM)$ 来表示是

$$\Sigma = 4\pi(r_+^2 + a^2) = 8\pi[M^2 + \sqrt{M^4 - L_z^2}]. \tag{501}$$

于是, 面积的改变 $\mathrm{d}\Sigma$ 对质量改变 $\mathrm{d}M$ 和角动量改变 $\mathrm{d}L_z$ 的依赖关系是

$$\mathrm{d}\Sigma = \frac{8\pi}{\sqrt{M^4 - L_z^2}}\left\{2[M^2 + \sqrt{M^4 - L_z^2}]M\mathrm{d}M - L_z\mathrm{d}L_z\right\} \tag{502}$$

或

$$\mathrm{d}\Sigma = \frac{8\pi}{M\sqrt{M^2 - a^2}}(2M^2 r_+\mathrm{d}M - L_z\mathrm{d}L_z). \tag{503}$$

由于现在有 (见第 8 章方程 (253))

$$\mathrm{d}L_z = -m\mathrm{d}M/\sigma^+ \tag{504}$$

(负号是因为 $\mathrm{d}L_z$ 现在是表示黑洞而不是场的角动量改变), 由方程 (503) 可得

$$\mathrm{d}\Sigma = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}(1 - \sigma^+{}_s/\sigma^+)\mathrm{d}M, \tag{505}$$

其中 (见方程 (445))

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{4Mr_+}. \tag{506}$$

下面的 §(d) 将建立公式

$$\mathrm{d}\Sigma = \frac{2Mr_+}{\varepsilon_0}|\sigma_{r_+}^{HH}|^2, \tag{507}$$

其中 $\sigma^{HH}_{r_+}$ 表示霍金 – 哈特尔基的自旋系数 σ 在视界上的一阶扰动 (第 8 章方程 (243)). 将方程 (505) 和 (507) 结合得到, 与面积定理一致,

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{trans})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{Mr_+\sigma^+}{2\pi(\sigma^+-{\sigma^+}_s)}|\sigma^{HH}_{r_+}|^2. \tag{508}$$

现在计算 $\sigma^{HH}_{r_+}$, 途径是将里奇恒等式 (第 1 章方程 (310,b), 另见方程 (3))

$$D\sigma-\delta\kappa=\sigma(\widetilde{\rho}+\widetilde{\rho}^*+3\varepsilon-\varepsilon^*)-\kappa(\tau-\pi^*+\alpha^*+3\beta)+\Psi_0, \tag{509}$$

在霍金 – 哈特尔基中, 并运用到视界上来考虑. 由于霍金 – 哈特尔基是通过对 [525]
标准基 (第 6 章 (170)) 施加一个有参量 $A=2(r^2+a^2)/\Delta$ 的 Ⅲ 类旋转得到的, 由第 1 章方程 (347) 可得

$$\varepsilon^{HH}=-\frac{1}{2}A^{-2}DA=\frac{1}{2}DA^{-1}=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\Delta}{r^2+a^2}, \tag{510}$$

(由于在原始基中 $\varepsilon=0$). 所以, 在视界上,

$$\varepsilon^{HH}_{r_+}=\frac{r_+-M}{2(r_+^2+a^2)}=\frac{\sqrt{M^2-a^2}}{4Mr_+}=\varepsilon_0. \tag{511}$$

在视界上 $\widetilde{\rho}^{HH}$ 为零, 而按定义有 $\kappa=0$. 于是得到方程

$$D^{HH}_{r_+}\sigma^{HH}_{r_+}=2\varepsilon_0\sigma^{HH}_{r_+}+(\Psi_0^{HH})_{r_+}. \tag{512}$$

另一方面, 在视界上 (见第 8 章方程 (250) 和 (252)),

$$D^{HH}_{r_+}=\mathrm{i}\sigma^+ +\mathrm{i}\frac{am}{2Mr_+}=\mathrm{i}(\sigma^+-{\sigma^+}_s). \tag{513}$$

所以,

$$\sigma^{HH}_{r_+}=\frac{(\Psi_0^{HH})r_+}{\mathrm{i}[(\sigma^+-{\sigma^+}_s)+2\mathrm{i}\varepsilon_0]}. \tag{514}$$

还有

$$(\Psi_0^{HH})_{r_+}=\left[\frac{\Delta^2}{4(r^2+a^2)^2}\Psi_0\right]_{r_+}=\frac{(\Delta^2\Psi_0)_{r_+}}{4(2Mr_+)^2}. \tag{515}$$

将表示式 (514) 和 (515) 代入方程 (508), 得

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{trans})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{64\pi}\frac{1}{(2Mr_+)^3[(\sigma^+-{\sigma^+}_s)^2+4\varepsilon_0^2]}\frac{\sigma^+}{(\sigma^+-{\sigma^+}_s)}|\Delta^2\Psi_0|^2_{r_+}. \tag{516}$$

将 Ψ_0 的解代入, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{trans})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{S^2_{+2}}{64\pi}\frac{1}{(2Mr_+)^3[(\sigma^+-{\sigma^+}_s)^2+4\varepsilon_0^2]}\frac{\sigma^+}{(\sigma^+-{\sigma^+}_s)}|\Delta^2R_{+2}|^2_{r_+}, \tag{517}$$

或者, 将解 R_{+2} 在视界上的渐近行为用 (466) 中的方式表示, 最后得到

$$\frac{\mathrm{d}^2E^{(\mathrm{trans})}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}=\frac{S_{+2}^2}{64\pi}\frac{1}{(2Mr_+)^3[(\sigma^+-\sigma^+{}_s)^2+4\varepsilon_0^2]}\frac{\sigma^+}{(\sigma^+-\sigma^+{}_s)}|R_{+2}^{(\mathrm{trans})}|^2. \tag{518}$$

对应于方程 (498) 所给的入射能流, 方程 (518) 提供了透射系数的表示式, 与较早导出的表示式 (472) 相一致.

[526] 对 §(*a*) 导出的反射和透射系数有着应归于它们的物理意义的证实现已完成.

(*d*) 霍金 – 哈特尔公式

霍金 – 哈特尔公式 (507) 由第 1 章 §9(*a*) 中考虑的光学标量方程得出.

记得自旋系数 $\widetilde{\rho}$ 和 σ 量度零迭合 $\boldsymbol{l}$ 的收缩和切变. 如果迭合还是短程的, 则 $\kappa=0$, 而里奇恒等式第 1 章方程 (310, a) 给出

$$D\widetilde{\rho}=(\widetilde{\rho}^2+|\sigma|^2)+(\varepsilon+\varepsilon^*)\widetilde{\rho}. \tag{519}$$

在霍金 – 哈特尔基中和视界上来考虑这个方程. 由于本节将严格地限于这个基, 故不再如上节那样用上标 "HH" 来区别出各个量.

在视界上 $\varepsilon=\varepsilon_0=$ 常量 (由对克尔黑洞的方程 (511) 给出), 方程 (519) 给出

$$D\widetilde{\rho}=(\widetilde{\rho}^2+|\sigma|^2)+2\varepsilon_0\widetilde{\rho}, \tag{520}$$

其中 $D=\mathrm{d}/\mathrm{d}v$ (如同第 8 章方程 (242) 中).

由于 $\widetilde{\rho}$ 和 σ 在定常态都在视界上为零, 方程 (520) 线性化到扰动的一阶给出

$$D\widetilde{\rho}^{(1)}=2\varepsilon_0\widetilde{\rho}^{(1)}. \tag{521}$$

此方程唯一可采纳的解是

$$\widetilde{\rho}^{(1)}=0, \tag{522}$$

因为 $\widetilde{\rho}^{(1)}$ (和 $\sigma^{(1)}$) 对转动黑洞而言必定对 v 是周期性的, 而方程 (521) 不允许这样的解. 于是就必须考虑方程 (520) 的二阶展开, 即有

$$D\widetilde{\rho}^{(2)}=|\sigma^{(1)}|^2+\varepsilon_0\widetilde{\rho}^{(2)}. \tag{523}$$

将这个方程的解写为

$$\widetilde{\rho}^{(2)}=-\int_v^\infty \mathrm{e}^{2\varepsilon_0(v-v')}|\sigma^{(1)}(v')|^2\mathrm{d}v', \tag{524}$$

与 $\widetilde{\rho}^{(2)}$ 在最后状态为零的要求一致. 另一方面, 如果 $\mathrm{d}\Sigma$ 是视界的面元, 它的变化率由从它发出的零迭合的收缩决定, 就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}\Sigma = -2\widetilde{\rho}^{(2)}\mathrm{d}\Sigma, \tag{525}$$

或 [527]

$$\lg\left[\frac{\mathrm{d}\Sigma(v_1)}{\mathrm{d}\Sigma(0)}\right] = -2\int_0^{v_1}\widetilde{\rho}^{(2)}(v)\mathrm{d}v. \tag{526}$$

代入 $\widetilde{\rho}^{(2)}$ 的解 (524), 得

$$\lg\left[\frac{\mathrm{d}\Sigma(v_1)}{\mathrm{d}\Sigma(0)}\right] = 2\int_0^{v_1}\mathrm{d}v\int_v^{\infty}\mathrm{d}v'|\sigma^{(1)}(v')|^2\mathrm{e}^{2\varepsilon_0(v-v')}, \tag{527}$$

或, 倒转积分顺序, 有

$$\begin{aligned}\lg\left[\frac{\mathrm{d}\Sigma(v_1)}{\mathrm{d}\Sigma(0)}\right] = {} & 2\int_0^{v_1}\mathrm{d}v'|\sigma^{(1)}(v')|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0 v'}\int_0^{v'}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{2\varepsilon_0 v}. \\ & +2\int_{v_1}^{\infty}\mathrm{d}v'|\sigma^{(1)}(v')|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0 v'}\int_0^{v_1}\mathrm{d}v\mathrm{e}^{2\varepsilon_0 v}.\end{aligned} \tag{528}$$

对 v 积分后得到

$$\begin{aligned}\lg\left[\frac{\mathrm{d}\Sigma(v_1)}{\mathrm{d}\Sigma(0)}\right] = {} & \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{v_1}(1-\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0 v})|\sigma^{(1)}(v)|^2\mathrm{d}v \\ & +\frac{1}{\varepsilon_0}(\mathrm{e}^{2\varepsilon_0 v_1}-1)\int_{v_1}^{\infty}|\sigma^{(1)}(v)|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon_0 v}\mathrm{d}v.\end{aligned} \tag{529}$$

如卡特指出的, 此式右边第二项 "具有目的论 (与因果论对立) 的特征: 它显示, 视界在从 0 到 v_1 的时间间隔的行为取决于在时间 v_1 之后发生了什么." 又如卡特解释的,"这个古怪的特征是由于这样一种目的论方式, 即把黑洞定义为光不能从中逃逸到无穷远处的区域: 它产生于局域信息决不能保证逃逸可能性的事实." 这里且消去目的论项, 办法是假设

$$|\sigma^{(1)}(v)|^2 = 0 \quad \text{对} \quad v > v_1 \quad \text{和} \quad v_1 \gg 1/2\varepsilon_0. \tag{530}$$

于是方程 (529) 简化为

$$\lg\left[\frac{\mathrm{d}\Sigma(v_1)}{\mathrm{d}\Sigma(0)}\right] \simeq \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{v_1}|\sigma^{(1)}(v)|^2\mathrm{d}v. \tag{531}$$

如果再进一步假定 $\Sigma(v)$ 在 $(0, v_1)$ 间隔的变化很小, 可写出在此限制下有

$$\delta(\mathrm{d}\Sigma) = \frac{\mathrm{d}\Sigma}{\varepsilon_0}\int_0^{v_1}|\sigma^{(1)}(v)|^2\mathrm{d}v, \tag{532}$$

或等价地, 对克尔黑洞,

$$\frac{\mathrm{d}^2\Sigma}{\mathrm{d}v\mathrm{d}\Omega} = \frac{2Mr_+}{\varepsilon_0}|\sigma^{(1)}(v)|^2, \tag{533}$$

[528] 这就是要建立的公式. 值得注意, 这个公式 (它的建立需要这么多精细的推理) 是隐含在 §(*a*) 直接导致反射和透射系数的分析中.

99. 克尔黑洞的准正则模式

在第 4 章 (§35) 和第 5 章 (§48) 已经考虑了史瓦西和雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的准正则模式. 如已说明的, 这些模式决定着扰动黑洞纯粹的死亡音调. 这样的模式显然对克尔黑洞也存在, 它们已由德特维勒确定. 由德特维勒确定的准正则模式特征频率的实部和虚部示于图 45.

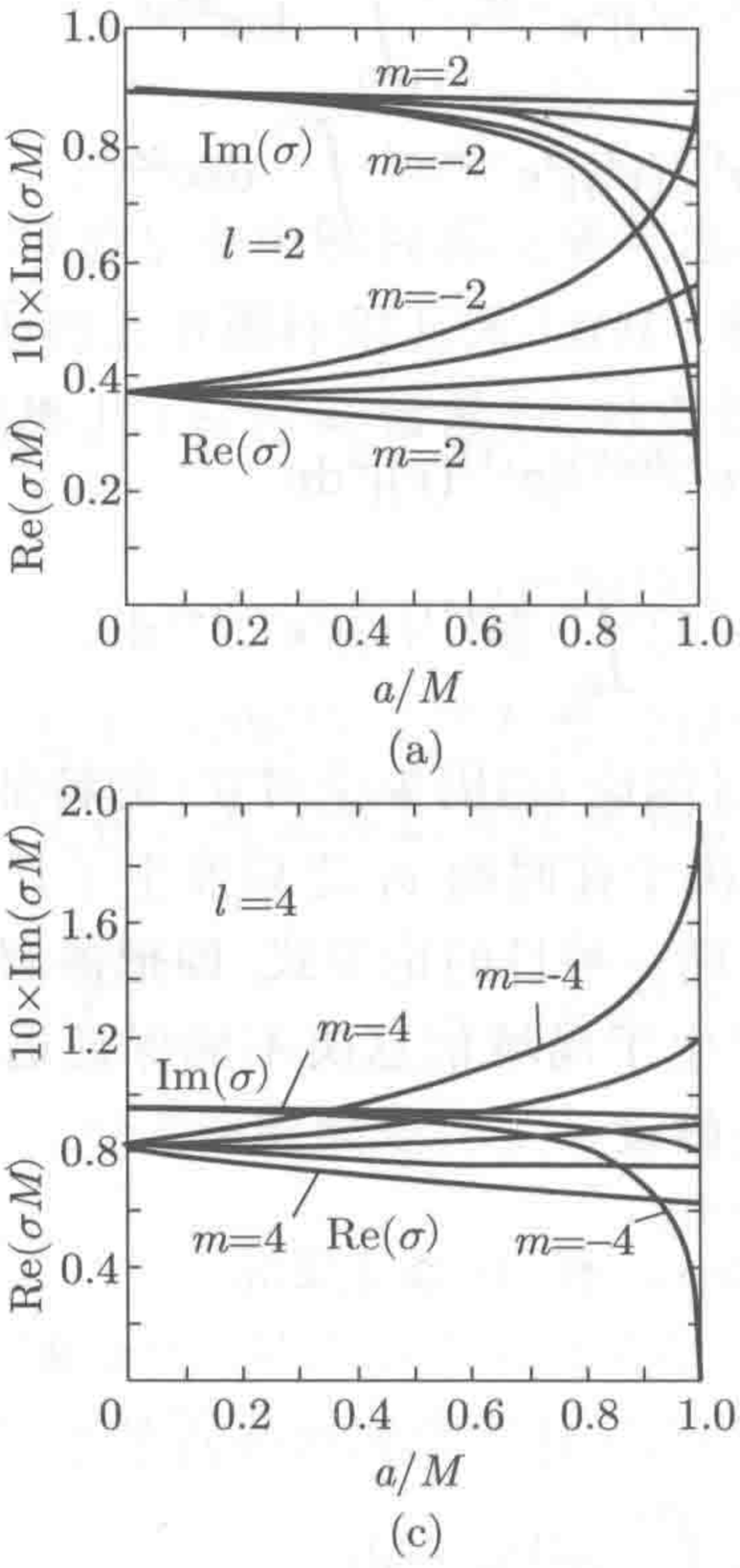


图 45 克尔黑洞共振频率的实部和虚部作为参量 a 的函数, 对 l 和 m 的不同值. (a) $l=2$ 的情形; 对 m 在 -2 和 2 之间的所有值. (b) $l=3$ 的情形; 虚部只对 $m=-3$、0 和 3 绘出. (c) $l=4$ 的情形; 实部只对 m 的偶数值绘出, 虚部只对 $m=-4$、0 和 4 绘出.

100. 最后的观察 [529]

本章对克尔时空扰动的复杂处理已经显得冗长. 或许在将来, 这个复杂性会被更深刻的洞察解开. 而现在的分析则已进入了洛可可式的王国: 壮观、可喜、极为华丽.

文献注释

是楚科尔斯基对支配外尔标量的纽曼 – 彭罗斯形式方程的解耦和分离将克尔黑洞扰动问题带到了可实行处理的领域:

1. S. A. Teukolsky, *Phys. Rev. Lett.*, 29, 1114–8 (1972).

2. ——, *Astrophys. J.*, 185, 635–49 (1973).

3. W. H. Press and S. A. Teukolsky, ibid., 649–73 (1973).

4. S. A. Teukolsky and W. H. Press, ibid., 193, 443–61 (1974).

对本书所称的楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式的表述是在文献 4 和:

5. A. A. Starobinsky and S. M. Churilov, *Zh. Exp. i. Teoret. Fiz.*, 65, 3–8 (1973); translated in *Soviet Phys. JETP*, 38, 1–5 (1973).

§79 — §96. 这些节的分析完全来自:

6. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 358, 421–39 (1978).

7. ——, ibid., 441-65 (1978).

8. ——, ibid., 365, 425–51 (1979).

9. ——, ibid., 372, 475–84 (1980).

本书对理论的陈述比原始文献所可能做的更为紧凑, 因为在写那些论文时并不能一开始就知道结尾. 但是却不可能对分析的复杂性作出实质程度的简化: 它看来是问题所固有的.

§97. 本节讲述的变换理论主要来自:

10. S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc (London)* A, 345, 145–67 (1975).

11. ——, ibid, 350, 166–74 (1976).

另见:

12. S. Chandrasekhar in *General Relativity—An Einstein Centenary survey*, chapter 7, 371–91, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979.

§98(*b*). 对平直闵可夫斯基时空线性化的爱因斯坦真空方程解在所有相对论教科书中都会讲到. 最有吸引力的处理是在:

13. H. P. Robertson and T. W. Noonan, *Relativity and Cosmology*, 255–62, W. B. Saunders and Co., Philadelphia, 1968.

对相关微妙问题的更细致讨论见:

14. A. Trautman, *Lectures on General Relativity*, mimeographed notes, Kings College, London, 1958.

15. A. Trautman, *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences*, 6, 407–12 (1958).

[530] 另见:

16. F. H. J. Cornish, *Rroc. Roy. Soc.(London)* A, 282, 358–71 (1964).

17. ——, ibid., 372–9 (1964).

§98(c). 本节的论证主要地跟随文献 4.

§98(d). 关于霍金 – 哈特尔定理的基本文献是:

18. S. W. Hawking and J. B. Hartle, *Commun. Math. Phys.*, 27, 283–90 (1972).

19. J. B. Hartle, *Phys. Rev. D*, 8, 1010–24 (1973).

20. ——, ibid., 9, 2749–59 (1974).

本书的讲述取自:

21. B. Carter in *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, 310–2, edited by S. W. Hawking and W. Israel, Cambridge, England, 1979.

§99. 克尔黑洞准正则模式的复数特征频率由德特维勒确定:

22. S. Detweiler, *Astrophys. J.*, 239, 292–5 (1980).

另见:

23. S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 352, 381–95 (1977).

24. ——, *Astrophys. J.*, 225, 687–93 (1978).

25. —— and E. Szedenits, Jr., ibid., 231, 211–8 (1979).

26. —— in *Sources of Gravitational Radiation*, 211–30, edited by L. Smarr, Gambridge, England, 1979.

本章中已经努力以易于理解和合乎逻辑的顺序来讲述数学进展. 但是进展的实质却简单地不允许所作讲述能在一定的努力后就被详细地接受: 从这一步到下一步所需要的推演常常极为复杂, 有时要有多达十页、二十页、甚至五十页的篇幅. 如果有读者愿意对整个进展作仔细检查, 那么本书作者的推导 (大约 600 页标准尺寸的纸和另外 6 本笔记) 已经保存在芝加哥大学的 Joseph Regenstein 图书馆里.

第十章

克尔几何中自旋为 1/2 的粒子

101. 引言

[531]

关于克尔几何中波传播的考虑迄今限于电磁波和引力波, 二者都没有质量、具有整数自旋 (1 和 2). 现在转到对自旋为 1/2 的场的考虑, 包括有质量和无质量的, 诸如电子和二分量中微子. 在数学方面, 对这些场的兴趣主要来自克尔几何中狄拉克方程的可分离性. 而在物理方面, 兴趣则是来自自旋 1/2 波显示的超辐射缺失.

由于写出狄拉克方程的最令人满意的方式是在旋量形式的框架内, 这里首先在本书所需的程度上对旋量分析和纽曼 – 彭罗斯形式的旋量基作简要叙述.

102. 旋量分析和纽曼 – 彭罗斯形式的旋量基

旋量概念源于这样的观察, 即闵可夫斯基空间的四矢量能由厄米矩阵等价地表示, 且复数二维空间的幺模变换 (见下面方程 (10) 和 (11)) 导致闵可夫斯基空间的洛伦兹变换.

考虑闵可夫斯基空间的一个点 $x^i(i=0,1,2,3)$, 设

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=0. \tag{1}$$

现在将点 (x^i) 用二个复数 ξ^0、ξ^1 (比如说) 和它们的共轭 $\overline{\xi}^{0'}$、$\overline{\xi}^{1'}$ 以下列方式表示,

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{0'} + \xi^1\overline{\xi}^{1'}),\\ x^1 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{1'} + \xi^1\overline{\xi}^{0'}),\\ x^2 &= -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{1'} - \xi^1\overline{\xi}^{0'}),\\ x^3 &= +\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi^0\overline{\xi}^{0'} - \xi^1\overline{\xi}^{1'}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

[532] 反之有

$$\left.\begin{aligned} \xi^0\overline{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^3); \quad \xi^0\overline{\xi}^{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + \mathrm{i}x^2),\\ \xi^1\overline{\xi}^{0'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 - \mathrm{i}x^2); \qquad \xi^1\overline{\xi}^{1'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^3). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

由这些方程,

$$\begin{aligned} (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 &= (x^0 + x^3)(x^0 - x^3) - (x^1 + \mathrm{i}x^2)(x^1 - \mathrm{i}x^2)\\ &= 2(\xi^0\overline{\xi}^{0'}\xi^1\overline{\xi}^{1'} - \xi^0\overline{\xi}^{1'}\xi^1\overline{\xi}^{0'}) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

所以, 表示 (2) 保证了它是闵可夫斯基空间零线上的一个点, 该零线连接原点与点 (x^i); 该式还保证了光线是指向将来的, 因为按这个表示 x^0 必定是正的.

现在令

$$\xi_*{}^A = \alpha^A{}_B\xi^B \ \text{ 和 } \ \overline{\xi}_*{}^{A'} = \overline{\alpha}^{A'}{}_{B'}\overline{\xi}^{B'} \quad (A, B, A', B' = 0, 1) \tag{5}$$

表示复数二位空间 (ξ^0, ξ^1) 和 $(\overline{\xi}^{0'}, \xi^{1'})$ 的线性变换, 其中 $(\alpha^A{}_B)$ 和 $(\overline{\alpha}^{A'}{}_{B'})$ 是两个复数共轭矩阵. 由按等式 (2) 方式用 $\xi_*{}^A$ 和 $\overline{\xi}_*{}^{A'}$ 定义的 $x_*{}^i$, 线性变换 (5) 导致闵可夫斯基空间的线性变换,

$$x_*{}^i = \beta^i{}_j x^j, \tag{6}$$

其中系数 $\beta^i{}_j$ 由 α 和 $\overline{\alpha}$ 的双线性组合给出. 现在来寻找变换 (5) 为保证所导致的闵可夫斯基空间变换 (6) 是洛伦兹型应具的条件.

由变换 (5), 特别地有

$$\begin{aligned} x_*{}^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^0{}_0\xi^0 + \alpha^0{}_1\xi^1)(\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}\overline{\xi}^{0'} + \overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}\overline{\xi}^{1'})\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^1{}_0\xi^0 + \alpha^1{}_1\xi^1)(\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'}\overline{\xi}^{0'} + \overline{\alpha}^{1'}{}_{1'}\overline{\xi}^{1'})\\ &= \frac{1}{2}(\alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'} + a^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'})(x^0 + x^3)\\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'} + \alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'})(x^0 - x^3) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(\alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}+\alpha^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'})(x^1+\mathrm{i}x^2)$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}+\alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'})(x^1-\mathrm{i}x^2). \tag{7}$$

所以, [533]

$$\left.\begin{aligned}
&\beta^0{}_0+\beta^0{}_3=\alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}+\alpha^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'},\\
&\beta^0{}_0-\beta^0{}_3=\alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}+\alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'},\\
&\beta^0{}_1-\mathrm{i}\beta^0{}_2=\alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}+\alpha^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'},\\
&\beta^0{}_1+\mathrm{i}\beta^0{}_2=\alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}+\alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'}.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

变换 (6) 是洛伦兹型的要求 (特别地) 是

$$(\beta^0{}_0)^2-(\beta^0{}_1)^2-(\beta^0{}_2)^2-(\beta^0{}_3)^2=1. \tag{9}$$

由方程 (8), 这个条件要求

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{matrix}\alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}+\alpha^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'} & \alpha^0{}_0\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}+\alpha^1{}_0\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'}\\ \alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'}+\alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{0'} & \alpha^0{}_1\overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}+\alpha^1{}_1\overline{\alpha}^{1'}{}_{1'}\end{matrix}\right\|\\
&=\left\|\begin{matrix}\alpha^0{}_0 & \alpha^0{}_1\\ \alpha^1{}_0 & \alpha^1{}_1\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\overline{\alpha}^{0'}{}_{0'} & \overline{\alpha}^{0'}{}_{1'}\\ \overline{\alpha}^{1'}{}_{0'} & \overline{\alpha}^{1'}{}_{1'}\end{matrix}\right\|=\Delta\overline{\Delta}=1,
\end{aligned} \tag{10}$$

其中 Δ 和 $\overline{\Delta}$ 表示变换 (5) 的行列式. 于是, 变换 (5) 为洛伦兹变换的必要条件是其行列式的模为 1, 即幺模; 这个条件显然也是充分的. 在下面的考虑中将假定

$$\Delta=\overline{\Delta}=1, \tag{11}$$

即限于有着单位行列式的变换. 这些变换 (它们维持时间方向) 清楚地包括除反射外的所有洛伦兹变换. 而通过包括已有变换的负变换, 能够获得所有的洛伦兹变换.

现在定义 1 秩旋量 ξ^A 和 $\eta^{A'}$ 为二维空间 $(A,A'=0,1)$ 的复数矢量, 服从变换

$$\xi_*{}^A=\alpha^A{}_B\xi^B \quad 和 \quad \eta_*{}^{A'}=\overline{\alpha}^{A'}{}_{B'}\eta^{B'} \quad (A,A',B,B'=0,1), \tag{12}$$

其中 $(\alpha^A{}_B)$ 和 $(\overline{\alpha}^{A'}{}_{B'})$ 是复数共轭矩阵, 有着单位行列式:

$$\|\alpha^A{}_B\|=\|\overline{\alpha}^{A'}{}_{B'}\|=1. \tag{13}$$

重要的是区分两类旋量: 不带撇号的和带撇号的, 它们服从复数共轭变换. 而且对旋量指标用大写拉丁字母.

如果 ξ^A 和 η^A 是两个同类旋量, 那么它们的行列式,

$$\begin{Vmatrix} \xi^0 & \xi^1 \\ \eta^0 & \eta^1 \end{Vmatrix} = \xi^0\eta^1 - \xi^1\eta^0, \tag{14}$$

[534] 对幺模变换是不变的. 因此可以对空间定义挠度规 ε_{AB}, 致有

$$\varepsilon_{AB}\xi^A\eta^A \text{ 不变.} \tag{15}$$

与 (14) 式比较可得

$$\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0 \text{ 和 } \varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1; \tag{16}$$

即 ε_{AB} 是二维的莱维 – 齐维塔 (Levi-Civita) 符号. 当然可以类似地对带撇号旋量定义度规 $\varepsilon_{A'B'}$, 它也是莱维 – 齐维塔符号.

如在张量分析中那样, 可以用度规 ε_{AB} 和 $\varepsilon_{A'B'}$ 来降低旋量指标, 即

$$\xi_A = \xi^C\varepsilon_{CA}, \tag{17}$$

或, 明晰地,

$$\xi_0 = -\xi^1 \text{ 和 } \xi_1 = \xi^0. \tag{18}$$

相应地, 指标也能用莱维 – 齐维塔符号 ε^{AB} 来提升,

$$\xi^A = \varepsilon^{AC}\xi_C. \tag{19}$$

鉴于 ε^{AC} 和 ε_{CA} 的反对称性, 重要的是维持方程 (17) 和 (19) 中指标对于被收缩指标的次序. 由于

$$\xi_A = \xi^C\varepsilon_{CA} = \varepsilon^{CB}\xi_B\varepsilon_{CA}, \tag{20}$$

可得

$$\delta^B_A = \varepsilon^{CB}\varepsilon_{CA} = \varepsilon_A{}^B = -\varepsilon^B{}_A. \tag{21}$$

当然也清楚, 对带撇号指标的旋量可以得出指标带撇号的同样公式 (17) — (21).

如在张量分析中那样, 能构造更高秩的旋量,

$$\xi^{AB}, \quad \xi_{AB'C}, \quad \xi_{ABC'}{}^{D'E}{}_{F'G}, \text{ 等等,} \tag{22}$$

它们有着适当的变换性质, 如

$$\xi^{AB'}_* = \alpha^A{}_C\overline{\alpha}^{B'}{}_{D'}\xi^{CD'}. \tag{23}$$

重要的是看到, 虽然每类指标的次序是有意义和必须维持的, 但带撇号和不带撇号指标的相对次序却是无关紧要的.

再次如张量分析中那样, 旋量对于一对带撇号或不带撇号指标的收缩可由度规 ε_{AB} 或 $\varepsilon_{A'B'}$ 来实现; 但是一个带撇号和一个不带撇号指标的收缩当然是被禁止的. 也就是有,

$$\xi_{A'}{}^{A'} = \varepsilon^{A'B'}\xi_{A'B'}. \tag{24}$$

另一方面, [535]

$$\xi^{A'}{}_{A'} = \varepsilon^{A'B'}\xi_{B'A'}. \tag{25}$$

所以,

$$\xi_{A'}{}^{A'} = -\xi^{A'}{}_{A'}. \tag{26}$$

特别地,

$$\xi_{A'}\xi^{A'} = 0. \tag{27}$$

方程 (26) 是下面彭罗斯 "跷跷板" 之一例,

$$\xi^{\cdots A\cdots}{}_{\cdots A\cdots} = -\xi^{\cdots}{}_{A}{}^{\cdots}{}_{\cdots}{}^{A}{}_{\cdots}. \tag{28}$$

(a) 用旋量表示矢量和张量

方程 (2) 和 (3) 提供了用一对复数共轭旋量 ξ^A 和 $\overline{\xi}^{A'}$ 对位置矢量 x^i 的表示, 即

$$x^i \leftrightarrow \begin{vmatrix} \xi^0\overline{\xi}^{0'} & \xi^0\overline{\xi}^{1'} \\ \xi^1\overline{\xi}^{0'} & \xi^1\overline{\xi}^{1'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ x^1 - \mathrm{i}x^2 & x^0 - x^3 \end{vmatrix}. \tag{29}$$

相当一般地, 可将任何四矢量 X^i 与二秩旋量 $\xi^{AB'}$ 按以下方式联系,

$$X^i \leftrightarrow \begin{vmatrix} \xi^{00'} & \xi^{01'} \\ \xi^{10'} & \xi^{11'} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + \mathrm{i}X^2 \\ X^1 - \mathrm{i}X^2 & X^0 - X^3 \end{vmatrix} = X^{AB'} \text{ (比如说)}. \tag{30}$$

于是, 一个四矢量可联系于一个厄米矩阵.

与四矢量相关的不变量是

$$\begin{aligned} &(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 = (X^0 + X^3)(X^0 - X^3) \\ &\quad -(X^1 + \mathrm{i}X^2)(X^1 - \mathrm{i}X^2) \\ &= 2(\xi^{00'}\xi^{11'} - \xi^{01'}\xi^{10'}) \\ &= (\xi^{00'}\xi_{00'} + \xi_{11'}\xi^{11'} + \xi_{10'}\xi^{10'} + \xi^{01'}\xi_{01'}) \\ &= X_{AB'}X^{AB'}; \end{aligned} \tag{31}$$

或, 用闵可夫斯基和旋量空间的度规 g_{ij}、ε_{AB} 和 $\varepsilon_{A'B'}$ 表示,

$$g_{ij}X^iX^j = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{B'D'}X^{AB'}X^{CD'}. \tag{32}$$

关系

$$X^i \leftrightarrow X^{AB'}, \tag{33}$$

现在表示为

$$X^i = \sigma^i{}_{AB'}X^{AB'}, \tag{34}$$

[536] 或逆形式,

$$X^{AB'} = \sigma^{AB'}{}_iX^i, \tag{35}$$

其中 $\sigma^i{}_{AB'}$ 和 $\sigma^{AB'}{}_i$ 对每个 i 是常数厄米矩阵. 作为上述定义的立即结果的关系是

和

$$\left.\begin{aligned}\sigma^{AB'}{}_i\sigma^i{}_{CD'} &= \delta^A_C\delta^{B'}_{D'},\\ \sigma^i{}_{AB'}\sigma_j{}^{AB'} &= \delta^i_j.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

最后, 由方程 (32) 和 (35) 推得

$$g_{ij} = \varepsilon_{AC}\varepsilon_{B'D'}\sigma^{AB'}{}_i\sigma^{CD'}{}_j \tag{37}$$

和

$$\varepsilon_{AC}\varepsilon_{B'D'} = g_{ij}\sigma^i{}_{AB'}\sigma^j{}_{CD'}. \tag{38}$$

值得注意, 由表示式 (29) 定义的矩阵 $\sigma^i{}_{AB'}$ 和 $\sigma^{AB'}{}_i$ 是

$$\sigma^{AB'}{}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad \sigma^{AB'}{}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},\quad \sigma^{AB'}{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{vmatrix},$$
$$\sigma^{AB'}{}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} \tag{39}$$

和

$$\sigma^0{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\quad \sigma^1{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix},$$
$$\sigma^2{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{vmatrix}, \sigma^3{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}. \tag{40}$$

可见, 除了归一化因子 $1/\sqrt{2}$ 外, $\sigma^1{}_{AB'}$、$\sigma^2{}_{AB'}$ 和 $\sigma^3{}_{AB'}$ 是泡利 (Pauli) 自旋矩阵.

现在可以用 σ 矩阵将任意阶的张量与其旋量对应物联系起来, 即有

$$\left.\begin{aligned} Y_k^{ij} &= \sigma^i{}_{AB'}\sigma^j{}_{CD'}\sigma_k{}^{EF'}Y^{AB'CD'}{}_{EF'} \\ Y^{AB'CD'}{}_{EF'} &= \sigma^{AB'}{}_i\sigma^{CD'}{}_j\sigma^k{}_{EF'}Y^{ij}{}_k. \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

和

由这些关系, 有对应

$$Y^{AB'CD'}{}_{EF'} \leftrightarrow Y^{ij}{}_k. \quad (42)$$

在此意义上, 方程 (38) 表示对应

$$\varepsilon_{AC}\varepsilon_{B'D'} \leftrightarrow g_{ij}. \quad (43)$$

(*b*) 彭罗斯用 "旗" 作为旋量 ξ^A 的图画表示 [537]

用旋量 ξ_A 及其复数共轭 $\overline{\xi}_{B'}$ 来考虑零矢量 u_i 和它的旋量表示 $U_{AB'}$:

$$u_i \leftrightarrow U_{AB'} = \xi_A\overline{\xi}_{B'}. \quad (44)$$

(u_i 是零矢量, 因为由方程 (27) 有 $u_iu^i = \xi_A\overline{\xi}_{B'}\xi^A\overline{\xi}^{B'} = 0$.) (45)

令 η_A 为具有下面性质的相关旋量,

$$\xi_A\eta^A = \varepsilon^{AB}\eta_B\xi_A = \xi_0\eta_1 - \xi_1\eta_0 = 1. \quad (46)$$

进一步令

$$w_i \leftrightarrow W_{AB'} = \xi_A\overline{\eta}_{B'} + \eta_A\overline{\xi}_{B'}; \quad (47)$$

并考虑反对称张量

$$p_{ij} = u_iw_j - u_jw_i. \quad (48)$$

p_{ij} 的旋量表示是

$$\begin{aligned} P_{AB'CD'} &= \xi_A\overline{\xi}_{B'}(\xi_C\overline{\eta}_{D'} + \eta_C\overline{\xi}_{D'}) - \xi_C\overline{\xi}_{D'}(\xi_A\overline{\eta}_{B'} + \eta_A\overline{\xi}_{B'}) \\ &= \xi_A\xi_C(\overline{\xi}_{B'}\overline{\eta}_{D'} - \overline{\xi}_{D'}\overline{\eta}_{B'}) + \overline{\xi}_{B'}\overline{\xi}_{D'}(\xi_A\eta_C - \xi_C\eta_A). \end{aligned} \quad (49)$$

另一方面,

$$\xi_A\eta_C - \eta_A\xi_C = \varepsilon_{AC}, \quad (50)$$

因为左边对 A 和 C 是反对称的, 且由假定 (46), 它按照 (A、C) 对是 (0、1) 或 (1、0) 而分别取值 $+1$ 或 -1. 相应地, $P_{AB'CD'}$ 有等价形式

$$P_{AB'CD'} = \xi_A\xi_C\varepsilon_{B'D'} + \varepsilon_{AC}\overline{\xi}_{B'}\overline{\xi}_{D'}. \quad (51)$$

按这种形式, p_{ij} 显然也由旋量 ξ_A 决定.

由定义, 矢量 w_i 是实数的, 且与 u_i 正交, 因

$$u^i w_i = \xi^A \overline{\xi}^{B'} (\xi_A \overline{\eta}_{B'} + \eta_A \overline{\xi}_{B'}) = 0. \tag{52}$$

还有, w_i 是类空的, 因

$$\begin{aligned} w_i w^i &= (\xi_A \overline{\eta}_{B'} + \eta_A \overline{\xi}_{B'})(\xi^A \overline{\eta}^{B'} + \eta^A \overline{\xi}^{B'}) \\ &= \overline{\eta}_{B'} \overline{\xi}^{B'} - \overline{\xi}_{B'} \overline{\eta}^{B'} = -2, \end{aligned} \tag{53}$$

其中关系 (46) 已被重复使用. 于是, 旋量 ξ^A 除决定零矢量 u^i 外, 还决定一个实数、类空、正交的矢量 w^i, 再加上一个 u^i 的倍数. 所以, ξ^A 定义一个零矢量 u^i, 即 "旗杆", 和一个正交、二面的 $w^i + u^i$ 的倍数, 即 "旗"; 反之, 旗除符号外还指定旋量.

[538]

(c) 并矢形式

由于广义相对论的时空是局域闵可夫斯基的, 所以正如对四次形式中的张量建立正交四次基 $e^i_{(a)}$ ($a = 0、1、2、3$) 和 ($i = 0、1、2、3$) 那样 (见第 1 章 §7), 也能在每个时空点对旋量建立正交并矢基 ${\zeta_{(a)}}^A$ 和 ${\zeta_{(a')}}^{A'}$ ($a、a' = 0、1$ 和 $A、A' = 0、1$). 也如在四次形式中那样, 将并矢指标用拉丁字母最前几个的小写放在括弧里. 但对两个基旋量 ${\zeta_{(0)}}^A$ 和 ${\zeta_{(1)}}^A$ 用特别记号将是便利的, 即

$${\zeta_{(0)}}^A = o^A \quad 和 \quad {\zeta_{(1)}}^A = l^A. \tag{54}$$

而正交条件是

$$\varepsilon_{AB} o^A l^B = o^0 l^1 - o^1 l^0 = o_B l^B = -o^A l_A = 1. \tag{55}$$

这些定义的初步结果是

$$\varepsilon_{AB} {\zeta_{(a)}}^A {\zeta_{(b)}}^B = \zeta_{(a)B} {\zeta_{(b)}}^B = \varepsilon_{(a)(b)} \tag{56}$$

和

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(a)(b)} {\zeta_{(a)}}^A {\zeta_{(b)}}^B &= {\zeta_{(0)}}^A {\zeta_{(1)}}^B - {\zeta_{(1)}}^A {\zeta_{(0)}}^B \\ &= o^A l^B - l^A o^B = \varepsilon^{AB}. \end{aligned} \tag{57}$$

也清楚的是, 能用 $\varepsilon^{(a)(b)}$ 和 $\varepsilon_{(a)(b)}$ 来升降并矢指标, 即有

$$\zeta^{(c)A} \varepsilon_{(c)(a)} = {\zeta_{(a)}}^A \quad 和 \quad \varepsilon^{(a)(c)} {\zeta_{(c)}}^A = \zeta^{(a)A}. \tag{58}$$

更多的结果是

和
$$\left.\begin{aligned}\zeta_{(a)A}\zeta^{(b)A} &= -\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta^{(b)}{}_{A} = \delta^{(b)}_{(a)}\\ \zeta_{(a)A}\zeta_{(b)}{}^{A} &= -\zeta_{(a)}{}^{A}\zeta_{(b)A} = \varepsilon_{(a)(b)}.\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

如在四次形式中那样, 能将任何旋量 ξ_A 投影到并矢基上:

$$\xi_{(a)} = \xi_A\zeta_{(a)}{}^{A}, \tag{60}$$

或, 更明晰地,

$$\xi_{(0)} = \xi_A o^A \quad 和 \quad \xi_{(1)} = \xi_A l^A. \tag{61}$$

另外还有

$$\xi_A = \xi^{(a)}\zeta_{(a)A} = \xi^{(0)}o_A + \xi^{(1)}l_A. \tag{62}$$

旋量 o^A 和 l^A 及其复数共轭由下列对应关系决定零矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$、和 $\overline{\boldsymbol{m}}$,

$$\left.\begin{aligned} l^i &\leftrightarrow o^A\overline{o}^{B'} \qquad m^i \leftrightarrow o^A\overline{l}^{B'},\\ \overline{m}^i &\leftrightarrow l^A\overline{o}^{B'}, \quad n^i \leftrightarrow l^A\overline{l}^{B'}.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

零矢量满足正交条件, [539]

$$l^i n_i = o^A\overline{o}^{B'}l_A\overline{l}_{B'} = 1 \quad 和 \quad m^i\overline{m}_i = o^A\overline{l}^{B'}l_A o_{B'} = -1, \tag{64}$$

而所有其余的标量积都为零. 于是, 并矢基决定 4 个零矢量, 它们可用作第 1 章 §6 描述的纽曼 – 彭罗斯形式的基.

表示式 (63) 给出厄米矩阵,

$$\sigma^i{}_{AB'} \quad 和 \quad \sigma^{AB'}{}_i, \tag{65}$$

致有

$$\left.\begin{aligned} l^i &= \sigma^i{}_{AB'}\zeta_{(0)}{}^{A}\overline{\zeta}_{(0')}{}^{B'} = \sigma^i{}_{AB'}o^A\overline{o}^{B'},\\ m^i &= \sigma^i{}_{AB'}\zeta_{(0)}{}^{A}\overline{\zeta}_{(1')}{}^{B'} = \sigma^i{}_{AB'}o^A\overline{l}^{B'},\\ \overline{m}^i &= \sigma^i{}_{AB'}\zeta_{(1)}{}^{A}\overline{\zeta}_{(0')}{}^{B'} = \sigma^i{}_{AB'}l^A\overline{o}^{B'},\\ n^i &= \sigma^i{}_{AB'}\zeta_{(1)}{}^{A}\overline{\zeta}_{(1')}{}^{B'} = \sigma^i{}_{AB'}l^A\overline{l}^{B'}.\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

和

相应地, 可写出

$$\sigma^i{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} l^i & m^i\\ \overline{m}^i & n^i\end{vmatrix} \quad 和 \quad \sigma^{AB'}{}_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} n_i & -\overline{m}_i\\ -m_i & l_i\end{vmatrix}. \tag{67}$$

与方程 (39) 和 (40) 的比较显示, 上述定义是泡利自旋矩阵的自然推广.

最后, 联系于纽曼 – 彭罗斯形式的方向导数 (第 1 章方程 (285)),

$$D = l^i\partial_i, \quad \Delta = n^i\partial_i, \delta = m^i\partial_i \quad 和 \quad \delta^* = \overline{m}^i\partial_i, \tag{68}$$

有旋量对应物

$$\partial_{00'} = D, \quad \partial_{11'} = \Delta, \quad \partial_{01'} = \delta, \quad 和 \quad \partial_{10'} = \delta^*. \tag{69}$$

(*d*) 旋量场的协变导数和自旋系数

现在来定义旋量场的协变导数. 一致性要求定义必须基于对应

$$\nabla_i \leftrightarrow \nabla_{AB'} \tag{70}$$

和

$$\nabla_i X_j = X_{j;i} \leftrightarrow \nabla_{AB'} X_{CD'} = X_{CD';AB'}. \tag{71}$$

按照方程 (41), 最后这个方程要求

$$X_{CD';AB'} = \sigma^j{}_{CD'} \sigma^i{}_{AB'} X_{j;i}. \tag{72}$$

另外还要求旋量场的协变导数遵守莱布尼兹定则, 即

$$\nabla_{AB'}(S^{\cdots}{}_{\cdots} \times T^{\cdots}{}_{\cdots}) = T^{\cdots}{}_{\cdots} \nabla_{AB'}(S^{\cdots}{}_{\cdots}) + S^{\cdots}{}_{\cdots} \nabla_{AB'}(T^{\cdots}{}_{\cdots}), \tag{73}$$

其中 $S^{\cdots}{}_{\cdots}$ 和 $T^{\cdots}{}_{\cdots}$ 是任何两个旋量场. 还要求算符 $\nabla_{AB'}$ 是实数的, 即

[540]

$$\nabla_{AB'} = \overline{\nabla}_{A'B}. \tag{74}$$

现在来说明, 以上假定如何足以单一地定义协变导数算符. 但首先注意, 能够以与四次形式中类似的方式定义内部导数的概念. 将沿 $(a)(b')$"方向" 旋量的并矢分量 $\xi_{(a)}$ 的内部导数定义为

$$\xi_{(c)(a)(b')} = \zeta_{(c)}{}^{C} \xi_{C;AB'} \zeta_{(a)}{}^{A} \xi_{(b)}{}^{B'}, \tag{75}$$

或, 等价地,

$$\xi_{(c)|AB'} = \zeta_{(c)}{}^{C} \xi_{C;AB'}. \tag{76}$$

现在给出上述定义和要求的两个初步结果.

引理 1

$$\sigma^j{}_{CD';AB'} = 0 \quad 和 \quad \sigma^{CD'}{}_{j;AB'} = 0. \tag{77}$$

证明 引理来自方程 (72). 该方程的左边可写为

$$X_{CD';AB'} = (\sigma^j{}_{CD'} X_j)_{;AB'}, \tag{78}$$

而右边有另一种形式

$$\sigma^{j}{}_{CD'}(\sigma^{i}{}_{AB'}X_{j;i}) = \sigma^{j}{}_{CD'}X_{j;AB'}. \tag{79}$$

方程 (78) 和 (79) 右边相等的要求给出引理所述两个结果的第一个, 而第二个则是来自正交关系 (36) 和莱布尼兹定则.

引理 2

$$\varepsilon_{CD;AB'} = 0. \tag{80}$$

证明 由对张量和旋量场都成立的对应式 (71) 和莱布尼兹定则, 方程 (37) 给出

$$0 = g_{ik;i} = \sigma_i{}^{AB'}(\varepsilon_{CD}\varepsilon_{E'F'}\sigma_j{}^{CE'}\sigma_k{}^{DF'})_{;AB'}, \tag{81}$$

或者按引理 1,

$$\sigma_i{}^{AB'}(\varepsilon_{CD}\varepsilon_{E'F'})_{;AB'} = 0; \tag{82}$$

于是得出方程 (80).

定义 在并矢形式中自旋系数 $\Gamma_{(a)(b)(c)(d')}$ 定义为

$$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')} = [\zeta_{(a)F}]_{;CD'}\zeta_{(b)}{}^{F}\zeta_{(c)}{}^{C}\zeta_{(d')}{}^{D'}. \tag{83}$$

为简便, 可将上式 (不管它的难看!) 另写为

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = [\zeta_{(a)F}]_{;CD'}\zeta_{(b)}{}^{F}. \tag{84}$$

所定义的自旋系数对其第一对指标是对称的. 对称性是来自关系 (见方 [541]
程 (59))

$$\zeta_{(a)F}\zeta_{(b)}{}^{F} = \varepsilon_{(a)(b)}. \tag{85}$$

因为由这个关系和引理 2 有

$$\begin{aligned}\Gamma_{(a)(b)CD'} &= -[\zeta_{(b)}{}^{F}]_{;CD'}\zeta_{(a)F} \\ &= +[\zeta_{(b)F}]_{;CD'}\zeta_{(a)}{}^{F} = \Gamma_{(b)(a)CD'}.\end{aligned} \tag{86}$$

用 $\zeta^{(b)}{}_{E}$ 来收缩并利用方程 (59) 中的关系, 可得方程 (84) 的另一种形式, 即

$$[\zeta_{(a)E}]_{;CD'} = -\zeta^{(b)}{}_{E}\Gamma_{(b)(a)CD'} = \zeta_{(b)E}\Gamma^{(b)}{}_{(a)CD'}. \tag{87}$$

现在来给出, 如何能由定义的自旋系数来表示一秩旋量的并矢分量 $\xi_{(a)}$ 和 $\xi^{(a)}$ 的内部导数; 而由莱布尼兹定则, 这将清楚地足以得出任意秩旋量的协变导数. 于是,

$$\begin{aligned}\xi_{(a)|BC'} &= \zeta_{(a)}{}^{A}\xi_{A;BC'} \\ &= [\xi_A\zeta_{(a)}{}^{A}]_{;BC'} - \xi_A[\zeta_{(a)}{}^{A}]_{;BC'}.\end{aligned} \tag{88}$$

右边第一个方括号中的量是标量, 即 $\xi_{(a)}$. 所以, 由方程 (87),

$$\xi_{(a)|BC'} = \xi_{(a),BC'} - \xi_A \Gamma^{(d)}{}_{(a)BC'} \zeta_{(d)}{}^A, \tag{89}$$

或, 等价地,

$$\xi_{(a)|BC'} = \xi_{(a),BC'} + \Gamma_{(d)(a)BC'} \xi^{(d)}. \tag{90}$$

类似地得到

$$\xi^{(a)}{}_{|BC'} = \xi^{(a)}{}_{,BC'} + \Gamma^{(a)}{}_{(d)BC'} \xi^{(d)}. \tag{91}$$

由自旋系数对第一对并矢指标的对称性很清楚, 必须确定 12 个系数. 在纽曼 – 彭罗斯形式中, 这些系数被给予特别的符号, 列于下表.

$\Gamma_{(a)(b)(c)(d')}$;

$(c)(d')$ \ $(a)(b)$	00	01 or 10	11
$00'$	κ	ε	π
$10'$	ρ	α	λ
$01'$	σ	β	μ
$11'$	τ	γ	ν

(92)

[542] 尚待验证, 自旋系数的这些定义与第 1 章方程 (286) 中用里奇旋转系数 γ_{ijk} 所定义的是一致的.

首先来证明由弗雷德曼发现的引理.

引理 3

$$\Gamma_{(a)(b)CD'} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')} \zeta_{(a)}{}^E \overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'} [\zeta_{(b)E} \overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;CD'}. \tag{93}$$

(注意, 由方程 (63), $\zeta_{(a)}{}^E \overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'}$ 和 $\zeta_{(b)E} \overline{\zeta}_{(k')F'}$ 都表示基零矢量.)

证明 按莱布尼兹定则展开方程 (93) 的右边, 并借助于 (59) 中的关系来简化, 逐步得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')} \{ \zeta_{(a)}{}^E \overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'} \zeta_{(b)E} [\overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;CD'} \\
&\quad + \zeta_{(a)}{}^E \overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'} \overline{\zeta}_{(k')F'} [\zeta_{(b)E}]_{;CD'} \} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')} \{ -\varepsilon_{(a)(b)} \overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'} \Gamma^{(d')}{}_{(k')CD'} \zeta_{(d')F'} \\
&\quad + \varepsilon_{(k')(f')} \zeta_{(a)}{}^E \Gamma^{(d)}{}_{(b)CD'} \zeta_{(d)E} \} \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')} \{ -\varepsilon_{(a)(b)} \delta^{(d')}_{(f')} \Gamma_{(d')(k')CD'} + \varepsilon_{(k')(f')} \delta^{(d)}_{(a)} \Gamma_{(d)(b)CD'} \}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')}\{-\varepsilon_{(a)(b)}\Gamma_{(k')(f')CD'} + \varepsilon_{(k')(f')}\Gamma_{(a)(b)CD'}\}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')}\varepsilon_{(k')(f')}\Gamma_{(a)(b)CD'} = \Gamma_{(a)(b)(C)(D')}; \tag{94}$$

引理得证.

利用弗雷德曼引理, 可将各个自旋系数 $\Gamma_{(a)(b)(c)(d')}$ 用基零矢量 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$ 的协变 (张量) 导数来表示, 并证实它们与用旋转系数 γ_{ijk} 作的定义是一致的. 借助于定义 (54)、(63) 和 (69), 在当并矢指标具特别值 0 或 1 时略去其括号后有,

$$\Gamma_{0000'} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')}\zeta_0{}^E\overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'}[\zeta_{0E}\overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;00'}$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')}o^E\overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'}[o_E\overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;00'}$$
$$= \frac{1}{2}[o^E\bar{l}^{F'}l^i(o_E\overline{o}_{F'})_{;i} - o^E\overline{o}^{F'}l^i(o_E\bar{l}_{F'})_{;i}]$$
$$= \frac{1}{2}[m^j l^i l_{j;i} - l^j l^i m_{j;i}]$$
$$= \frac{1}{2}[\gamma_{311} - \gamma_{131}] = \gamma_{311} = \kappa, \tag{95}$$

与第 1 章方程 (286) 中 κ 的定义一致. 类似地, [543]

$$\Gamma_{1101'} = \frac{1}{2}\varepsilon^{(k')(f')}l^E\overline{\zeta}_{(f')}{}^{F'}[l_E\overline{\zeta}_{(k')F'}]_{;01},$$
$$= \frac{1}{2}[l^E\bar{l}^{F'}(l_E\overline{o}_{F'})_{;01'} - l^E\overline{o}^{F'}(l_E\bar{l}_{F'})_{;01'}]$$
$$= \frac{1}{2}[n^j m^i\overline{m}_{j;i} - \overline{m}^j m^i n_{j;i}]$$
$$= \frac{1}{2}(\gamma_{243} - \gamma_{423}) = \gamma_{243} = \mu, \tag{96}$$

也与第 1 章方程 (286) 中 μ 的定义一致. 其余系数也能以同样方式计算, 并显示与以前的定义一致.

对旋量分析和纽曼 – 彭罗斯形式旋量基的讲述至此完成.

103. 纽曼 – 彭罗斯形式的狄拉克方程

如所周知, 在自旋为 1/2 粒子的相对论理论中, 波函数是由一对旋量 P^A 和 $\overline{Q}^{A'}$ 来表示; 在闵可夫斯基空间支配它们的狄拉克方程是

$$\sigma^i{}_{AB'}\partial_i P^A + \mathrm{i}\mu_*\overline{Q}_{B'} = 0 \tag{97}$$

和

$$\sigma^i{}_{AB'}\partial_i Q^A + \mathrm{i}\mu_* \overline{P}_{B'} = 0, \tag{98}$$

其中 $\sigma^i{}_{AB'}$ 是泡利矩阵, $\mu_*\sqrt{2}$ 是粒子的质量 (表示为康普顿波长的倒数). 质量定义中的 $\sqrt{2}$ 因子的出现是由于方程 (40) 所定义的泡利矩阵与通常的定义相差 $1/\sqrt{2}$ 因子.

在弯曲时空的纽曼 – 彭罗斯形式中, 将方程 (97) 和 (98) 中的普通导数代之以协变导数, 将泡利矩阵代之以方程 (67) 定义的 σ 矩阵. 所需的方程所以就是

$$\sigma^i{}_{AB'} P^A{}_{;i} + \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{C'} \varepsilon_{C'B'} = 0 \tag{99}$$

和

$$\sigma^i{}_{AB'} Q^A{}_{;i} + \mathrm{i}\mu_* \overline{P}^{C'} \varepsilon_{C'B'} = 0, \tag{100}$$

其中

$$\sigma^i{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} l^i & m^i \\ \overline{m}^i & n^i \end{vmatrix}. \tag{101}$$

现在来用已定义的自旋系数写出这些方程的明晰形式.

考虑 $B' = 0$ 的方程 (99), 有

$$\sigma^i{}_{00'} P^0{}_{;i} + \sigma^i{}_{10'} P^1{}_{;i} - \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{1'} = 0, \tag{102}$$

[544] 或, 利用方程 (68)、(69)、(91) 和 (101),

$$(\partial_{00'} P^0 + \Gamma^0{}_{b00'} P^b) + (\partial_{10'} P^1 + \Gamma^1{}_{b10'} P^b) - \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{1'} = 0, \tag{103}$$

或, 更清晰地,

$$(D + \Gamma_{1000'} - \Gamma_{0010'}) P^0 + (\delta^* + \Gamma_{1100'} - \Gamma_{0110'}) P^1 - \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{1'} = 0. \tag{104}$$

现在将方程 (104) 中的各个自旋系数用它们列在 (92) 中的命名符号代替, 得到

$$(D + \varepsilon - \rho) P^0 + (\delta^* + \pi - \alpha) P^1 - \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{1'} = 0. \tag{105}$$

类似地, 方程 (99) 对 $B' = 1$ 给出

$$(\Delta + \mu - \gamma) P^1 + (\delta + \beta - \tau) P^0 + \mathrm{i}\mu_* \overline{Q}^{0'} = 0. \tag{106}$$

方程 (100) 给出 P 和 Q 互换的同样方程 (105) 和 (106). 但便利的是考虑方程 (100) 的复数共轭并进而写出

$$F_1 = P^0, \quad F_2 = P^1, \quad G_1 = \overline{Q}^{1'}, \quad \text{和} \quad G_2 = -\overline{Q}^{0'}. \tag{107}$$

得到的方程是

$$\left.\begin{aligned}
&(D+\varepsilon-\rho)F_1+(\delta^*+\pi-\alpha)F_2=\mathrm{i}\mu_* G_1;\\
&(\Delta+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=\mathrm{i}\mu_* G_2;\\
&(D+\varepsilon^*-\rho^*)G_2-(\delta+\pi^*-\alpha^*)G_1=\mathrm{i}\mu_* F_2;\\
&(\Delta+\mu^*-\gamma^*)G_1-(\delta^*+\beta^*-\tau^*)G_2=\mathrm{i}\mu_* F_1.
\end{aligned}\right\} \tag{108}$$

这些就是纽曼 – 彭罗斯形式的狄拉克方程.

104. 克尔几何中的狄拉克方程及其分离

假定现在形式波函数的 4 个分量 F_1、F_2、G_1 和 G_2 有着通常的 t-和 φ-依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma t+m\varphi)}$, 并对自旋系数和方向导数代入其由第 6 章方程 (170) — (173) 和 (175) 以及第 8 章方程 (2) — (5) 所给的值, 则方程 (108) 成为

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\mathscr{D}_0+\frac{1}{\overline{\rho}^*}\right)F_1+\frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}F_2=+\mathrm{i}\mu_* G_1,\\
&\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}F_2-\frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}+\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)F_1=-\mathrm{i}\mu_* G_2,\\
&\left(\mathscr{D}_0+\frac{1}{\overline{\rho}}\right)G_2-\frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}G_1=+\mathrm{i}\mu_* F_2,\\
&\frac{\Delta}{2\rho^2}\mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}G_1+\frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}}\left(\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}-\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}}\right)G_2=-\mathrm{i}\mu_* F_1.
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

由方程 (109) 的形式看出, 可代替 F_1 和 G_2 而定义 [545]

$$f_1=\overline{\rho}^* F_1=(r-\mathrm{i}a\cos\theta)F_1\quad(=\overline{\rho}^* P^0)$$

和 (110)

$$g_2=\overline{\rho}G_2=(r+\mathrm{i}a\cos\theta)G_2\quad(=-\overline{\rho}\overline{Q}^{0'}).$$

并用 f_2 和 g_1 代替 $F_2(=P^1)$ 和 $G_1(=\overline{Q}^{1'})$ (为了所得方程形式上的对称性), 则方程 (109) 成为

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0 f_1+2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}f_2=+(\mathrm{i}\mu_* r+a\mu_*\cos\theta)g_1,\\
&\Delta\mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}f_2-2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}f_1=-2(\mathrm{i}\mu_* r+a\mu_*\cos\theta)g_2,\\
&\mathscr{D}_0 g_2-2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}g_1=+(\mathrm{i}\mu_* r-a\mu_*\cos\theta)f_2,\\
&\Delta\mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger}g_1+2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}g_2=-2(\mathrm{i}\mu_* r-a\mu_*\cos\theta)f_1.
\end{aligned}\right\} \tag{111}$$

现已明显, 能由下列代换来分离变量,

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(r,\theta)=R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta),\quad f_2(r,\theta)=R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta),\\
&g_1(r,\theta)=R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta),\quad \text{和}\quad g_2(r,\theta)=R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta),
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

其中 $R_{\pm\frac{1}{2}}(r)$ 和 $S_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$ 分别只是 r 和 θ 的函数. 通过这些代换, 方程 (111) 成为

$$\begin{aligned}
(\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} - \mathrm{i}\mu_* r R_{+\frac{1}{2}})S_{-\frac{1}{2}} + [2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} - (a\mu_*\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}}]R_{+\frac{1}{2}} = 0,\\
(\Delta\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} + 2\mathrm{i}\mu_* r R_{-\frac{1}{2}})S_{+\frac{1}{2}} - [2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} - 2(a\mu_*\cos\theta)S_{+\frac{1}{2}}]R_{-\frac{1}{2}} = 0,\\
(\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} - \mathrm{i}\mu_* r R_{+\frac{1}{2}})S_{+\frac{1}{2}} - [2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} - (a\mu_*\cos\theta)S_{+\frac{1}{2}}]R_{+\frac{1}{2}} = 0,\\
(\Delta\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} + 2\mathrm{i}\mu_* r R_{-\frac{1}{2}})S_{-\frac{1}{2}} + [2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} - 2(a\mu_*\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}}]R_{-\frac{1}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{113}$$

这些方程意味着

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} - \mathrm{i}\mu_* r R_{+\frac{1}{2}} = \lambda_1 R_{+\frac{1}{2}}; \quad 2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} - (a\mu_*\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}} = -\lambda_1 S_{-\frac{1}{2}},\\
&\Delta\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} + 2\mathrm{i}\mu_* r R_{-\frac{1}{2}} = \lambda_2 R_{-\frac{1}{2}}; \quad 2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} - 2(a\mu_*\cos\theta)S_{+\frac{1}{2}} = +\lambda_2 S_{+\frac{1}{2}},\\
&\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} - \mathrm{i}\mu_* r R_{+\frac{1}{2}} = \lambda_3 R_{+\frac{1}{2}}; \quad 2^{-\frac{1}{2}}\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} - (a\mu_*\cos\theta)S_{+\frac{1}{2}} = +\lambda_3 S_{+\frac{1}{2}},\\
&\Delta\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} + 2\mathrm{i}\mu_* r R_{-\frac{1}{2}} = \lambda_4 R_{-\frac{1}{2}}; \quad 2^{+\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} - 2(a\mu_*\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}} = -\lambda_4 S_{-\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{114}$$

其中 λ_1、$\cdots$、λ_4 是 4 个分离常数. 但是, 上述方程的一致性显然要求

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_4 = \lambda \text{ (比如说)}. \tag{115}$$

[546] 于是得到两对方程,

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = (\lambda + \mathrm{i}\mu_* r)R_{+\frac{1}{2}},\\
&\Delta\mathscr{D}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} = 2(\lambda - \mathrm{i}\mu_* r)R_{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}\right\} \tag{116}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -2^{\frac{1}{2}}(\lambda - a\mu_*\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}},\\
&\mathscr{L}^{\dagger}_{\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} = +2^{\frac{1}{2}}(\lambda + a\mu_*\cos\theta)S_{+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{117}$$

现阶段的便利做法是:

$$\text{将 } 2^{\frac{1}{2}}\lambda \text{ 代以 } \lambda, \quad 2^{\frac{1}{2}}\mu_* \text{ 代以 } m_e, \text{ 和 } 2^{\frac{1}{2}}R_{-\frac{1}{2}} \text{ 代以 } R_{-\frac{1}{2}}. \tag{118}$$

经这些代换, 方程 (116) 和 (117) 成为

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathscr{D}_0 R_{-\frac{1}{2}} = (\lambda + \mathrm{i}m_e r)\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}, \tag{119}$$

$$\Delta^{\frac{1}{2}}\mathscr{D}^{\dagger}_0\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} = (\lambda - \mathrm{i}m_e r)R_{-\frac{1}{2}}, \tag{120}$$

$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -(\lambda - am_e\cos\theta)S_{-\frac{1}{2}}, \tag{121}$$

和
$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = +(\lambda + am_e \cos\theta) S_{+\frac{1}{2}}, \tag{122}$$
注意其中 m_e 是粒子以其康普顿波长的倒数表示的质量 (即以 m_e 代替 $m_e c/\hbar$).

可从方程 (119) 和 (120) 消去 $\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}$ 而得到一个关于 $R_{-\frac{1}{2}}$ 的方程,
$$\left[\Delta \mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} \mathscr{D}_0 - \frac{\mathrm{i}m_e \Delta}{\lambda + im_e r} \mathscr{D}_0 - (\lambda^2 + m_e^2 r^2)\right] R_{-\frac{1}{2}} = 0; \tag{123}$$
而 $\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}}$ 满足复数共轭方程.

类似地, 可从方程 (121) 和 (122) 消去 $S_{+\frac{1}{2}}$ 而得到一个关于 $S_{-\frac{1}{2}}$ 的方程,
$$\left[\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} + \frac{am_e \sin\theta}{\lambda + am_e \cos\theta} \mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} + (\lambda^2 - a^2 m_e^2 \cos^2\theta)\right] S_{-\frac{1}{2}} = 0; \tag{124}$$
而 $S_{+\frac{1}{2}}$ 满足 "伴随" 方程 (由用 $\pi - \theta$ 取代 θ 得到). 还有, λ 现在表现为特征值参量, 由要求 $S_{-\frac{1}{2}}$ (从而 $S_{+\frac{1}{2}}$ 也是) 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 处无奇异的边界条件决定.

将在 §106 回到这些分离的方程, 此前则在 §105 考虑无质量二分量中微子的较简单情形.

105. 克尔几何中的中微子波

适于二分量中微子 (满足闵可夫斯基空间的外尔方程) 的方程可简单地在方程 (119) — (124) 中令 $m_e = 0$ 而得到. 还有, 令 (见第 8 章方程 (65) 和第 9 章方程 (72))
$$\Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} = P_{+\frac{1}{2}} \quad 和 \quad R_{-\frac{1}{2}} = P_{-\frac{1}{2}}, \tag{125}$$ [547]
就有两对方程,
$$\Delta^{\frac{1}{2}} \mathscr{D}_0^{\dagger} P_{+\frac{1}{2}} = \lambda P_{-\frac{1}{2}}, \quad \Delta^{\frac{1}{2}} \mathscr{D}_0 P_{-\frac{1}{2}} = \lambda P_{+\frac{1}{2}} \tag{126}$$
和
$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda S_{-\frac{1}{2}}, \quad \mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = +\lambda S_{+\frac{1}{2}}. \tag{127}$$
对应的解耦二阶方程是
$$(\Delta \mathscr{D}_{\frac{1}{2}} \mathscr{D}_0^{\dagger} - \lambda^2) P_{+\frac{1}{2}} = 0, \quad (\Delta \mathscr{D}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} \mathscr{D}_0 - \lambda^2) P_{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{128}$$
和
$$\mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} \mathscr{L}_{\frac{1}{2}} S_{+\frac{1}{2}} = -\lambda^2 S_{+\frac{1}{2}}, \quad \mathscr{L}_{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_{\frac{1}{2}}^{\dagger} S_{-\frac{1}{2}} = -\lambda^2 S_{-\frac{1}{2}}. \tag{129}$$
可看到, 方程 (128) 其实是第 8 章方程 (96) 和 (97) 的适于 $|s| = \dfrac{1}{2}$ 的特

例. §72 和 §73 的一般变换理论可以相应地用来将方程 (128) 变换为一维波动方程的形式. 但在现在的情形, 更简单的是直接从方程 (128) 着手, 而避开变换理论.

如在 §72 已看到的, 由选择 r_* (在第 8 章方程 (100) 和 (101) 中定义) 为独立变量, 算符 $\mathscr{D}_0$ 和 $\mathscr{D}_0^\dagger$ 取较简单的形式,

$$\mathscr{D}_0 = \frac{\varpi^2}{\Delta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right) \quad \text{和} \quad \mathscr{D}_0^\dagger = \frac{\varpi^2}{\Delta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right), \tag{130}$$

应记得其中

$$\varpi^2 = r^2 + \alpha^2 = r^2 + a^2 + am/\sigma. \tag{131}$$

方程 (126) 于是成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right) P_{+\frac{1}{2}} = \lambda \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2} P_{-\frac{1}{2}} \tag{132}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right) P_{-\frac{1}{2}} = \lambda \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2} P_{+\frac{1}{2}}. \tag{133}$$

令

$$Z\pm = P_{+\frac{1}{2}} \pm P_{-\frac{1}{2}}, \tag{134}$$

可将方程 (132) 和 (133) 结合而给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \lambda \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right) Z_+ = \mathrm{i}\sigma Z_- \tag{135}$$

[548] 和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \lambda \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right) Z_- = \mathrm{i}\sigma Z_+. \tag{136}$$

从这些方程不难得出一维波动方程对,

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r_*^2} + \sigma^2\right) Z_\pm = V_\pm Z_\pm, \tag{137}$$

其中

$$V_\pm = \lambda^2 \frac{\Delta}{\varpi^4} \pm \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*}\left(\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}\right). \tag{138}$$

(a) 对 $\sigma > \sigma_s(= -am/2Mr_+)$ 的反射和透射问题

只要 $\sigma > \sigma_s$, 使用有着 (138) 两个势之任一个的一维波动方程 (137) 显然不会带来混淆: 因为这时 $r_*(r)$ 关系是单值的, 而势本身是束缚和窄范围的. 此外, 由于方程 (138) 给的势 $V_\pm$ 属于第 4 章 §26 考虑的一般类型

$$V_\pm = \pm\beta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r_*} + \beta^2 f^2 + \kappa f, \tag{139}$$

$$(\text{有 } \beta f = \lambda\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2} \text{ 和 } \kappa = 0), \tag{140}$$

可知支配 Z_+ 和 Z_- 的方程将给出相同的反射和透射系数. 即将看到, 反射和透射系数的这种相等性更直接地来自方程 (135) 和 (136), 按此二方程,

$$Z_\pm \to \frac{1}{\mathrm{i}\sigma}\frac{\mathrm{d}Z_\mp}{\mathrm{d}r_*} \text{ 对 } r_* \to \pm\infty. \tag{141}$$

回到方程 (137), 如通常一样寻找 (例如) 有势 V_+ 的波动方程的解, 其渐近行为是

$$\left.\begin{aligned} Z_+ \to\ & \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} + A(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to +\infty) \\ \to\ & B(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{142}$$

用方程 (135), 可从 Z_+ 的这些解推导有势 V_- 的波动方程的解 Z_-, 其渐近行为是 (由方程 (141))

$$\left.\begin{aligned} Z_- \to\ & \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} - A(\sigma)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to +\infty) \\ \to\ & B(\sigma)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*} \quad (r_* \to -\infty). \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

所以势 $V_\pm$ 将给出同样的反射和透射系数 [549]

$$\mathbb{R} = |A(\sigma)|^2 \text{ 和 } \mathbb{T} = |B(\sigma)|^2, \tag{144}$$

满足条件

$$\mathbb{R} + \mathbb{T} = 1. \tag{145}$$

将在 §106 和 §107 中狄拉克方程的更一般意义上验证, 用支配 $Z_\pm$ 的波动方程的解定义的反射和透射系数, 与越过事件视界的中微子流的物理定义是一致的.

图 46 展示了对范围为 $\sigma_s < \sigma \leqslant \sigma_c(= -m/a)$ 的频率 σ 的一族势 $V_\pm$. 在 [550] 这个频率范围内, $\alpha^2 \leqslant 0$ 但 $0 \leqslant |\alpha| < r_+$, 且当 $\sigma \to \sigma_s + 0$ 有 $|\alpha| \to r_+ + 0$. 作为最后这一事实的结果, 对进入中微子波的势垒随 $\sigma \to \sigma_s + 0$ 而无限制地增

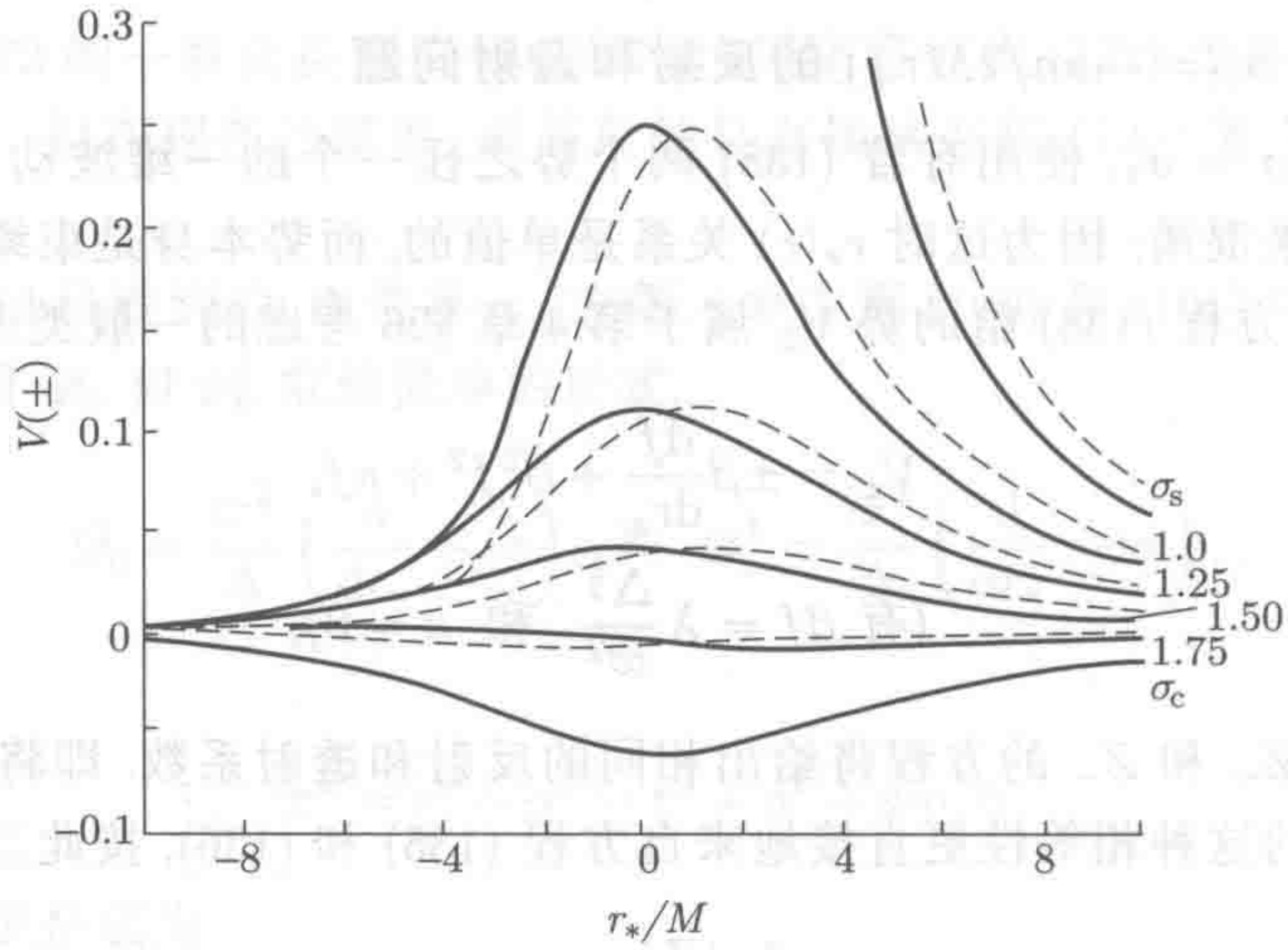


图 46 围绕克尔黑洞 ($a = 0.95$), 对 $l = 2.5$、$m = -2.5$、频率范围 $\sigma_s < \sigma \leqslant \sigma_c$ 的中微子波入射的势垒 $V^{(+)}$ (实线) 和 $V^{(-)}$ (虚线). 曲线由其所属的 σ^+ 标记.

大. 但此极限的势在视界上的奇异性比对光子和引力子的要弱. 于是, 将对 V 的积分作为势垒的量度, 可得对方程 (138) 给的两个势有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_{\pm} \mathrm{d}r_* = -\frac{\lambda^2}{2|\alpha|} \lg \left[\frac{2Mr_+(1-\sigma_s/\sigma)}{(r_+ + |\alpha|)^2} \right] \text{ (对 } \sigma_s < \sigma < \sigma_c \text{ 和 } 0 \leqslant |\alpha| < r_+). \tag{146}$$

此积分随 $\sigma \to \sigma_s + 0$ 而对数地发散, 不同于电磁和引力情况的 $(1-\sigma_s/\sigma)^{-2}$ 式发散. 对中微子的势垒的这种较弱发散导致在极限 $\sigma \to \sigma_s + 0$ 的有限透射系数. 表 XI 中的数值结果强烈地支持这个推测, 尽管它还有待严格地确立.

表 XI 入射到 $a = 0.95$ 的克尔黑洞的中微子的反射系数 ($l = 0.5, m = -0.5$)

σ	σ/σ_s	$\mathbb{R}$	σ	σ/σ_s	$\mathbb{R}$
0.181987	1.0055	0.97627	0.220987	1.2210	0.89187
0.182987	1.0111	0.97556	0.230987	1.2763	0.83457
0.183987	1.0166	0.97479	0.240987	1.3315	0.75356
0.184987	1.0221	0.97398	0.250000	1.3813	0.66005
0.185987	1.0276	0.97313	0.250987	1.3868	0.64885
0.186987	1.0332	0.97223	0.260987	1.4420	0.52777
0.187987	1.0387	0.97129	0.300000	1.6576	0.14125
0.188987	1.0442	0.97012	0.350000	1.9338	0.01622
0.189987	1.0497	0.96925	0.400000	2.2101	0.00197
0.200987	1.1105	0.95353	0.450000	2.4864	0.00027
0.210987	1.1658	0.92971			

(*b*) **超辐射的缺失** $(0<\sigma<\sigma_s)$

对 $0<\sigma<\sigma_s$, $r_*(r)$ 关系变为双值的; 此外, 势 $V_\pm$ 在 $r=|\alpha|(>r_+$, 当 $\sigma<\sigma_s$ 时) 变为奇异. 于是, 由 $V_\pm$ 的明晰形式, 即

$$V_\pm=\lambda^2\frac{\Delta}{\varpi^4}\pm\lambda\frac{\Delta^{1/2}}{\varpi^4}\left[(r-M)-\frac{2r\Delta}{\varpi^2}\right], \tag{147}$$

可得, 在 $r=|\alpha|$ 的邻域有行为

$$V_\pm\sim\mp\lambda\frac{\Delta_{|\alpha|}^{3/2}}{4|\alpha|^2}\frac{1}{(r-|\alpha|)^3}. \tag{148}$$

这个行为与势对 $|s|=1$ 和 2 时的相应行为 (第 8 章方程 (193) 和第 9 章方程 (428)) 在一个重要方面不同: 现在有三阶的极, 而不是四阶的极. [551]

转到反射和透射问题, 如在第 8 章 §75 (*c*) 和 §77 (*c*) 已说明的, 必须寻找波动方程对 Z 的满足下列边界条件的解,

$$Z\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}+A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma r_*}\ \text{沿分支}\ r\to\infty\ \text{和}\ r_*\to+\infty, \tag{149}$$

和

$$Z\to B\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\sigma r_*}\ \text{沿分支}\ r\to r_+ +0\ \ \text{和}\ r_*\to+\infty. \tag{150}$$

而且, 由对现在所考虑的 $|s|=\dfrac{1}{2}$ 情形的第 8 章方程 (140), Z 和 Z^* 的朗斯基行列式在奇点 $r=|\alpha|$ 的两侧必定保持相同, 与对整数自旋所要求的符号改变形成对照. 因此, 对入射中微子波的守恒律将继续是

$$\mathbb{R}+\mathbb{T}=1\ \ \text{也对}\ \ 0<\sigma<\sigma_s. \tag{151}$$

也就是说, 超辐射将不出现, 这一事实也可从表 XI 的数值结果看出.

现在简短地指出解 $Z_\pm$ 在 $r=|\alpha|$ 的邻域的行为.

令

$$x=r-|\alpha|, \tag{152}$$

在 $r=|\alpha|$ 的邻域, 支配 $Z_\pm$ 的方程成为

$$x\frac{\mathrm{d}^2Z_\pm}{\mathrm{d}x^2}-\frac{\mathrm{d}Z_\pm}{\mathrm{d}x}\pm\frac{\lambda}{\Delta_{|\alpha|}^{1/2}}Z_\pm=0. \tag{153}$$

而这个方程的解是

$$Z_+=y\mathscr{C}_2(\sqrt{y})\ \ \text{对}\ \ V_+\ \ \text{和}\ Z_-=y\mathscr{C}_2(\mathrm{i}\sqrt{y})\ \ \text{对}\ V_-, \tag{154}$$

其中

$$y = 4\lambda x/\Delta_{|\alpha|}^{1/2}, \tag{155}$$

而 $\mathscr{C}_2$ 表示二阶贝塞尔 (Bessel) 方程的一般解. 由已知的这种 $Z_\pm$ 在奇点的行为, 原则上没有困难来穿过 $r = |\alpha|$ 对方程积分, 并以第 8 章 §75 (c) 对电磁波所描述的方式来完成解.

上面的考虑所揭示的主要物理事实是, 自旋为 1/2 的粒子不显示任何超辐射. (在 §107 将对有质量粒子也证实这一事实.) 从解析的角度看, 这一状况的根源, 第一是势垒有三阶极 (而不是整数自旋粒子情形的四阶极), 第二是朗斯基行列式 $[Z, Z^*]$ 在越过 V 的奇点时保持不变 (而不是整数粒子情形所要求的改变符号).

[552]

106. 守恒流和狄拉克方程向一维波动方程形式的简化

在 §104 已显示, 克尔几何中描述自旋 1/2 粒子的基旋量 P^A 和 $\overline{Q}^{A'}$ 的解能表示为以下形式,

$$\left.\begin{aligned} P^0 &= \frac{1}{\overline{\rho}^*\sqrt{2}} R_{-\frac{1}{2}}(r) S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \quad \overline{Q}^{0'} = -\frac{1}{\overline{\rho}\sqrt{2}} R_{-\frac{1}{2}}(r) S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \\ P^1 &= R_{+\frac{1}{2}}(r) S_{+\frac{1}{2}}(\theta), \quad \text{和} \quad \overline{Q}^{1'} = R_{+\frac{1}{2}}(r) S_{-\frac{1}{2}}(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

对 P^0 和 $\overline{Q}^{0'}$ 的表示中已恢复了在从方程 (116) 和 (117) 过渡到方程 (119) — (122) 时略去的因子 $1/\sqrt{2}$.

支配径向函数的方程是

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \mathrm{i}\frac{r^2+\alpha^2}{\Delta}\sigma \right) P_{+\frac{1}{2}} = (\lambda - \mathrm{i}m_e r) P_{-\frac{1}{2}} \tag{157}$$

和

$$\Delta^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} + \mathrm{i}\frac{r^2+\alpha^2}{\Delta}\sigma \right) P_{-\frac{1}{2}} = (\lambda + \mathrm{i}m_e r) P_{+\frac{1}{2}}, \tag{158}$$

其中

$$P_{+\frac{1}{2}} = \Delta^{\frac{1}{2}} R_{+\frac{1}{2}} \quad \text{和} \quad P_{-\frac{1}{2}} = R_{-\frac{1}{2}}. \tag{159}$$

从方程 (157) 和 (158) 不难得出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(|P_{+\frac{1}{2}}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}|^2) = 0. \tag{160}$$

一个包含朗斯基行列式 $[P_{-\frac{1}{2}}, P^*_{+\frac{1}{2}}]$ 的等价关系是

$$\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\lambda + \mathrm{i}m_e r}[P_{-\frac{1}{2}}, P^*_{+\frac{1}{2}}] = \text{ 常量}. \tag{161}$$

即将看到, 守恒性由方程 (160) 保证的量 $(|P_{+\frac{1}{2}}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}|^2)$ 是下式所给的守恒净粒子流,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} J^r(\sqrt{-g})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \tag{162}$$

其中

$$\sqrt{-g} = \rho^2 \sin\theta = (r^2 + a^2\cos^2\theta)\sin\theta, \tag{163}$$

而 [553]

$$\frac{1}{\sqrt{2}}J^r = \sigma^r_{AB'}(P^A\overline{P}^{B'} + Q^A\overline{Q}^{B'}) \tag{164}$$

是狄拉克流 J^i 的径向分量.

对所选的基矢 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\overline{\boldsymbol{m}}$,

$$\sigma^r{}_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} l^r & m^r \\ \overline{m}^r & n^r \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\Delta/2\rho^2. \end{vmatrix}. \tag{165}$$

利用方程 (156)、(164) 和 (165) 来计算 J^r, 得

$$J^r = \frac{1}{2\rho^2}\left(|R_{-\frac{1}{2}}|^2 - \Delta|R_{+\frac{1}{2}}|^2\right)\left(S^2_{-\frac{1}{2}} + S^2_{+\frac{1}{2}}\right). \tag{166}$$

假定角向函数 $S_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$ 归化为 1, 由方程 (162)、(163) 和 (166) 得

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2\pi\left(|P_{+\frac{1}{2}}|^2 - |P_{-\frac{1}{2}}|^2\right) = \text{常量}. \tag{167}$$

(a) 狄拉克方程简化为一维波动方程形式

由将 r_* 作为独立变量的通常选择, 方程 (119) 和 (120) 取形式 (见方程 (132) 和 (133))

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right)P_{+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda - \mathrm{i}m_e r)P_{-\frac{1}{2}} \tag{168}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right)P_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda + \mathrm{i}m_e r)P_{+\frac{1}{2}}. \tag{169}$$

令

$$\vartheta = \tan^{-1}(m_e r/\lambda). \tag{170}$$

于是

$$\cos\vartheta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + m_e^2 r^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{m_e r}{\sqrt{\lambda^2 + m_e^2 r^2}}, \tag{171}$$

和

$$(\lambda \pm \mathrm{i}m_e r) = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\vartheta}\sqrt{\lambda^2 + m_e^2 r^2}; \tag{172}$$

而方程 (168) 和 (169) 可写为另外的形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\right) P_{+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{1/2} P_{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{m_e r}{\lambda}\right)\right] \tag{173}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\right) P_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{1/2} P_{+\frac{1}{2}} \exp\left[+\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{m_e r}{\lambda}\right)\right]. \tag{174}$$

[554] 由下列代换可消去方程 (173) 和 (174) 右边的指数因子,

$$\left.\begin{aligned} P_{+\frac{1}{2}} &= \psi_{+\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{m_e r}{\lambda}\right)\right] \\ \text{和}\quad P_{-\frac{1}{2}} &= \psi_{-\frac{1}{2}} \exp\left[+\frac{1}{2}\mathrm{i}\tan^{-1}\left(\frac{m_e r}{\lambda}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{175}$$

于是得到

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{+\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}r_*} - \mathrm{i}\sigma\left(1 + \frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\lambda m_e}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + m_e^2 r^2}\right)\psi_{+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{1/2}\psi_{-\frac{1}{2}} \tag{176}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\psi_{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}r_*} + \mathrm{i}\sigma\left(1 + \frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\lambda m_e}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + m_e^2 r^2}\right)\psi_{-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{\varpi^2}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{1/2}\psi_{+\frac{1}{2}}. \tag{177}$$

可以在左边第一项前面得到与第二项前面同样的因子, 办法是将独立变量改为

$$\hat{r}_* = r_* + \frac{1}{2\sigma}\tan^{-1}\frac{m_e r}{\lambda}, \tag{178}$$

相应有

$$\mathrm{d}\hat{r}_* = \left(1 + \frac{\Delta}{\varpi^2}\frac{\lambda m_e}{2\sigma}\frac{1}{\lambda^2 + m_e^2 r^2}\right)\mathrm{d}r_*. \tag{179}$$

于是, 由变量改变 (175) 和 (178), 得到方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*} - \mathrm{i}\sigma\right)\psi_{+\frac{1}{2}} = W\psi_{-\frac{1}{2}} \tag{180}$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*} + \mathrm{i}\sigma\right)\psi_{-\frac{1}{2}} = W\psi_{+\frac{1}{2}}, \tag{181}$$

其中

$$W = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{3/2}}{\varpi^2(\lambda^2 + m_e^2 r^2) + \lambda m_e \Delta/2\sigma}. \tag{182}$$

现在令

$$Z_\pm = \psi_{+\frac{1}{2}} \pm \psi_{-\frac{1}{2}}, \tag{183}$$

可将方程 (180) 和 (181) 结合给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*} - W\right) Z_+ = \mathrm{i}\sigma Z_- \quad 和 \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*} + W\right) Z_- = \mathrm{i}\sigma Z_+. \tag{184}$$

从这些方程不难得出一维波动方程对 [555]

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{r}_*^2} + \sigma^2\right) Z_\pm = V_\pm Z_\pm, \tag{185}$$

其中

$$\begin{aligned} V_\pm = W^2 \pm \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\hat{r}_*} &= \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{3/2}}{[\varpi^2(\lambda^2 + m_e^2 r^2) + \lambda m_e \Delta/2\sigma]^2} \\ &\quad \left[\Delta^{\frac{1}{2}}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{3/2} \pm \{(r-M)(\lambda^2 + m_e^2 r^2) + 3m_e^2 r\Delta\}\right] \\ &\quad \mp \frac{\Delta^{3/2}(\lambda^2 + m_e^2 r^2)^{5/2}}{[\varpi^2(\lambda^2 + m_e^2 r^2) + \lambda m_e \Delta/2\sigma]^3} \\ &\quad [2r(\lambda^2 + m_e^2 r^2) + 2m_e^2 \varpi^2 r + \lambda m_e (r-M)/\sigma]. \end{aligned} \tag{186}$$

可见方程 (184) 和 (185) 是与适于无质量中微子的方程 (137) 和 (138) 完全相同的形式.

(*b*) 狄拉克方程在平直空间椭球坐标系中的分离形式

很清楚, 通过在方程 (157) 和 (158) 及其后继版本中令

$$M = 0 \quad 和 \quad \Delta = r^2 + a^2 \tag{187}$$

将得到狄拉克方程在平直空间椭球坐标系中的分离形式. 因为对 $M = 0$, 克尔度规成为

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \left[\frac{r^2 + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2}\mathrm{d}r^2 + (r^2 + a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 + (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right], \tag{188}$$

再令

$$r = a\sinh\eta, \tag{189}$$

度规简化为对椭球坐标系的标准形式, 即,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2[(\cosh^2\eta - \sin^2\theta)(\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\theta^2) + \cosh^2\eta\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \tag{190}$$

由于狄拉克方程在椭球坐标系中的分离看来并非普遍为人所知, 这里给出方程的适于此情形的明晰形式.

[556] 同样用代换 (156), 基本径向方程是

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}-\mathrm{i}\left(\sigma+\frac{am}{r^2+a^2}\right)\right]P_{+\frac{1}{2}}=\frac{\lambda-\mathrm{i}m_e r}{\sqrt{r^2+a^2}}P_{-\frac{1}{2}} \tag{191}$$

和

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}+\mathrm{i}\left(\sigma+\frac{am}{r^2+a^2}\right)\right]P_{-\frac{1}{2}}=\frac{\lambda+\mathrm{i}m_e r}{\sqrt{r^2+a^2}}P_{+\frac{1}{2}}, \tag{192}$$

其中

$$P_{+\frac{1}{2}}=(r^2+a^2)^{1/2}R_{+\frac{1}{2}} \text{ 和 } P_{-\frac{1}{2}}=R_{-\frac{1}{2}}. \tag{193}$$

进一步改变依赖的和独立的变量,

$$Z_{\pm}=P_{+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta_1/2}\pm P_{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta_1/2} \tag{194}$$

和

$$\hat{r}_*=r+\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{2}\vartheta_1+m\vartheta_2\right) \tag{195}$$

其中

$$\vartheta_1=\tan^{-1}(m_e r/\lambda) \text{ 和 } \vartheta_2=\tan^{-1}(r/a), \tag{196}$$

方程成为简单的形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\hat{r}_*^2}+\sigma^2\right)Z_{\pm}=V_{\pm}Z_{\pm}, \tag{197}$$

其中

$$V_{\pm}=W^2\pm\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\hat{r}_*}, \tag{198}$$

和

$$W=\frac{(r^2+a^2)^{1/2}(\lambda^2+m_e^2r^2)^{3/2}}{(r^2+a^2)(\lambda^2+m_e^2r^2)+[am(\lambda^2+m_e^2r^2)+\frac{1}{2}\lambda m_e(r^2+a^2)]\sigma^{-1}}. \tag{199}$$

最后可注意, 支配角向函数 $S_{\pm\frac{1}{2}}$ 的方程 (121)、(122) 和 (124) 对平直空间并无改变.

107. 反射和透射问题

粒子在与黑洞相互作用中显示其质量的最重要方面是势 $V_{\pm}$ 对 $r\to\infty$ 的行为. 与迄今遇到的对无质量粒子的势不同, 由方程 (186) 给出的势 $V_{\pm}$ 对 $r\to\infty$ 并不以 r^{-2} 行为趋于零, 而是有

$$V_{\pm}\to m_e^2-\frac{2Mm_e^2}{r}+O(r^{-2})(r\to\infty). \tag{200}$$

作为结果, 波动方程 (185) 的解 $Z_\pm$ 对 $r\to\infty$ 的渐近行为是 [557]

$$Z_\pm \to \exp\left\{\pm \mathrm{i}\left[(\sigma^2-m_e^2)^{1/2}r+\frac{Mm_e^2}{(\sigma^2-m_e^2)^{1/2}}\lg(r/2M)\right]\right\}\quad (r\to\infty). \tag{201}$$

解的这种行为意味着, 对无穷远处的真实波 (入射或反射), σ 必定超过 m_e (记住 σ 总为正数的约定). 对 σ 的这个限制是与无穷远处自由粒子的能量必定超过其静能量的要求一致的.

(a) 朗斯基行列式 $[Z_\pm, Z_\pm^*]$ 对 r 的范围 $r_+<r<\infty$ 的守恒性

可以看到, 方程 (186) 定义的势 $V_\pm$ 当有 $\sigma=\sigma_s, \Delta=0$, 和下式时在视界 r_+ 上变为无穷大,

$$\varpi_+^2 = r_+^2+a^2+am/\sigma = 2Mr_+ + am/\sigma = 0. \tag{202}$$

如果 λ 成为负值 (如它对 $m=-1/2$ 和 $\alpha\sigma\geqslant 1.8$ 时那样, 见附录, 表 VII), 那么势还可以有另外的奇点. 虽然并没有原则性困难来对支配 $Z_\pm$ 的方程越过这些奇点进行积分 (如在第 8 章 §75 (*c*) 和 §76 (*c*) 以及上面的§105 已说明的), 但还是需要知道朗斯基行列式 $[Z_\pm, Z_\pm^*]$ 在越过奇点时的行为. 现在来证明, 事实上朗斯基行列式 $[Z_\pm, Z_\pm^*]$ 对 r 的整个允许范围 $r_+<r<\infty$ 都保持同样的常数值. 按照方程 (167)、(175)、(183) 和 (184), 可相继得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\frac{\partial N}{\partial t} &= |P_{+\frac{1}{2}}|^2-|P_{-\frac{1}{2}}|^2 = |\psi_{+\frac{1}{2}}|^2-|\psi_{-\frac{1}{2}}|^2\\
&= \frac{1}{4}|Z_+ + Z_-|^2 - \frac{1}{4}|Z_+ - Z_-|^2 = Z_+^{(\mathrm{real})}Z_-^{(\mathrm{real})}+Z_+^{(\mathrm{im})}Z_-^{(\mathrm{im})}\\
&= \frac{1}{\sigma}\left[Z_+^{(\mathrm{real})}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*}-W\right)Z_+^{(\mathrm{im})} - Z_+^{(\mathrm{im})}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*}-W\right)Z_+^{(\mathrm{real})}\right]\\
&= \frac{1}{\sigma}\left[Z_+^{(\mathrm{real})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*}Z_+^{(\mathrm{im})} - Z_+^{(\mathrm{im})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*}Z_+^{(\mathrm{real})}\right]\\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}\sigma}\left(Z_+\frac{\mathrm{d}Z_+^*}{\mathrm{d}\hat{r}_*}-Z_+^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{r}_*}Z_+\right).
\end{aligned}\tag{203}$$

由 $\partial N/\partial t$ 对 $r_+<r<\infty$ 保持同样的常数值, 可得朗斯基行列式 $[Z_+, Z_+^*]$ 对 r 的同样范围守恒. 而 $[Z_-, Z_-^*]$ 的守恒性也可类似地得到.

再转到与方程 (185) 相关联的反射和透射问题, 必须寻找 Z_+ 的 (例如) 有 [558]
着下列渐近行为的解,

$$\begin{aligned}
Z_+ \to{}& \exp\left\{+\mathrm{i}\left[(\sigma^2-m_e^2)^{1/2}\hat{r}_*+\frac{Mm_e^2}{\sqrt{\sigma^2-m_e^2}}\int \mathrm{d}\hat{r}_*/r\right]\right\}\\
&+ R_+(\sigma)\exp\left\{-\mathrm{i}\left[(\sigma^2-m_e^2)^{1/2}\hat{r}_*+\frac{Mm_e^2}{\sqrt{\sigma^2-m_e^2}}\int \mathrm{d}\hat{r}_*/r\right]\right\}\\
&(r\to\infty)
\end{aligned}\tag{204}$$

和

$$Z_+ \to T_+(\sigma)\exp(\mathrm{i}\sigma\hat{r}_*) \quad (r \to r_+ + 0). \tag{205}$$

对于有着这些渐近行为的解,

$$\left(Z_+\frac{\mathrm{d}Z_+^*}{\mathrm{d}\hat{r}_*} - Z_+^*\frac{\mathrm{d}Z_+}{\mathrm{d}\hat{r}_*}\right)_{r=r_+} = -2\mathrm{i}\sigma|T_+(\sigma)|^2 \tag{206}$$

和

$$\left(Z_+\frac{\mathrm{d}Z_+^*}{\mathrm{d}\hat{r}_*} - Z_+^*\frac{\mathrm{d}Z_+}{\mathrm{d}\hat{r}_*}\right)_{r\to\infty} = -2\mathrm{i}\left[1-|R_+(\sigma)|^2\right]\sqrt{\sigma^2-m_e^2}. \tag{207}$$

于是, 由已证明的朗斯基行列式的守恒性 (对所有情形),

$$1-|R_+(\sigma)|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-m_e^2}}|T_+(\sigma)|^2. \tag{208}$$

所以, 反射系数总是小于 1, 超辐射不能发生. 还有, 由方程 (203) 和 (204) 的比较可得

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{r_+} = |T_+(\sigma)|^2 > 0. \tag{209}$$

所以, 越过事件视界的净粒子流总是正值的.

(*b*) **穿过事件视界能流的正值性**

借助于支配相关问题的方程所证明的自旋 1/2 粒子超辐射缺失, 能够直接追踪到由这些粒子的量子理论所给的能量 – 动量旋量, 即,

$$\begin{aligned} T_{AA'BB'} = \frac{1}{2}\mathrm{i}[&P_A\overline{P}_{A';BB'} - \overline{P}_{A'}P_{A;BB'} + P_B\overline{P}_{B';AA'} - \overline{P}_{B'}P_{B;AA'} \\ &-Q_A\overline{Q}_{A';BB'} + \overline{Q}_{A'}Q_{A;BB'} - Q_B\overline{Q}_{B';AA'} + \overline{Q}_{B'}Q_{B;AA'}]. \end{aligned} \tag{210}$$

用这个能量 – 动量旋量, 能在已写出克尔度规的坐标系中 (第 6 章方程 (134) 和 (135)) 直接计算 (见第 8 章方程 (247) 和 (253))

[559]

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_r = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T^r{}_t(\sqrt{-g})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{211}$$

和

$$\left(\frac{\partial L_z}{\partial t}\right)_r = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} T^r{}_\varphi(\sqrt{-g})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\sigma}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{r.} \tag{212}$$

由于

$$T^r{}_t = -\frac{\Delta}{\rho^2}T_{rt}, \quad T^r{}_\varphi = -\frac{\Delta}{\rho^2}T_{r\varphi}, \tag{213}$$

和

$$\sqrt{-g} = \rho^2\sin\theta, \tag{214}$$

故可将方程 (211) 和 (212) 结合而给出

$$(r^2+a^2+am/\sigma)\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_r=\varpi^2\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_r=2\pi\int_0^\pi[\Delta(r^2+a^2)T_{rt}+a\Delta T_{r\varphi}]\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{215}$$

另一方面, 借助于第 6 章方程 (170) 所给的基矢 $\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示式, 不难验证

$$\Delta(r^2+a^2)T_{rt}+a\Delta T_{r\varphi}=\frac{1}{4}\Delta^2T_{ij}l^il^j-\rho^4T_{ij}n^in^j. \tag{216}$$

相应地有

$$\varpi^2\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_r=2\pi\int_0^\pi\left(\frac{1}{4}\Delta^2T_{ij}l^il^j-\rho^4T_{ij}n^in^j\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{217}$$

现在由方程 (210) 所给的能量 – 动量旋量, 利用方程 (159) 得到, 随着向视界趋近,

$$\begin{aligned}T_{ij}l^il^j&=o^A\bar{o}^{A'}o^B\bar{o}^{B'}T_{AA'BB'}\\&=io^A\bar{o}^{A'}o^B\bar{o}^{B'}[P_A\overline{P}_{A';BB'}-\overline{P}_{A'}P_{A;BB'}-Q_A\overline{Q}_{A';BB'}+\overline{Q}_{A'}Q_{A;BB'}]\\&=i[P_0D\overline{P}_{0'}-\overline{P}_{0'}DP_0-Q_0D\overline{Q}_{0'}+\overline{Q}_{0'}DQ_0]\\&=i[P^1D\overline{P}^{1'}-\overline{P}^{1'}DP^1-Q^1D\overline{Q}^{1'}+\overline{Q}^{1'}DQ^1]\\&\to4\sigma\frac{\varpi_+^2}{\Delta}|R_{+\frac{1}{2}}|^2(S^2_{+\frac{1}{2}}+S^2_{-\frac{1}{2}}).\end{aligned} \tag{218}$$

类似地可得到 [560]

$$\begin{aligned}T_{ij}n^in^j&=l^A\bar{l}^{A'}l^B\bar{l}^{B'}T_{AA'BB'}\\&\to\sigma\frac{\varpi_+^2}{\rho^4}|R_{-\frac{1}{2}}|^2(S^2_{+\frac{1}{2}}+S^2_{-\frac{1}{2}}).\end{aligned} \tag{219}$$

将表示式 (218) 和 (219) 代入方程 (217), 并记得已将函数 $S_{+\frac{1}{2}}(\theta)$ 和 $S_{-\frac{1}{2}}(\theta)$ 归化为 1, 可得下式,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)_{r_+}=4\pi\sigma[|P_{+\frac{1}{2}}|^2-|P_{-\frac{1}{2}}|^2]. \tag{220}$$

于是, 单位时间、单位立体角越过半径 r 面的净能流是

$$\left(\frac{\partial^2E}{\partial t\partial\Omega}\right)_{r_+}=\sigma[|P_{+\frac{1}{2}}|^2-|P_{-\frac{1}{2}}|^2=\frac{\sigma}{2\pi}\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_{r_+}. \tag{221}$$

由方程 (209), 这个流在越过事件视界时总是正值的.

(c) 超辐射缺失的量子起因

自旋 1/2 粒子所表现的表观上违反霍金面积定理的超辐射缺失, 是与量子理论提供的能量 – 动量旋量 (210) 违反下列弱能量条件的事实相关联的,

$$T_{ij}k^ik^j > 0, \tag{222}$$

其中 k 当 $\sigma < \sigma_s$ 时是任意类时矢量. 由选择,

$$k^i = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\Delta l^i + \rho^2 n^i\right)\left(k^i k_i = \frac{\Delta\rho^2}{r^4} > 0 \text{ 当 } r > r_+\right), \tag{223}$$

有

$$T_{ij}k^ik^j = \frac{1}{r^4}\left(\frac{1}{4}\Delta^2 T_{ij}l^il^j + \rho^4 T_{ij}n^in^j + \rho^2\Delta T_{ij}l^in^j\right). \tag{224}$$

在方程 (218) 和 (219) 中已计算了 $T_{ij}l^il^j$ 和 $T_{ij}n^in^j$. 类似地可得到

$$\begin{aligned} T_{ij}l^in^j &= o^A\bar{o}^{A'}l^B\bar{l}^{B'}T_{AA'BB'} \\ &\to \sigma\frac{\varpi_+^2}{\rho^2\Delta}(|P_{+\frac{1}{2}}|^2 + |P_{-\frac{1}{2}}|^2)(S^2_{+\frac{1}{2}} + S^2_{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \tag{225}$$

现在将方程 (218)、(219)、(224) 和 (225) 结合, 得

$$T_{ij}k^ik^j \to 2\frac{\sigma\varpi_+^2}{r_+^4}(|P_{+\frac{1}{2}}|^2 + |P_{-\frac{1}{2}}|^2)(S^2_{+\frac{1}{2}} + S^2_{-\frac{1}{2}}); \tag{226}$$

对 $\sigma < \sigma_s$ 为负, 从而违反了能量条件.

[561] 虽然以上讨论澄清了狄拉克波被克尔黑洞反射和透射现象的诸多方面, 但仍有实质性的问题尚未解答. 可以提问: 当 λ 为负值时由 W 的分母中的 $\lambda m_e\Delta/2\sigma$ 项导出的、势 $V_\pm$ 在事件视界之外对频率 $\sigma > m_e$ 的奇异性会发生吗? 这在史瓦西几何中是不会发生的. 如果它在克尔几何中真的发生 (或许对某个 $\sigma > \sigma_s$), 那么就必须预期反射系数在那个频率达到极大值 1, 然后减小. 在这种情形可得结论, 自旋 1/2 粒子被克尔黑洞的反射表现出克莱因 (Klein) 佯谬. 这显然是一种推理; 但在确定特征值 λ 对 m_e、m 和 σ 的依赖性之前是不能解答的, 而这种依赖性尚未被考察.

文献注释

对克尔几何中狄拉克方程的分离来自:

1. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 349, 571–5 (1976).

如在此文中指明的, 在导出的方程中令 $M = 0$, 可得到平直空间椭球坐标系中狄拉克方程的分离形式 (见 §106 (*b*)).

文献 (1) 的方法自然地和简单地扩展到任何 D 型时空:

2. R. Güven, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 356, 465–70 (1977).

对支配无质量二分量中微子的外尔方程的分离更早地由:

3. W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.*, 31, 1265–7 (1973).

4. S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, 185, 635–47 (1973) (见附录 B)

§102. 时空结构研究的旋量形式是由彭罗斯创始和发展:

5. R. Penrose, *Ann. Phys.*, 10, 171–201 (1960).

6. ——, *An Analysis of the Structure of Space-Time*, Cambridge University Adams Prize Essay, Cambridge, England, 1966.

7. —— in *Batelle Recontres (1967 Lectures in Mathematical Physics)*,121–35, edited by C. M. Dewitt and J. A. Wheeler, W. A. Benjamin Inc., New York, 1968.

关于纽曼 – 彭罗斯形式旋量基的基本文献当然是:

8. E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, 3, 566–79 (1962).

§102 (a) 和 § (b). 正文中的旋量分析讲述在很大程度上是基于作者对狄拉克在 1932 年春讲授的旋量分析和电子相对论课程所作的笔记. 该课程的风格和内容在此后至今的五十年中看来并未褪色.

§102 (c) 和 § (d). 这两节的讲述很大地得益于与弗雷德曼的讨论. 特别是, 我在 § (d) 中沿用了他表示协变导数的方式.

§103. 显然对平直空间的狄拉克方程不需要参考文献. 但是, 作者发现 "朗道和栗弗席兹" 中的处理对于将狄拉克方程转换为纽曼 – 彭罗斯形式的目的最为恰当:

9. V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii in *L. D. Landau and E. M. Lifshitz Courses in Theoretical Physics*, Vol. 4, Chap. 3, §20, 62–3, Pergamon Press, Oxford, 1971. [562]

§104. 本节在很大程度上是文献 (1) 中分析的重复. 同样方程的另一种导出可见:

10. B. Carter and R. G. McLenaghan in *Proc. 2d Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, edited by R. Ruffini, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

§105. 本节的分析是下列文献中所作处理的简化版本:

11. S. Chandrasekhar and S. Detweiler, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 352, 325–38 (1977).

另见:

12. W. G. Unruh, *Phys. Rev. D*, 10, 3194–205 (1974).

在史瓦西几何框架里, 问题已由下列文献考虑:

13. D. R. Brill and J. A. Wheeler, *Rev. Mod. Phys.*, 465–79 (1957).

14. J. B. Hartle in *Magic without Magic: John Archibald Wheeler*, 259–75, edited by J. R. Klauder, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1972.

§106. 本节是基于作者的一个未发表的工作. 等价的结果已发表在:

15. R. Güven, *Phys. Rev. D*, 16, 1706–11 (1977).

另见文献 12.

§107. 克尔黑洞对狄拉克波反射的超辐射缺失这一事实的严格论证见文献 15 和紧随狄拉克方程被分离后的几篇文献:

16. M. Martellini and A. Treves, *Phys. Rev. D*, 15, 3060–4 (1977).

17. C. H. Lee, *Phys. Lett.*, 68B, 152–6 (1977).

18. B. R. Iyer and A. Kumar, *Phys. Rev. D*, 18, 4799–801 (1978).

关于在结尾段落提到的克莱因佯谬见:

19. O. Klein, *Z. f. Physik*, 157–65 (1929).

20. F. Sauter, *Z. f. Physik*, 69, 742–64 (1931).

关于被分离狄拉克方程在正文中未提及的方面可见:

21. B. Carter and R. G. McLenaghan, *Phys. Rev. D*, 19, 1093–7 (1979).

22. B. R. Iyer and A. Kumar, *Pramāna*, 8, 500–11 (1977).

23. ——, ibid., 11, 171–85 (1978).

24. ——, ibid., 12, 103–20 (1979).

第十一章

其它解; 其它方法

108. 引言 [563]

上一章对自旋 1/2 粒子的处理完成了对史瓦西和克尔解的研究, 第 5 章离题到雷斯纳 – 诺兹特朗解在很大程度上是由于考虑到这样能使得对史瓦西解有更深的理解, 并能提供通向克尔解的便利桥梁. 因此, 可能有人会认为, 克尔 – 纽曼解, 它和克尔解的关系正与雷斯纳 – 诺兹特朗解和史瓦西解的关系相同, 也能使得对克尔解有类似的更深理解. 虽然沿克尔解路线 (§54) 对克尔 – 纽曼解的推导 (§110) 的确作出了基本概念的一些有用推广, 但是第 9 章中处理克尔黑洞引力扰动的方法却不能由任何自然的途径扩展到处理克尔 – 纽曼黑洞的电磁和引力双重扰动. 扰动的克尔和克尔 – 纽曼时空这种明显是本质性的差异的根源, 可能深藏于扰动的克尔 – 纽曼时空中自旋为 1 和自旋为 2 场的不可分解的耦合, 只是在扰动的雷斯纳 – 诺兹特朗时空中这种耦合才有可能由于非常特别的原因而破开.

除克尔 – 纽曼解外, 还将考虑其它两类解: 一类是静态但不是渐近平坦的轴对称解; 另一类解是提供给任意数量的孤立黑洞, 是牛顿引力理论中可能的静态平衡安排的相对论类似, 该平衡是指任意数量的带电质点的相互引力精确地被库仑斥力抵消.

本章 (和本书) 的结尾是很长的一节, 是关于克尔黑洞稳定性的仍未解决的问题和对处理时空扰动的一种替代方法的初步考虑.

109. 支配定常态轴对称时空的爱因斯坦 – 麦克斯韦方程 [564]

如第 5 章, 从标准形式的度规开始,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t)^2 - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \qquad (1)$$

其中 ν、ψ、ω、μ_2 和 μ_3 都只是 x^2 和 x^3 的函数, 并有对 μ_2 和 μ_3 加上一个坐标条件的自由.

由于现在关心的是爱因斯坦 – 麦克斯韦方程, 所以首先考虑有着所选度规形式的时空的麦克斯韦方程. 这些方程不难由对第 2 章 §15 中方程的适当具体化而写出. 由第 2 章方程 (95) (a) — (h) 可见, 在定常态轴对称时空中,

$$F_{01} = F_{23} = 0; \tag{2}$$

而剩余的方程是

$$(e^{\psi+\mu_2}F_{12})_{,3} - (e^{\psi+\mu_3}F_{13})_{,2} = 0, \tag{3}$$

$$(e^{\psi+\mu_3}F_{02})_{,2} + (e^{\psi+\mu_2}F_{03})_{,3} = 0, \tag{4}$$

$$(e^{\nu+\mu_3}F_{12})_{,2} + (e^{\nu+\mu_2}F_{13})_{,3} = e^{\psi+\mu_3}F_{02}\omega_{,2} + e^{\psi+\mu_2}F_{03}\omega_{,3}, \tag{5}$$

$$(e^{\nu+\mu_2}F_{02})_{,3} - (e^{\nu+\mu_3}F_{03})_{,2} = e^{\psi+\mu_2}F_{12}\omega_{,3} - e^{\psi+\mu_3}F_{13}\omega_{,2}. \tag{6}$$

由方程 (3) 和 (4) 很明显, 麦克斯韦张量的两对分量 $(F_{12}、F_{13})$ 和 $(F_{02}、F_{03})$ 能从两个势 A 和 B 以如下方式导出,

$$\left.\begin{aligned} e^{\psi+\mu_2}F_{12} = A_{,2}; \quad e^{\psi+\mu_2}F_{03} = -B_{,2}, \\ e^{\psi+\mu_3}F_{13} = A_{,3}; \quad e^{\psi+\mu_3}F_{02} = +B_{,3}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

用势 A 和 B 表示, 方程 (5) 和 (6) 成为

$$(e^{-\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}A_{,2})_2 + (e^{-\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}A_{,3})_{,3} = \omega_{,2}B_{,3} - \omega_{,3}B_{,2}, \tag{8}$$

$$(e^{-\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}B_{,2})_{,2} + (e^{-\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}B_{,3})_{,3} = \omega_{,3}A_{,2} - \omega_{,2}A_{,3}. \tag{9}$$

由麦克斯韦场的能量 – 动量张量

$$T_{ab} = \eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \frac{1}{4}\eta_{ab}F_{ef}F^{ef}, \tag{10}$$

爱因斯坦场方程是

$$\begin{aligned} R_{ab} &= -2T_{ab} \\ &= -2\eta^{cd}F_{ac}F_{bd} - \eta_{ab}[(F_{02})^2 + (F_{03})^2 - (F_{12})^2 - (F_{13})^2]. \end{aligned} \tag{11}$$

[565] 利用方程 (7) 来计算 R_{ab} 的各个分量, 得到

$$R_{00} = R_{11} = e^{-2\psi-2\mu_2}[(A_{,2})^2 + (B_{,2})^2] + e^{-2\psi-2\mu_3}[(A_{,3})^2 + (B_{,3})^2], \tag{12}$$

$$R_{22} = -R_{33} = e^{-2\psi-2\mu_2}[(A_{,2})^2 + (B_{,2})^2] - e^{-2\psi-2\mu_3}[(A_{,3})^2 + (B_{,3})^2], \tag{13}$$

$$R_{10} = 2e^{-2\psi-\mu_2-\mu_3}(A_{,2}B_{,3} - A_{,3}B_{,2}), \tag{14}$$

$$R_{23} = 2e^{-2\psi-\mu_2-\mu_3}(A_{,2}A_{,3} + B_{,2}B_{,3}). \tag{15}$$

所需的场方程现在可由将上面方程的右边与用度规表示的里奇 (或爱因斯坦) 张量的对应表示相等而得出. 后者可从第 6 章方程 (5) — (13) 直接读取. 于是可得, 第 6 章方程 (12)、(13)、(7)、(8)、(9) 和 (10) 现在分别由下列各式代替,

$$(e^{\beta+\mu_3-\mu_2}\nu_{,2})_{,2}+(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\nu_{,3})_{,3}$$
$$=\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]$$
$$+e^{-\psi+\nu}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]+e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}, \tag{16}$$

$$(e^{\beta+\mu_3-\mu_2}\psi_{,2})_{,2}+(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\psi_{,3})_{,3}$$
$$=-\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]$$
$$-e^{-\psi+\nu}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]+e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}, \tag{17}$$

$$(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}\omega_{,2})_{,2}+(e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,3})_{,3}=4(A_{,2}B_{,3}-A_{,3}B_{,2}), \tag{18}$$

$$(\psi+\nu)_{,2,3}-(\psi+\nu)_{,2}\mu_{2,3}-(\psi+\nu)_{,3}\mu_{3,2}+\psi_{,2}\psi_{,3}+\nu_{,2}\nu_{,3}$$
$$=\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3}-2e^{-2\psi}(A_{,2}A_{,3}+B_{,2}B_{,3}), \tag{19}$$

$$e^{-2\mu_3}[(\psi+\nu)_{,3,3}+(\psi+\nu)_{,3}(\nu-\mu_3)_{,3}+\psi_{,3}\psi_{,3}]$$
$$+e^{-2\mu_2}[\nu_{,2}(\psi+\mu_3)_{,2}+\psi_{,2}\mu_{3,2}]=-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2]$$
$$+e^{-2\psi}\{e^{-2\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]-e^{-2\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}, \tag{20}$$

和

$$e^{-2\mu_2}[(\psi+\nu)_{,2,2}+(\psi+\nu)_{,2}(\nu-\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\nu_{,3}(\psi+\mu_2)_{,3}+\psi_{,3}\mu_{2,3}]=+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[e^{-2\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{-2\mu_3}(\omega_{,3})^2]$$
$$-e^{-2\psi}\{e^{-2\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]+e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}, \tag{21}$$

其中, 如第 6 章,

$$\beta=\psi+\nu. \tag{22}$$

方程 (16) 和 (17) 相加和相减给出

$$[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}+[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}=0 \tag{23}$$

和 [566]

$$[e^{\beta+\mu_3-\mu_2}(\psi-\nu)_{,2}]_{,2}+[e^{\beta+\mu_2-\mu_3}(\psi-\nu)_{,3}]_{,3}$$
$$=-e^{3\psi-\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]$$
$$-2e^{-\psi+\nu}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]+e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}. \tag{24}$$

可见方程 (23) 与对纯真空得到的第 6 章方程 (14) 相同.

方程 (20) 和 (21) 相加同样给出方程 (23), 而相减给出

$$\begin{aligned}
&4e^{\mu_3-\mu_2}(\beta_{,2}\mu_{3,2}+\psi_{,2}\nu_{,2})-4e^{\mu_2-\mu_3}(\beta_{,3}\mu_{2,3}+\psi_{,3}\nu_{,3})\\
&\quad=2e^{-\beta}\{[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}-[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}\}\\
&\qquad-e^{2\psi-2\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2-e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2]\\
&\qquad+4e^{-2\psi}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,2})^2+(B_{,2})^2]-e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,3})^2+(B_{,3})^2]\}.
\end{aligned}\tag{25}$$

(a) 规范的选择和方程简化为标准形式

如第 6 章 §53, 通过实施须对 μ_2 和 μ_3 加上坐标条件的规范自由, 并再用方程 (23), 可安排所考虑的时空在下述情形有平滑的事件视界, 即 r 的二次函数 (见第 6 章方程 (45) 和 (46))

$$\Delta(r)=r^2-2Mr+M_0^2 \tag{26}$$

为零且

$$e^{2(\mu_3-\mu_2)}=\Delta(r)\quad\text{和}\quad e^{\beta}=\Delta^{1/2}\sin\theta. \tag{27}$$

在方程 (26) 中, M 和 M_0 是常量, 其意义随后将显现.

回到方程 (8) 和 (9), 可将它们结合为对复数势

$$H=A+\mathrm{i}B \tag{28}$$

的单个方程

$$(e^{-\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}H_{,2})_{,2}+(e^{-\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}H_{,3})_{,3}=\mathrm{i}(\omega_{,3}H_{,2}-\omega_{,2}H_{,3}). \tag{29}$$

再将方程 (18) 写为

$$(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}\omega_{,2}-2AB_{,3}+2BA_{,3})_{,2}+(e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,3}+2AB_{,2}-2BA_{,2})_{,3}=0. \tag{30}$$

[567] 用 H, 有

$$(e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}\omega_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})_{,2}+(e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,3}-2\mathrm{Im}HH^*_{,2})_{,3}=0. \tag{31}$$

由方程 (27) 所给的 $e^{\mu_3-\mu_2}$ 和 e^{β} 的解, 并用

$$\mu=\cos\theta \tag{32}$$

代替 θ 来作为指标 "3" 标记的变量, 可使方程 (29) 和 (31) 成为

$$\left[\frac{\chi}{\sqrt{\Delta\delta}}\Delta H_{,2}\right]_{,2}+\left[\frac{\chi}{\sqrt{\Delta\delta}}\delta H_{,3}\right]_{,3}=\mathrm{i}(\omega_{,2}H_{,3}-\omega_{,3}H_{,2}) \tag{33}$$

和

$$\left(\frac{\Delta}{\chi^2}\omega_{,2}-2\mathrm{Im}HH^*_{,3}\right)_{,2}+\left(\frac{\delta}{\chi^2}\omega_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2}\right)_{,3}=0, \tag{34}$$

其中已记 (再次如第 6 章)

$$\chi=e^{-\psi+\nu} \tag{35}$$

和

$$\delta=1-\mu^2=\sin^2\theta. \tag{36}$$

以类似方式, 方程 (24) 用 χ 和 H 表示为

$$[\Delta(\lg\chi)_{,2}]_{,2}+[\delta(\lg\chi)_{,3}]_{,3}=\frac{1}{\chi^2}[\Delta(\omega_{,2})^2+\delta(\omega_{,3})^2]+\frac{2\chi}{\sqrt{\Delta\delta}}[\Delta|H_{,2}|^2+\delta|H_{,3}|^2]. \tag{37}$$

方程 (33)、(34) 和 (37) 是理论的基本方程: 一旦它们被解出, 解就能由考虑方程 (19) 和 (25) 而完成, 后二方程可由简单的求积分来决定 $\mu_2+\mu_3$ (见下面 §110).

(*b*) 方程的进一步变换

可看到, 方程 (34) 允许定义一个势 Φ (见第 6 章方程 (87)),

$$-\Phi_{,2}=\frac{\delta}{\chi^2}\omega_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2},+\Phi_{,3}=\frac{\Delta}{\chi^2}\omega_{,2}-2\mathrm{Im}HH^*_{,3}, \tag{38}$$

因为方程 (34) 只是这些方程的积分条件. 对这些方程求解 $\omega_{,2}$ 和 $\omega_{,3}$, 有

$$\omega_{,2}=\frac{\chi^2}{\Delta}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3}),\omega_{,3}=-\frac{\chi^2}{\delta}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2}); \tag{39}$$

[568]

而 这些方程的积分条件是

$$\left[\frac{\chi^2}{\delta}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})\right]_{,2}+\left[\frac{\chi^2}{\Delta}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})\right]_{,3}=0. \tag{40}$$

现在的便利做法是定义函数 (见第 6 章方程 (99))

$$\Psi=\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\chi}. \tag{41}$$

则方程 (40) 成为

$$\left[\frac{\Delta}{\Psi^2}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})\right]_{,2}+\left[\frac{\delta}{\Psi^2}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})\right]_{,3}=0, \tag{42}$$

或, 展开为

$$\begin{aligned}&\Psi\{[\Delta(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})]_{,2}+[\delta(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})]_{,3}\}\\&\quad=2\Delta(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})\Psi_{,2}+2\delta(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})\Psi_{,3}.\end{aligned} \tag{43}$$

类似地, 方程 (37) 可用 Ψ 和 Φ 写为

$$\Psi[(\Delta\Psi_{,2})_{,2}+(\delta\Psi_{,3})_{,3}]=\Delta(\Psi_{,2})^2+\delta(\Psi_{,3})^2-2\Psi[\Delta|H_{,2}|^2+\delta|H_{,3}|^2]$$
$$-\Delta(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})^2-\delta(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})^2; \quad (44)$$

而代替方程 (33) 有

$$\Psi[(\Delta H_{,2})_{,2}+(\delta H_{,3})_{,3}]=\Delta H_{,2}[\Psi_{,2}+\mathrm{i}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})]$$
$$+\delta H_{,3}[\Psi_{,3}+\mathrm{i}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})]. \quad (45)$$

为将来之用, 写出方程 (33) 的实部和虚部:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\Delta}{\Psi}A_{,2}\right)_{,2}+\left(\frac{\delta}{\Psi}A_{,3}\right)_{,3}&=\omega_{,3}B_{,2}-\omega_{,2}B_{,3},\\ \left(\frac{\Delta}{\Psi}B_{,2}\right)_{,2}+\left(\frac{\delta}{\Psi}B_{,3}\right)_{,3}&=\omega_{,2}A_{,3}-\omega_{,3}A_{,2}.\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

最 后, 作为引理给出上述方程的两个直接结果.

引理 1

[569]

$$\Psi[(\Delta|H|^2_{,2})_{,2}+(\delta|H|^2_{,3})_{,3}]=2\Psi[\Delta|H_{,2}|^2+\delta|H_{,3}|^2]$$
$$+\Delta[|H|^2_{,2}\Psi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})]$$
$$+\delta[|H|^2_{,3}\Psi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})]. \quad (47)$$

引理 2

$$2\Psi[(\Delta\mathrm{Im}HH^*_{,2})_{,2}+(\delta\mathrm{Im}HH^*_{,3})_{,3}]$$
$$=2\Delta\mathrm{Im}HH^*_{,2}\Psi_{,2}+2\delta\mathrm{Im}HH^*_{,3}\Psi_{,3}$$
$$-[\Delta|H|^2_{,2}(\Phi_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2})+\delta|H|^2_{,3}(\Phi_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3})]. \quad (48)$$

(c) 恩斯特方程

首先看到, 由等式

$$(2\mathrm{iIm}HH^*_{,2})\Delta H_{,2}=(HH^*_{,2}+H^*H_{,2}-2H^*H_2)\Delta H_{,2}$$
$$=\Delta|H|^2_{,2}-2H^*\Delta(H_{,2})^2, \quad (49)$$

方程 (45) 可写为

$$\Psi[(\Delta H_{,2})_{,2}+(\delta H_{,3})_{,3}]=-2H^*[\Delta(H_{,2})^2+\delta(H_{,3})^2]$$
$$+\Delta H_{,2}(\Psi+|H|^2+\mathrm{i}\Phi)_{,2}+\delta H_{,3}(\Psi+|H|^2+\mathrm{i}\Phi)_{,3}. \quad (50)$$

然后, 利用引理 2 (方程 (48)) 消去方程 (43) 左边的 $\mathrm{Im}HH^*_{,2}$ 和 $\mathrm{Im}HH^*_{,3}$ 项, 得到

$$\Psi[(\Delta\Phi_{,2})_{,2}+(\delta\Phi_{,3})_{,3}]=\Delta[\Phi_{,2}(2\Psi+|H|^2)_{,2}+2\mathrm{Im}HH^*_{,2}(\Psi+|H|^2)_{,2}]$$
$$+\delta[\Phi_{,3}(2\Psi+|H|^2)_{,3}+2\mathrm{Im}HH^*_{,3}(\Psi+|H|^2)_{,3}]. \tag{51}$$

类似地, 将方程 (44) 和 (47) 结合, 得到

$$\Psi\{[\Delta(\Psi+|H|^2)_{,2}]_{,2}+[\delta(\Psi+|H|^2)_{,3}]_{,3}\}$$
$$=\Delta[(\Psi_{,2})^2+|H|^2_{,2}\Psi_{,2}-(\Phi_{,2})^2-2\mathrm{Im}HH^*_{,2}\Phi_{,2}]$$
$$+\delta[(\Psi_{,3})^2+|H|^2_{,3}\Psi_{,3}-(\Phi_{,3})^2-2\mathrm{Im}HH^*_{,3}\Phi_{,3}]. \tag{52}$$

现在清楚, 方程 (51) 和 (52) 的左边可以结合为单一的复数函数表示,

$$Z=\Psi+|H|^2+\mathrm{i}\Phi. \tag{53}$$

为表明该二方程的右边也可以类似地结合为只含 Z 和 H 的单一复数表示, 考虑组合

$$(\Psi_{,2})^2+|H|^2_{,2}\Psi_{,2}-(\Phi_{,2})^2+2\mathrm{i}\Phi_{,2}\Psi_{,2}+\mathrm{i}\Phi_{,2}|H|^2_{,2}$$
$$+2\mathrm{i}\mathrm{Im}HH^*_{,2}(\Psi+|H|^2+\mathrm{i}\Phi)_{,2} \tag{54}$$

它连同因子 Δ 出现于右边. 含 $\mathrm{Im}HH^*_{,2}$ 的项能以下列方式简化, [570]

$$(2\mathrm{i}\mathrm{Im}HH^*_{,2})Z_{,2}=(HH^*_{,2}+H^*H_{,2}-2H^*H_{,2})Z_{,2}$$
$$=(|H|^2_{,2}-2H^*H_{,2})Z_{,2}$$
$$=|H|^2_{,2}(\Psi+|H|^2+\mathrm{i}\Phi)_{,2}-2H^*H_{,2}Z_{,2}; \tag{55}$$

而表示式 (54) 成为

$$(\Psi_{,2})^2+2|H|^2_{,2}\Psi_{,2}+(|H|^2_{,2})^2-(\Phi_{,2})^2$$
$$+2\mathrm{i}(\Psi_{,2}+|H|^2_{,2})\Phi_{,2}-2H^*H_{,2}Z_{,2}=(Z_{,2})^2-2H^*H_{,2}Z_{,2}. \tag{56}$$

有因子 δ 的项类似地结合而给出

$$(Z_{,3})^2-2H^*H_{,3}Z_{,3}. \tag{57}$$

于是, 方程 (51) 和 (52) 等价于单个复数方程

$$\Psi[(\Delta Z_{,2})_{,2}+(\delta Z_{,3})_{,3}]=\Delta(Z_{,2})^2+\delta(Z_{,3})^2-2H^*(\Delta Z_{,2}H_{,2}+\delta Z_{,3}H_{,3}); \tag{58}$$

而方程 (50) 在其第二行的项用 Z 写出后成为

$$\Psi[(\Delta H_{,2})_{,2}+(\delta H_{,3})_{,3}]=\Delta H_{,2}Z_{,2}+\delta H_{,3}Z_{,3}-2H^*[\Delta(H_{,2})^2+\delta(H_{,3})^2], \quad (59)$$

其中

$$\Psi=\mathrm{Re}\,Z-|H|^2. \quad (60)$$

方程 (58) 和 (59) 就是恩斯特方程: 它们以方便和对称的方式将支配 χ、ω、A 和 B 的四个方程组合为两个复数方程; 它们取代了适于纯真空的单个方程即第 6 章 (94).

(*d*) 恩斯特方程的变换性质

设 $(Z、H)$ 对表示方程 (58) 和 (59) 的一个解, 则下列的对也是解:

和

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } (Z+\mathrm{i}\alpha, H),\ \text{其中 } \alpha \text{ 是任意实数;}\\ \text{(ii) } (\beta^2 Z, \beta e^{\mathrm{i}\alpha}H),\ \text{其中 } \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 是两个实数;}\\ \text{(iii) } (Z+2a^*H+aa^*, H+a),\ \text{其中 } a \text{ 是任意复数;}\\ \text{(iv) } (Z^{-1}, HZ^{-1}).\end{array}\right\} \quad (61)$$

这些变换中, (i) 和 (ii) 能 "平凡地" 得出; (iii) 也容易证实; 而 (iv) 的验证则需要一定强度的演绎.

[571] 通过相继运用变换 (i) — (iv) 的一个或另一个, 可得到其它的解对, 即

$$(Z,H)\Rightarrow\left(\frac{1}{Z},\frac{H}{Z}\right)\Rightarrow\left(\frac{1}{Z}+\mathrm{i}\alpha,\frac{H}{Z}\right)\Rightarrow\left(\frac{Z}{1+\mathrm{i}\alpha Z},\frac{H}{1+\mathrm{i}\alpha Z}\right), \quad (62)$$

和

$$\begin{aligned}(Z,H)\Rightarrow\left(\frac{1}{Z},\frac{H}{Z}\right)&\Rightarrow\left(\frac{1}{Z}+2a^*\frac{H}{Z}+aa^*,\frac{H}{Z}+a\right)\\&\Rightarrow\left(\frac{Z}{1+2a^*H+aa^*Z},\frac{H+aZ}{1+2a^*H+aa^*Z}\right).\end{aligned} \quad (63)$$

它们分别是俄勒斯 (Ehlers) 和哈里森 (Harrison) 变换. 葛色斯 (Gürses) 和山托珀罗斯 (Xanthopoulos) 发现了一条表述恩斯特方程的出色途径, 使得变换性质更为明显. 定义厄米矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\Psi} & \sqrt{2}\dfrac{H}{\Psi} & \mathrm{i}\left(\dfrac{Z}{\Psi}-1\right)\\ \sqrt{2}\dfrac{H^*}{\Psi} & 1+2\dfrac{|H|^2}{\Psi} & \mathrm{i}\sqrt{2}\dfrac{H^*Z}{\Psi}\\ -\mathrm{i}\left(\dfrac{Z^*}{\Psi}-1\right) & -\mathrm{i}\sqrt{2}\dfrac{HZ^*}{\Psi} & \dfrac{|Z|^2}{\Psi}\end{vmatrix}. \quad (64)$$

和它的逆

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{vmatrix} \dfrac{|Z|^2}{\Psi} & -\sqrt{2}\dfrac{HZ^*}{\Psi} & +\mathrm{i}\left(\dfrac{Z^*}{\Psi}-1\right) \\ -\sqrt{2}\dfrac{H^*Z}{\Psi} & 1+2\dfrac{|H|^2}{\Psi} & -\mathrm{i}\sqrt{2}\dfrac{H^*}{\Psi}, \\ -\mathrm{i}\left(\dfrac{Z}{\Psi}-1\right) & +\mathrm{i}\sqrt{2}\dfrac{H}{\Psi} & \dfrac{1}{\Psi} \end{vmatrix}, \tag{65}$$

葛色斯和山托珀罗斯证明, 恩斯特方程是包含在下列单个矩阵方程中,

$$(\Delta\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}_{,2})_{,2}+(\delta\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}_{,3})_{,3}=0. \tag{66}$$

这个矩阵方程以它的元明晰地写出后是 9 个方程, 全都是恩斯特方程的不同组合. 方程 (66) 的立即结果是, 如果 $\boldsymbol{P}$ 是一个解, 则 APA^{-1} 也是, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是任意常数可逆矩阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 的不同选择, 可以导出适于恩斯特方程的所有变换. [572]

(*e*) **共轭运算**

在第 6 章 §52 (*a*) 中已证明, 给出形式 (1) 的度规, 就能由下列变换导出同样形式的*共轭度规*,

$$t\to\mathrm{i}\varphi \quad 和 \quad \varphi\to-\mathrm{i}t, \tag{67}$$

而 χ 和 ω 被代之以

$$\widetilde{\chi}=-\frac{\chi}{\chi^2-\omega^2} \quad 和 \quad \widetilde{\omega}=\frac{\omega}{\chi^2-\omega^2}. \tag{68}$$[①]

为确定势 H 在共轭下如何变换, 首先看到, 通过将方程 (33) 重写为

$$\left(\chi\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\delta}}H_{,2}-\mathrm{i}\omega H_{,3}\right)_{,2}+\left(\chi\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}}H_{,3}+\mathrm{i}\omega H_{,2}\right)_{,3}=0, \tag{69}$$

可由下列方程定义势 $\widetilde{H}$,

$$\left.\begin{aligned} -\widetilde{H}_{,3}&=\chi\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\delta}}H_{,2}-\mathrm{i}\omega H_{,3}, \\ +\widetilde{H}_{,2}&=\mathrm{i}\omega H_{,2}+\chi\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}}H_{,3}. \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

对这些方程求解 $H_{,2}$ 和 $H_{,3}$, 得

$$\left.\begin{aligned} H_{,2}&=\widetilde{\chi}\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}}\widetilde{H}_{,3}+\mathrm{i}\widetilde{\omega}\widetilde{H}_{,2}, \\ H_{,3}&=-\widetilde{\chi}\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\delta}}\widetilde{H}_{,2}+\mathrm{i}\widetilde{\omega}\widetilde{H}_{,3}, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

① 在第 6 章考虑的纯真空情形, $\widetilde{\chi}$ 可选任一符号; 但如将要看到的, 对现在的情形, 负号才是正确的.

其中 $\widetilde{\chi}$ 和 $\widetilde{\omega}$ 如方程 (68) 所定义; 这些方程的可积条件是

$$\left(\widetilde{\chi}\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\delta}}\widetilde{H}_{,2}-\mathrm{i}\widetilde{\omega}\widetilde{H}_{,3}\right)_{,2}+\left(\widetilde{\chi}\frac{\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}}\widetilde{H}_{,3}+\mathrm{i}\widetilde{\omega}\widetilde{H}_{,2}\right)_{,3}=0. \tag{72}$$

这个 "颚化符号" 变量方程与 "未颚化符号" 变量方程 (69) 在形式上完全一样. 相应地会出现, 共轭导致 H 由 $\widetilde{H}$ 替代. 这个推论可由直接验证 $\widetilde{\chi}$、$\widetilde{\omega}$ 和 $\widetilde{H}$ 事实上满足与方程 (30) 和 (37) 完全相同形式的方程来确认, 尽管实际验证过程有些冗长.

由 $\widetilde{\chi}$、$\widetilde{\omega}$ 和 $\widetilde{H}$ 满足与 "未颚化符号" 函数相同方程的事实可得, 通过进一步定义

[573]

$$\widetilde{\Psi}=\frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\widetilde{\chi}} \tag{73}$$

和

$$\left.\begin{aligned}-\widetilde{\Phi}_{,2}&=\frac{\delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,3}+2\mathrm{Im}\widetilde{H}\widetilde{H}^*_{,2},\\ +\widetilde{\Phi}_{,3}&=\frac{\Delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,2}-2\mathrm{Im}\widetilde{H}\widetilde{H}^*_{,3},\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

函数

$$\widetilde{Z}=\widetilde{\Psi}+|\widetilde{H}|^2+\mathrm{i}\widetilde{\Phi}\ \text{ 和 }\ \widetilde{H} \tag{75}$$

将满足与方程 (58) 和 (59) 完全相同形式的恩斯特方程.

110. 克尔 – 纽曼解: 推导和纽曼 – 彭罗斯形式描述

如同克尔解的情形那样 (第 6 章 §54), 克尔 – 纽曼解也同样值得注意地是来自于考虑恩斯特方程对共轭度规的最简单解.

由于现在处理的是一对方程, 对 "最简单解" 的寻找包括两个部分. 第一, 有简单的假设来将方程对 (58) 和 (59) 简化为单一的方程吗? 第二, 如果这样一个简化方程存在, 其最简单的解是什么?

对第一个问题的回答是, 如下形式的线性关系,

$$H=Q(Z+1), \tag{76}$$

其中 Q 是复数常数, 与方程对 (58) 和 (59) 相符. 因为由这个假定有

$$\begin{aligned}\Psi&=\frac{1}{2}(Z+Z^*)-|Q(Z+1)|^2\\ &=\frac{1}{2}[(1-2|Q|^2)(Z+Z^*)-2|Q|^2(|Z|^2+1)];\end{aligned} \tag{77}$$

而方程 (58) 和 (59) 二者都简化为同样的方程,

$$\frac{1}{2}[(1-2|Q|^2)(Z+Z^*)-2|Q|^2(|Z|^2+1)][(\Delta Z_{,2})_{,2}+(\delta Z_{,3})_{,3}]$$
$$=[1-2|Q|^2(Z^*+1)][\Delta(Z_{,2})^2+\delta(Z_{,3})^2]. \tag{78}$$

于是问题实际地简化为求取恩斯特方程的真空解. 相应地, 在寻求方程 (78) 的解时, 作与第 6 章方程 (95) 同样的变换:

$$Z=\frac{1+E}{1-E}, \tag{79}$$

有 [574]

$$\Psi=\frac{1}{|1-E|^2}(1-4|Q|^2-|E|^2) \tag{80}$$

$$\Phi=\mathrm{Im}Z=-\mathrm{i}\frac{E-E^*}{|1-E|^2}, \tag{81}$$

而支配 E 的方程是 (见第 6 章方程 (96))

$$(1-4|Q|^2-|E|^2)[(\Delta E_{,2})_{,2}+(\delta E_{,3})_{,3}]$$
$$=-2E^*[\Delta(E_{,2})^2+\delta(E_{,3})^2]. \tag{82}$$

将变量 r 改变为

$$\eta=(r-M)/(M^2-M_0^2)^{1/2}, \tag{83}$$

有

$$\Delta=(M^2-M_0^2)(\eta^2-1), \tag{84}$$

方程 (82) 成为更对称的形式

$$(1-4|Q|^2-|E|^2)\{[(\eta^2-1)E_{,\eta}]_{,\eta}+[(1-\mu^2)E_{,\mu}]_{,\mu}\}$$
$$=-2E^*[(\eta^2-1)(E_{,\eta})^2+(1-\mu^2)(E_{,\mu})^2]. \tag{85}$$

克尔 – 纽曼解的推导现在如 §54 中那样进行. 对共轭函数 $\widetilde{E}$ 考虑方程 (85), 可验证它允许简单解

$$\widetilde{E}=-p\eta-\mathrm{i}q\mu, \tag{86}$$

其中 p 和 q 是两个实数常数, 按以下方式相关联,

$$p^2+q^2=1-4|Q|^2. \tag{87}$$

对方程 (86) 所给的 $\widetilde{E}$,

$$\frac{1+\widetilde{E}}{1-\widetilde{E}} = \frac{1}{(1+p\eta)^2+q^2\mu^2}[-p^2(\eta^2-1)+q^2(1-\mu^2)+4|Q|^2-2\mathrm{i}q\mu]. \tag{88}$$

所以,

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{Z} = -\frac{p^2(\eta^2-1)-q^2(1-\mu^2)-4|Q|^2}{(1+p\eta)^2+q^2\mu^2}, \tag{89}$$

和

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{Z} = -\frac{2q\mu}{(1+p\eta)^2+q^2\mu^2}. \tag{90}$$

另外, 由方程 (80),

$$\widetilde{\Psi} = -\frac{p^2(\eta^2-1)-q^2(1-\mu^2)}{(1+p\eta)^2+q^2\mu^2}; \tag{91}$$

[575] 由关系式 (60) 现在有

$$|\widetilde{H}|^2 = \mathrm{Re}\,\widetilde{Z}-\widetilde{\Psi} = \frac{4|Q|^2}{(1+p\eta)^2+q^2\mu^2}. \tag{92}$$

现在回到变量 r, 可得出, 上述解可通过对 p 和 q 的符合关系 (87) 的特别选择而大为简化. 就是说, 表示式

$$\begin{aligned}-\mathrm{Re}\,\widetilde{Z} = &\left[\Delta-\frac{q^2}{p^2}(M^2-M_0^2)\delta-4|Q|^2\frac{(M^2-M_0^2)}{p^2}\right]\\ &\div\left\{\left[(r-M)+\frac{(M^2-M_0^2)^{1/2}}{p}\right]^2+\frac{q^2}{p^2}(M^2-M_0^2)\mu^2\right\}\end{aligned} \tag{93}$$

由下列选择而大为简化,

$$p=(M^2-M_0^2)^{1/2}/M \quad 和 \quad q=a/M, \tag{94}$$

其中 a 是常量; 因为由这个选择,

$$\left[(r-M)+\frac{(M^2-M_0^2)^{1/2}}{p}\right]^2+\frac{q^2}{p^2}(M^2-M_0^2)\mu^2 = r^2+a^2\mu^2=\rho^2, \tag{95}$$

和

$$\Delta-\frac{q^2}{p^2}(M^2-M_0^2)\delta = \Delta-a^2\delta. \tag{96}$$

但是, 为与关系 (87) 一致, 必须要求

$$(M^2-M_0^2)+a^2 = M^2(1-4|Q|^2), \tag{97}$$

或

$$M_0^2 = a^2 + 4|Q|^2M^2 = a^2 + Q_*^2 \text{ (比如说)}, \tag{98}$$

其中

$$Q_*^2 = 4|Q|^2M^2. \tag{99}$$

对 Δ 的表示现在成为

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q_*^2 \tag{100}$$

所以, 由选择 (94) 和 (99), 解 (89) — (92) 取简单形式

$$\mathrm{Re}\,\widetilde{Z} = -\frac{\Delta - a^2\delta - Q_*^2}{\rho^2};\quad \mathrm{Im}\,\widetilde{Z} = \widetilde{\Phi} = -\frac{2aM\mu}{\rho^2}, \tag{101}$$

$$\widetilde{\Psi} = \frac{\sqrt{\Delta\delta}}{\widetilde{\chi}} = -\frac{\Delta - a^2\delta}{\rho^2},\ \text{和}\ \ \widetilde{H}^2 = \frac{Q_*^2}{\rho^2}. \tag{102}$$

而且, 由方程 (76),

$$\widetilde{H} = Q(\widetilde{Z} + 1) = Q_*\frac{r - \mathrm{i}a\mu}{\rho^2}; \tag{103}$$

因此, [576]

$$\widetilde{A} = Q_*\frac{r}{\rho^2}\ \text{和}\ \ \widetilde{B} = -aQ_*\frac{\mu}{\rho^2}. \tag{104}$$

从解 (104) 可导出:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{A}_{,2} &= \frac{Q_*}{\rho^4}(-r^2 + a^2\mu^2), \quad \widetilde{A}_{,3} = \frac{Q_*}{\rho^4}(-2a^2r\mu), \\ \widetilde{B}_{,3} &= a\frac{Q_*}{\rho^4}(-r^2 + a^2\mu^2);\quad \widetilde{B}_{,2} = \frac{Q_*}{\rho^4}(+2ar\mu). \end{aligned}\right\} \tag{105}$$

借助于这些方程可得:

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{Im}\,\widetilde{H}\widetilde{H}^*{}_{,2} &= 2(\widetilde{B}\widetilde{A}_{,2} - \widetilde{A}\widetilde{B}_{,2}) = -2\frac{Q_*^2}{\rho^4}a\mu, \\ 2\mathrm{Im}\,\widetilde{H}\widetilde{H}^*{}_{,3} &= 2(\widetilde{B}\widetilde{A}_{,3} - \widetilde{A}\widetilde{B}_{,3}) = +2\frac{Q_*^2}{\rho^4}ar. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

由方程 (39)、(101) 和 (106), 现在有

$$\left.\begin{aligned} +\frac{\Delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,2} &= \widetilde{\Phi}_{,3} + 2\mathrm{Im}\,HH^*_{,3} = -\frac{2aM(r^2 - a^2\mu^2)}{\rho^4} + 2\frac{Q_*^2}{\rho^4}ar, \\ -\frac{\delta}{\widetilde{\chi}^2}\widetilde{\omega}_{,3} &= \widetilde{\Phi}_{,2} + 2\mathrm{Im}\,HH^*_{,2} = \frac{4aMr\mu}{\rho^4} - 2\frac{Q_*^2}{\rho^4}a\mu. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

另一方面, 按照方程 (102) 所给对 $\widetilde{\Psi}$ 的解,

$$\frac{\Delta}{\widetilde{\chi}^2} = \frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4\delta}\ \text{和}\ \ \frac{\delta}{\widetilde{\chi}^2} = \frac{(\Delta - a^2\delta)^2}{\rho^4\Delta}. \tag{108}$$

于是决定 $\widetilde{\omega}$ 的方程是

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{\omega}_{,2} &= -\frac{2a\delta}{(\Delta - a^2\delta)^2}[M(r^2 - a^2\mu^2) - Q_*^2 r],\\ \widetilde{\omega}_{,3} &= -\frac{2a\Delta\mu}{(\Delta - a^2\delta)^2}[2Mr - Q_*^2].\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

从这些方程不难得到

$$\widetilde{\omega} = \frac{a\delta}{\Delta - a^2\delta}(2Mr - Q_*^2), \tag{110}$$

或等价地 (见方程 (68) 和 (100)),

$$\widetilde{\omega} = \frac{\omega}{\chi^2 - \omega^2} = \frac{a\delta}{\Delta - a^2\delta}[(r^2 + a^2) - \Delta]; \tag{111}$$

[577] 类似地, 从方程 (68) 和 (102) 可得

$$\widetilde{\chi} = -\frac{\chi}{\chi^2 - \omega^2} = -\frac{\rho^2}{\Delta - a^2\delta}\sqrt{\Delta\delta}. \tag{112}$$

借助于对 $\widetilde{\omega}$ 和 $\widetilde{\chi}$ 的解 (111) 和 (112), 能够完全与在§54 中 (第 6 章方程 (115) — (122)) 所做的那样解出度规函数 $e^{2\nu}$、$e^{2\psi}$ 和 ω. 结果是:

$$e^{2\psi} = \frac{\delta\Sigma^2}{\rho^2}, \quad e^{2\nu} = \frac{\rho^2\Delta}{\Sigma^2}, \quad e^{2\beta} = e^{2(\psi+\nu)} = \Delta\delta, \tag{113}$$

$$\omega = \frac{a}{\Sigma^2}(r^2 + a^2 - \Delta) \ \text{ 和 } \ \chi = e^{-\psi+\nu} = \frac{\rho^2\sqrt{\Delta}}{\Sigma^2\sqrt{\delta}}, \tag{114}$$

其中

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2\delta\Delta. \tag{115}$$

可见除 Δ 的定义外, 这些解与第 6 章方程 (121) — (125) 所给的对克尔度规的解完全相同 (但第 6 章方程 (123) 对 ω 的解中的 $2Mr$ 被代之以 $r^2 + a^2 - \Delta$).

回到方程 (105), 现在利用方程 (111) 和 (112) 可得到符合方程 (71) 的无颚化符号量的解, 即

$$\left.\begin{aligned}A_{,r} &= +\frac{Q_*}{\rho^4}2a^2 r\sin^2\theta\cos\theta,\\ A_{,\theta} &= -\frac{Q_*}{\rho^4}(r^2 + a^2)(-r^2 + a^2\cos^2\theta)\sin\theta,\\ B_{,r} &= -\frac{Q_*}{\rho^4}a(-r^2 + a^2\cos^2\theta)\sin^2\theta,\\ B_{,\theta} &= -\frac{Q_*}{\rho^4}2ar(r^2 + a^2)\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}\right\} \tag{116}$$

为避免混淆, 其中已清晰地标出求导的变量. 为下文的运用, 这里可注意, 按照上述方程,

$$A_{,r}A_{,\theta}+B_{,r}B_{,\theta}=0, \tag{117}$$

和

$$(A_{,r})^2+(B_{,r})^2=\frac{Q_*^2}{\rho^4}a^2\sin^4\theta,$$

$$(A_{,\theta})^2+(B_{,\theta})^2=\frac{Q_*^2}{\rho^4}(r^2+a^2)^2\sin^2\theta. \tag{118}$$

最后, 为确定 $(\mu_2+\mu_3)$ 并完成求解, 对度规函数转到方程 (19) 和 (25). 通过与对真空得到的对应方程第 6 章 (8) 和 (16) 的比较可见, 利用关系式 (117), 方程 (19) 与方程 (8) 相同, 而方程 (25) 有附加的项 [578]

$$\begin{aligned}&4e^{-2\psi}\{e^{\mu_3-\mu_2}[(A_{,r})^2+(B_{,r})^2]-e^{\mu_2-\mu_3}[(A_{,\theta})^2+(B_{,\theta})^2]\}\\&=4e^{-2\psi}\left\{(\sqrt{\Delta})\frac{Q_*^2}{\rho^4}a^2\sin^4\theta-\frac{Q_*^2}{\rho^4\sqrt{\Delta}}(r^2+a^2)^2\sin^2\theta\right\}\\&=-\frac{4\rho^2}{\Sigma^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\Delta}}\frac{Q_*^2}{\rho^4}[a^2\Delta\sin^2\theta-(r^2+a^2)^2]=-\frac{4Q_*^2}{\rho^2\sqrt{\Delta}},\end{aligned} \tag{119}$$

其中的简化过程已利用了关系式 (118). 于是, 代替第 6 章方程 (59) 和 (60), 现在有

$$-\frac{\mu}{\delta}(\mu_2+\mu_3)_{,2}+\frac{r-M}{\Delta}(\mu_2+\mu_3)_{,3}=\frac{2}{(X+Y)^2}(X_{,2}Y_{,3}+Y_{,2}X_{,3}), \tag{120}$$

和

$$\begin{aligned}&2(r-M)(\mu_2+\mu_3)_{,2}+2\mu(\mu_2+\mu_3)_{,3}=\frac{4}{(X+Y)^2}(\Delta X_{,2}Y_{,2}-\delta X_{,3}Y_{,3})\\&-3\frac{(r-M)^2-\Delta}{\Delta}+\frac{\mu^2+\delta}{\delta}-4\frac{Q_*^2}{\rho^2},\end{aligned} \tag{121}$$

其中

$$X=\chi+\omega \quad 和 \quad Y=\chi-\omega. \tag{122}$$

鉴于 χ 和 ω 的解 (如方程 (114) 中所写) 与克尔度规的对应解在形式上的一致性, 方程 (120) 右边的演算将导致与第 6 章 (129) 式同样的方程. 但是方程 (121) 右边附加项 $-4Q_*^2/\rho^2$ 的出现要求演算仔细地进行. 可得

$$\frac{\Delta}{\chi^2}X_{,2}Y_{,2}=\frac{(r-M)^2}{\Delta}-\frac{4Mr}{\rho^2}+\frac{8a^2\mu^2rM}{\rho^4}+4\frac{Q_*^2r^2}{\rho^4} \tag{123}$$

和

$$\frac{\Delta}{\chi^2}X_{,2}Y_{,2}-\frac{\delta}{\chi^2}X_{,3}Y_{,3}=\frac{(r-M)^2}{\Delta}-\frac{4Mr}{\rho^2}+\frac{8a^2\mu^2rM}{\rho^4}+4\frac{Q_*^2r^2}{\rho^4}$$
$$-\frac{\mu^2}{\rho^4\delta}[(r^2+a^2+a^2\delta)^2-4a^2\Delta\delta]$$
$$=\frac{(r-M)^2}{\Delta}-\frac{4Mr}{\rho^2}-\frac{\mu^2}{\delta}+4\frac{Q_*^2}{\rho^2}. \tag{124}$$

[579] 将方程 (121) 和 (124) 结合, 再次导致与第 6 章 (130) 式同样的方程. 因此 ($\mu_2+\mu_3$) 的解与对克尔度规的一样, 即 (见第 6 章方程 (131))

$$e^{\mu_2+\mu_3}=\rho^2/\sqrt{\Delta}. \tag{125}$$

整个方程组的求解现已完成; 除 Δ 的定义外, 克尔 – 纽曼度规与克尔度规完全相同. 从而有, M 如所定义的, 的确表示黑洞的惯性质量, 而参量 a 再次被解释为黑洞的每单位质量的角动量.

(a) 纽曼 – 彭罗斯形式的克尔 – 纽曼时空描述

由克尔度规与克尔 – 纽曼度规形式上的相同 (除 Δ 的定义外) 可知, 能够完全如第 6 章§56 对克尔时空那样, 来为纽曼 – 彭罗斯形式的克尔 – 纽曼时空描述定义一个零四次基. 具体地, 所需的基将继续由第 6 章方程 (170) 和 (173) 给出, 而对于所选基的自旋系数也将由第 6 章方程 (175) 给出. 而且由自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 为零可得结论, 克尔 – 纽曼时空也同克尔时空一样是彼得罗夫 D 型的; 进一步有, 在所选基中,

$$\Psi_0=\Psi_1=\Psi_3=\Psi_4=0. \tag{126}$$

所以, 为完成描述, 只需再确定外尔标量 Ψ_2 及麦克斯韦标量 ϕ_0、ϕ_1 和 ϕ_2.

首先考虑麦克斯韦标量, 它们可由第 6 章方程 (177) 所给的基矢恰当地收缩 F_{ij} 来确定. 记住 F_{01} 和 F_{23} 为零, 有

$$2\phi_1=F_{ij}(l^in^j+\overline{m}^im^j)$$
$$=F_{02}(l^0n^2-l^2n^0)+F_{12}(l^1n^2-l^2n^1)$$
$$+F_{03}(\overline{m}^0m^3-\overline{m}^3m^0)+F_{13}(\overline{m}^1m^3-m^3m^1)$$
$$=-\frac{1}{\rho^2}(r^2+a^2)e^{\nu+\mu_2}F_{02}-\frac{a\Delta}{\Sigma^2}e^{\psi+\mu_2}F_{12}$$
$$-\frac{\mathrm{i}}{\rho^2}e^{\nu+\mu_3}(a\sin\theta)F_{03}-\frac{\mathrm{i}}{\Sigma^2\sin\theta}e^{\psi+\mu_3}(r^2+a^2)F_{13}. \tag{127}$$

现在按照方程 (7) 和 (116) 来代入 F_{ij} 的分量, 经一些计算后得出

$$\phi_1 = -\mathrm{i}\frac{Q_*}{2(\overline{\rho}^*)^2}. \tag{128}$$

以类似方式可得 [580]

$$\phi_0 = \phi_2 = 0, \tag{129}$$

所以 ϕ_1 是唯一非零的麦克斯韦标量.

确定外尔标量 Ψ_2 的过程有所不同, 即通过考虑比安基恒等式第 1 章方程 (321) (b) 和 (c) ("里奇项" 由第 1 章方程 (339) (b) 和 (c) 给出). 记住现在仅有的非零外尔和麦克斯韦标量是 Ψ_2 和 ϕ_1, 且自旋系数 κ、σ、λ 和 ν 为零, 则比安基恒等式给出

$$\left.\begin{aligned} &-D\Psi_2 + 3\widetilde{\rho}\Psi_2 + 4\widetilde{\rho}\phi_1\phi_1^* = 0 \\ \text{和}\quad &-\delta^*\Psi_2 - 3\pi\Psi_2 + 4\pi\phi_1\phi_1^* = 0. \end{aligned}\right\} \tag{130}$$

现在利用第 6 章方程 (175) 的自旋系数表以及第 8 章方程 (3) — (5) 的算符 D 和 δ^* 定义, 得方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Psi_2}{\partial r} = -\frac{3}{\overline{\rho}^*}\Psi_2 - \frac{Q_*^2}{4\rho^4\overline{\rho}^*}, \\ \text{和}\quad &\frac{\partial\Psi_2}{\partial\theta} = -\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\Psi_2 + Q_*^2\frac{\mathrm{i}a\sin\theta}{\rho^4\overline{\rho}^*}, \end{aligned}\right\} \tag{131}$$

其中已代入 ϕ_1 的解 (128).

不难验证, 方程 (131) 的一个特定积分是

$$\Psi_2 = \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}(\overline{\rho}^*)^3}; \tag{132}$$

而该齐次方程的一般解是

$$\Psi_2 = \text{常量}/(\overline{\rho}^*)^3. \tag{133}$$

通过与第 6 章方程 (180) 比较可得结论, 解 (133) 中的常量是 $-M$, 因为它必须有与克尔解 (在 $Q_* = 0$ 极限) 情形相同的值. 于是, 所要求的 Ψ_2 解是

$$\Psi_2 = -\frac{M}{(\overline{\rho}^*)^3} + \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}(\overline{\rho}^*)^3}. \tag{134}$$

111. 支配克尔 – 纽曼时空的耦合电磁 – 引力扰动的方程 [581]

如在引言节 (§108) 讲过的, 在处理克尔时空的引力扰动时已经显示是如此成功的方法, 看来并不适用于 (不容易推广到) 处理克尔 – 纽曼时空的耦合电磁 – 引力扰动. 主要的困难在于寻找分离的方程. 本节将简短地探讨扰动时空中自旋为 1 和为 2 的场之间耦合的这种明显不可分离性的缘由.

处理克尔 – 纽曼时空扰动的基本方程再次是 "已线性化的" 方程, 由 4 个比安基恒等式 (第 1 章方程 (321) (a)、(d)、(e) 和 (h))、2 个里奇恒等式 (第 1 章方程 (310) (b) 和 (j)) 以及第 5 章方程 (207) 和 (208) 所给的简化形式麦克斯韦方程提供. 后面这二个方程表明, 如在处理雷斯纳 – 诺兹特朗时空扰动时那样, 采用其中 ϕ_0 和 ϕ_2 继续为零的规范:

$$\phi_0 = \phi_2 = 0. \tag{135}$$

如在第 5 章§44 (*b*) 已说明的, 这个规范选择是完全可允许的.[①]在这个规范中, 麦克斯韦方程被代之以方程对,

$$(\text{Þ} - 3\gamma - \gamma^* - 2\mu + \mu^*)\kappa - (\delta^* - 3\alpha + \beta^* - \tau^* - 2\pi)\sigma + 2\Psi_1 = 0, \tag{136}$$

$$(\delta + \pi^* + 2\tau - \alpha^* + 3\beta)\lambda - (D + 3\varepsilon + \varepsilon^* - 2\widetilde{\rho} + \widetilde{\rho}^*)\nu + 2\Psi_3 = 0, \tag{137}$$

此方程对是关于自旋系数的. (注意在所选规范中外尔标量 Ψ_1 和 Ψ_3 不能被假设为零.)

转到比安基恒等式 (第 1 章方程 (321) (a)、(d)、(e) 和 (h)), 现在必须将第 9 章方程 (3) 和 (4) 中前二个的右边代之以

$$\left.\begin{aligned}
+\kappa(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= -\frac{\kappa}{(\overline{\rho}^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right],\\
+\sigma(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= -\frac{\sigma}{(\overline{\rho}^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right],\\
-\lambda(3\Psi_2 + 4\phi_1\phi_1^*) &= +\frac{\lambda}{(\overline{\rho}^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right],\\
-\nu(3\Psi_2 - 4\phi_1\phi_1^*) &= +\frac{\nu}{(\overline{\rho}^*)^3}\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) + Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{138}$$

所以, 用第 9 章方程 (6) 的同样定义, 现在必须代替第 9 章方程 (7)、(8) 和 (9) 而考虑 4 个方程 (最后一个是方程 (136) 的变换形式):

[582]
$$\left(\text{Ł}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 - \left(\text{Đ}_0 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = -2k\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\rho}\right) + Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right], \tag{139}$$

$$\Delta\left(\text{Đ}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_0 + \left(\text{Ł}_{-1}^\dagger + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\Phi_1 = +2s\left[3\left(M - \frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) - Q_*^2\frac{\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right], \tag{140}$$

$$\left(\text{Đ}_0 + \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)s - \left(\text{Ł}_{-1}^\dagger + \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)k = \frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_0, \tag{141}$$

$$\Delta\left(\text{Đ}_2^\dagger - \frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)k + \left(\text{Ł}_2 - \frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)s = 2\frac{\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\Phi_1. \tag{142}$$

① 此选择肯定是最简单的: 任何其它选择都导致比方程 (139) — (142) 更复杂的方程组.

可见方程 (142) 与第 9 章方程 (29) 是同样的, 后者曾被补充 (特定地!) 来恢复第 9 章方程 (7) — (9) 失去的对称性.

现在可将导致第 9 章方程 (17) 和 (31) 的算符同样作用于方程 (138) — (142). 于是, 借助于等式

$$\Delta\left(\mathscr{D}_1+\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_2^\dagger-\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)+\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger+\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_2-\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)$$
$$=\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger+\mathscr{L}_{-1}^\dagger\mathscr{L}_2-6\mathrm{i}\sigma\overline{\rho}+\frac{6\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\left(M-\frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) \tag{143}$$

和

$$\Delta\left(\mathscr{D}_2^\dagger-\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{D}_0+\frac{3}{\overline{\rho}^*}\right)+\left(\mathscr{L}_2-\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger+\frac{3\mathrm{i}a\sin\theta}{\overline{\rho}^*}\right)$$
$$=\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0+\mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger-6\mathrm{i}\sigma\overline{\rho}+\frac{12\overline{\rho}}{(\overline{\rho}^*)^2}\left(M-\frac{Q_*^2}{\overline{\rho}}\right) \tag{144}$$

可得, 代替分离的解耦方程第 9 章 (20)、(21)、(33) 和 (34), 现在有耦合方程对

$$(\Delta\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2^\dagger+\mathscr{L}_{-1}^\dagger\mathscr{L}_2-6\mathrm{i}\sigma\overline{\rho})\Phi_0=-2Q_*^2\left(\mathscr{L}_{-1}^\dagger\frac{k\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}+\mathscr{D}_0\frac{s\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right) \tag{145}$$

和

$$(\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\mathscr{D}_0+\mathscr{L}_2\mathscr{L}_{-1}^\dagger-6\mathrm{i}\sigma\overline{\rho})\Phi_1=+2Q_*^2\left(\Delta\mathscr{D}_2^\dagger\frac{k\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}-\mathscr{L}_2\frac{s\overline{\rho}^*}{\overline{\rho}^2}\right); \tag{146}$$

而所有试图解耦 (或分离) 这些方程的努力都不成功. 对方程组 (139) — (142) 大量的其它替代处理也同样不成功.

现在要问, 为什么方程组 (139) — (142) 会显得棘手, 而与在处理雷斯纳 – 诺兹特朗和克尔时空扰动时遇到的看似类似的方程组不同? 关于雷斯纳 – 诺兹特朗时空的第 5 章方程 (222) — (225) 的经验或许是有启发的. 首先, 角函数 $S_{\pm1}$ 和 $S_{\pm2}$ 很简单地相关联 (见第 5 章方程 (234)), 而属于这些方程的特征值 λ 是相同的. 此外, 背景空间的球对称性保证了变量的可分离性. 但是方程组解耦为一对二阶方程是未曾预期的: 之所以能做到, 只是因为考虑了属于外尔标量和自旋系数的径向函数的特殊组合, 即第 5 章方程 (239), 此组合中的特征值参数 λ (对 $S_{\pm1}$ 和 $S_{\pm2}$ 二者共同) 最为非线性地出现. 在一般的轴对称情形, 并没有先验的理由预期属于自旋 1 和自旋 2 场的角函数会简单地相关联, 即使在克尔背景中它们也不是如此. 其次, 将方程 (139) 和 (140) 与对应的方程第 9 章 (7) 和 (8) 比较可看到, 与后者右边各项的简单性相反, 现在有着 $(M-Q_*^2/\overline{\rho})$ 和 $Q_*^2\overline{\rho}^*/\overline{\rho}^2$ 的讨厌组合. [583]

总之, 可以倾向于这样的结论, 方程组 (139) — (142) 的解耦和变量的分离如果可能做到的话, 也只能是靠对付 4 阶或或更高阶的方程.

112. 表示静态黑洞的解

在第 6 章 (§55) 已看到, 史瓦西解符合在无穷远渐近平坦的要求, 是爱因斯坦真空方程的有着平滑事件视界的唯一静态解. 渐近平坦的要求是等价于黑洞在空间孤立的限制. 虽然首先限于孤立的黑洞是自然的, 但它们会怎样被外部质量分布所扭曲的问题也是有趣的. 若只关注这种扭曲黑洞的近邻区域, 则存在外部质量分布的假定是等价于放弃渐近平坦的假定. 本节将阐述如何构造爱因斯坦真空方程的可认为是扭曲史瓦西黑洞的静态轴对称解.

为构造爱因斯坦方程的静态轴对称解, 从下列形式的度规开始,

$$\mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi)^2 - e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \tag{147}$$

即与第 6 章 (和本章§109) 中考虑过的形式相同, 只是含 ω 的项 (表示定常态时空的惯性系拖曳) 现在被略去. 对相应场方程的考虑并无形式上的困难.

[584]

不失一般性, 在现在的意义上可以假定 (见方程 (26) 和 (27))

$$\left.\begin{aligned} e^{2(\mu_3-\mu_2)} &= \Delta(r) = r^2 - 2Mr \\ e^{\beta} &= e^{\psi+\nu} = \Delta^{1/2}\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

和

与在 $r = 2M$ 上事件视界的存在相一致. 于是主要问题就简化为对下列线性方程的考虑 (见第 6 章方程 (49)),

$$[\Delta(\psi-\nu)_{,2}]_{,2} + [\delta(\psi-\nu)_{,3}]_{,3} = 0, \tag{149}$$

其中

$$\delta = 1 - \mu^2 = \sin^2\theta, \tag{150}$$

而指标 "3" 代表 $\mu(=\cos\theta)$. 现在令

$$\eta = (r - M)/M, \tag{151}$$

即

$$\Delta = M^2(\eta^2 - 1), \tag{152}$$

可将方程 (149) 写为更对称的形式

$$[(\eta^2-1)(\lg\chi)_{,\eta}]_{,\eta} + [(1-\mu^2)(\lg\chi)_{,\mu}]_{,\mu} = 0, \tag{153}$$

其中, 如常,

$$\chi = e^{-\psi+\nu}. \tag{154}$$

在前面关于克尔和克尔 – 纽曼解的考虑中已发现, 适于共轭度规的函数在一定意义上比原初度规的函数更为基本. 相应地, 且考虑 (见第 6 章方程 (97) 和 (98))

$$\Psi = \chi\sqrt{\Delta\delta} = \chi[(\eta^2-1)(1-\mu^2)]^{1/2}, \tag{155}$$

而不是 χ. 由于 $\chi = (\eta^2-1)(1-\mu^2)$ 是方程 (153) 的解, Ψ 也就满足同样的方程:

$$[(\eta^2-1)(\lg\Psi)_{,\eta}]_{,\eta} + [(1-\mu^2)(\lg\Psi)_{,\mu}]_{,\mu} = 0. \tag{156}$$

现可验证, 能由下列解重获史瓦西度规,

$$\Psi = \Psi_{\mathrm{Sc}} = \frac{\eta-1}{\eta+1}. \tag{157}$$

对 χ 的相应解是

$$\chi = \chi_{\mathrm{Sc}} = \left[\frac{\eta-1}{(\eta+1)^3(1-\mu^2)}\right]^{1/2}. \tag{158}$$

除 “单一” 解 (157) 外, 方程 (156) 还允许可分离解. 记 [585]

$$\lg\Psi = R(\eta)P(\mu) \tag{159}$$

可得, 事实上对 $P(\mu)$ 必须选择①勒让德函数 $P_n(\mu)$. 于是径向函数 $R(\eta)$ 也满足勒让德方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(\eta^2-1)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\eta}\right] - n(n+1)R = 0. \tag{160}$$

应归入 $P_n(\mu)$ 的 $R(\eta)$ 的解因此就是第一和第二类勒让德函数 $P_n(\eta)$ 和 $Q_n(\eta)$ 的线性组合, 即有

$$R_n(\eta) = A_nP_n(\eta) + B_nQ_n(\eta), \tag{161}$$

其中 A_n 和 B_n 是常数. 依此途径得到的 $\lg\Psi$ 的一般解是

$$\lg\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(\eta)P_n(\mu) = S(\eta,\mu) \quad (\text{比如说}). \tag{162}$$

适合于被外部质量分布扭曲的史瓦西黑洞, 假定 Ψ 有下列形式的解,

$$\Psi = \Psi_{\mathrm{Sc}}e^S = \frac{\eta-1}{\eta+1}e^S, \tag{163}$$

① 实际上, 对在极点无奇异性的 $P_n(\mu)$ 的选择, 是即将 (下面 §(a)) 考虑的度规对 $\mu^2 = 1$ 和 $\eta \geqslant 1$ 局域平坦的要求所需要的. 这个要求还需要第二类勒让德函数中的项 $Q_n(\eta)$ 不包含在方程 (161) 和 (162) 对 $R(\eta)$ 的解中.

其中 S 是由方程 (161) 和 (162) 确定的一般解. 相应的 χ 的解是

$$\chi = e^{-\psi+\nu} = \chi_{\mathrm{Sc}} e^{S} = \left[\frac{\eta-1}{(\eta+1)^3(1-\mu^2)}\right]^{1/2} e^{S}. \tag{164}$$

由方程 (164) 和进一步的关系

$$e^{\beta} = e^{\psi+\nu} = [(\eta^2-1)(1-\mu^2)]^{1/2}, \tag{165}$$

现在得到

$$e^{2\nu} = \frac{\eta-1}{\eta+1} e^{S} \quad 和 \quad e^{2\psi} = (1-\mu^2)(\eta+1)^2 e^{-S}. \tag{166}$$

作为结果的度规形式是

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = {} & \frac{\eta-1}{\eta+1} e^{S} (\mathrm{d}t)^2 - (1-\mu^2)(\eta+1)^2 e^{-S} (\mathrm{d}\varphi)^2 \\ & - \frac{e^{\mu_2+\mu_3}}{\sqrt{\eta^2-1}} [(\mathrm{d}\eta)^2 + (\eta^2-1)(\mathrm{d}\theta)^2]. \end{aligned} \tag{167}$$

[586] 为完成解, 还须考虑决定 $(\mu_2+\mu_3)$ 的方程. 它们是 (见第 6 章方程 (64) 和 (65))

$$-\frac{\mu}{1-\mu^2}(\mu_2+\mu_3)_{,\eta} + \frac{\eta}{\eta^2-1}(\mu_2+\mu_3)_{,\mu} = (\lg\chi)_{,\eta}(\lg\chi)_{,\mu} \tag{168}$$

和

$$\begin{aligned} & 2\eta(\mu_2+\mu_3)_{,\eta} + 2\mu(\mu_2+\mu_3)_{,\mu} = (\eta^2-1)[(\lg\chi)_{,\eta}]^2 \\ & -(1-\mu^2)[(\lg\chi)_{,\mu}]^2 - \frac{3}{\eta^2-1} + \frac{1}{1-\mu^2}, \end{aligned} \tag{169}$$

因为对目前的问题有 $X = Y = \chi$. 对 $(\mu_2+\mu_3)_{,\eta}$ 和 $(\mu_2+\mu_3)_{,\mu}$ 解方程 (168) 和 (169), 得

$$\begin{aligned} \frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)}(\mu_2+\mu_3)_{,\eta} = {} & \frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} \left[-\frac{2-\eta}{\eta^2-1} - S_{,\eta}\right] \\ & + \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_{,\eta} - \frac{4\mu}{\eta^2-1} S_{,\mu} - 2\mu S_{,\eta} S_{,\mu} + \eta (S_{,\eta})^2 - \eta \frac{1-\mu^2}{\eta^2-1} (S_{,\mu})^2 \end{aligned} \tag{170}$$

和

$$\begin{aligned} \frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)}(\mu_2+\mu_3)_{,\mu} = {} & -\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)} S_{,\mu} \\ & + \frac{4\mu}{1-\mu^2} S_{,\eta} + \frac{4\eta}{\eta^2-1} S_{,\mu} + 2\eta S_{,\eta} S_{,\mu} + \mu \frac{\eta^2-1}{1-\mu^2} (S_{,\eta})^2 - \mu (S_{,\mu})^2. \end{aligned} \tag{171}$$

这些方程的可积性当然是有保证的.

(a) 黑洞平衡的条件

黑洞的平衡清楚地要求空间对所有 $\eta \geqslant 1$ 沿 θ 轴是局域平坦的; 因为不然的话, 黑洞就会受到在一个或另一个方向推动它的潮汐力作用. 这个局域平坦条件的另一种陈述是, 要求垂直于轴画出的无限小圆圈的周长与半径之比对所有 $\eta \geqslant 1$ 都是 2π. 于是对写为形式 (167) 的度规, 要求是

$$\lim_{\theta \to 0 \text{ 或 } \pi} \left[\frac{e^{\mu_2+\mu_3}(\eta^2-1)^{1/2}(\mathrm{d}\theta)^2}{(\eta+1)^2 e^{-S}\sin^2\theta} \right] = 1 \text{ 对 } \eta \geqslant 1, \tag{172}$$

或

$$e^{\sigma} = \left[\frac{\eta-1}{(\eta+1)^3} \right]^{1/2} e^{\mu_2+\mu_3+S} = 1 \text{ 对 } \mu^2 = 1 \text{ 和 } \eta \geqslant 1. \tag{173}$$

现可得到, 用 σ 表示的方程 (170) 和 (171) 经简化后给出 [587]

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)}\sigma_{,\eta} = \frac{4\eta}{\eta^2-1}S_{,\eta} - \frac{4\mu}{\eta^2-1}S_{,\mu} -$$

$$2\mu S_{,\eta}S_{,\mu} + \eta(S_{,\eta})^2 - \eta\frac{1-\mu^2}{\eta^2-1}(S_{,\mu})^2 \tag{174}$$

和

$$\frac{2(\eta^2-\mu^2)}{(\eta^2-1)(1-\mu^2)}\sigma_{,\mu} = \frac{4\mu}{1-\mu^2}S_{,\eta} + \frac{4\eta}{\eta^2-1}S_{,\mu}$$

$$+2\eta S_{,\eta}S_{,\mu} - \mu(S_{,\mu})^2 + \mu\frac{\eta^2-1}{1-\mu^2}(S_{,\eta})^2. \tag{175}$$

方程 (173) 被满足的必要 (但不是充分) 条件是

$$\sigma_{,\eta} = 0 \text{ 对 } 1-\mu^2 = 0. \tag{176}$$

只要有 $S(\eta,\mu)$ 对 $\mu = \pm 1$ 非奇异, 方程 (174) 就与此要求相符. 正是这个要求限制了在写出 $\lg\Psi$ 的解 (162) 时须选择 $P_n(\mu)$.

只要在轴上有 $\sigma_{,\eta} = 0$, 就一定能安排对 $\theta = 0$ 和 $\eta \geqslant 1$ 有 $\sigma = 0$. 但为保证 σ 对 $\theta = \pi$ 也有值 0, 就必须还要求

$$\int_0^{\pi} \sigma_{,\theta}(\eta = 1)\mathrm{d}\theta = 0. \tag{177}$$

从方程 (175) 得出结论, 第一个要求是在 $\eta = 1$ 上 S 为非奇异. 由于这个缘故, 不能在 $R_n(\eta)$ 的解 (161) 中包含第二类勒让德函数; 而 S 的解简化为

$$S(\eta,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\eta)P_n(\mu). \tag{178}$$

由这个解在 $\eta=1$ 上非奇异, 方程 (175) 给出

$$\sigma_{,\mu}=2S_{,\mu} \text{ 和 } \eta=1; \tag{179}$$

而条件 (177) 给出

$$S(\eta=1,\mu=+1)=S(\eta=1,\mu=-1). \tag{180}$$

对方程 (178) 给的 S, 轴上局域平坦要求奇数系数 A_{2n+1} 受限制

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}P_{2n+1}(1)=0; \tag{181}$$

但对偶数系数 A_{2n} 没有限制.

[588] 最后注意, 描述静态扭曲黑洞的度规可表示为下列形式,

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\eta-1}{\eta+1}e^{+S}(\mathrm{d}t)^2-\frac{\eta+1}{\eta-1}e^{\sigma-S}(\mathrm{d}\eta)^2-(\eta+1)^2e^{-S}[e^{\sigma}(\mathrm{d}\theta)^2+\sin^2\theta(\mathrm{d}\varphi)^2], \tag{182}$$

其中 σ 能从方程 (174) 和 (175) 经简单的积分得到, 而方程 (178) 给出的 S 的解受奇数系数条件 (181) 限制.

113. 表示黑洞集的爱因斯坦 – 麦克斯韦方程的解

本节考虑爱因斯坦 – 麦克斯韦方程的一个解, 它给出带电质点的牛顿集合的对应, 质点之间的相互引力精确地被库仑斥力平衡. 这个解是由玛居姆达和帕帕培特罗发现的; 但将解正确地解释为实际上表示极端雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞 (即有 $Q_*=\pm M$) 集群的, 是哈特尔和霍金.

玛居姆达 – 帕帕培特罗解的得到是通过对具有下列度规的时空考虑爱因斯坦 – 麦克斯韦方程的静态解,

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2-e^{2\psi}[(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2], \tag{183}$$

其中 ν 和 ψ 只是空间坐标 x^1、x^2 和 x^3 的函数. 适合于此度规的场方程不难由对第 2 章中方程适当地具体化而写出. 首先考虑麦克斯韦方程, 由第 2 章方程 (95) (a) — (h) 可得:

$$(e^{2\psi}F_{12})_{,3}+(e^{2\psi}F_{23})_{,1}+(e^{2\psi}F_{31})_{,2}=0, \tag{184}$$

$$\left.\begin{aligned}(e^{\psi+\nu}F_{01})_{,2}-(e^{\psi+\nu}F_{02})_{,1}=0,\\(e^{\psi+\nu}F_{01})_{,3}-(e^{\psi+\nu}F_{03})_{,1}=0,\\(e^{\psi+\nu}F_{12})_{,2}-(e^{\psi+\nu}F_{31})_{,3}=0;\end{aligned}\right\} \tag{185}$$

$$(e^{2\psi}F_{02})_{,2}+(e^{2\psi}F_{03})_{,3}+(e^{2\psi}F_{01})_{,1}=0, \tag{186}$$

$$\left.\begin{aligned}(e^{\psi+\nu}F_{23})_{,2}-(e^{\psi+\nu}F_{31})_{,1}=0,\\(e^{\psi+\nu}F_{23})_{,3}-(e^{\psi+\nu}F_{12})_{,1}=0,\\(e^{\psi+\nu}F_{02})_{,3}-(e^{\psi+\nu}F_{03})_{,2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{187}$$

由两组方程 (185) 和 (187) 得出, 麦克斯韦张量的分量 (F_{01}、F_{02}、F_{03}) 和 [589]
(F_{12}、F_{23}、F_{31}) 能从两个势 A 和 B 按以下方式导出,

$$e^{\psi+\nu}F_{0\alpha}=A_{,\alpha}\ \text{ 和 }\ e^{\psi+\nu}F_{\alpha\beta}=B_{,\gamma}$$

(α、β 和 γ 是 1、2 和 3 的循环排列). (188)

(这里及下文中, 希腊文指标限于空间坐标; 对 α 求和应理解为对 $\alpha=1$、2、3 求和.)

方程 (184) 和 (185) 现在给出对 A 和 B 的方程, 即

$$\sum_{\alpha}(e^{\psi-\nu}A_{,\alpha})_{,\alpha}=0\ \text{ 和 }\ \sum_{\alpha}(e^{\psi-\nu}B_{,\alpha})_{,\alpha}=0. \tag{189}$$

由方程 (11) 定义的麦克斯韦场的能量 – 动量张量, 在现在的意义上有

$$R_{00}=e^{-2(\psi+\nu)}[|A_{,\alpha}|^2+|B_{,\alpha}|^2], \tag{190}$$

$$R_{11}=e^{-2(\psi+\nu)}[|A_{,\alpha}|^2+|B_{,\alpha}|^2-2(A_{,1})^2-2(B_{,1})^2], \tag{191}$$

$$R_{10}=+2e^{-2(\psi+\nu)}(A_{,2}B_{,3}-B_{,2}A_{,3}), \tag{192}$$

$$R_{12}=-2e^{-2(\psi+\nu)}(A_{,1}A_{,2}+B_{,1}B_{,2}), \tag{193}$$

其中已采用缩写

$$|A_{,\alpha}|^2=\sum_{\alpha}(A_{,\alpha})^2. \tag{194}$$

分量 R_{22} 等等 (未列出) 的表示可由指标 1、2 和 3 的循环排列得出.

转到爱因斯坦场方程, 从第 2 章方程 (75) (a) — (u) 可得, 对度规形式 (183) 的黎曼张量非零分量是

$$R_{1212}=e^{-2\psi}(\psi_{,1,1}+\psi_{,2,2}+\psi_{,3}\psi_{,3}), \tag{195}$$

$$R_{1414}=e^{-2\psi}(\nu_{,1,1}+\nu_{,1}\nu_{,1}-\nu_{,1}\psi_{,1}+\nu_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,3}\psi_{,3}), \tag{196}$$

$$R_{1442}=-e^{-2\psi}(\nu_{,1,2}+\nu_{,1}\nu_{,2}-\psi_{,1}\nu_{,2}-\psi_{,2}\nu_{,1}), \tag{197}$$

$$R_{1213}=e^{2\psi}(\psi_{,2,3}-\psi_{,2}\psi_{,3}), \tag{198}$$

以及那些可通过指标 1、2、3 的循环排列由上面这些得出的. 其余的分量为零:

和
$$\left.\begin{aligned} R_{2114} = R_{3114} = R_{1224} = R_{3224} = R_{1334} = R_{2334} = 0, \\ R_{1234} = R_{1423} = R_{1342} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

[590] (应记得, 按照第 2 章中用过的约定, 指标 4 表示 *it.*)

(*a*) 场方程的简化

由 (199) 所列的黎曼张量为零的分量可得

$$R_{14} = R_{1224} + R_{1334} = 0, \quad \text{即} \quad R_{10} = 0. \tag{200}$$

所以, 由方程 (192) 有

$$A_{,2}B_{,3} - B_{,2}A_{,3} = 0. \tag{201}$$

从这个方程以及由 R_{20}、R_{30} 为零得出的类似方程可得结论

$$\frac{A_{,1}}{B_{,1}} = \frac{A_{,2}}{B_{,2}} = \frac{A_{,3}}{B_{,3}}. \tag{202}$$

相应地, 通过施于反对称张量 F_{ij} 及其双 ${}^*F_{ij}(= \varepsilon_{ijkl}F^{kl})$ 的双变换, 可安排 A 或 B 为零. 由于 A 是对应着静电势, 所以便利的是设

$$B = 0. \tag{203}$$

很清楚, 作这个假定并未丧失一般性.

由于麦克斯韦场的能量 – 动量张量是无迹的, 故标量曲率 R 必定为零, 即

$$\frac{1}{2}R = R_{1212} + R_{2323} + R_{3131} + R_{1414} + R_{2424} + R_{3434} = 0. \tag{204}$$

按方程 (195) 和 (196) 代入黎曼张量的分量, 得

$$\sum_\alpha \psi_{,\alpha,\alpha} + \sum_\alpha \psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha} + \sum_\alpha (\psi+\nu)_{,\alpha,\alpha} + \sum_\alpha \nu_{,\alpha}(\psi+\nu)_{,\alpha} = 0. \tag{205}$$

标量曲率 R 为零特别指明, R_{00} 和 G_{00} 是相等的. 明晰地写出场方程的对应组分是有用的. 由于

$$+R_{00} = -R_{44} = R_{1414} + R_{2424} + R_{3434}, \tag{206}$$

和

$$-G_{00} = +G_{44} = R_{1212} + R_{2323} + R_{3131}, \tag{207}$$

从方程 (190)、(195) 和 (196) 可得

$$\sum_\alpha \nu_{,\alpha,\alpha} + \sum_\alpha \nu_{,\alpha}(\psi+\nu)_{,\alpha} = +e^{-2\nu}|A_{,\alpha}|^2 \tag{208}$$

和 [591]

$$2\sum_{\alpha}\psi_{,\alpha,\alpha}+\sum_{\alpha}\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}=-e^{-2\nu}|A_{,\alpha}|^2, \tag{209}$$

记住已设 $B=0$.

将方程 (208) 和 (209) 相加, 可重新得到方程 (205). 这些方程的独立线性组合是

$$\sum_{\alpha}\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}+2\sum_{\alpha}(\psi+\nu)_{,\alpha,\alpha}+2\sum_{\alpha}\nu_{,\alpha}(\psi+\nu)_{,\alpha}=e^{-2\nu}|A_{,\alpha}|^2. \tag{210}$$

最后, 考虑里奇张量的分量

$$R_{12}=R_{1332}+R_{1442}, \tag{211}$$

从方程 (193)、(197) 和 (198) 得到

$$2\nu_{,1}\nu_{,2}+(\psi+\nu)_{,1,2}-(\psi+\nu)_{,1}(\psi+\nu)_{,2}=2e^{-2\nu}A_{,1}A_{,2}, \tag{212}$$

或更一般地,

$$2\nu_{,\alpha}\nu_{,\beta}+(\psi+\nu)_{,\alpha,\beta}-(\psi+\nu)_{,\alpha}(\psi+\nu)_{,\beta}=2e^{-2\nu}A_{,\alpha}A_{,\beta}. \tag{213}$$

方程 (189)、(205)、(210) 和 (213) 即是问题的基本方程.

(*b*) 玛居姆达 – 帕帕培特罗解

由方程 (205)、(210) 和 (213) 显然可见, 情形

$$\psi+\nu=0 \tag{214}$$

是特别值得关注的. 因为此情形的方程大为简化, 只剩下

$$\sum_{\alpha}\psi_{,\alpha,\alpha}+\sum_{\alpha}\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}=0, \tag{215}$$

$$|\psi_{,\alpha}|^2=e^{2\psi}|A_{,\alpha}|^2 \quad 和 \quad \psi_{,\alpha}\psi_{,\beta}=e^{2\psi}A_{,\alpha}A_{,\beta} \quad (\alpha\neq\beta). \tag{216}$$

方程 (215) 的另一种形式是

$$\sum_{\alpha}(e^{\psi})_{,\alpha,\alpha}=0. \tag{217}$$

由方程 (216) 可得 (见方程 (188))

$$A_{,\alpha}=\mp e^{-\psi}\psi_{,\alpha}=\pm(e^{-\psi})_{,\alpha} \quad (=F_{0\alpha}). \tag{218}$$

由于有 e^{ψ} 满足的方程 (189), $A_{,\alpha}$ 的这个解与方程 (189) 一致. 静电势 A 的解现可给出,

$$A = \pm e^{-\psi}, \tag{219}$$

其中的符号可按习惯选择.

[592] 现在用 $(x、y、z)$ 代替 $(x^1、x^2、x^3)$, 并用 U 来代替 e^{ψ} 是便利的. 于是度规的形式是

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{U^2}(\mathrm{d}t)^2 - U^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2), \tag{220}$$

其中 U 满足笛卡儿坐标三维拉普拉斯方程,

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) U = 0; \tag{221}$$

而静电势是

$$A = U^{-1}. \tag{222}$$

这就是玛居姆达 – 帕帕培特罗解.

(c) 表示黑洞集的解

拉普拉斯方程 (221) 的任何解当然都能用来与度规 (220) 结合. 但现在特别关注的表示黑洞集的解, 乃是从一群质点 $M_i(i = 1、\cdots、N)$ 的牛顿势导出的, 即

$$U = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{r_i}, \tag{223}$$

其中

$$r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{1/2}, \tag{224}$$

U 的解中添加的常数 1 是为保证在没有引力源时度规成为闵可夫斯基的.

有关解 (223) 的两个事实需要澄清.

第一, 由度规形式 (220), 当不同的点 $(x_i、y_i、z_i)$ 分离甚远时, 可以将常量 M_i 认同为包含在围绕不同点的大半径球内的惯性质量. 所以, 必须要求 M_i 全都为正:

$$M_i > 0 \quad (i = 1, \cdots, N). \tag{225}$$

于是, 在流形的坐标图 $(x、y、z)$ 适用的部分 (将看到, 只适用于最大延展流形的一部分), U $(x、y、z)$ 是正的和非零的, 而度规是除 r_i 点外处处非奇异的.

第二, 点质量 M_i 的电荷 Q_i 可由计算 $F^{\alpha 0}\sqrt{-g}$ 的散度在包含点 $(x_i、y_i、z_i)$ 的球体积 V_i 的积分来确定①, 即

$$\begin{aligned} 4\pi Q_i &= \int_{V_i} \mathrm{d}x^\alpha (F^{\alpha 0}\sqrt{-g})_{,\alpha} = \int_{\partial V_i} \mathrm{d}S_\alpha F^{\alpha 0}\sqrt{-g} \\ &= \int_{\partial V_i} \mathrm{d}S_\alpha U^2 F_{0\alpha} = \int_{\partial V_i} \mathrm{d}S_\alpha U^2 (U^{-1})_{,\alpha} \\ &= -\int_{\partial V_i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{M_i}{r_i}\right)\mathrm{d}S^\alpha = 4\pi M_i. \end{aligned} \tag{226}$$

[593]

所以, 以所采用的单位, 与在 $(x_i、y_i、z_i)$ 的源关联的电荷和质量是相等的. 由在方程 (222) 中已选择的 A 的符号, 电荷 $Q_i(=M_i)$ 全都为正. 但若在方程 (222) 对 A 选择了相反的符号 (而这是可选的, 见方程 (219)), 就会得出所有电荷为负. 无论如何, 电荷必须全都同号, 与选择或习惯无关.

回到解 (223), 首先看到, 当仅有一个质点时,

$$U = 1 + M/r, \tag{227}$$

在球坐标系写出度规, 并将 r 代之以 $r - M$, 就重新得到标准形式的极端雷斯纳 – 诺兹特朗解.

两个质点的情形, 即

$$U = 1 + \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{r_2}, \tag{228}$$

对将要略为详细考虑的一般情形具有充分的代表性. 在采用的坐标图 $(x、y、z)$ 中, U 的解和度规 (220) 在 $r = r_1$ 和 $r = r_2$ 是奇异的. 但是这些点上的奇异性仅是坐标奇异性, 而在 r_1 和 r_2 上的几何是完全正常的. 为使这一事实更明显, 首先变换到中心在 $r_1、\theta_1$ 轴沿两质点连线的极坐标系 (见图 47a). 于是,

$$U = 1 + \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{\sqrt{r_1^2 + a^2 - 2ar_1\cos\theta_1}}, \tag{229}$$

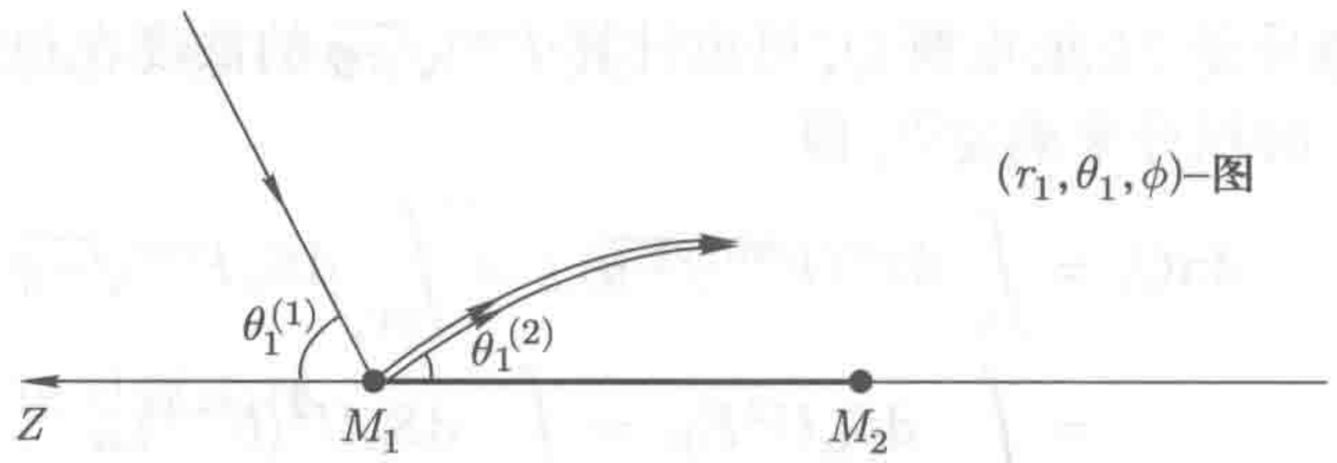
其中 a 是 M_1 与 M_2 之间的距离; 而度规取形式

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}t)^2}{U^2} - U^2[(\mathrm{d}r_1)^2 + r_1^2(\mathrm{d}\theta_1)^2 + (r_1^2\sin^2\theta_1)(\mathrm{d}\varphi)^2]. \tag{230}$$

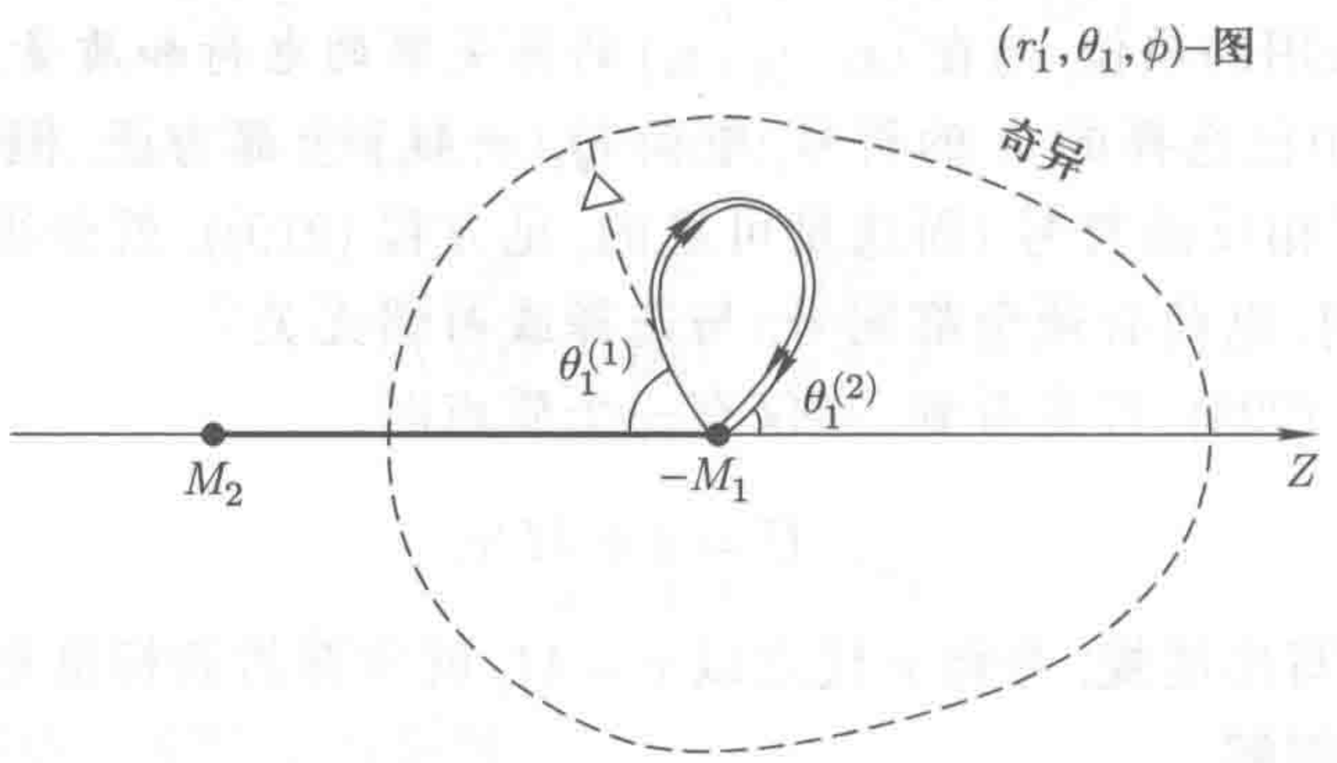
当写为此形式时, 围绕原点、半径为 r_1 的小球的表面积显然并不随 $r_1 \to 0$ 而趋于零, 而是趋于有限值 $4\pi M_1^2$ (这也是质量为 M_1 的极端雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞事件视界的面积). 所以, $r_1 = 0$ 并不标记一个点, 而是表示一个有着有限面积 $4\pi M_1^2$ 的面. [594]

① 这个判断是来自麦克斯韦方程之一, 即

$$(F^{\alpha 0}\sqrt{-g})_{,\alpha} = J^0\sqrt{-g}.$$



(a)



(b)

图 47 两个带电质点 ($M_1 = Q_1$ 和 $M_2 = Q_2$) 的流形通过 M_1 上坐标奇点的解析延伸. 在 (r_1、θ_1、φ) 图 (图 (a)) 中, 坐标系中心在质点 M_1 上. 此图中 $r_1 = 0$ 上的奇点不是一个点: 它表示一个其上几何为正常的零面. 流形通过 $r_1 = 0$ 到负 r_1 区域的延伸示于 (r_1', θ_1, φ) 图 (图 (b)). 在这个延伸区域, M_1 表现为有着负质量, 它被包含在表示真正点奇异性的奇异面里. 图 (a) 中到达 M_1 的类时轨道将沿同样方向在图 (b) 区域延续. 它有两个选项: 继续延伸而终止于奇点, 或是再次穿过零面 $r_1' = 0$ 而进入一个不同的世界.

为显示 $r_1 = 0$ 上的几何是正常的, 且它表示的面事实上是零面, 这里仿照哈特尔和霍金作进一步的坐标变换,

[595]

$$t = u + F(r_1), \tag{231}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r_1} = \left(1 + \frac{M_1}{r_1} + \frac{M_2}{a}\right)^2 = V^2(r_1) \quad (\text{比如说}). \tag{232}$$

于是度规变为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{(\mathrm{d}u)^2}{U^2} + 2\frac{V^2}{U^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}r_1 - \frac{1}{U^2}(U^4 - V^4)(\mathrm{d}r_1)^2 - r_1^2U^2[(\mathrm{d}\theta_1)^2 + (\sin^2\theta_1)(\mathrm{d}\varphi)^2]. \tag{233}$$

在 $r_1 = 0$ 的邻域,

$$U(r_1) - V(r_1) = \frac{M_2\cos\theta_1}{a^2}r_1 + O(r_1^2), \tag{234}$$

和

$$\mathrm{d}s^2 \to \frac{r_1^2}{M_1^2}(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}r_1 - \frac{4M_1M_2\cos\theta_1}{a^2}(\mathrm{d}r_1)^2 - M_1^2[(\mathrm{d}\theta_1)^2 + (\sin^2\theta_1)(\mathrm{d}\varphi)^2] \ \ (r_1 \to 0). \tag{235}$$

现在度规在 $r_1 = 0$ 上的非奇异性是明显的, $r_1 = 0$ 是定常态零面也同样明显.

由于 $r_1 = 0$ 上的几何是正常的, 所以流形就能延伸到允许 r_1 的负值: 沿某一方向 θ_1 到达 $r_1 = 0$ 的类时轨道将沿同一方向延续而进入负 r_1 区域. 由定义 (见图 47b),

$$r_1' = -r_1 \ \ 和 \ \ r_2' = (r_1'^2 + a^2 + 2ar_1'\cos\theta_1)^{1/2}, \tag{236}$$

度规 (在负 r_1 区域) 将继续为同样形式 (230), 只是 $U(r_1、\theta_1)$ 被代之以

$$U'(r_1', \theta_1) = 1 - \frac{M_1}{r_1'} + \frac{M_2}{r_2'}. \tag{237}$$

清楚的是, 函数 $U'(r_1', \theta_1)$ 将在某个面上为零. 对 $U'(r_1', \theta_1)$ 的 "等势面" 的简单考察表明, U' 为零的面完全包含原点 $r_1' = 0$. 而在 $U' = 0$ 面上, 度规是奇异的. 奇异性现在是真实的; 这能由计算诸如 $F_{ef}F^{ef}$ 这样的不变量, 并得出它在 $U' = 0$ 上发散而证实. 也就是说 (见方程 (188)),

$$F_{ef}F^{ef} =\!\leftarrow 2|A_{,\alpha}|^2 = -2\left(\frac{\mathrm{grad}U'}{U'^2}\right)^2 \tag{238}$$

显然对 $U' = 0$ 发散. 还有, 虽然在 $(r_1', \theta_1, \varphi)$ 图里 $U' = 0$ 表现为一个面, 实际 [596]
上它却是一个点. 因为, 通过计算恰在 $U' = 0$ 以内的面的面积并令该面趋于 $U' = 0$, 可得:

$$\iint [U'(r_1', \theta_1)]^2 r_1'^2 \sin\theta_1 \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\varphi \to 0. \tag{239}$$

所以, $r_1' = 0$ 内部的区域与极端雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞事件视界的内部很相似. 特别是, 越过零面 $r_1 = 0$ 的类时轨道能继续两个进程之一: 或者到达

$U'=0$ 而终止, 或者转向并再次越过 $r_1=0$ 而进入一个全新的世界 (见图 47a 和 b).

以上所有关于 M_1 和 $r_1=0$ 的讲述当然同样适合于 M_2 和 $r_2=0$. 的确, 相当一般地, 当 U 是由方程 (223) 给出时, 点 r_i 的每一个都表示一个面积为 $4\pi M_i^2$ 的零面; 而 $(x、y、z)$ 图能延伸进这些包含真正奇点的零面的内部; 且在所有情形流形的最大解析延展都能实现. 这里不再继续追踪这些问题; 但足够清楚的是, 已经证明, 由有着 (223) 所给 U 的解 (220) 描述的解析延展时空是对应于 N 个极端雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的集.

迄今对度规 (220) 的考虑是限于拉普拉斯方程最简单的解 (223). 可能有人希望考虑拉普拉斯方程其它更普遍解的类似组合. 但是哈特尔和霍金已经证明, 在所有其它情形, 时空都以裸奇点为特征. 因此, 其它这些解不再具有同样的意义. 这个说明也适用于由佩杰斯 (Perjes) 和由伊斯列 (Israel)、外尔逊 (Wilson) 二人发现的静态玛居姆达 – 帕帕培特罗解的定常态推广.

114. 变分法和黑洞解的稳定性

本书对表示自然界黑洞的史瓦西解和克尔解的讲述, 已经在很大范围内展示了它们的由纽曼和彭罗斯的形式所抓住的特别代数特征. 但是此形式在给出数学物理基本方程可分离解和揭示数学理论解析丰富性上的巨大成功, 却在一定程度上遮掩了黑洞在几何外观的面纱后面的物理真实. 黑洞的物理真实是在于渐近平坦时空中的、掩蔽了奇点的平滑事件视界. 而且应该记住, 克尔解的唯一性并不是从它的特别代数特征导出的, 而是从它的物理真实导
[597] 出的: 克尔解的代数特别性与卡特 – 罗宾逊定理的建立并不相关. 此外, 纽曼 – 彭罗斯形式的方程在涉及, 比如说, 克尔时空稳定性的重要物理问题时表现得异常地无能. 最后这一节将讲述对这些物理问题的探索, 这种探索在一些基本方面与本书总体上所采用的相比是偏离的.

将要描述的解的方法是这样来处理扰动问题, 即将爱因斯坦方程关于定常态解直接线性化, 并用变分原理表示支配扰动的方程的解. 这一在数学物理其它分支很常见的方法, 必须与广义相对论独具的特征相结合. 这些特征涉及规范问题以及初值方程和比安基恒等式的作用. 这里将给出对这些课题的介绍. 但是所作的考虑将限于爱因斯坦方程轴对称真空解的扰动, 扰动保持轴对称性 (尽管这些考虑本身有着更广泛的适用性).

现在考虑有着标准形式度规的爱因斯坦方程的定常态轴对称解, 即

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2-e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2-e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \qquad (240)$$

其中选择函数 μ_2 和 μ_3 的规范自由度已经行使. 如在第 2 章 §12 已表明的, 足

以描述有着度规 (240) 的时空轴对称扰动的非定常态度规是由下式给出 (第 2 章方程 (38)),

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - q_2\mathrm{d}x^2 - q_3\mathrm{d}x^3 - \omega\mathrm{d}t)^2 \\ -e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \end{aligned} \tag{241}$$

其中不再有自由度来赋予 μ_2 和 μ_3 以坐标条件. 也就是说, 度规 (240) 的保持轴对称的扰动将要求考虑, ν、ψ、ω、μ_2 和 μ_3 全都被影响到一阶, 从而成为

$$\nu + \delta\nu, \psi + \delta\psi, \omega + \delta\omega, \mu_2 + \delta\mu_2 \quad 和 \quad \mu_3 + \delta\mu_3. \tag{242}$$

另外, q_2 和 q_3 必须被允许为非零 (到一阶), 并受第 2 章方程 (42) 所示的限制. 但是, 弗雷德曼 (Friedman) 和舒兹 (Schutz) 证明, 对稳定性的考虑, 重要的是不要造成 $(\mu_2 + \mu_3)$ 的任何变化, 即必须保证

$$\delta(\mu_2 + \mu_3) = 0. \tag{243}$$

很清楚, 要做到这一点, 就必须考虑比 (241) 式更一般的度规形式. 为允许有 [598]
权施加诸如 (243) 这样的限制, 且将 (241) 推广为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2 - e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi - \omega\mathrm{d}t - q_2\mathrm{d}x^2 - q_3\mathrm{d}x^3)^2 \\ -e^{2\mu_2}(\mathrm{d}x^2 + \chi\mathrm{d}x^3)^2 - e^{2\mu_3}(\mathrm{d}x^3)^2, \end{aligned} \tag{244}$$

其中 χ 是依赖于 t、x^2 和 x^3 的新函数. 这个度规比第 2 章 §13 所考虑的更广义, 因为有一个新增函数 χ; 但又更狭义, 因为现在不允许度规函数依赖于 φ.

在用嘉当微积分对度规形式 (244) 计算黎曼张量的分量时, 采用 (如第 2 章 §13) 复数标记 (第 2 章方程 (44))

$$\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\mathrm{d}x^4, \quad \partial_t = \mathrm{i}\partial_4, \quad \nu = \mu_4, \quad 和 \quad \omega = \mathrm{i}q_4 \tag{245}$$

并代替第 2 章 (46) 而使用基一次型,

$$\left.\begin{array}{ll} \omega^1 = e^{\psi}\left(\mathrm{d}\varphi - \sum\limits_A q_A\mathrm{d}x^A\right); & \mathrm{d}\varphi - \sum\limits_A q_A\mathrm{d}x^A = \omega^1 e^{-\psi}, \\ \omega^2 = e^{\mu_2}(\mathrm{d}x^2 + \chi\mathrm{d}x^3); & \mathrm{d}x^2 = e^{-\mu_2}\omega^2 - \chi e^{-\mu_3}\omega^3, \\ \omega^3 = e^{\mu_3}\mathrm{d}x^3; & \mathrm{d}x^3 = e^{-\mu_3}\omega^3, \\ \omega^4 = e^{\mu_4}\mathrm{d}x^4; & \mathrm{d}x^4 = e^{-\mu_4}\omega^4, \end{array}\right\} \tag{246}$$

其中 (如第 2 章 §13) 大写拉丁指标限于 2、3 和 4.

如果定义函数 $f\ (x^2、x^3、x^4)$ 对指标 3 的 "冒号" 和 "冒号一撇" 导数,

和
$$\left.\begin{aligned} f_{:3} &= f_{,3} - \chi f_{,2} \\ f_{:3'} &= f_{,3} - (\chi f)_{,2} = f_{;3} - \chi_{,2} f. \end{aligned}\right\} \tag{247}$$

就会发现第 2 章§13 的许多分析现在都能接过来 (须注意: 3- 导数遵守莱布尼兹定则, 而 $3'$ 导数不然). 于是, 代替第 2 章方程 (60), 有

$$\begin{aligned}
\omega^1{}_2 &= e^{-\mu_2}\psi_{,2}\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^3 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24}\omega^4, \\
\omega^1{}_3 &= e^{-\mu_3}\psi_{:3}\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}\omega^4 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{32}\omega^2, \\
\omega^1{}_4 &= e^{-\mu_4}\psi_{,4}\omega^1 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{42}\omega^2 + \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{43}\omega^3, \\
\omega^2{}_3 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^1 + e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}\omega^2 - e^{-\mu_2}\mu_{3,2}\omega^3 \\
&\quad -\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4}\omega^4, \\
\omega^3{}_4 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}\omega^1 + e^{-\mu_4}\mu_{3,4}\omega^3 - e^{-\mu_3}\mu_{4:3}\omega^4 \\
&\quad +\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4}\omega^2, \\
\omega^4{}_2 &= -\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{42}\omega^1 + e^{-\mu_2}\mu_{4,2}\omega^4 - e^{-\mu_4}\mu_{2,4}\omega^2 \\
&\quad -\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4}\omega^3,
\end{aligned} \tag{248}$$

[599]

其中 (见第 2 章方程 (58))

$$Q_{AB} = q_{A,B} - q_{B,A}, \tag{249}$$

和

$$\overline{Q}_{34} = Q_{34} - \chi Q_{24} = -\overline{Q}_{43}; \tag{250}$$

而代替第 2 章方程 (62) 和 (63), 有

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(F\omega^1) &= e^{-\psi-\mu_2}(Fe^{\psi})_{,2}\omega^2\wedge\omega^1 + e^{-\psi-\mu_3}(Fe^{\psi})_{:3}\omega^3\wedge\omega^1 \\
&\quad +e^{-\psi-\mu_4}(Fe^{\psi})_{,4}\omega^4\wedge\omega^1 + Fe^{\psi}[e^{-\mu_2-\mu_3}Q_{23}\omega^2\wedge\omega^3 \\
&\quad +e^{-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}\omega^3\wedge\omega^4 + e^{-\mu_2-\mu_4}Q_{42}\omega^4\wedge\omega^2], \\
\mathrm{d}(F\omega^2) &= e^{-\mu_2-\mu_3}(Fe^{\mu_2})_{:3'}\omega^3\wedge\omega^2 + e^{-\mu_2-\mu_4}(Fe^{\mu_2})_{,4}\omega^4\wedge\omega^2 \\
&\quad +e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}F\chi_{,4}\omega^4\wedge\omega^3, \\
\mathrm{d}(F\omega^3) &= e^{-\mu_2-\mu_3}(Fe^{\mu_3})_{,2}\omega^2\wedge\omega^3 + e^{-\mu_3-\mu_4}(Fe^{\mu_3})_{,4}\omega^4\wedge\omega^3, \\
\mathrm{d}(F\omega^4) &= e^{-\mu_2-\mu_4}(Fe^{\mu_4})_{,2}\omega^2\wedge\omega^4 + e^{-\mu_3-\mu_4}(Fe^{\mu_4})_{:3}\omega^3\wedge\omega^4.
\end{aligned} \tag{251}$$

黎曼张量的分量现在可以借助于嘉当第二结构方程来计算. 可得:

$$-R_{1212} = -e^{-\psi-\mu_2}(e^{\psi-\mu_2}\psi_{,2})_{,2} - e^{-2\mu_3-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}\psi_{:3}$$
$$-e^{-2\mu_4}\mu_{2,4}\psi_{,4} + \frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2}(e^{-2\mu_3}Q_{23}^2 + e^{-2\mu_4}Q_{24}^2), \quad \text{(a)}$$

$$-R_{1313} = -e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_3}\psi_{:3})_{:3} - e^{-2\mu_2}\psi_{,2}\mu_{3,2} - e^{-2\mu_4}\psi_{,4}\mu_{3,4}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3}(e^{-2\mu_2}Q_{32}^2 + e^{-2\mu_4}\overline{Q}_{34}^2), \quad \text{(b)}$$

$$-R_{1414} = -e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_4}\psi_{,4})_{,4} - e^{-2\mu_2}\psi_{,2}\mu_{4,2} - e^{-2\mu_3}\psi_{:3}\mu_{4:3}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_4}(e^{-2\mu_2}Q_{42}^2 + e^{-2\mu_3}\overline{Q}_{43}^2), \quad \text{(c)}$$

$$-R_{2323} = -e^{-\mu_2-\mu_3}\{[e^{-\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}]_{:3'} + (e^{\mu_3-\mu_2}\mu_{3,2})_{,2}\}$$
$$-e^{-2\mu_4}\mu_{2,4}\mu_{3,4} - \frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_3}Q_{23}^2 + \frac{1}{4}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2, \quad \text{(d)}$$

$$-R_{2424} = -e^{-\mu_2-\mu_4}[(e^{\mu_2-\mu_4}\mu_{2,4})_{,4} + (e^{\mu_4-\mu_2}\mu_{4,2})_{,2}]$$
$$-e^{-\mu_2-2\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}\mu_{4:3} - \frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}Q_{24}^2 + \frac{1}{4}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2, \quad \text{(e)}$$

$$-R_{3434} = -e^{-\mu_3-\mu_4}[(e^{\mu_3-\mu_4}\mu_{3,4})_{,4} + (e^{\mu_4-\mu_3}\mu_{4:3})_{:3}]$$
$$-e^{-2\mu_2}\mu_{3,2}\mu_{4,2} - \frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{34}^2 - \frac{3}{4}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2, \quad \text{(f)}$$

$$-R_{1213} = -e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_2}\psi_{,2})_{:3} + e^{-\mu_2-\mu_3}\psi_{:3}\mu_{3,2}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3-2\mu_4}Q_{42}\overline{Q}_{43} - \frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3-2\mu_4}\psi_{,4}\chi_{,4}, \quad \text{(g)} \qquad [600]$$

$$-R_{1214} = -e^{-\psi-\mu_2}(e^{\psi-\mu_4}\psi_{,4})_{,2} + e^{-\mu_2-\mu_4}\psi_{,2}\mu_{2,4}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}Q_{32}\overline{Q}_{34} + \frac{1}{2}e^{\mu_2-2\mu_3-\mu_4}\psi_{:3}\chi_{,4}, \quad \text{(h)}$$

$$-R_{1314} = -e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_4}\psi_{,4})_{:3} + e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{:3}\mu_{3,4}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{24} + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{,2}\chi_{,4}, \quad \text{(i)}$$

$$-R_{1223} = \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}[Q_{23,2} + Q_{23}(3\psi-\mu_2-\mu_3)_{,2}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{43}\mu_{2,4} - \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_3-2\mu_4}Q_{42}\chi_{,4}, \quad \text{(j)}$$

$$-R_{1224} = \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}[Q_{24,2} + Q_{24}(3\psi-\mu_2-\mu_4)_{,2}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}(e^{\mu_2})_{:3'} + \frac{1}{4}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{32}\chi_{,4}, \quad \text{(k)}$$

$$-R_{1334} = \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}[\overline{Q}_{34:3} + \overline{Q}_{34}(3\psi-\mu_2-\mu_4)_{:3}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_4}Q_{24}\mu_{3,2} + \frac{1}{4}e^{\psi-2\mu_3-\mu_4}Q_{23}\chi_{,4}, \quad \text{(l)}$$

$$-R_{1332} = \frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_3-\mu_2}[Q_{32:3} + Q_{32}(3\psi-\mu_2-\mu_3)_{:3}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_4}Q_{42}\mu_{3,4} - \frac{1}{4}e^{\psi+\mu_2-2\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{43}\chi_{,4} \tag{m}$$
$$-R_{1442} = \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_4}[Q_{42,4} + Q_{42}(3\psi-\mu_2-\mu_4)_{,4}]qquad$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-2\mu_3}Q_{32}\mu_{4:3} - \frac{1}{4}e^{\psi+\mu_2-2\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{43}\chi_{,4}, \tag{n}$$
$$-R_{1443} = \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_3-2\mu_4}[\overline{Q}_{43,4} + \overline{Q}_{43}(3\psi-\mu_3-\mu_4)_{,4}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{\psi-2\mu_2-\mu_3}Q_{23}\mu_{4,2} + \frac{1}{4}e^{\psi-\mu_3-2\mu_4}Q_{42}\chi_{,4}, \tag{o}$$
$$-R_{2334} = e^{-\mu_2-\mu_4}[\mu_{3,2,4} + \mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,4} - \mu_{3,4}\mu_{4,2}]$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-2\mu_3-\mu_4}Q_{23}\overline{Q}_{34} - \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{2\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})_{:3'}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-2\mu_3-\mu_4}(e^{\mu_2})_{:3'}\chi_{,4}, \tag{p}$$
$$-R_{3224} = e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_2-\mu_4}\mu_{2,4})_{:3'} - e^{-\mu_2-\mu_3-\mu_4}(e^{\mu_2})_{:3'}\mu_{3,4}$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{32}Q_{24} - \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_2-\mu_4}\chi_{,4})_{,2}$$
$$-\frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}\mu_{3,2}\chi_{,4}, \tag{q}$$
$$-R_{3442} = e^{-\mu_3-\mu_4}(e^{-\mu_2+\mu_4}\mu_{4,2})_{:3} - e^{-\mu_2-\mu_3}\mu_{4:3}\mu_{3,2}$$
$$-\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{34}Q_{42} + \frac{1}{2}e^{-\mu_2-\mu_4}(e^{2\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})_{,4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3-2\mu_4}\mu_{2,4}\chi_{,4}, \tag{r}$$
$$-R_{1234} = \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}\{Q_{24}[\psi_{:3} - e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}] - Q_{23}(\psi-\mu_2)_{,4}\}$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_2}(e^{2\psi-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34})_{,2}, \tag{s}$$

[601]

$$-R_{1423} = \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}[\overline{Q}_{43}(\psi-\mu_4)_{,2} - Q_{42}(\psi-\mu_4)_{:3}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_4}(e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23})_{,4} \tag{t}$$
$$-R_{1324} = \frac{1}{2}e^{\psi-\mu_2-\mu_3-\mu_4}[\overline{Q}_{34}(\psi-\mu_3)_{,2} - Q_{32}(\psi-\mu_3)_{,4}]$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\psi-\mu_3}(e^{2\psi-\mu_2-\mu_4}Q_{24})_{:3}. \tag{u}$$
$$(252)$$

也许应说明, 对黎曼张量的特定分量, 得到的表示并不明显地相同. 例如, 可得

$$R^1{}_{314} = -e^{-\psi-\mu_4}(e^{\psi-\mu_3}\psi_{:3})_{,4} + e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{,4}\mu_{4:3}$$
$$+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{24}Q_{23} - \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{,2}\chi_{,4} \tag{253}$$

和

$$R^1{}_{413} = -e^{-\psi-\mu_3}(e^{\psi-\mu_4}\psi_{,4})_{:3} + e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{:3}\mu_{3,4}$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-\mu_3-\mu_4}Q_{23}Q_{42} + \frac{1}{2}e^{-\mu_3-\mu_4}\psi_{,2}\chi_{,4} \tag{254}$$

途径是分别利用方程

$$\Omega^1{}_3 = \mathrm{d}\omega^1{}_3 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_3 + \omega^1{}_4 \wedge \omega^4{}_3 \tag{255}$$

和

$$\Omega^1{}_4 = \mathrm{d}\omega^1{}_4 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3{}_4 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2{}_4. \tag{256}$$

不过, 由包含冒号导数的等式可以证明, 两个表示 (253) 和 (254) 实际上是相同的 (尽管类似的相等性的确立并不总是这么简单).

现在, 通过恰当地组合所列的黎曼张量分量, 可以得到里奇张量和爱因斯坦张量的分量; 导致的场方程是

$$[\psi_{,2,4} + \psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,4} - \psi_{,4}\mu_{4,2} + \mu_{3,2,4} + \mu_{3,2}(\mu_3-\mu_2)_{,4} - \mu_{3,4}\mu_{4,2}]$$
$$-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_3}Q_{23}\overline{Q}_{34} = \frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}[\psi_{:3} + e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}]\chi_{,4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\mu_4-\mu_3}(e^{2\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})_{:3'}, \quad (R_{42}) \tag{257}$$

$$[\psi_{,4:3} + \psi_{:3}(\psi-\mu_3)_{,4} - \psi_{,4}\mu_{4:3} + e^{\mu_4-\mu_2}(e^{\mu_2-\mu_4}\mu_{2,4})_{:3'}$$
$$-e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}\mu_{3,4}] - \frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_2}Q_{32}Q_{24} = \frac{1}{2}(\psi+\mu_3)_{,2}\chi_{,4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{-\mu_2+\mu_4}(e^{\mu_2-\mu_4}\chi_{,4})_{,2}, \quad (R_{43}) \tag{258}$$

$$(e^{3\psi-\mu_2-\mu_3+\mu_4}Q_{32})_{:3} + (e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\mu_4}Q_{42})_{,4}$$
$$= -e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}\chi_{,4} \quad (R_{12}) \tag{259}$$

$$(e^{3\psi-\mu_2-\mu_3+\mu_4}Q_{23})_{,2} + (e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{43})_{,4} = 0, \quad (R_{13}) \tag{260}$$

$$(e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\mu_4}Q_{24})_{,2} + (e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34})_{:3}$$
$$= e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\mu_4}\overline{Q}_{34}\chi_{,2}, \quad (R_{41}) \tag{261}$$

$$e^{\mu_3-\mu_2}[\psi_{,2,2} + \psi_{,2}\psi_{,2} + (\psi+\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2} + \mu_{3,2,2}]$$
$$+e^{\mu_2-\mu_3}\{\psi_{:3:3} + \psi_{:3}\psi_{:3} + \psi_{:3}[e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'} - \mu_{3:3}]$$
$$+e^{\mu_3-\mu_2}[e^{-\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}]_{:3'}\} + \frac{1}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}^2$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{24}^2 + e^{\mu_2-\mu_3}\overline{Q}_{34}^2) - \frac{1}{4}e^{\mu_2+\mu_3}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2$$
$$+e^{-2\nu+\mu_2+\mu_3}[\psi_{,4}(\mu_2+\mu_3)_{,4} + \mu_{2,4}\mu_{3,4}] = 0, \quad (G_{44}) \tag{262}$$

$$e^{\mu_3-\mu_2}[\nu_{,2,2} + \nu_{,2}\nu_{,2} + (\nu+\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2} + \mu_{3,2,2}]$$

[602]

$$+e^{\mu_2-\mu_3}\{\nu_{:3:3}+\nu_{:3}\nu_{:3}+\nu_{:3}[e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}-\mu_{3:3}]$$
$$+e^{\mu_3-\mu_2}[e^{-\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}]_{:3'}\}+\frac{3}{4}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}^2$$
$$+\frac{3}{4}e^{2\psi+2\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{24}^2+e^{\mu_2-\mu_3}\overline{Q}_{34}^2)+\frac{1}{4}e^{\mu_2+\mu_3}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2$$
$$+e^{-2\nu+\mu_2+\mu_3}[\mu_{3,4,4}+\mu_{2,4,4}+\mu_{2,4}(\mu_2-\mu_4)_{,4}+\mu_{3,4}(\mu_3-\mu_4)_{,4}$$
$$+\mu_{3,4}\mu_{2,4}]=0,\quad (G_{11}) \tag{263}$$

$$e^{-2\mu_4}[\psi_{,4,4}+\psi_{,4}(\psi-\mu_4+\mu_3)_{,4}+\mu_{3,4,4}+\mu_{3,4}(\mu_3-\mu_4)_{,4}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\psi_{:3:3}+\psi_{:3}(\psi-\mu_3+\mu_4)_{:3}+\mu_{4:3:3}+\mu_{4:3}(\mu_4-\mu_3)_{:3}]$$
$$+e^{-2\mu_2}[\psi_{,2}\mu_{4,2}+\mu_{3,2}(\psi+\mu_4)_{,2}]+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3-2\mu_4}\overline{Q}_{34}^2$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2}(e^{-2\mu_3}Q_{32}^2+e^{-2\mu_4}Q_{42}^2)+\frac{3}{4}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2=0,\ (G_{22}) \tag{264}$$

$$e^{-2\mu_4}[\psi_{,4,4}+\psi_{,4}(\psi-\mu_4+\mu_2)_{,4}+\mu_{2,4,4}+\mu_{2,4}(\mu_2-\mu_4)_{,4}]$$
$$+e^{-2\mu_2}[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}(\psi-\mu_2+\mu_4)_{,2}+\mu_{4,2,2}+\mu_{4,2}(\mu_4-\mu_2)_{,2}]$$
$$+e^{-2\mu_3}[\psi_{:3}\mu_{4:3}+e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}(\psi+\mu_4)_{:3}]+\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_2-2\mu_4}Q_{24}^2$$
$$-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\mu_3}(e^{-2\mu_2}Q_{23}^2+e^{-2\mu_4}\overline{Q}_{43}^2)-\frac{1}{4}(e^{\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})^2$$
$$=0\ \ (G_{33}) \tag{265}$$

$$(\psi+\mu_4)_{,2:3}-(\psi+\mu_4)_{,2}\mu_{2:3}-(\psi+\mu_4)_{:3}\mu_{3,2}+\psi_{:2}\psi_{:3}+\mu_{4,2}\mu_{4:3}$$
$$+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_4}\overline{Q}_{43}Q_{42}+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_4}(\psi+\mu_2)_{,4}\chi_{,4}$$
$$+\frac{1}{2}e^{\mu_3-\mu_4}(e^{2\mu_2-\mu_3-\mu_4}\chi_{,4})_{,4}=0.\ \ (R_{23}) \tag{266}$$

$$e^{\mu_3-\mu_2}[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}(\psi+\mu_4+\mu_3-\mu_2)_{,2}]$$
$$+e^{\mu_2-\mu_3}\{\psi_{:3:3}+\psi_{:3}[(\psi+\mu_4-\mu_3)_{:3}+e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}]\}$$
$$+e^{\mu_2+\mu_3-2\mu_4}[\psi_{,4,4}+\psi_{,4}(\psi-\mu_4+\mu_2+\mu_3)]$$
$$-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_4}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{24}^2+e^{\mu_2-\mu_3}\overline{Q}_{34}^2)-$$
$$\frac{1}{2}e^{2\psi-\mu_2-\mu_3}Q_{23}^2=0.\ \ (R_{11}) \tag{267}$$

[603]

(a) 场方程关于定常态解的线性化; 初值方程

现在假定, 作为保持轴对称性的扰动结果, 具有度规 (240) 的定常态轴对称时空不再是定常态的, 而是取更一般的形式 (244). 于是, 满足方程 (257) — (267) 的各个函数是

$$\nu+\delta\nu,\quad \psi+\delta\psi,\quad \omega+\delta\omega,\quad \mu_2+\delta\mu_2,\quad \mu_3+\delta\mu_3,\quad q_2,q_3\ \text{和}\ \chi, \tag{268}$$

其中 $\delta\nu, \delta\psi, \delta\omega, \delta\mu_2, \delta\mu_3, q_2, q_3$ 和 χ 都是一阶小量并依赖于时间; 而 ν, ψ, ω, μ_2 和 μ_3 是独立于时间的函数并满足适于定常态轴对称时空的场方程, 即第 6 章方程 (5) — (16).

由于 q_2 和 q_3 仅因为扰动而不为零, 将看到方便的做法是写

$$q_{2,0} \text{ 和 } q_{3,0} \text{ 来代替 } q_2 \text{ 和 } q_3. \tag{269}$$

还有, 由于 χ 现在被假定为一阶小量, 就无需区分 χ 在其中作为因子出现的函数组合的冒号导数与通常的逗号导数. 当 $\overline{Q}_{43}$ 或 Q_{43} 乘以一个诸如 Q_{23} 这样的一阶小量时也无需区分.

支配扰动的方程现在可由将方程 (257) — (267) 关于定常态解线性化来得到. 所得的方程有两类: *初值方程*和*动力学方程*. 初值方程的时间导数是线性和齐次的, 而动力学方程的时间导数是二阶和非齐次的. 初值方程能被相应地积分 (对时间), 并给出各个扰动之间简单的、不含时的线性关系: 这样, 由这些方程得来的关系就被解释为决定了扰动的初始条件. 而动力学方程则是决定扰动的时间演化.

鉴于其在整个理论中所起的基础作用, 且首先考虑初值方程, 也就是场方程的 (4, 2)、(4, 3)、(1, 2) 和 (1, 3) 成分所给出的那些.

考虑 (4, 2) 成分即方程 (257), 并记住按照现在的约定 (269) 有,

$$Q_{23} = q_{2,3,4} - q_{3,2,4}, \tag{270}$$

可将方程对 x^4 积分而得到 [604]

$$\begin{aligned}
&\delta\psi_{,2} + \psi_{,2}(\delta\psi - \delta\mu_2) - \delta\psi\nu_{,2} + \delta\mu_{3,2} + \mu_{3,2}\delta(\mu_3 - \mu_2) \\
&-\nu_{,2}\delta\mu_3 + \frac{1}{2}e^{2\psi-2\mu_3}(q_{2,3} - q_{3,2})\omega_{,3} \\
&= \frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}(\psi + \mu_2)_{,3}\chi + \frac{1}{2}e^{\nu-\mu_3}(e^{2\mu_2-\mu_3-\nu}\chi)_{,3}.
\end{aligned} \tag{271}$$

现在定义

$$Q = e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}(q_{2,3} - q_{3,2}), \tag{272}$$

可将方程 (271) 重写如下,

$$\begin{aligned}
&e^{\mu_3-\mu_2+\beta}[\delta\psi_{,2} + (\psi - \nu)_{,2}\delta\psi + \delta\mu_{3,2} - (\nu - \mu_3)_{,2}\delta\mu_3 - (\psi + \mu_3)_{,2}\delta\mu_2] \\
&+\frac{1}{2}Q\omega_{,3} - \frac{1}{2}e^{2\nu-2\mu_2}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3} = 0,
\end{aligned} \tag{273}$$

其中 $\beta = \psi + \nu$ (见第 6 章方程 (11)). 类似地, 方程的 (4, 3) 成分给出

$$\begin{aligned}
&e^{\mu_2-\mu_3+\beta}[\delta\psi_{,3} + (\psi - \nu)_{,3}\delta\psi + \delta\mu_{2,3} - (\nu - \mu_2)_{,3}\delta\mu_2 - (\psi + \mu_2)_{,3}\delta\mu_3] \\
&-\frac{1}{2}Q\omega_{,2} - \frac{1}{2}e^{2\nu-2\mu_3}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2} = 0
\end{aligned} \tag{274}$$

方程 (273) 和 (274) 的另一种有用形式是

$$e^{\mu_3-\mu_2}[(e^{\beta}\delta\psi)_{,2}-(e^{\beta})_{,2}\delta\mu_3+e^{\beta}\delta\mu_{3,2}-2e^{\beta}\nu_{,2}\delta\psi+e^{\beta}(\psi+\mu_3)_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)]$$
$$+\frac{1}{2}Q\omega_{,3}-\frac{1}{2}e^{2\nu-2\mu_2}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}=0 \tag{275}$$

和

$$e^{\mu_2-\mu_3}[(e^{\beta}\delta\psi)_{,3}-(e^{\beta})_{,3}\delta\mu_2+e^{\beta}\delta\mu_{2,3}-2e^{\beta}\nu_{,3}\delta\psi+e^{\beta}(\psi+\mu_2)_{,3}\delta(\mu_2-\mu_3)]$$
$$-\frac{1}{2}Q\omega_{,2}-\frac{1}{2}e^{2\nu-2\mu_3}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}=0. \tag{276}$$

再考虑方程的 (1, 2) 成分即方程 (259), 忽略显然是二阶的项, 有

$$(e^{3\psi-\mu_2-\mu_3+\nu}Q_{23})_{,3}+(e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\nu}Q_{02})_{,0}=+e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}Q_{03}\chi_{,0}, \tag{277}$$

其中已按定义 (245) 回复到了变量 x^0. 由方程 (270) 和 (272), 方程 (277) 积分给出

$$Q_{,3}+e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\nu}[(\delta\omega_{,2}-q_{2,0,0})+\omega_{,2}(3\delta\psi-\delta\mu_2+\delta\mu_3-\delta\nu)]$$
$$=e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\omega_{,3}\chi \tag{278}$$

或等价地,

$$\delta\omega_{,2}-q_{2,0,0}=-\omega_{,2}(3\delta\psi-\delta\nu-\delta\mu_2+\delta\mu_3)$$
$$-e^{-3\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{,3}+e^{2\mu_2-2\mu_3}\omega_{,3}\chi. \tag{279}$$

[605] 类似地, 场方程的 (1, 3) 成分给出

$$\delta\omega_{,3}-q_{3,0,0}=-\omega_{,3}(3\delta\psi-\delta\nu+\delta\mu_2-\delta\mu_3)$$
$$+e^{-3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}Q_{,2}+\omega_{,2}\chi. \tag{280}$$

方程 (279) 和 (280) 是关于 ω 的初始条件, 它们同时还给出了对 Q 的一个动力学方程. 于是对 ω 的可积条件就产生出对 Q 的非齐次波动方程:

$$(e^{-3\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{,3})_{,3}+(e^{-3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}Q_{,2})_{,2}$$
$$=e^{-3\psi+\nu+\mu_2+\mu_3}Q_{,0,0}+(e^{2\mu_2-2\mu_3}\omega_{,3}\chi)_{,3}-(\omega_{,2}\chi)_{,2}$$
$$-[\omega_{,2}(3\delta\psi-\delta\nu-\delta\mu_2+\delta\mu_3)]_{,3}+[\omega_{,3}(3\delta\psi-\delta\nu+\delta\mu_2-\delta\mu_3)]_{,2}. \tag{281}$$

此方程实际上支配着引力辐射的发射.

现在作为引理来讲述从方程 (279) 和 (280) 得出的两个关系, 它们对其余场方程的线性化是重要的.

引理

$$\begin{aligned}&\delta[e^{2\psi-2\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{02}^2+e^{\mu_2-\mu_3}Q_{03}^2)]\\&=-e^{2\psi-2\nu}[4X\delta\psi+Y\delta(\mu_3-\mu_2)]+2S+4e^{2\psi-2\nu-\mu_3+\mu_2}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi\end{aligned}\tag{282}$$

和

$$\begin{aligned}&\delta[e^{2\psi-2\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{02}^2-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{03}^2)]\\&=-e^{2\psi-2\nu}[4Y\delta\psi+X\delta(\mu_3-\mu_2)]+2D,\end{aligned}\tag{283}$$

其中

$$X=e^{\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2,\tag{284}$$

$$Y=e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,2})^2-e^{\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2,\tag{285}$$

$$S=e^{-\beta}(Q_{,2}\omega_{,3}-Q_{,3}\omega_{,2}),\ \text{和}\ D=-e^{-\beta}(Q_{,2}\omega_{,3}+Q_{,3}\omega_{,2}).\tag{286}$$

证明 显然地,

$$\begin{aligned}&\delta(e^{2\psi-2\nu+\mu_3-\mu_2}Q_{02}^2)=e^{2\psi-2\nu+\mu_3-\mu_2}\\&[2\omega_{,2}(\delta\omega_{,2}-q_{2,00})+(\omega_{,2})^2\delta(2\psi-2\nu+\mu_3-\mu_2)];\end{aligned}\tag{287}$$

用方程 (279), 有

$$\begin{aligned}&\delta(e^{2\psi-2\nu+\mu_3-\mu_2}Q_{02}^2)=-[4\delta\psi+\delta(\mu_3-\mu_2)]e^{2\psi-2\nu+\mu_3-\mu_2}(\omega_{,2})^2\\&-2e^{-\psi-\nu}Q_{,3}\omega_{,2}+2e^{2\psi-2\nu-\mu_3+\mu_2}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi.\end{aligned}\tag{288}$$

类似地, [606]

$$\begin{aligned}&\delta(e^{2\psi-2\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{03}^2)=-[4\delta\psi-\delta(\mu_3-\mu_2)]e^{2\psi-2\nu+\mu_2-\mu_3}(\omega_{,3})^2\\&+2e^{-\psi-\nu}Q_{,2}\omega_{,3}+2e^{2\psi-2\nu-\mu_3+\mu_2}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi.\end{aligned}\tag{289}$$

将这两个方程相加和相减, 就得到引理中陈述的关系.

最后提及由方程 (279) 和 (280) 得出的另一个关系:

$$\begin{aligned}&\omega_{,3}(\delta\omega_{,2}-q_{2,0,0})+\omega_{,2}(\delta\omega_{,3}-q_{3,0,0})=-2\omega_{,2}\omega_{,3}(3\delta\psi-\delta\nu)\\&+e^{-3\psi+\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})+e^{\mu_2-\mu_3}X\chi.\end{aligned}\tag{290}$$

(*b*) 比安基恒等式

将会看到, 如果忽略明显是二阶的量, 方程 (261) 和 (262) 所给的 R_{41} 和 G_{44} 的表示就不包含任何时间导数. 它们看似是初值方程, 但实际情形并非如此. 回复到变量 x^0, 场方程的 (0, 1) 成分是

$$(e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\nu}Q_{02})_{,2}+(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\overline{Q}_{03})_{:3}=e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\overline{Q}_{03}\chi_{,2}. \tag{291}$$

到 χ 的一阶,

$$\begin{aligned}(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\overline{Q}_{03})_{:3}&=[e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}(Q_{03}-\chi Q_{02})]_{:3}\\&=(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}Q_{03})_{:3}-(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\chi\omega_{,2})_{,3}+O(\chi^2)\\&=(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}Q_{03})_{,3}-\chi(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\omega_{,3})_{,2}\\&\quad-(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\chi\omega_{,2})_{,3}+O(\chi^2).\end{aligned} \tag{292}$$

所以, 方程 (291) 的线性化形式是

$$\begin{aligned}&\delta[(e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\nu}Q_{02})_{,2}+(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}Q_{03})_{,3}]\\&=\chi_{,2}\omega_{,3}e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}+\chi(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\omega_{,3})_{,2}+(e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\chi\omega_{,2})_{,3}.\end{aligned} \tag{293}$$

对此方程右边的计算得到

$$\begin{aligned}&e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}\{2\chi\omega_{,2,3}+\chi_{,2}\omega_{,3}+\chi_{,3}\omega_{,2}\\&+\chi[\omega_{,2}(3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3)_{,3}+\omega_{,3}(3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu)_{,2}]\};\end{aligned} \tag{294}$$

而左边给出

$$\begin{aligned}&\{e^{3\psi-\mu_2+\mu_3-\nu}[(\delta\omega_{,2}-q_{2,0,0})+\omega_{,2}(3\delta\psi-\delta\mu_2+\delta\mu_3-\nu)]\}_{,2}\\&+\{e^{3\psi+\mu_2-\mu_3-\nu}[(\delta\omega_{,3}-q_{3,0,0})+\omega_{,3}(3\delta\psi+\delta\mu_2-\delta\mu_3-\nu)]\}_{,3}.\end{aligned} \tag{295}$$

[607] 现在从方程 (279) 和 (280) 来代换 (295) 方括号中的量, 有

$$(-Q_{,3}+e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,3}\chi)_{,2}+(Q_{,2}+e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\chi)_{,3}; \tag{296}$$

而这个表示清楚地等同于 (294). 所以, 方程的 (0, 1) 成分并不提供新信息: 它是线性化方程的比安基恒等式的表达.

再考虑方程 (262) 所给的场方程 (0, 0) 成分, 有

$$\begin{aligned}&e^{\mu_3-\mu_2}[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\mu_{3,2,2}+(\psi+\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}]\\&+e^{\mu_2-\mu_3}\{\psi_{:3:3}+\psi_{:3}\psi_{:3}+\psi_{:3}[e^{-\mu_2}(e^{\mu_2})_{:3'}-\mu_{3:3}]+e^{\mu_3-\mu_2}[e^{-\mu_3}(e^{\mu_2})_{:3'}]_{:3'}\}\\&=-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{20}^2+e^{\mu_2-\mu_3}Q_{30}^2)\\&+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi+O(\chi^2).\end{aligned} \tag{297}$$

借助于方程 (282), 可由右边的线性化得出

$$\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[4X\delta\psi+Y\delta(\mu_3-\mu_2)]-\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi. \tag{298}$$

在对左边线性化时, 必须首先将冒号导数代之以等价的偏导数. 通过这个过程得到

$$\begin{aligned}
&e^{\mu_3-\mu_2}\{[\delta\psi_{,2,2}+2\psi_{,2}\delta\psi_{,2}+\delta\mu_{3,2,2}+(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}\\
&+(\psi+\mu_3)_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)_{,2}]+\delta(\mu_3-\mu_2)[\psi_{,2,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\mu_{3,2,2}\\
&+(\psi+\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}]\}+e^{\mu_2-\mu_3}\{2\leftrightarrow 3\}-\frac{1}{4}e^{2\psi-2\nu}[4X\delta\psi+Y\delta(\mu_3-\mu_2)]\\
&=-\frac{1}{2}S-\frac{1}{2}\omega_{,2}\omega_{,3}e^{2\psi-2\nu+\mu_2-\mu_3}\chi+e^{\mu_2-\mu_3}\{\chi_{,2,3}+\chi_{,2}(\psi+2\mu_2-\mu_3)_{,3}\\
&+\chi_{,3}(\psi+\mu_2)_{,2}+\chi[2(\psi+\mu_2)_{,2,3}+2\psi_{,2}\psi_{,3}\\
&+(\psi+\mu_2)_{,2}(\mu_2-\mu_3)_{,3}+(\psi+\mu_2)_{,3}(\mu_2-\mu_3)_{,2}]\}.
\end{aligned} \tag{299}$$

方程 (299) 与初值方程 (273) 和 (274) 结合可给出重要的新关系. 由后两个方程有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[-Q\omega_{,3}+e^{2\nu-2\mu_2}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2}\\
&+\frac{1}{2}[+Q\omega_{,2}+e^{2\nu-2\mu_3}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}]_{,3}\\
&=\{e^{\mu_3-\mu_2+\beta}[(\delta\psi+\delta\mu_3)_{,2}+(\psi-\nu)_{,2}\delta\psi+\mu_{3,2}\delta(\mu_3-\mu_2)\\
&-\nu_{,2}\delta\mu_3-\psi_{,2}\delta\mu_2]\}_{,2}+\{e^{\mu_2-\mu_3+\beta}[2\leftrightarrow 3]\}.
\end{aligned} \tag{300}$$

此方程的左边可简化为

$$-\frac{1}{2}Se^{\beta}+\frac{1}{2}[e^{2\nu-2\mu_2}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2}+\frac{1}{2}[e^{2\nu-2\mu_3}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}]_{,3}. \tag{301}$$

而对方程 (300) 的右边经过可观计算后所得到的, 除一个公共因子 e^{β} 外, 精确地就是方程 (299) 左边的项. 于是得出等式 [608]

$$\begin{aligned}
e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\Big[\!\Big[&-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3}\chi+\{\chi_{,2,3}+\chi_{,2}(\psi+2\mu_2-\mu_3)_{,3}\\
&+\chi_{,3}(\psi+\mu_2)_{,2}+\chi[2(\psi+\mu_2)_{,2,3}+2\psi_{,2}\psi_{,3}\\
&+(\psi+\mu_2)_{,2}(\mu_2-\mu_3)_{,3}+(\psi+\mu_2)_{,3}(\mu_2-\mu_3)_{,2}]\}\Big]\!\Big]\\
=\frac{1}{2}&[e^{2\nu-2\mu_2}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2}+\frac{1}{2}[e^{2\nu-2\mu_3}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}]_{,3}.
\end{aligned} \tag{302}$$

这是一个支配 χ 的重要方程: 它再次是一个比安基恒等式的表达, 而在现在的意义上却给出实质性的信息.

(c) 剩余场方程的线性化形式

最后列出剩余场方程线性化的结果.

$$
\begin{aligned}
&e^{\mu_3-\mu_2}\{[\delta\nu_{,2,2}+2\nu_{,2}\delta\nu_{,2}+\delta\mu_{3,2,2}+(\delta\nu+\delta\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}\\
&+(\nu+\mu_3)_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)_{,2}]\\
&+\delta(\mu_3-\mu_2)[\nu_{,2,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}+\mu_{3,2}+(\nu+\mu_3)_{,2}(\mu_3-\mu_2)_{,2}]\}\\
&+e^{\mu_2-\mu_3}\{2\leftrightarrow 3\}=e^{-2\nu+\mu_2+\mu_3}\delta(\mu_3+\mu_2)_{,0,0}+\frac{3}{2}S\\
&-\frac{3}{4}[4X\delta\psi+2Y\delta(\mu_3-\mu_2)]\\
&+e^{\mu_2-\mu_3}\Big[\Big[\frac{3}{2}\omega_{,2}\omega_{,3}e^{2\psi-2\nu}\chi+\{\chi_{,2,3}+\chi_{,2}(\nu+2\mu_2-\mu_3)_{,3}+\chi_{,3}(\nu+\mu_2)_{,2}\\
&+\chi[2(\nu+\mu_2)_{,2,3}+2\nu_{,2}\nu_{,3}+(\nu+\mu_2)_{,2}(\mu_2-\mu_3)_{,3}\\
&+(\nu+\mu_2)_{,3}(\mu_2-\mu_3)_{,2}]\}\Big]\Big], \qquad (\delta G_{11}=0), \quad (303)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^{\mu_3-\mu_2}[\delta\beta_{,2,2}+2\beta_{,2}\delta\beta_{,2}+(\mu_3-\mu_2)_{,2}\delta\beta_{,2}]+e^{\mu_2-\mu_3}[2\leftrightarrow 3]\\
&=e^{-2\nu+\mu_2+\mu_3}[2\delta\psi_{,0,0}+\delta(\mu_3+\mu_2)_{,0,0}]-e^{\mu_3-\mu_2}\beta_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)_{,2}\\
&+e^{\mu_2-\mu_3}\beta_{,3}\delta(\mu_3-\mu_2)_{,3}-\left(2e^{-\beta}W+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}Y\right)\delta(\mu_3-\mu_2)\\
&+e^{\mu_2-\mu_3}\{\beta_{,2}\chi_{,3}+\beta_{,3}\chi_{,2}\\
&+\chi[2\beta_{,2,3}+2\beta_{,2}\beta_{,3}+\beta_{,2}(\mu_2-\mu_3)_{,3}+\beta_{,3}(\mu_2-\mu_3)_{,2}]\},\\
&\qquad\qquad [\delta(G_{33}+G_{22})=0], \qquad (304)
\end{aligned}
$$

[609]

$$
\begin{aligned}
&e^{\mu_3-\mu_2}[\delta\beta_{,2,2}+2\psi_{,2}\delta\psi_{,2}+2\nu_{,2}\delta\nu_{,2}-\delta\beta_{,2}(\mu_3+\mu_2)_{,2}-\beta_{,2}\delta(\mu_3+\mu_2)_{,2}]\\
&-e^{\mu_2-\mu_3}[2\leftrightarrow 3]=2e^{-\beta}U\delta(\mu_3-\mu_2)-e^{-2\nu+\mu_2+\mu_3}\delta(\mu_3-\mu_2)_{,0,0}\\
&-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu}[4Y\delta\psi+X\delta(\mu_3-\mu_2)]+D-e^{\mu_2-\mu_3}\Big[\Big[-\omega_{,2}\omega_{,3}e^{2\psi-2\nu}\chi\\
&+\beta_{,2}\chi_{,3}-\beta_{,3}\chi_{,2}+\chi[2\beta_{,2,3}+2\psi_{,2}\psi_{,3}+2\nu_{,2}\nu_{,3}-\beta_{,2}(\mu_2+\mu_3)_{,3}\\
&-\beta_{,3}(\mu_2+\mu_3)_{,2}]\Big]\Big] \qquad\qquad [\delta(G_{33}-G_{22})=0], \qquad (305)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\delta\beta_{,2,3}-\delta\beta_{,2}\mu_{2,3}-\delta\beta_{,3}\mu_{3,2}-\beta_{,2}\delta\mu_{2,3}-\beta_{,3}\delta\mu_{3,2}+\psi_{,2}\delta\psi_{,3}+\psi_{,3}\delta\psi_{,2}\\
&+\nu_{,2}\delta\nu_{,3}+\nu_{,3}\delta\nu_{,2}=-2e^{2\psi-2\nu}\omega_{,2}\omega_{,3}\delta\psi+\frac{1}{2}e^{-2\nu+2\mu_2}\chi_{,0,0}\\
&+\frac{1}{2}e^{-\psi-\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+2\mu_2-2\mu_3}(\omega_{,3})^2\chi\\
&+\chi[\beta_{,2,2}-\beta_{,2}(\mu_2+\mu_3)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}], \qquad (\delta R_{23}=0) \quad (306)
\end{aligned}
$$

在方程 (304) 和 (305) 中已用了缩写

$$\left.\begin{aligned} U &= e^{\beta}[e^{\mu_3-\mu_2}(\beta_{,2}\mu_{3,2}+\psi_{,2}\nu_{,2})+e^{\mu_2-\mu_3}(\beta_{,3}\mu_{2,3}+\psi_{,3}\nu_{,3})],\\ W &= e^{\beta}[e^{\mu_3-\mu_2}(\beta_{,2}\mu_{3,2}+\psi_{,2}\nu_{,2})-e^{\mu_2-\mu_3}(\beta_{,3}\mu_{2,3}+\psi_{,3}\nu_{,3})]. \end{aligned}\right\} \tag{307}$$

注意在导出方程 (304) 和 (305) 时, 利用了下列两个在定常态情形得到的方程 (见第 6 章方程 (14) 和 (16)):

和

$$\left.\begin{aligned} &[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}+[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}=0\\ &[e^{\mu_3-\mu_2}(e^{\beta})_{,2}]_{,2}-[e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\beta})_{,3}]_{,3}=2W+\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}Y. \end{aligned}\right\} \tag{308}$$

形式工作到此完成.

(*d*) 支配准定常态变形的方程; 卡特定理

为阐明对已导出的线性化方程所能提出的目标, 且首先考虑无限慢变形的极限情形, 即 (经受变形的) 系统在所有时间都有效地处于平衡态. 以这种方式实现的变形称为准定常态的或绝热的. 准定常态变形对确定沿着一个定常态系统的序列 (由一个参数标记) 分叉点是否存在是有用的. 沿克尔序列 (由 a 标记), 卡特定理确保了没有这种分叉存在. 现在来显示, 如何通过考虑黑洞事件视界外部定常态轴对称时空的准定常态变形来构建对卡特定理的证明.

具有度规 (240) 的轴对称时空的准定常态变形将导致 ν、ψ、ω、μ_2 和 μ_3 [610] 的无限小变化, 同时保持可能已施于 μ_2 和 μ_3 的坐标条件. 由于后面这一点, 从以下初始形式的度规出发是便利的,

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}(\mathrm{d}t)^2-e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-e^{2\mu}[(\mathrm{d}x^2)^2+(\mathrm{d}x^3)^2], \tag{309}$$

即有 $\mu_2=\mu_3$. 这种时空的准定常态变形将无限慢地导致 ν、ψ、ω 和 μ 的变化, 变化量比如说是 $\delta\nu$、$\delta\psi$、$\delta\omega$ 和 $\delta\mu$. 支配这些变化的方程能直接从 § (*b*) 和 § (*c*) 中已导出的方程得到, 办法是将所有动力学方程中的时间导数设为零, 并设定初值方程积分形式中的时间导数. 此外, 对有着所采用度规形式 (309) 的时空的准定常态变形,

$$\chi=0 \quad 和 \quad \delta(\mu_3-\mu_2)=0. \tag{310}$$

首先看到, 对方程 (304) 的处理立即带来了简化. 对准定常态变形, 此方程给出

$$(\delta\beta_{,2,2}+2\beta_{,2}\delta\beta_{,2})+(\delta\beta_{,3,3}+2\beta_{,3}\delta\beta_{,3})=0; \tag{311}$$

或按二维笛卡儿张量 (将采用) 的标记法,

$$(e^{\beta}\delta\beta)_{,\alpha,\alpha}=0, \quad (\alpha=2,3) \tag{312}$$

这是由于支配平衡的方程保证了

$$(e^{\beta})_{,\alpha,\alpha} = 0. \tag{313}$$

由方程 (312) 可得

$$\delta\beta \equiv 0. \tag{314}$$

来由是, 将方程 (312) 乘以 $e^{\beta}\delta\beta$ 并对事件视界外的全部 3 空间 (x^1、x^2、x^3) 积分, 在分部积分后得出

$$\iiint (e^{\beta}\delta\beta)_{,\alpha}(e^{\beta}\delta\beta)_{,\alpha}\mathrm{d}x = 0, \tag{315}$$

被积部分由于边界条件 (见第 6 章 §53 和 §55)

$$\left.\begin{array}{l} e^{\beta} = 0 \text{ 在视界上} \\ \text{和} \\ e^{\beta} = O(r) \text{ 和 } \delta\beta = O(r^{-1}) \text{ 对 } r \to \infty \end{array}\right\} \tag{316}$$

[611] 而在边界上为零. 方程 (315) 中的被积函数是正定的, 因此有 $\delta\beta$ 的一致为零. 于是有结论, 对准定常态变形, 除 χ 和 $\delta\ (\mu_3 - \mu_2)$ 为零外,

$$\delta\psi = -\delta\nu, \tag{317}$$

由要求 (310) 和 (317), 初值方程 (275)、(276)、(279) 和 (280) 现在取形式

$$\left.\begin{array}{l} (e^{\beta}\delta\psi)_{,2} - (e^{\beta})_{,2}\delta\mu + e^{\beta}\delta\mu_{,2} - 2e^{\beta}\nu_{,2}\delta\psi = -\dfrac{1}{2}Q\omega_{,3}, \\ (e^{\beta}\delta\psi)_{,3} - (e^{\beta})_{,3}\delta\mu + e^{\beta}\delta\mu_{,3} - 2e^{\beta}\nu_{,3}\delta\psi = +\dfrac{1}{2}Q\omega_{,2}, \end{array}\right\} \tag{318}$$

和

$$\left.\begin{array}{l} \delta\omega_{,2} = -4\omega_{,2}\delta\psi - e^{-3\psi+\nu}Q_{,3}, \\ \delta\omega_{,3} = -4\omega_{,3}\delta\psi + e^{-3\psi+\nu}Q_{,2}, \end{array}\right\} \tag{319}$$

其中

$$Q = e^{3\psi+\nu-2\mu}(q_{2,3} - q_{3,2}); \tag{320}$$

而方程 (281) 和 (282) 给出

$$(e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha})_{,\alpha} = 4(\omega_{,3}\delta\psi_{,2} - \omega_{,2}\delta\psi_{,3}). \tag{321}$$

和

$$\delta(e^{2\psi-2\nu}X) = -4e^{2\psi-2\nu}X\delta\psi + 2S, \tag{322}$$

其中

$$X = \omega_{,\alpha}\omega_{,\alpha} \text{ 和 } Se^{\beta} = Q_{,2}\omega_{,3} - Q_{,3}\omega_{,2}. \tag{323}$$

现在考虑 R_{11} 方程的线性化 (见第 6 章方程 (6)),

$$(e^{\beta}\psi_{,\alpha})_{,\alpha}+\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu}X=0. \tag{324}$$

利用方程 (314) 和 (322), 得

$$(e^{\beta}\delta\psi_{,\alpha})_{,\alpha}=2e^{3\psi-\nu}X\delta\psi-Se^{\beta}. \tag{325}$$

(此方程也可由对方程 (267) 线性化而直接得出.)

现在将方程 (325) 乘以 $\delta\psi$, 并对视界外的整个 3 空间积分, 在分部积分后得出

$$\iiint[e^{\beta}\delta\psi_{,\alpha}\delta\psi_{,\alpha}+2e^{3\psi-\nu}X(\delta\psi)^2-Se^{\beta}\delta\psi]\mathrm{d}x=0 \tag{326}$$

被积部分由于条件 (316) 和下列要求 (来自对方程 (325) 的考查) 而为零,

$$\delta\psi=O(r^{-1})\ \text{对}\ r\to\infty. \tag{327}$$

方程 (326) 的更对称形式可由注意下列结果而得到, [612]

$$\begin{aligned}\iiint Se^{\beta}\delta\psi\mathrm{d}x&=+\iiint(Q_{,2}\omega_{,3}-Q_{,3}\omega_{,2})\delta\psi\mathrm{d}x\\&=-\iiint Q(\omega_{,3}\delta\psi_{,2}-\omega_{,2}\delta\psi_{,3})\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{4}\iiint Q(e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha})_{,\alpha}\mathrm{d}x\\&=+\frac{1}{4}\iiint e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha}Q_{,\alpha}\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{328}$$

其中从第一行到第二行时做了分部积分, 从第二行到第三行时用了方程 (321), 而从第三行到第四行时又做了分部积分. 两次的被积部分都由于条件 (316)、(327)、已知的 ω 在无穷远的 r^{-3} 行为和 $Qe^{-2\psi}$ 在视界上平滑的进一步要求 (此要求来自方程 (316) 和 (318)) 而为零. 用 (328) 的最后简化结果, 可将方程 (326) 重写为

$$\iiint\left[e^{\beta}\delta\psi_{,\alpha}\delta\psi_{,\alpha}+2e^{3\psi-\nu}X(\delta\psi)^2-\frac{1}{4}e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha}Q_{,\alpha}\right]\mathrm{d}x=0. \tag{329}$$

为证明准定常态变形的不可能性和卡特定理, 必须将方程 (329) 中的被积函数变换为正定形式. 为此需要以下两个引理.

引理 1

$$\begin{aligned}Q_{,2}\omega_{,3}-Q_{,3}\omega_{,2}=e^{2\psi}&[(e^{-2\psi}Q)_{,2}\omega_{,3}-(e^{-2\psi}Q)_{,3}\omega_{,2}]\\&+2Q(\psi_{,2}\omega_{,3}-\psi_{,3}\omega_{,2});\end{aligned} \tag{330}$$

和

引理 2

$$\iiint \left[\frac{1}{4}e^{\beta}(Qe^{-2\psi})_{,\alpha}(Qe^{-2\psi})_{,\alpha}+e^{-3\psi+\nu}Q^2\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha}Q_{,\alpha}+\frac{1}{4}e^{-\beta}Q^2X\right]\mathrm{d}x=0. \tag{331}$$

引理 1 可直接验证. 为证明引理 2, 将方程 (324) 乘以 $\frac{1}{2}Q^2e^{-4\psi}$ 并对视界外的 3 空间积分. 在对被积函数的第一项作分部积分后得到

$$\iiint \left[-\frac{1}{2}(Q^2)_{,\alpha}e^{-3\psi+\nu}\psi_{,\alpha}+2Q^2e^{-3\psi+\nu}\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}+\frac{1}{4}Q^2Xe^{-\beta}\right]\mathrm{d}x=0, \tag{332}$$

[613] 被积部分由于在无穷远处和视界上得到的边界条件而为零. 重新安排方程 (332) 中被积函数的各项, 就得到方程 (331).

为证明卡特定理, 首先利用 (328) 中包含的关系来验证

$$\iiint e^{\beta}(\delta\psi_{,\alpha}\delta\psi_{,\alpha}-S\delta\psi)\mathrm{d}x$$
$$=\iiint [e^{\beta}\delta\psi_{,\alpha}\delta\psi_{,\alpha}+Q(\omega_{,3}\delta\psi_{,2}-\omega_{,2}\delta\psi_{,3})]\mathrm{d}x$$
$$=\iiint \left\{e^{\beta}\left[\left(\delta\psi_{,2}+\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,3}\right)^2+\left(\delta\psi_{,3}-\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,2}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}e^{-\beta}XQ^2\right\}\mathrm{d}x. \tag{333}$$

下一步, 借助于引理 2 消去方程 (333) 中的 $-\frac{1}{4}e^{-\beta}XQ^2$ 项, 可将方程 (329) 写为

$$\iiint \left\{e^{\beta}\left[\left(\delta\psi_{,2}+\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,3}\right)^2+\left(\delta\psi_{,3}-\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,2}\right)^2\right]\right.$$
$$+\frac{1}{4}e^{\beta}(Qe^{-2\psi})_{,\alpha}(Qe^{-2\psi})_{,\alpha}+e^{-3\psi+\nu}Q^2\psi_{,\alpha}\psi_{,\alpha}$$
$$\left.-\frac{1}{4}e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha}Q_{,\alpha}+2e^{3\psi-\nu}\omega_{,\alpha}\omega_{,\alpha}(\delta\psi)^2\right\}\mathrm{d}x=0. \tag{334}$$

另一方面, 由方程 (328) 和 (330),

$$\frac{1}{4}\iiint e^{-3\psi+\nu}Q_{,\alpha}Q_{,\alpha}\mathrm{d}x=\iiint e^{\beta}S\delta\psi\mathrm{d}x$$
$$=\iiint (Q_{,2}\omega_{,3}-Q_{,3}\omega_{,2})\delta\psi\mathrm{d}x$$

$$= \iiint \delta\psi\{e^{2\psi}[(e^{-2\psi}Q)_{,2}\omega_{,3} - (e^{-2\psi}Q)_{,3}\omega_{,2}] + 2Q(\psi_{,2}\psi_{,3} - \psi_{,3}\omega_{,2})\}\mathrm{d}x. \tag{335}$$

将最后这个关系代入方程 (334) 并重排各项, 得

$$\iiint \Big[\!\Big[e^{\beta}\Big\{ \left(\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,3} + \delta\psi_{,2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}e^{-\beta}Q\omega_{,2} - \delta\psi_{,3}\right)^2 + \left[\left(\frac{1}{2}e^{-2\psi}Q\right)_{,2} - e^{\psi-\nu}\omega_{,3}\delta\psi\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{2}e^{-2\psi}Q\right)_{,3} + e^{\psi-\nu}\omega_{,2}\delta\psi\right]^2 \Big\} + e^{-3\psi+\nu}[(Q\psi_{,2} - e^{3\psi-\nu}\omega_{,3}\delta\psi)^2 + (Q\psi_{,3} + e^{3\psi-\nu}\omega_{,2}\delta\psi)^2] \Big]\!\Big] \mathrm{d}x = 0. \tag{336}$$

这样就将方程 (329) 中的被积函数改写成了平方和. 积分为零的唯一途径 [614]
是对相加的每一项都一致地为零, 容易验证这唯有在下列情形才有可能:

$$\delta\psi \equiv Q \equiv 0. \tag{337}$$

所以实质性的准定常态变形是不可能的; 而卡特定理得证.

(*e*) 扰动问题的变分公式

且从重申所考虑的问题开始. 出发点是爱因斯坦真空方程的定常态解, 解满足明确的边界条件, 诸如对黑洞事件视界外部解所要求的条件. 对解作变分, 导致各个度规函数的无穷小一阶变化 $\delta\nu$、$\delta\psi$、$\delta\omega$、Q、$\delta\mu_2$、$\delta\mu_3$ 和 χ. 这些变分满足两类方程: 初值方程和动力学方程. 还要求变分满足在视界和无穷远处的一定边界条件. 如果假定变分有时间依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$ (其中 σ 允许为复数), 那么变分所满足的动力学方程与加于它们的边界条件一起, 就给定了对 σ 的特征值问题.

在特征值问题的变分公式里, 将原变分 (它们满足初值方程和动力学方程二者) 联系以试变分 $\bar{\delta}\nu, \bar{\delta}\psi, \bar{\delta}\omega, \overline{Q}, \bar{\delta}\mu_2, \bar{\delta}\mu_3$ 和 $\overline{\chi}$, 这些试变分被要求符合初值方程并满足与原变分同样的边界条件, 但在其它方面是任意的. 也就是说, 带横线 (试) 变分与无横线 (原) 变分的差别只是, 后者被要求满足动力学方程, 而前者不是如此. 特别地, 带横线量将有着与无横线量同样的时间依赖 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma t}$.

特征值问题变分公式的第一步是, 得到对 σ^2 的公式, 办法是将一个带横线量满足的初值方程乘以一个或另一个无横线量 (或者是将一个无横线量满足的动力学方程乘以一个带横线量), 并对事件视界以外的整个 3 空间积分; 如果可能的话再通过适当次数的分部积分来安排 (如 § (*d*) 对卡特定理的证明中那样), 其间需利用无横线量满足的初值方程和动力学方程以及带横线量满足的初值方程, 使得在 σ^2 公式中的积分里, 带横线量和无横线量完全对称地

出现. 如果此番操作得以实现, 就可以说定义特征值问题的微分算符是自伴随的, 而变分公式成为可能. 且首先来指明, 对目前的问题如何才能得到这样一个对 σ^2 的公式.

[615] 考虑对带横线量的方程 (275) 和 (276) —— 这样做是合理的, 因为它们是初值方程 —— 将它们分别乘以 $\delta\psi_{,2}$ 和 $\delta\psi_{,3}$ 再相加, 然后对两个面 S_1 和 S_2 之间的 3 空间积分. 最终将让 S_1 趋于事件视界而 S_2 趋于无穷远; 但现在且让它们保持未定. 经过几次分部积分并 (仅仅) 利用线性化场方程的 (0、0) 成分即 (299) 后, 对原变分和来自方程 (299) 的关系 (302), 得到

$$
\begin{aligned}
0 = \iiint \Big[\!\Big[& -2e^{\beta}(e^{\mu_3-\mu_2}\delta\psi_{,2}\overline{\delta}\psi_{,2} + e^{\mu_2-\mu_3}\delta\psi_{,3}\overline{\delta}\psi_{,3}) \\
& + e^{\beta}\{(e^{\mu_3-\mu_2}\delta\mu_{3,2})_{,2}\overline{\delta}\psi + (e^{\mu_3-\mu_2}\overline{\delta}\mu_{3,2})\delta\psi \\
& - e^{\mu_3-\mu_2}(\psi+\mu_3)_{,2}[\delta\psi_{,2}\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2) + \overline{\delta}\psi_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)]\} \\
& + e^{\beta}\{2 \leftrightarrow 3\} \\
& - e^{3\psi-\nu}X\delta\psi\overline{\delta}\psi - \left(W + \frac{1}{4}e^{3\psi-\nu}Y\right)[\delta\psi\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2) + \overline{\delta}\psi\delta(\mu_3-\mu_2)] \\
& + \frac{1}{2}e^{\beta}(S\overline{\delta}\psi + \overline{S}\delta\psi) \\
& - \frac{1}{2}\{[e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2} \\
& + [e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}]_{,3}\}\overline{\delta}\psi \\
& - \frac{1}{2}\{[e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\overline{\chi})_{,3}]_{,2} \\
& + [e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\overline{\chi})_{,2}]_{,3}\}\delta\psi\Big]\!\Big]\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \\
+ \iint \Big[\!\Big[& e^{\mu_3-\mu_2+\beta}[\delta\psi_{,2}\overline{\delta}\psi + (\psi+\mu_3)_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}\psi + (\psi+\nu)_{,2}\delta\psi\overline{\delta}\mu_3 \\
& - \delta\psi\overline{\delta}\mu_{3,2}] - \frac{1}{2}\overline{Q}\omega_{,3}\delta\psi \\
& + \frac{1}{2}e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\overline{\chi})_{,3}\delta\psi\Big]\!\Big]_{[x^2]}\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^3 \\
+ \iint \Big[\!\Big[& e^{\mu_2-\mu_3+\beta}[\delta\psi_{,3}\overline{\delta}\psi + (\psi+\mu_2)_{,3}\delta(\mu_2-\mu_3)\overline{\delta}\psi + (\psi+\nu)_{,3}\delta\psi\overline{\delta}\mu_2 \\
& - \delta\psi\overline{\delta}\mu_{2,3}] + \frac{1}{2}\overline{Q}\omega_{,2}\delta\psi \\
& + \frac{1}{2}e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\overline{\chi})_{,2}\delta\psi\Big]\!\Big]_{[x^3]}\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2. \qquad (338)
\end{aligned}
$$

[616] 方程 (338) 中面积分 (来自各个分部积分) 被积函数里的符号 $[\![\cdots]\!]_{[x^\alpha]}$ 有着

如下意义. 对一个固定的 $x^\beta(\beta \neq \alpha)$, 设 x^α 的适当极限为 x^α (1) 和 x^α (2) 且 x^α (2) $> x^\alpha$ (1), 于是该符号表示双括号中的量在 x^α (2) 和 x^α (1) 的值之差.

方程 (338) 仅由初值方程导出: 这一事实由方程中 σ^2 的缺失是显然可见的. 还可看到, 方程 (338) 中的体积分对带横线量和无横线量是对称的.

再对同样的方程 (275) 和 (276) 乘以 $\delta\nu_{,2}$ 和 $\delta\nu_{,3}$, 并对线性化场方程的 (2、3) 成分 (见方程 (306)) 乘以 $\overline{\chi}$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi_{,0,0}+\frac{1}{2}e^{3\psi-\nu+3\mu_2-3\mu_3}(\omega_{,3})^2\chi\\
&-2e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,3}\delta\psi+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})\\
&+e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\chi[\beta_{,2,2}-\beta_{,2}(\mu_3+\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}]\\
&-e^{\mu_2-\mu_3+\beta}[\delta\nu_{,2,3}+\delta\nu_{,2}(\nu-\mu_2)_{,3}+\delta\nu_{,3}(\nu-\mu_3)_{,2}-\beta_{,2}\delta\mu_{2,3}\\
&+\delta\psi_{,2,3}+\delta\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\delta\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}-\beta_{,3}\delta\mu_{3,2}]=0. \qquad (339)
\end{aligned}$$

(由于方程 (339) 与方程 (275) 和 (276) 不同, 乃是一个动力学方程, 所以是对原变分 χ 来考虑它, 并将它乘以试变分 $\overline{\chi}$.) 现在将这三个由分别地相乘得来的方程之和对 S_1 与 S_2 之间的 3 空间积分. 在多次分部积分和各项的大量重排之后得到的 是

$$\begin{aligned}
0=\iiint\Big[\Big[&Xe^{3\psi-\nu}\left[3\delta\psi\overline{\delta}\psi+\frac{1}{4}\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)\right]\\
&+\left(\frac{3}{4}e^{3\psi-\nu}Y-W\right)[\delta\psi\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)+\overline{\delta}\psi\delta(\mu_3-\mu_2)]\\
&-U\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)\\
&-e^{\mu_3-\mu_2+\beta}\{[\beta_{,2}\delta\mu_{3,2}+(\nu+\mu_3)_{,2}\delta\psi_{,2}]\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)\\
&\quad+[\beta_{,2}\overline{\delta}\mu_{3,2}+(\nu+\mu_3)_{,2}\overline{\delta}\psi_{,2}]\delta(\mu_3-\mu_2)\}\\
&-e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\{2\leftrightarrow 3\}\\
&+e^{\beta}[(e^{\mu_3-\mu_2}\delta\mu_{3,2})_{,2}\overline{\delta}\psi+(e^{\mu_3-\mu_2}\overline{\delta}\mu_{3,2})\delta\psi]+e^{\beta}[2\leftrightarrow 3]\\
&+2\sigma^2e^{-2\nu}\sqrt{-g}\cdot\left[\frac{1}{4}\delta(\mu_3+\mu_2)\overline{\delta}(\mu_3+\mu_2)+\frac{1}{2}\delta\psi\overline{\delta}(\mu_3+\mu_2)\right. \qquad [617]\\
&+\frac{1}{2}\overline{\delta}\psi\delta(\mu_3+\mu_2)\\
&\left.-\frac{1}{4}\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)\right]-\frac{1}{2}\sigma^2e^{-3\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}Q\overline{Q}\\
&-\frac{1}{2}e^{\beta}[3S\overline{\delta}\psi+3\overline{S}\delta\psi+D\overline{\delta}(\mu_3-\mu_2)+\overline{D}\delta(\mu_3-\mu_2)]\\
&+\frac{1}{2}e^{-3\psi+\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\overline{Q}_{,2}+e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\overline{Q}_{,3})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sigma^2 e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi\overline{\chi}-2e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,3}(\overline{\chi}\delta\psi+\chi\overline{\delta}\psi)\\
&+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})\overline{\chi}\\
&+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}\overline{Q}_{,3}\omega_{,3})\chi\\
&-e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\{[\delta\psi_{,2,3}+\delta\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\delta\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}\\
&\quad-\beta_{,2}\delta\mu_{2,3}-\beta_{,3}\delta\mu_{3,2}]\overline{\chi}\\
&\quad+[\overline{\delta}\psi_{,2,3}+\overline{\delta}\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\overline{\delta}\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}\\
&\quad-\beta_{,2}\overline{\delta}\mu_{2,3}-\beta_{,3}\overline{\delta}\mu_{3,2}]\chi\\
&\quad-[\beta_{,2,2}-\beta_{,2}(\mu_3+\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}]\chi\overline{\chi}\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+2\mu_2-2\mu_3}(\omega_{,3})^2\chi\overline{\chi}\}\Big]\!\Big]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
&+\iint\Big[\!\Big[e^{\mu_3-\mu_2+\beta}[\delta\nu_{,2}\overline{\delta}\psi+(\nu+\mu_3)_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}\psi-\delta\psi\overline{\delta}\mu_{3,2}\\
&\quad+(\psi+\nu)_{,2}\delta\psi\overline{\delta}\mu_3+\delta(\psi+\nu)_{,2}\overline{\delta}\mu_3+\beta_{,2}\delta(\mu_3-\mu_2)\overline{\delta}\mu_3]\\
&\quad+\frac{1}{2}\overline{Q}\omega_{,3}[3\delta\psi-\delta(\mu_3-\mu_2)]-\frac{1}{2}e^{-3\psi+\nu+\mu_3-\mu_2}Q\overline{Q}_{,2}\\
&\quad-\frac{1}{2}\overline{Q}\omega_{,2}\chi-\frac{1}{2}e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\overline{\chi})_{,3}\delta\nu\\
&\quad+e^{\beta+\mu_2-\mu_3}[(\psi+2\mu_2-\mu_3)_{,3}\overline{\chi}\delta\nu-(\nu+2\mu_2-\mu_3)_{,3}\chi\overline{\delta}\psi\\
&\quad-\beta_{,3}\overline{\delta}\mu_3\chi+\overline{\chi}_{,3}\delta\nu-\chi_{,3}\overline{\delta}\psi]\Big]\!\Big]_{[x^2]}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^3\\
&+\iint\Big[\!\Big[e^{\mu_2-\mu_3+\beta}[\delta\nu_{,3}\overline{\delta}\psi+(\nu+\mu_2)_{,3}\delta(\mu_2-\mu_3)\overline{\delta}\psi-\delta\psi\overline{\delta}\mu_{2,3}\\
&\quad+(\psi+\nu)_{,3}\delta\psi\overline{\delta}\mu_2+\delta(\psi+\nu)_{,3}\overline{\delta}\mu_2+\beta_{,3}\delta(\mu_2-\mu_3)\overline{\delta}\mu_2]\\
&\quad-\frac{1}{2}\overline{Q}\omega_{,2}[3\delta\psi+\delta(\mu_3-\mu_2)]-\frac{1}{2}e^{-3\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}Q\overline{Q}_{,3}\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}\overline{Q}\omega_{,3}\chi-\frac{1}{2}e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\overline{\chi})_{,2}\delta\nu\\
&\quad+e^{\beta+\mu_2-\mu_3}[(\psi+\mu_2)_{,2}\overline{\chi}\delta\nu-(\nu+\mu_2)_{,2}\chi\overline{\delta}\psi-\beta_{,2}\overline{\delta}\mu_2\chi]\\
&\quad-(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\delta\nu)_{,2}\overline{\chi}-(e^{\beta+\mu_2-\mu_3}\overline{\delta}\psi)_{,2}\chi\Big]\!\Big]_{[x^3]}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2. \qquad (340)
\end{aligned}
$$

[618] 在导致方程 (340) 的推演过程中, 已经用了另外的动力学方程 (303)、(304) 和 (305), 再次只对无横线量.

可以看到, 方程 (340) 中的体积分对带横线量和无横线量是对称的. 将方程 (340) 减去方程 (338), 得到简单一些的方程

$$
\begin{aligned}
&\sigma^2\iiint e^{-2\nu}[2\delta\tau\overline{\delta}\tau+2\delta\psi\overline{\delta}\psi-2\delta(\psi+\mu)\overline{\delta}(\psi+\mu)\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{-4\psi}Q\overline{Q}+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}\chi\overline{\chi}]\sqrt{-g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
&=\iiint[\![Xe^{3\psi-\nu}(4\delta\psi\overline{\delta}\psi+\delta\tau\overline{\delta}\tau)+2Ye^{3\psi-\nu}(\delta\psi\overline{\delta}\tau+\overline{\delta}\psi\delta\tau)\\
&\quad-4U\delta\tau\overline{\delta}\tau+2e^{\beta}(e^{\mu_3-\mu_2}\delta\psi_{,2}\overline{\delta}\psi_{,2}+e^{\mu_2-\mu_3}\delta\psi_{,3}\overline{\delta}\psi_{,3})\\
&\quad-2e^{\mu_3-\mu_2+\beta}\{[\beta_{,2}\delta\mu_{3,2}-(\psi-\nu)_{,2}\delta\psi_{,2}]\overline{\delta}\tau\\
&\quad+[\beta_{,2}\overline{\delta}\mu_{3,2}-(\psi-\nu)_{,2}\overline{\delta}\psi_{,2}]\delta\tau\}\\
&\quad+2e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\{[\beta_{,3}\delta\mu_{2,3}-(\psi-\nu)_{,3}\delta\psi_{,3}]\overline{\delta}\tau\\
&\quad+[\beta_{,3}\overline{\delta}\mu_{2,3}-(\psi-\nu)_{,3}\overline{\delta}\psi_{,3}]\delta\tau\}\\
&\quad-e^{\beta}(2S\overline{\delta}\psi+2\overline{S}\delta\psi+D\overline{\delta}\tau+\overline{D}\delta\tau)\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{-3\psi+\nu}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\overline{Q}_{,2}+e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\overline{Q}_{,3})\\
&\quad+\frac{1}{2}\{[e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2}\\
&\quad\ +[e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi_{,2}]_{,3}\}\overline{\delta}\psi\\
&\quad+\frac{1}{2}\{[e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\overline{\chi})_{,3}]_{,2}\\
&\quad\ +[e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\overline{\chi})_{,2}]_{,3}\}\delta\psi\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})\overline{\chi}\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}\overline{Q}_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}\overline{Q}_{,3}\omega_{,3})\chi\\
&\quad-2e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,3}(\overline{\chi}\delta\psi+\chi\overline{\delta}\psi)\\
&\quad-e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\{[\delta\psi_{,2,3}+\delta\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\delta\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}\\
&\quad\ -\beta_{,2}\delta\mu_{2,3}-\beta_{,3}\delta\mu_{3,2}]\overline{\chi}\\
&\quad\ +[\overline{\delta}\psi_{,2,3}+\overline{\delta}\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\overline{\delta}\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}\\
&\quad\ -\beta_{,2}\overline{\delta}\mu_{2,3}-\beta_{,3}\overline{\delta}\mu_{3,2}]\chi\\
&\quad\ -[\beta_{,2,2}-\beta_{,2}(\mu_3+\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}]\chi\overline{\chi}\\
&\quad-\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+2\mu_2-2\mu_3}(\omega_{,3})^2\chi\overline{\chi}\}]\!]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
&\quad+\text{面积分},
\end{aligned}
\tag{341}
$$

为简短起见, 式中未具体写出面积分, 而且还用了缩写 [619]

$$
\delta\mu=\frac{1}{2}\delta(\mu_3+\mu_2)\ \text{ 和 }\ \delta\tau=\frac{1}{2}\delta(\mu_3-\mu_2). \tag{342}
$$

(i) 变分原理

在推导方程 (341) 时假定, 由带横线量表示的试变分只满足初值方程. 鉴于体积分被积函数对带横线量和无横线量的对称性, 现在形式上将它们等同而得出

$$\begin{aligned}
&\sigma^2\iiint e^{-2\nu}\{2(\delta\tau)^2+2(\delta\psi)^2-2[\delta(\psi+\mu)]^2\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{-4\psi}Q^2+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}\chi^2\}\sqrt{-g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
&=\iiint\Big[\!\!\Big[Xe^{3\psi-\nu}[4(\delta\psi)^2+(\delta\tau)^2]+4Ye^{3\psi-\nu}\delta\psi\delta\tau-4U(\delta\tau)^2\\
&\quad+2e^{\beta}[e^{\mu_3-\mu_2}(\delta\psi_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(\delta\psi_{,3})^2]\\
&\quad-4e^{\beta}\{e^{\mu_3-\mu_2}[\beta_{,2}\delta\mu_{3,2}-(\psi-\nu)_{,2}\delta\psi_{,2}]\\
&\qquad-e^{\mu_2-\mu_3}[\beta_{,3}\delta\mu_{2,3}-(\psi-\nu)_{,3}\delta\psi_{,3}]\}\delta\tau\\
&-2e^{\beta}(2S\delta\psi+D\delta\tau)+\frac{1}{2}e^{-3\psi+\nu}[e^{\mu_3-\mu_2}(Q_{,2})^2+e^{\mu_2-\mu_3}(Q_{,3})^2]\\
&+\{[e^{-2\mu_2+2\nu}(e^{\psi-\nu+3\mu_2-\mu_3}\chi)_{,3}]_{,2}+[e^{-2\mu_3+2\nu}(e^{\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}\chi)_{,2}]_{,3}\}\delta\psi\\
&+e^{\mu_2-\mu_3}(e^{\mu_3-\mu_2}Q_{,2}\omega_{,2}-e^{\mu_2-\mu_3}Q_{,3}\omega_{,3})\chi-4e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}\omega_{,2}\omega_{,2}\chi\delta\psi\\
&+e^{\mu_2-\mu_3+\beta}\{[\beta_{,2,2}-\beta_{,2}(\mu_3+\mu_2)_{,2}+\psi_{,2}\psi_{,2}+\nu_{,2}\nu_{,2}]\chi^2\\
&+\frac{1}{2}e^{2\psi-2\nu+2\mu_2-2\mu_3}(\omega_{,3})^2\chi^2\}-2e^{\beta+\mu_2-\mu_3}[\delta\psi_{,2,3}\\
&+\delta\psi_{,2}(\psi-\mu_2)_{,3}+\delta\psi_{,3}(\psi-\mu_3)_{,2}-\beta_{,2}\delta\mu_{2,3}-\beta_{,3}\delta\mu_{3,2}]\chi\Big]\!\!\Big]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\\
&+\text{面积分}.
\end{aligned}\tag{343}$$

现在将方程 (343) 考虑为对 σ^2 的公式, 其中的变分被假定为只与初值方程和原边界条件相符. 现在设想由两组试变分来相继地计算 σ^2, 即 $\delta\psi,\delta\nu,Q,\chi$, 等等和 $\delta\psi+\frac{1}{2}\delta^2\psi,\delta\nu+\frac{1}{2}\delta^2\nu,Q+\frac{1}{2}\delta Q,\chi+\frac{1}{2}\delta\chi$, 等等, 其中 $\frac{1}{2}\delta^2\psi,\frac{1}{2}\delta^2\nu,\frac{1}{2}\delta Q,\frac{1}{2}\delta\chi$, 等等是无限小增量. 也就是说, 考虑只与初值方程和原边界条件相符的试变分中任意无限小增量对方程 (343) 给出的 σ^2 的影响. 不难通过对方程 (343) 中的被积函数进行所要的变分而写出 $\delta\sigma^2$ 的明晰表示. 从这样得出的 $\delta\sigma^2$ 表示式出发, 回溯从方程 (275)、(276) 和 (339) 开始而导致方程 (341) 的演算, 但有一个本质区别: 现在无权使用任何动力学方程. 于是得到

[620]
$$\begin{aligned}
&\delta\sigma^2\iiint e^{-2\nu}\{2(\delta\tau)^2+2(\delta\psi)^2-2[\delta(\psi+\mu)]^2\\
&\quad+\frac{1}{2}e^{-4\psi}Q^2+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}\chi^2\}\sqrt{-g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=-\iiint\Big[\!\Big[&\delta\{[G^{(3)(3)}+G^{(2)(2)}]\sqrt{-g}\}\delta^2\mu+\delta\{[G^{(3)(3)}-G^{(2)(2)}]\sqrt{-g}\}\delta^2\tau\\
&+\delta\{R^{(2)(3)}e^{\mu_2-\mu_3}\sqrt{-g}\}\delta\chi+\delta\{e^{\mu_3+\mu_2}G^{(1)(1)}\}e^{\beta}\delta^2\psi\\
&+\frac{1}{2}\{\sigma^2e^{-3\psi-\nu+\mu_2+\mu_3}Q+(e^{-3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}Q_{,2})_{,2}\\
&+(e^{-3\psi+\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{,3})_{,3}+(\omega_{,2}\chi)_{,2}-(e^{2\mu_2-2\mu_3}\omega_{,3}\chi)_{,3}\\
&+[\omega_{,2}(3\delta\psi-\delta\nu+\delta\mu_3-\delta\mu_2)]_{,3}\\
&-[\omega_{,3}(3\delta\psi-\delta\nu+\delta\mu_2-\delta\mu_3)]_{,2}\}\delta Q\Big]\!\Big]\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3. \qquad (344)
\end{aligned}
$$

由这个方程可见, 如果对任意无限小增量进行试变分, 只与初值方程和原边界条件相符, 并要求 $\delta\sigma^2$ 对所有这种增量为零, 则问题的动力学方程必定被满足. 也就是说, 试变分必定表示问题的真实解. 这就是支配线性化方程解的变分原理.

(ii) 克尔解对轴对称扰动的稳定性

现在来阐明, 如何能由对 σ^2 的变分表示式 (343) 来导出克尔解对轴对称扰动的稳定性. 如弗雷德曼和舒兹首先证明的, 其中有

$$\delta\mu=\frac{1}{2}\delta(\mu_3+\mu_2)=0 \qquad (345)$$

的规范选择在这里有着关键的重要性. 这是因为, 假如用 (241) 形式的度规, 方程左边 σ^2 的系数就会是

$$\iiint e^{-2\nu}\left\{2(\delta\tau)^2+2(\delta\psi)^2-2[\delta(\psi+\mu)]^2+\frac{1}{2}e^{-4\psi}Q^2\right\}\sqrt{-g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3; \qquad (346)$$

而这个表示不是正定的. 另一方面, 用更一般的度规 (244), 现在可以由允许 $\chi\neq0$ 而设 $\delta\mu=0$. 由规范的选择,

$$\delta\mu=0 \quad 和 \quad \chi\neq0, \qquad (347)$$

变分表示中 σ^2 的系数成为 [621]

$$\iiint e^{-2\nu}\left[2(\delta\tau)^2+\frac{1}{2}e^{-4\psi}Q^2+\frac{1}{2}e^{2\mu_2-2\mu_3}\chi^2\right]\sqrt{-g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3; \qquad (348)$$

而这个表示是正定的. 在此后的考虑中将假定已选择规范 (347).

克尔解对轴对称扰动的稳定性来自三个基本事实:

(1) 沿克尔序列不允许零频率模式;

(2) 不稳定性如果发生, 只能是由于纯虚数模式: $\sigma=-\mathrm{i}k, k>0$; 和

(3) 不稳定模式 (如果存在) 的虚数频率必定连续地依赖于克尔参量 a.

零频率不被允许当然是由卡特定理保证的. 而如在 § (*d*) 已看到的, 现在对扰动问题的探讨给出了一个独立的证明.

为从变分表示 (即使有着规范选择 (347)) 推论出 σ^2 的实数性, 必须首先保证, 当令 S_1 趋于视界和 S_2 趋于无穷远时 (见方程 (338) 前面一段中的说明), 面积分对方程 (343) 右边的表示式不作出任何贡献. 但这是来自于第 9 章的一般考虑所显示的, 即用 r_* 变量时 (它表示对 $m = 0$ 和 $r > r_+$ 的单值变换) 解具有向外和向内波的特征. 这一事实与被积函数中 $e^{-2\nu}$ 的存在所导致的系数 (348) 的发散一起保证了, 对于有着复数 σ 的不稳定模式, 面积分不可能作出贡献. (须注意, 方程 (343) 两边积分表示之比对所有 r 都是常量.) 所以, 系数 (348) 的正定性保证了, 如果不稳定性发生, 它只能是由于有限的、纯虚数的模式 (因为 σ^2 是实数).

由于 $\sigma = 0$ 是被禁止的, σ 的谱必定完全地处于虚轴的正侧或完全地处于负侧. 但是已经知道, 对 $a = 0$ 的史瓦西解, 没有不稳定的指数增长模式. 于是, 如果能证明 σ 是连续地依赖于参量 a, 则对任何 a 值而言不稳定性皆可排除.

看来有着能用来确立 σ (*a*) 的连续性的定理, 因为正在考虑的微分算符是在平方可积函数空间自伴随的和 "密集定义的". 而且, 这些算符对参量 a 是解析的. 这些事实足以保证所要求的 σ (*a*) 的连续性.

[622] 于是有结论, 克尔解对轴对称扰动是稳定的.

问题是, 本节所作的这些初步研讨能否有效地扩展到对黑洞数学理论中其它问题的回答."这可能是新故事的主题, 但是现在的故事已经结束."

文献注释

§109、§110. 对现在所称 "克尔 – 纽曼解" 的发现是由:

1. E. T. Newman, E. Couch, K, Chinnapared *et al.*, *J. Math. Phys.*, 6, 918–9 (1965).

解由这些作者得到, 是通过将复数坐标变换运用于雷斯纳 – 诺兹特朗解, 即以纽曼和 Janis (下面文献 2) 此前将类似的复数坐标变换运用于史瓦西解而得到克尔解的方式.

2. E. T. Newman and A. I. Janis, *J. Math. Phys.*, 6, 915–7 (1965).

开始时看似是 "奇怪的程序" 成立的依据后来由下列文献提供:

3. E. T. Newman, *J. Math. Phys.*, 14, 774–6 (1972).

正文中对克尔 – 纽曼解的导出是仿照第 6 章 (§52–§54) 对克尔解的导出, 并见:

4. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 358, 405–20 (1978).

§109 的推导主要是致力于从对定常态轴对称时空明晰写出的爱因斯坦 – 麦克斯韦方程直接得出恩斯特方程. 原初的推导由恩斯特以不同的动机给出:

5. F. J. Ernst, *Phys. Rev.*, 168, 1415–7 (1968).

关于 §109 (d) 中恩斯特方程的变换性质见:

6. B. C. Xanthopoulos, *Phys. Letters*, 98B, 377–80 (1981).

7. M. Gürses and B. C. Xanthopoulos, *J. Phys. A* (in press).

还有:

8. B. K. Harrison, *J. Math. Phys.*, 9, 1744–52 (1968).

§109 (c) 中考虑的势 H 共轭效应是与山托珀罗斯合作发现的, 我感谢他关于这几节中内容的深入讨论.

由克尔度规和克尔 – 纽曼度规形式上的相同 (除了 "视界函数"Δ 的定义外) 当然很明显, 第 6 章§56 采用来描述纽曼 – 彭罗斯形式克尔时空的零四次基, 以及第 6 章方程 (175) 给出的自旋系数的各种表示, 都能不作任何修改地用于克尔 – 纽曼时空. 见:

9. S. K. Bose, *J. Math. Phys.*, 16, 772–5 (1975).

§111. 克尔 – 纽曼时空的扰动已在文献中被广泛讨论, 例如:

10. C. H. Lee, *J. Math. Phys.*, 17, 1226–35 (1976).

11. D. M. Chitre, *Phys. Rev. D*, 13, 2713–9(1976).

正文中的处理来自:

12. S. Chandrasekhar, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 358, 421–39 (Appendix B, pp. 437–8) (1978).

但是到基本方程未被解耦或分离的程度; 到此程度可以说, 在这个课题上 [623]
尚无进展.

然而, 不要求时空被扰动的问题能完全如在克尔时空中那样处理. 这一点特别适用于对短程线的研究 (其中有些新增的情形必须考虑, 这是由于 Δ 的不同定义) 和狄拉克方程的分离 (第 10 章中的分析确实无需修改). 见:

13. M. Calvani, F. de Felice, and L. Nobili, *J. Phys. A*, 13, 3213–9 (1980).

14. F. de Felice, L. Nobili, and M. Calvani, ibid., 3635–41 (1980).

15. D. N. Page, *Phys. Rev. D*, 14, 1509–10 (1976).

§112. 将爱因斯坦方程在静态轴对称真空时空情形简化为三维欧几里得空间的拉普拉斯方程, 首先做到的是:

16. H. Weyl, *Ann. Phys.*, 54, 117–45 (1917).

相关叙述可见:

17. J. L. Synge, *Relativity:The General Theory*, 309–17, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1964.

得到的解在文献中被普遍称为外尔解. 当然清楚, 爱因斯坦方程向拉普拉斯方程的简化能通过对规范和坐标的不同选择而由多个途径做到. 在外尔的原初简化中 (普遍接受), 史瓦西解的事件视界表现为沿轴的坐标线奇异性. 为处理扭曲的史瓦西解黑洞, 可能希望是史瓦西解表现为史瓦西解的简化. 正文中采用的是适合于这种完美要求的规范和坐标系.

由外尔的一般解导出的扭曲静态黑洞在文献中已有一些考虑, 包括:

18. W. Israel and K. A. Khan, *Nuovo Cim.*, 33, 331–44 (1964).

和

19. P. C. Peters, *J. Math. Phys.*, 20, 1481–5 (1979).

而作出最完整讨论的是:

20. R. Geroch and J. B. Hartle, *J. Math. Phys.*, 23, 680–92 (1982).

最后这篇文章澄清了这些黑洞的许多方面, 包括与霍金辐射相关的方面. 本书作者感激哈特尔关于这许多问题的讨论, 特别是他对沿轴局域平坦条件重要性的强调.

§113. 独立地发现本节考虑的解的是:

21. S. D. Majumdar, *Phys. Rev.*, 72, 390–8 (1947).

和

22. A. Papapetrou, *Proc. Roy. Irish Acad.*, 51, 191–205 (1947).

正确地解释这些解的是:

23. J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, 26, 87-101 (1972).

§(*c*) 的讨论主要取自文献 23.

玛居姆达 – 帕帕培特罗解的定常态推广是由

24. W. Israel and G. A. Wilson, *J. Math. Phys.*, 13, 865–7 (1972).

和

25. Z. Perjés, *Phys. Rev. Letters*, 27, 1668–70 (1971)

独立地发现的. 这些解还由哈特尔和霍金讨论 (文献 23).

§114. 本节概述的理论基本要素, 是由钱德拉塞卡和弗雷德曼在关于广义相对论框架下的均匀旋转恒星稳定性的更大课题的一系列论文中建立的:

[624] 26. S. Chandrasekhar and J. L. Friedman, *Astrophys. J.*, 175, 379–405 (1972).

27. Ibid., 176, 745–68 (1972).

28. Ibid., 177, 745–56 (1972).

29. Ibid., 181, 481–95 (1973).

这些论文之一 (文 28) 是关于真空解和卡特定理. 而所有这些论文都是基于非定常态度规形式 (241).

在度规 g_{23} 中增加一项对于揭示轴对称扰动不稳定模式的 σ^2 实数性的关键重要性, 首先是由弗雷德曼和舒兹认识到的. 这的确为他们证明克尔解对轴对称扰动的稳定性提供了基础:

30. J. L. Friedman and B. F. Schutz, Jr., *Phys. Rev. Letters*, 32, 243–5 (1973).

由于弗雷德曼和舒兹并未发表他们的详细解析, 所以正文中理论是从头讲起. 分析主要是遵循论文 26 和 27 的思路, 但却是对更一般的度规 (244) 来进行的.

§(d) 中对卡特定理的证明与论文 28 中所给的相同, 而§(e) 中关于克尔解对轴对称扰动稳定性的基本论证 (§(e), 2) 就是弗雷德曼和舒兹的 (论文 30). 但是, 弗雷德曼和舒兹推断 σ 对克尔参量 a 的连续性, 是通过诉诸运用于楚科尔斯基方程的散射理论, 因而对定理证明的一般性 (但对它们的目的而言是足够的) 不及哈特尔和外尔金斯所作的:

31. J. B. Hartle and D. C. Wilkins, *Commun. Math. Phys.*, 38, 47–63 (1974).

如在正文中指明的, 可以避免诉诸散射理论的定理, 办法是直接走向这样的定理, 即解析地依赖于一个参量并在平方可积函数空间密集定义的自伴随微分算符的特征值对该参量是连续的; 见:

32. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Functional Analysis*, §136, 373–9, Blackie & Son Limited, London, 1956.

我非常感激弗雷德曼关于本节所处理课题所有方面的指教和有益讨论.

附录

[625]

楚科尔斯基函数及相关函数的表

在第 7、9 和 10 章已看到, 克尔黑洞对入射电磁波、引力波和无质量中微子波的作用如何能由对应于不同自旋的楚科尔斯基径向和角向函数来充分地描述. 除了布鲁尔 (Breuer)、小赖安 (Ryan Jr.) 和沃勒以及法克雷尔 (Fackerell) 和克罗斯曼 (Crossman) 的文章外, 尚没有研究这些函数在特殊数理函数中应有地位的认真尝试; 也没有对从具有特征值参量附加性质的狄拉克方程的分离所产生函数的研究, 而特征值参量是严格地依赖于粒子质量.

最后, 人们希望理解第 9 章求解全部线性化纽曼 – 彭罗斯方程过程中发现的引人注目的等式和性质的起源. 但是, 迄今还没有线索.

由于第 9 章得出的大多数等式和关系是冗长推演的结果, 会觉得用直接数值计算来 (如实地) 检查它们是有用的, 这种检查是为保证避免不经心的代数或其它错误. 出于这些和其它目的, 德特维勒博士友善地承担了对属于 $s = \pm 2$ 和 $s = \pm 1$ 的径向和角向函数制表的工作, 制表是对两个典型情形, 即 $a = 0.95$、$\sigma = 0.5$ 和 0.25, 以及对 $a = 0$. 这些表被收入本附录, 因为它们对可能有兴趣于这个研究领域的其他人会类似地有用.

列于表 I 和 II 的属于自旋 2 的径向和角向函数已如正文中所用的归一化: 属于 $s = +2$ 和 $s = -2$ 的径向函数也就与复数共轭斯塔罗宾斯基关系 (第 9 章方程 (41) 和 (42)) 一致, 而角向函数归化为 1. 函数 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{S}$ 在第 9 章方程 (178)、(179)、(183) 和 (184) 中定义, 各个括号表示在 §81 (*b*) 中定义. 与列表的解相关的各常数 (第 9 章方程 (161)) 是:

$a = 0.95;$	$l = -m = 2$
$\sigma = 0.5$	0.25
$\lambda = 0.88693$	2.4308
$\alpha^2 = -2.8975$	-6.6975

$\sigma(\lambda\alpha^2-6a^2)=-3.99244$	-5.42382
$\Gamma_1=11.2530$	15.7935
$\mathscr{C}_1=12.4482$	17.3831
$\mathscr{C}_2(=-\Gamma_2)=-6$	-3

[626]

附表 I 对 $s=\pm 2$ 的径向函数 $(a=0.95, \sigma=0.5; l=-m=2)$

r/M	$[P]^+$	$[DP]^+$	$[DDP]^+$	$[P]^-$	$[DP]^-$	$[DDP]^-$	$\mathscr{R}$
2.00	2.00000	–1.07940	5.38789	0.000000	4.75963	25.1627	0.865586
2.10	1.87877	–0.926641	5.46889	0.727147	7.29748	26.9098	1.02641
2.20	1.70012	–0.990398	5.40319	1.71762	10.0176	28.8345	1.25339
2.30	1.41550	–1.30720	5.15534	2.97871	12.9180	30.8465	1.54821
2.40	0.973712	–1.91092	4.70475	4.51446	15.9838	32.8803	1.91043
2.50	0.321416	–2.83272	4.04018	6.32375	19.1910	34.8845	2.33813
2.60	–0.596200	–4.10067	3.15689	8.39906	22.5081	36.8177	2.82829
2.70	–1.83470	–5.73938	2.05492	10.7257	25.8982	38.6449	3.37695
2.80	–3.44959	–7.76962	0.738136	13.2813	29.3198	40.3359	3.97938
2.90	–5.49545	–10.2079	–0.786504	16.0357	32.7278	41.8645	4.63018
3.00	–8.02499	–13.0665	–2.50942	18.9503	36.0743	43.2076	5.32336
3.10	–11.0882	–16.3526	–4.41878	21.9788	39.3091	44.3451	6.05242
3.20	–14.7313	–20.0688	–6.50082	25.0668	42.3805	45.2592	6.81043
3.30	–18.9959	–24.2125	–8.74010	28.1522	45.2362	45.9345	7.59012
3.40	–23.9181	–28.7763	–11.1197	31.1658	47.8229	46.3580	8.38391
3.50	–29.5276	–33.7473	–13.6215	34.0314	50.0880	46.5186	9.18399
3.60	–35.8469	–39.1078	–16.2264	36.6664	51.9795	46.4074	9.98243
3.70	–42.8904	–44.8347	–18.9142	38.9830	53.4463	46.0175	10.7712
3.80	–50.6637	–50.9003	–21.6643	40.8882	54.4393	45.3439	11.5421
3.90	–59.1632	–57.2717	–24.4554	42.2851	54.9116	44.3837	12.2873
4.00	–68.3750	–63.9116	–27.2658	43.0735	54.8187	43.1359	12.9987
4.10	–78.2751	–70.7783	–30.0737	43.1511	54.1192	41.6011	13.6686
4.20	–88.8282	–77.8255	–32.8571	42.4146	52.7752	39.7819	14.2894
4.30	–99.9879	–85.0035	–35.5943	40.7602	50.7526	37.6828	14.8537
4.40	–111.697	–92.2585	–38.2636	38.0854	48.0216	35.3097	15.3545
4.50	–123.884	–99.5336	–40.8436	34.2896	44.5567	32.6704	15.7852
4.60	–136.470	–106.769	–43.3135	29.2756	40.3373	29.7742	16.1394
4.70	–149.362	–113.902	–45.6531	22.9506	35.3479	26.6320	16.4114
4.80	–162.455	–120.869	–47.8427	15.2274	29.5783	23.2561	16.5958
4.90	–175.634	–127.602	–49.8635	6.02563	23.0237	19.6602	16.6878
5.00	–188.773	–134.035	–51.6977	–4.72704	15.6853	15.8593	16.6831
5.10	–201.737	–140.099	–53.3283	–17.0940	7.56960	11.8797	16.5780
5.20	–214.379	–145.725	–54.7395	–31.1282	–1.31055	7.70867	16.3695
5.30	–226.545	–150.844	–55.9167	–46.8715	–10.9365	3.39469	16.0551
5.40	–238.072	–155.388	–56.8463	–64.3534	–21.2837	–1.05287	15.6329
5.50	–248.791	–159.289	–57.5163	–83.5902	–32.3215	–5.61379	15.1018
5.60	–258.525	–162.482	–57.9157	–104.584	–44.0132	–10.2671	14.4613
5.70	–267.094	–164.904	–58.0353	–127.321	–56.3166	–14.9912	13.7117
5.80	–274.312	–166.491	–57.8670	–151.774	–69.1834	–19.7639	12.8537
5.90	–279.992	–167.188	–57.4045	–177.897	–82.5601	–24.5625	11.8891
6.00	–283.945	–166.937	–56.6427	–205.629	–96.3875	–29.3643	10.8199
6.10	–285.982	–165.687	–55.5784	–234.890	–110.601	–34.1459	9.64910
6.20	–285.917	–163.392	–54.2096	–265.583	–125.133	–38.8841	8.38033
6.30	–283.564	–160.008	–52.5362	–297.593	–139.907	–43.5556	7.01777
6.40	–278.745	–155.498	–50.5593	–330.788	–154.848	–48.1373	5.56628
6.50	–271.285	–149.830	–48.2820	–365.016	–169.872	–52.6061	4.03132
6.60	–261.018	–142.976	–45.7085	–400.109	–184.895	–56.9393	2.41895
6.70	–247.788	–134.917	–42.8450	–435.880	–199.827	–61.1148	0.735764
6.80	–231.449	–125.637	–39.6987	–472.126	–214.577	–65.1107	–1.01110
6.90	–211.867	–115.128	–36.2788	–508.626	–229.052	–68.9059	–2.81401

附表 I 续　$(a=0.95,\sigma=0.25;l=-m=2)$　[627]

r/M	$[P]^+$	$[DP]^+$	$[DDP]^+$	$[P]^-$	$[DP]^-$	$[DDP]^-$	$\mathscr{R}$
2.00	2.00000	15.9355	45.1217	0.000000	–2.95809	23.9078	–5.59002
2.10	3.80931	20.6317	51.7891	–0.402230	–1.48548	28.1807	–6.18269
2.20	6.11835	26.1438	59.0316	–0.658754	0.583079	32.9755	–6.77236
2.30	9.02331	32.4815	66.7997	–0.676982	3.32893	38.3038	–7.33757
2.40	12.6134	39.6531	75.0438	–0.356858	6.83718	44.1730	–7.85760
2.50	16.9716	47.6631	83.7152	0.411260	11.1946	50.5885	–8.31243
2.60	22.1750	56.5116	92.7676	1.74745	16.4885	57.5543	–8.68270
2.70	28.2943	66.1930	102.156	3.78248	22.8062	65.0734	–8.94952
2.80	35.3937	76.6962	111.838	6.65774	30.2342	73.1480	–9.09449
2.90	43.5302	88.0043	121.770	10.5250	38.8584	81.7790	–9.09959
3.00	52.7529	100.094	131.913	15.5461	48.7633	90.9666	–8.94717
3.10	63.1025	112.938	142.226	21.8926	60.0320	100.710	–8.61998
3.20	74.6100	126.500	152.670	29.7451	72.7458	111.007	–8.10110
3.30	87.2969	140.740	163.206	39.2928	86.9840	121.855	–7.37402
3.40	101.173	155.613	173.797	50.7332	102.824	133.250	–6.42263
3.50	116.239	171.067	184.406	64.2710	120.340	145.186	–5.23120
3.60	132.480	187.044	194.996	80.1179	139.604	157.659	–3.78450
3.70	149.872	203.483	205.531	98.4917	160.685	170.660	–2.06771
3.80	168.374	220.317	215.976	119.615	183.648	184.181	–0.0665556
3.90	187.934	237.471	226.297	143.717	208.557	198.214	2.23276
4.00	208.485	254.871	236.458	171.027	235.469	212.748	4.84347
4.10	229.943	272.433	246.428	201.782	264.440	227.772	7.77822
4.20	252.210	290.071	256.172	236.217	295.521	243.274	11.0491
4.30	275.174	307.695	265.660	274.571	328.757	259.240	14.6675
4.40	298.702	325.209	274.859	317.081	364.193	275.657	18.6443
4.50	322.650	342.517	283.738	363.987	401.863	292.510	22.9895
4.60	346.852	359.515	292.269	415.523	441.803	309.783	27.7126
4.70	371.129	376.097	300.422	471.925	484.040	327.458	32.8223
4.80	395.282	392.155	308.168	533.421	528.597	345.519	38.3264
4.90	419.095	407.577	315.479	600.239	575.491	363.947	44.2323
5.00	442.336	422.249	322.330	672.597	624.735	382.722	50.5462
5.10	464.753	436.053	328.693	750.710	676.336	401.825	57.2738
5.20	486.079	448.870	334.545	834.784	730.294	421.235	64.4199
5.30	506.028	460.578	339.860	925.017	786.606	440.930	71.9883
5.40	524.296	471.055	344.616	1021.59	845.261	460.888	79.9822
5.50	540.563	480.175	348.789	1124.70	906.243	481.085	88.4037
5.60	554.493	487.814	352.360	1234.48	969.529	501.500	97.2543
5.70	565.731	493.843	355.307	1351.11	1035.09	522.107	106.534
5.80	573.907	498.135	357.610	1474.72	1102.90	542.881	116.243
5.90	578.635	500.563	359.252	1605.43	1172.90	563.797	126.379
6.00	579.513	500.997	360.215	1743.35	1245.06	584.830	136.941
6.10	576.125	499.311	360.483	1888.57	1319.33	605.954	147.925
6.20	568.038	495.375	360.039	2041.15	1395.63	627.140	159.326
6.30	554.809	489.063	358.871	2201.17	1473.91	648.363	171.141
6.40	535.979	480.248	356.964	2368.64	1554.10	669.595	183.361
6.50	511.077	468.806	354.307	2543.58	1636.11	690.808	195.982
6.60	479.622	454.612	350.887	2725.99	1719.87	711.973	208.994
6.70	441.119	437.545	346.697	2915.82	1805.28	733.062	222.389
6.80	395.066	417.486	341.726	3113.02	1892.24	754.047	236.157
6.90	340.951	394.316	335.967	3317.52	1980.66	774.898	250.288

[628]

附表 II 对 $s=\pm 2$ 的归一化角向函数 $(a=0.95,\sigma=0.5;l=-m=2)$

$\cos\theta$	S_{+2}	S_{-2}	$[S]^+$	$[\mathscr{L}S]^+$	$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+$	$[S]^-$	$[\mathscr{L}S]^-$	$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-$	$\mathscr{I}$
0.96	1.66329	0.00037	1.66366	–0.87863	0.55703	1.66292	–0.89925	0.12516	0.13581
0.92	1.57437	0.00149	1.57586	–1.17445	1.08767	1.57287	–1.23281	0.23460	0.18038
0.88	1.48894	0.00340	1.49234	–1.35688	1.59237	1.48553	–1.46413	0.32906	0.20711
0.84	1.40690	0.00612	1.41303	–1.47481	2.07158	1.40077	–1.63997	0.40925	0.22376
0.80	1.32816	0.00970	1.33785	–1.54843	2.52573	1.31846	–1.77926	0.47591	0.23358
0.76	1.25261	0.01414	1.26675	–1.58874	2.95522	1.23847	–1.89212	0.52974	0.23833
0.72	1.18017	0.01949	1.19966	–1.60267	3.36043	1.16068	–1.98481	0.57143	0.23915
0.68	1.11074	0.02578	1.13652	–1.59501	3.74172	1.08496	–2.06159	0.60167	0.23680
0.64	1.04423	0.03304	1.07728	–1.56926	4.09942	1.01119	–2.12551	0.62116	0.23185
0.60	0.98056	0.04132	1.02188	–1.52815	4.43387	0.93924	–2.17890	0.63056	0.22475
0.56	0.91965	0.05064	0.97028	–1.47384	4.74535	0.86901	–2.22354	0.63053	0.21583
0.52	0.86140	0.06104	0.92244	–1.40809	5.03415	0.80036	–2.26086	0.62173	0.20538
0.48	0.80574	0.07256	0.87830	–1.33241	5.30053	0.73319	–2.29204	0.60483	0.19360
0.44	0.75260	0.08524	0.83784	–1.24806	5.54472	0.66737	–2.31801	0.58046	0.18072
0.40	0.70190	0.09912	0.80101	–1.15615	5.76695	0.60278	–2.33959	0.54927	0.16687
0.36	0.65356	0.11424	0.76779	–1.05767	5.96741	0.53932	–2.35743	0.51189	0.15222
0.32	0.60751	0.13064	0.73815	–0.95350	6.14629	0.47687	–2.37209	0.46895	0.13687
0.28	0.56368	0.14837	0.71205	–0.84443	6.30375	0.41531	–2.38405	0.42108	0.12093
0.24	0.52200	0.16747	0.68948	–0.73120	6.43992	0.35453	–2.39369	0.36891	0.10450
0.20	0.58242	0.18799	0.67041	–0.61449	6.55494	0.29442	–2.40134	0.31306	0.08767
0.16	0.44485	0.20998	0.65483	–0.49493	6.64890	0.23487	–2.40725	0.25414	0.07051
0.12	0.40925	0.23348	0.64273	–0.37313	6.72189	0.17577	–2.41164	0.19277	0.05310
0.08	0.37554	0.25855	0.63410	–0.24968	6.77398	0.11699	–2.41466	0.12956	0.03550
0.04	0.34368	0.28524	0.62892	–0.12513	6.80522	0.05844	–2.41643	0.06513	0.01778

附表 II 续 $(a=0.95,\sigma=0.25;l=-m=2)$

$\cos\theta$	S_{+2}	S_{-2}	$[S]^+$	$[\mathscr{L}S]^+$	$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+$	$[S]^-$	$[\mathscr{L}S]^-$	$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^-$	$\mathscr{I}$
0.96	1.59016	0.00049	1.59064	–0.86289	0.63892	1.58967	–0.89008	0.06868	0.13895
0.92	1.51587	0.00196	1.51782	–1.15641	1.25074	1.51391	–1.23295	0.12890	0.18550
0.88	1.44380	0.00443	1.44823	–1.33936	1.83560	1.43937	–1.47926	0.18102	0.21407
0.84	1.37393	0.00792	1.38185	–1.45925	2.39362	1.36601	–1.67351	0.22539	0.23241
0.80	1.30621	0.01246	1.31867	–1.53558	2.92490	1.29375	–1.83339	0.26239	0.24375
0.76	1.24061	0.01805	1.25866	–1.57897	3.42958	1.22256	–1.96822	0.29238	0.24983
0.72	1.17709	0.02473	1.20182	–1.59610	3.90774	1.15237	–2.08370	0.31570	0.25177
0.68	1.11563	0.03250	1.14813	–1.59156	4.35949	1.08313	–2.18360	0.33272	0.25032
0.64	1.05618	0.04140	1.09758	–1.56876	4.78492	1.01478	–2.27064	0.34380	0.24606
0.60	0.99872	0.05144	1.05016	–1.53031	5.18413	0.94729	–2.34681	0.34929	0.23941
0.56	0.94321	0.06263	1.00585	–1.47832	5.55719	0.88058	–2.41365	0.34954	0.23072
0.52	0.88962	0.07502	0.96464	–1.41451	5.90419	0.81461	–2.47239	0.34491	0.22015
0.48	0.83792	0.08860	0.92653	–1.34036	6.22519	0.74932	–2.52400	0.33575	0.20827
0.44	0.78808	0.10341	0.89149	–1.25712	6.52026	0.68467	–2.56927	0.32241	0.19496
0.40	0.74006	0.11947	0.85954	–1.16592	6.78947	0.62059	–2.60887	0.30525	0.18049
0.36	0.69384	0.13681	0.83065	–1.06775	7.03287	0.55704	–2.64333	0.28460	0.16503
0.32	0.64939	0.15543	0.80482	–0.96350	7.25052	0.49396	–2.67313	0.26083	0.14870
0.28	0.60667	0.17538	0.78205	–0.85400	7.44245	0.43129	–2.69863	0.23428	0.13163
0.24	0.56566	0.19666	0.76232	–0.74002	7.60871	0.36900	–2.72015	0.20530	0.11394
0.20	0.52633	0.21931	0.74564	–0.62227	7.74933	0.30702	–2.73795	0.17424	0.09572
0.16	0.48865	0.24335	0.73199	–0.50144	7.86435	0.24530	–2.75224	0.14145	0.07708
0.12	0.45259	0.26880	0.72138	–0.37818	7.95378	0.18379	–2.76319	0.10726	0.05781
0.08	0.41813	0.29568	0.71381	–0.25310	8.01765	0.12244	–2.77092	0.07204	0.03887
0.04	0.38523	0.32404	0.70927	–0.12683	8.05596	0.06119	–2.77553	0.03612	0.01948

对 $a=0$ 即史瓦西极限的函数列于表 Ⅲ 和 Ⅳ.

附表 Ⅲ　对 $a=0, s=\pm 2$ 的径向函数 ($\sigma=-0.5, l=-m=2$) [629]

r/M	$[P]^+$	$[DP]^+$	$[DPP]^+$	$[P]^-$	$[DP]^-$	$[DDP]^-$	$\mathscr{R}$
2.10	1.66046	3.05695	–1.64363	1.25666	–1.31413	–4.21285	–0.836984
2.20	0.691547	3.23681	1.12446	2.14365	0.848822	–1.11410	–0.366649
2.30	–0.0598288	2.72551	2.51969	2.44870	2.22828	1.09792	0.0329922
2.40	–0.672384	2.09362	3.23429	2.60223	3.24104	2.69108	0.357504
2.50	–1.22137	1.43940	3.56968	2.71122	4.05816	3.89029	0.629729
2.60	–1.75141	0.779221	3.67008	2.80879	4.75533	4.82288	0.864907
2.70	–2.28981	0.111032	3.61248	2.90446	5.36838	5.56265	1.07231
2.80	–2.85426	–0.570955	3.44184	2.99841	5.91439	6.15443	1.25756
2.90	–3.45673	–1.27231	3.18648	3.08650	6.40083	6.62671	1.42407
3.00	–4.10555	–1.99734	2.86547	3.16232	6.82987	6.99828	1.57389
3.10	–4.80645	–2.74888	2.49250	3.21803	7.20064	7.28197	1.70817
3.20	–5.56319	–3.52837	2.07795	3.24485	7.51049	7.48683	1.82749
3.30	–6.37787	–4.33594	1.63012	3.23337	7.75577	7.61947	1.93205
3.40	–7.25114	–5.17060	1.15600	3.17363	7.93227	7.68486	2.02181
3.50	–8.18227	–6.03031	0.661616	3.05535	8.03553	7.68697	2.09654
3.60	–9.16922	–6.91210	0.152402	2.86801	8.06112	7.62902	2.15593
3.70	–10.2087	–7.81218	–0.366673	2.60095	8.00472	7.51381	2.19960
3.80	–11.2960	–8.72601	–0.890978	2.24353	7.86229	7.34388	2.22716
3.90	–12.4253	–9.64835	–1.41615	1.78522	7.63019	7.12160	2.23823
4.00	–13.5895	–10.5734	–1.93804	1.21572	7.30517	6.84927	2.23244
4.10	–14.7801	–11.4948	–2.45271	0.525111	6.88455	6.52920	2.20947
4.20	–15.9876	–12.4057	–2.95639	–0.296069	6.36618	6.16373	2.16905
4.30	–17.2009	–13.2990	–3.44548	–1.25666	5.74853	5.75525	2.11101
4.40	–18.4082	–14.1670	–3.91656	–2.36476	5.03072	5.30626	2.03520
4.50	–19.5962	–15.0019	–4.36636	–3.62761	4.21255	4.81933	1.94161
4.60	–20.7507	–15.7958	–4.79182	–5.05148	3.29452	4.29717	1.83027
4.70	–21.8564	–16.5404	–5.19003	–6.64151	2.27787	3.74255	1.70135
4.80	–22.8971	–17.2276	–5.55829	–8.40164	1.16455	3.15838	1.55508
4.90	–23.8558	–17.8490	–5.89407	–10.3345	–0.0427275	2.54766	1.39181
5.00	–24.7147	–18.3965	–6.19508	–12.4411	–1.34051	1.91347	1.21198
5.10	–25.4554	–18.8619	–6.45920	–14.7213	–2.72459	1.25898	1.01616
5.20	–26.0588	–19.2375	–6.68454	–17.1729	–4.19003	0.587458	0.804980
5.30	–26.5058	–19.5154	–6.86944	–19.7923	–5.73117	–0.0977922	0.579209
5.40	–26.7766	–19.6885	–7.01245	–22.5740	–7.34165	–0.793399	0.339700
5.50	–26.8516	–19.7496	–7.11234	–25.5107	–9.01439	–1.49595	0.0874053
5.60	–26.7112	–19.6923	–7.16814	–28.5930	–10.7417	–2.20202	–0.176624
5.70	–26.3358	–19.5104	–7.17908	–31.8100	–12.5151	–2.90813	–0.451246
5.80	–25.7065	–19.1983	–7.14466	–35.1485	–14.3259	–3.61086	–0.735232
5.90	–24.8047	–18.7512	–7.06459	–38.5935	–16.1643	–4.30674	–1.02727
6.00	–23.6124	–18.1645	–6.93883	–42.1279	–18.0205	–4.99236	–1.32596
6.10	–22.1129	–17.4348	–6.76755	–45.7328	–19.8839	–5.66436	–1.62985
6.20	–20.2901	–16.5589	–6.55119	–49.3874	–21.7436	–6.3194	–1.93741
6.30	–18.1295	–15.5346	–6.29038	–53.0689	–23.5884	–6.95425	–2.24704
6.40	–15.6177	–14.3606	–5.98600	–56.7528	–25.4066	–7.56572	–2.55711
6.50	–12.7430	–13.0363	–5.63914	–60.4128	–27.1864	–8.15074	–2.86593
6.60	–9.49563	–11.5617	–5.25110	–64.0211	–28.9157	–8.70633	–3.17179
6.70	–5.86740	–9.93821	–4.82339	–67.5483	–30.5824	–9.22965	–3.47291
6.80	–1.85241	–8.16761	–4.35771	–70.9635	–32.1743	–9.71797	–3.76755
6.90	2.55311	–6.25284	–3.85597	–74.2347	–33.6790	–10.1687	–4.05390
7.00	7.35054	–4.19766	–3.32025	–77.3286	–35.0845	–10.5795	–4.33020

[630]

附表 III 续 对 $a=0, s=\pm 2$ 的径向函数 $(\sigma=0.25; l=-m=2)$

r/M	$[P]^+$	$[DP]^+$	$[DDP]^+$	$[P]^-$	$[DP]^-$	$[DDP]^-$	$\mathscr{R}$
2.10	1.89407	0.0254419	–17.8501	0.492948	–4.45715	–9.16049	–1.64221
2.20	1.67027	–0.0627552	–20.0000	0.664771	–5.42842	–10.6939	–2.01092
2.30	1.49950	–0.796229	–21.9234	0.424666	–6.65023	–12.0473	–2.33983
2.40	1.33458	–1.85072	–23.9919	–0.0727141	–8.14248	–13.4951	–2.69396
2.50	1.14265	–3.13445	–26.2211	–0.802836	–9.90537	–15.0779	–3.08770
2.60	0.902794	–4.61037	–28.5881	–1.7733	–11.9442	–16.8018	–3.52670
2.70	0.600980	–6.25930	–31.0684	–3.00389	–14.2681	–18.6657	–4.01435
2.80	0.227683	–8.06876	–33.6404	–4.52032	–16.8885	–20.6670	–4.55324
2.90	–0.223299	–10.0287	–36.2856	–6.35201	–19.8179	–22.8033	–5.14573
3.00	–0.755401	–12.1299	–38.988	–8.53087	–23.0693	–25.0719	–5.79403
3.10	–1.36955	–14.3627	–41.7339	–11.0908	–26.6562	–27.4706	–6.50029
3.20	–2.06426	–16.7171	–44.5102	–14.0671	–30.5917	–29.9971	–7.26657
3.30	–2.83565	–19.1821	–47.3055	–17.4968	–34.8888	–32.6494	–8.09491
3.40	–3.67742	–21.7459	–50.1090	–21.4176	–39.5603	–35.4252	–8.98725
3.50	–4.58076	–24.3957	–52.9104	–25.8685	–44.6184	–38.3222	–9.94548
3.60	–5.53435	–27.1177	–55.7002	–30.8891	–50.0747	–41.3381	–10.9714
3.70	–6.52418	–29.8972	–58.4690	–36.5196	–55.9404	–44.4704	–12.0667
3.80	–7.53358	–32.7185	–61.2081	–42.8008	–62.2257	–47.7165	–13.2330
3.90	–8.54306	–35.5649	–63.9088	–49.7736	–68.9404	–51.0735	–14.4718
4.00	–9.53028	–38.4188	–66.5630	–57.4793	–76.0933	–54.5385	–15.7846
4.10	–10.4700	–41.2619	–69.1627	–65.9590	–83.6925	–58.1085	–17.1725
4.20	–11.3339	–44.0748	–71.7002	–75.2535	–91.7452	–61.7799	–18.6368
4.30	–12.0907	–46.8376	–74.1679	–85.4033	–100.258	–65.5495	–20.1783
4.40	–12.7061	–49.5295	–76.5587	–96.4484	–109.235	–69.4135	–21.7982
4.50	–13.1425	–52.1289	–78.8654	–108.428	–118.682	–73.3681	–23.4972
4.60	–13.3592	–54.6137	–81.0813	–121.380	–128.601	–77.4093	–25.2757
4.70	–13.3126	–56.9612	–83.1998	–135.342	–138.995	–81.5328	–27.1343
4.80	–12.9555	–59.1480	–85.2144	–150.350	–149.866	–85.7345	–29.0733
4.90	–12.2378	–61.1504	–87.1191	–166.437	–161.212	–90.0097	–31.0928
5.00	–11.1062	–62.9441	–88.9079	–183.636	–173.033	–94.3538	–33.1929
5.10	–9.50427	–64.5043	–90.5751	–201.979	–185.327	–98.7620	–35.3732
5.20	–7.37234	–65.8060	–92.1151	–221.493	–198.090	–103.229	–37.6335
5.30	–4.64781	–66.8240	–93.5228	–242.204	–211.318	–107.751	–39.9733
5.40	–1.26502	–67.5326	–94.7930	–264.137	–225.004	–112.321	–42.3919
5.50	2.84462	–67.9060	–95.9210	–287.312	–239.142	–116.934	–44.8884
5.60	7.75260	–67.9184	–96.9021	–311.747	–253.724	–121.586	–47.4617
5.70	13.5332	–67.5437	–97.7320	–337.458	–268.739	–126.269	–50.1107
5.80	20.2634	–66.7560	–98.4066	–364.456	–284.176	–130.980	–52.8339
5.90	28.0227	–65.5292	–98.9220	–392.749	–300.025	–135.711	–55.6298
6.00	36.8932	–63.8376	–99.2746	–422.342	–316.271	–140.457	–58.4966
6.10	46.9594	–61.6553	–99.4610	–453.236	–332.899	–145.211	–61.4323
6.20	58.3077	–58.9569	–99.4781	–485.427	–349.894	–149.969	–64.4348
6.30	71.0270	–55.7171	–99.3229	–518.908	–367.238	–154.723	–67.5019
6.40	85.2079	–51.9109	–98.9928	–553.667	–384.914	–159.467	–70.6309
6.50	100.943	–47.5138	–98.4854	–589.687	–402.900	–164.196	–73.8193
6.60	118.325	–42.5016	–97.7986	–626.949	–421.177	–168.902	–77.0642
6.70	137.451	–36.8508	–96.9304	–665.425	–439.722	–173.580	–80.3626
6.80	158.417	–30.5382	–95.8793	–705.085	–458.512	–178.223	–83.7113
6.90	181.320	–23.5414	–94.6439	–745.893	–477.521	–182.824	–87.1068
7.00	206.258	–15.8384	–93.2231	–787.808	–496.725	–187.377	–90.5457

附表 IV　对 $a=0, s=\pm 2$ 的角向函数 $(l=-m=2)$ [631]

$\cos\theta$	S_{+2}	S_{-2}	$[S]^+$	$[\mathscr{L}S]^+$	$[\mathscr{L}\mathscr{L}S]^+$	$[S]^-$	$[\mathscr{L}S]^-$	$\mathscr{I}$
0.96	1.51853	0.00063	1.51916	–0.85002	0.74377	1.51789	–0.88544	0.14166
0.92	1.45718	0.00253	1.45971	–1.14021	1.45718	1.45465	–1.23935	0.19003
0.88	1.39709	0.00569	1.40279	–1.32176	2.14023	1.39140	–1.50200	0.22029
0.84	1.33828	0.01012	1.34840	–1.44128	2.79292	1.32816	–1.71581	0.24021
0.80	1.28072	0.01581	1.29653	–1.51789	3.41526	1.26491	–1.89737	0.25298
0.76	1.22443	0.02277	1.24720	–1.56198	4.00724	1.20167	–2.05524	0.26033
0.72	1.16941	0.03099	1.20040	–1.58007	4.56886	1.13842	–2.19454	0.26334
0.68	1.11565	0.04048	1.15613	–1.57666	5.10012	1.07517	–2.31862	0.26277
0.64	1.06316	0.05123	1.11439	–1.55508	5.60102	1.01193	–2.42981	0.25918
0.60	1.01193	0.06325	1.07517	–1.51789	6.07157	0.94868	–2.52982	0.25298
0.56	0.96196	0.07653	1.03849	–1.46716	6.51176	0.88544	–2.61992	0.24453
0.52	0.91327	0.09107	1.00434	–1.40458	6.92159	0.82219	–2.70111	0.23410
0.48	0.86583	0.10688	0.97272	–1.33160	7.30106	0.75895	–2.77417	0.22193
0.44	0.81966	0.12396	0.94362	–1.24948	7.65018	0.69570	–2.83972	0.20825
0.40	0.77476	0.14230	0.91706	–1.15931	7.96893	0.63246	–2.89827	0.19322
0.36	0.73112	0.16191	0.89303	–1.06209	8.25733	0.56921	–2.95025	0.17701
0.32	0.68874	0.18278	0.87152	–0.95872	8.51538	0.50596	–2.99600	0.15979
0.28	0.64763	0.20492	0.85255	–0.85002	8.74306	0.44272	–3.03579	0.14167
0.24	0.60779	0.22832	0.83611	–0.73676	8.94039	0.37947	–3.06985	0.12279
0.20	0.56921	0.25298	0.82219	–0.61968	9.10735	0.31623	–3.09839	0.10328
0.16	0.53189	0.27891	0.81081	–0.49945	9.24396	0.25298	–3.12154	0.08324
0.12	0.49584	0.30611	0.80195	–0.37673	9.35022	0.18974	–3.13943	0.06279
0.08	0.46106	0.33457	0.79563	–0.25217	9.42611	0.12649	–3.15214	0.04203
0.04	0.42754	0.36429	0.79183	–0.12639	9.47165	0.06325	–3.15975	0.02106

附表 V 和 VI 类似地给出对自旋 1 的径向和角向函数 (标准归一化). 与列表解相关的常数是:

$$\begin{aligned} a &= \ 0.95; \quad l=-m=+2 \\ \sigma &= \ 0.5 \qquad\quad 0.25 \\ \lambda &= \ 3.9317 \qquad 4.9294 \\ \alpha^2 &= -2.8975 \qquad -6.6925 \\ \mathscr{C} = D &= \ 4.2844 \qquad 5.0964 \end{aligned}$$

[632]

附表 V 对 $s=\pm1$ 的径向函数 $(a=0.95,\sigma=0.5;l=-m=2)$

r/M	P_{-1}	实部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	P_{-1}	虚部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	r/M	P_{-1}	实部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	P_{-1}	虚部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$
2.10	1.2003	2.1833	–0.10873	–1.2468	4.60	6.3557	–2.0746	–14.135	–8.1951
2.20	1.4350	2.5017	–0.24999	–1.5818	4.70	6.1192	–2.6562	–14.950	–8.0937
2.30	1.6992	2.7757	–0.42574	–1.9361	4.80	5.8241	–3.2480	–15.752	–7.9455
2.40	1.9887	3.0079	–0.63781	–2.3080	4.90	5.4694	–3.8466	–16.538	–7.7500
2.50	2.2994	3.1991	–0.88783	–2.6946					
2.60	2.6272	3.3492	–1.1771	–3.0926	5.00	5.0547	–4.4484	–17.301	–7.5071
2.70	2.9679	3.4575	–1.5066	–3.4985	5.10	4.5797	–5.0499	–18.037	–7.2168
2.80	3.3173	3.5234	–1.8770	–3.9087	5.20	4.0448	–5.6475	–18.743	–6.8793
2.90	3.6711	3.5463	–2.2884	–4.3194	5.30	3.4505	–6.2376	–19.412	–6.4952
					5.40	2.7977	–6.8167	–20.040	–6.0653
3.00	4.0251	3.5258	–2.7407	–4.7270	5.50	2.0876	–7.3812	–20.623	–5.5906
3.10	4.3748	3.4617	–3.2336	–5.1279	5.60	1.3220	–7.9277	–21.157	–5.0722
3.20	4.7160	3.3540	–3.7660	–5.5185	5.70	0.50282	–8.4527	–21.636	–4.5118
3.30	5.0442	3.2031	–4.3368	–5.8953	5.80	–0.36768	–8.9528	–22.058	–3.9110
3.40	5.3551	3.0095	–4.9445	–6.2549	5.90	–1.2868	–9.4250	–22.417	–3.2716
3.50	5.6447	2.7741	–5.5871	–6.5940					
3.60	5.9086	2.4980	–6.2625	–6.9095	6.00	–2.2516	–9.8659	–22.711	–2.5960
3.70	6.1430	2.1827	–6.9681	–7.1984	6.10	–3.2589	–10.273	–22.935	–1.8863
3.80	6.3439	1.8298	–7.7012	–7.4579	6.20	–4.3049	–10.642	–23.087	–1.1451
3.90	6.5077	1.4412	–8.4586	–7.6853	6.30	–5.3860	–10.972	–23.163	–0.37505
					6.40	–6.4980	–11.260	–23.161	0.42089
4.00	6.6310	1.0191	–9.2371	–7.8781	6.50	–7.6365	–11.503	–23.078	1.2397
4.10	6.7105	0.56571	–10.033	–8.0341	6.60	–8.7970	–11.699	–22.913	2.0784
4.20	6.7432	0.83637	–10.843	–8.1510	6.70	–9.9747	–11.847	–22.662	2.9334
4.30	6.7264	–0.042439	–11.662	–8.2272	6.80	–11.165	–11.944	–22.326	3.8015
4.40	6.6576	–0.095550	–12.487	–8.2608	6.90	–12.362	–11.989	–21.902	4.6791
4.50	6.5346	–1.5066	–13.313	–8.2505					
					7.00	–13.561	–11.980	–21.390	5.5627

附表 V 续　对 $s=\pm1$ 的径向函数 $(a=0.95,\sigma=0.25;l=-m=2)$ [633]

r/M	P_{-1}	实部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	P_{-1}	虚部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	r/M	P_{-1}	实部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$	P_{-1}	虚部 $\mathrm{d}P_{-1}/\mathrm{d}r$
2.10	0.94906	–0.28975	0.070474	0.56174	4.60	8.6636	6.0004	–2.9355	–3.5691
2.20	0.93987	0.096678	0.11579	0.35698	4.70	9.2738	6.2021	–3.3057	–3.8361
2.30	0.96682	0.43572	0.14371	0.20822	4.80	9.9038	6.3975	–3.7030	–4.1113
2.40	1.0259	0.74175	0.15841	0.089098	4.90	10.553	6.5859	–4.1282	–4.3944
2.50	1.1144	1.0253	0.16201	–0.015377					
2.60	1.2305	1.2936	0.15552	–0.11405	5.00	11.221	6.7670	–4.5821	–4.6851
2.70	1.3728	1.5518	0.13922	–0.21232	5.10	11.906	6.9401	–5.0655	–4.9832
2.80	1.5406	1.8035	0.11295	–0.31361	5.20	12.609	7.1049	–5.5790	–5.2884
2.90	1.7334	2.0510	0.076319	–0.42012	5.30	13.327	7.2607	–6.1234	–5.6003
					5.40	14.060	7.4073	–6.6993	–5.9186
3.00	1.9507	2.2959	0.028707	–0.53332	5.50	14.808	7.5441	–7.3073	–6.2430
3.10	2.1925	2.5392	–0.030602	–0.65420	5.60	15.569	7.6706	–7.9481	–6.5731
3.20	2.4585	2.7814	–0.10241	–0.78344	5.70	16.342	7.7864	–8.6221	–6.9084
3.30	2.7488	3.0229	–0.18758	–0.92149	5.80	17.126	7.8912	–9.3299	–7.2487
3.40	3.0631	3.2638	–0.28701	–1.0687	5.90	17.920	7.9845	–10.072	–7.05935
3.50	3.4015	3.5039	–0.40163	–1.2252					
3.60	3.7639	3.7431	–0.53238	–1.3913	6.00	18.722	8.0659	–10.849	–7.9424
3.70	4.1501	3.9812	–0.68020	–1.5668	6.10	19.532	8.1351	–11.661	–8.2949
3.80	4.5600	4.2177	–0.84606	–1.7520	6.20	20.349	8.1916	–12.508	–8.6507
3.90	4.9935	4.4522	–1.0309	–1.9467	6.30	21.170	8.2353	–13.391	–9.0093
					6.40	21.995	8.2656	–14.310	–9.3701
4.00	5.4504	4.6844	–1.2357	–2.1509	6.50	22.823	8.2824	–15.265	–9.7329
4.10	5.9303	4.9137	–1.4614	–2.3645	6.60	23.651	8.2853	–16.256	–10.097
4.20	6.4330	5.1397	–1.7089	–2.5874	6.70	24.480	8.2741	–17.284	–10.462
4.30	6.9582	5.3619	–1.9792	–2.8195	6.80	25.306	8.2485	–18.349	–10.827
4.40	7.5053	5.5797	–2.2731	–3.0606	6.90	26.129	8.2082	–19.450	–11.192
4.50	8.0739	5.7927	–2.5916	–3.3105					
					7.00	26.947	8.1532	–20.587	–11.557

附表 VI 对 $s=\pm1$ 的角向函数

[634]

	$(a=0.95,\sigma=0.5)$				$(a=0.95,\sigma=0.25)$				
$\cos\theta$	S_{+1}	$\mathrm{d}S_{+1}/\mathrm{d}\theta$	S_{-1}	$\mathrm{d}S_{-1}/\mathrm{d}\theta$	$\cos\theta$	S_{+1}	$\mathrm{d}S_{+1}/\mathrm{d}\theta$	S_{-1}	$\mathrm{d}S_{-1}/\mathrm{d}\theta$
0.96	0.484864	1.566731	0.007161	0.074963	0.96	0.457337	1.491370	0.007979	0.083382
0.92	0.659681	1.363899	0.020161	0.147218	0.92	0.624867	1.317715	0.022405	0.163014
0.88	0.776809	1.171990	0.036860	0.216699	0.88	0.738909	1.151512	0.040852	0.238847
0.84	0.861868	0.990669	0.056467	0.283339	0.84	0.823242	0.992645	0.062411	0.310830
0.80	0.925258	0.819615	0.078507	0.347065	0.80	0.887456	0.841005	0.086531	0.378909
0.76	0.972562	0.658514	0.102647	0.407804	0.76	0.936665	0.696481	0.112820	0.443033
0.72	1.007246	0.507061	0.128628	0.465477	0.72	0.974032	0.558966	0.140974	0.503147
0.68	1.031673	0.364960	0.156242	0.520003	0.68	1.001698	0.428355	0.170746	0.559195
0.64	1.047558	0.231925	0.185310	0.571297	0.64	1.021213	0.304541	0.201921	0.611121
0.60	1.056202	0.107677	0.215674	0.619269	0.60	1.033749	0.187424	0.234314	0.658866
0.56	1.058631	–0.008053	0.247191	0.663826	0.56	1.040229	0.076902	0.267754	0.702373
0.52	1.055674	–0.115529	0.279731	0.704873	0.52	1.041399	–0.027125	0.302086	0.741582
0.48	1.048019	–0.215005	0.313168	0.742307	0.48	1.037877	–0.124754	0.337162	0.776430
0.44	1.036245	–0.306726	0.347384	0.776025	0.44	1.030183	–0.216082	0.372844	0.806858
0.40	1.020847	–0.390932	0.382264	0.805917	0.40	1.018765	–0.301203	0.408999	0.832799
0.36	1.002255	–0.467855	0.417693	0.831871	0.36	1.004013	–0.380210	0.445494	0.854192
0.32	0.980847	–0.537719	0.453558	0.853768	0.32	0.986270	–0.453195	0.482202	0.870968
0.28	0.956955	–0.600743	0.489747	0.871487	0.28	0.965842	–0.520248	0.518996	0.883063
0.24	0.930879	–0.657136	0.526143	0.884900	0.24	0.943003	–0.581457	0.555748	0.890406
0.20	0.902887	–0.707103	0.562631	0.893877	0.20	0.918004	–0.636910	0.592331	0.892930
0.16	0.873222	–0.750843	0.599087	0.898280	0.16	0.891073	–0.686692	0.628612	0.890563
0.12	0.842106	–0.788545	0.635389	0.897970	0.12	0.862419	–0.730888	0.664460	0.883233
0.08	0.809744	–0.820397	0.671403	0.892799	0.08	0.832239	–0.769579	0.699739	0.870867
0.04	0.776324	–0.846577	0.706995	0.882617	0.04	0.800714	–0.802849	0.734306	0.853390
0.00	0.742020	–0.867258	0.742020	0.867266	0.00	0.768015	–0.830776	0.768015	0.830727

最后, 附表 VII 列出属于对不同自旋和 l、m 值的角向函数的特征值 λ: 对 $s=2$ 和 $s=1$ 的是用珀勒斯和楚科尔斯基提供的数据计算, 而对 $s=1/2$ 的则是用佩基 (Page) 提供的类似数据.

[635]

附表 VII　对 $s=2$ 的特征值 λ

$a\sigma$	$l=2$ $m=2$	$l=2$ $m=1$	$l=2$ $m=0$	$l=2$ $m=-1$	$l=2$ $m=-2$
0	4.0000	4.0000	4.0000	+4.0000	+4.0000
0.2	5.3446	4.6839	4.0186	+3.3503	+2.6767
0.4	6.7137	5.4035	4.0740	+2.7330	+1.3717
0.6	8.1108	6.1600	4.1645	+2.1463	+0.08242
0.8	9.5395	6.9542	4.2873	+1.5889	−1.1935
1.0	11.004	7.7856	4.4387	+1.0601	−2.4580
1.2	12.508	8.6528	4.6136	+0.56000	−3.7124
1.4	14.056	9.5528	4.8056	+0.08978	−4.9576
1.6	15.654	10.481	5.0071	−0.34779	−6.1937
1.8	17.305	11.432	5.2089	−0.74819	−7.4199
2.0	19.014	12.397	5.4000	−1.1047	−8.6344
2.2	20.787	13.364	5.5682	−1.4081	−9.8344
2.4	22.630	14.321	5.6990	−1.6460	−11.016
2.6	24.546	15.252	5.7764	−1.8028	−12.173
2.8	26.542	16.136	5.7821	−1.8588	−13.298
3.0	28.623	16.949	5.6960	−1.7899	−14.383
3.2	30.794	17.665	5.4954	−1.5673	−15.417
3.4	33.059	18.252	5.1558	−1.1563	−16.387
3.6	35.425	18.673	4.6500	−0.5166	−17.278
3.8	37.896	18.885	3.9484	+0.3992	−18.072
4.0	40.476	18.842	3.0187	+1.6454	−18.750

附表 VII 续　对 $s=1$ 和 $s=1/2$ 的特征值 λ

$a\sigma$	$l=1.0$ $m=1.0$	$l=1$ $m=0$	$l=1.0$ $m=-1.0$	$l=2$ $m=-2$	$l=0.5$ $m=0.5$	$l=0.5$ $m=-0.5$
0	2.0000	2.0000	+2.0000	+6.0000	1.0000	1.0000
0.2	2.6189	2.0227	+1.4173	+5.0934	1.2908	+0.75658
0.4	3.2775	2.0905	+0.86643	+4.2389	1.6311	+0.55754
0.6	3.9787	2.2003	+0.3428	+3.4341	2.0228	+0.39903
0.8	4.7243	2.3477	−0.15866	+2.6762	2.4671	+0.27622
1.0	5.5150	2.5266	−0.64375	+1.9618	2.9658	+0.18321
1.2	6.3497	2.7294	−1.1187	+1.2872	3.5210	+0.11286
1.4	7.2255	2.9470	−1.5904	+0.6480	4.1362	+0.056690
1.6	8.1368	3.1685	−2.0664	+0.0392	4.8170	+0.0047234
1.8	9.0754	3.3816	−2.5547	−0.5451	5.5713	−0.054695
2.0	10.029	3.5724	−3.0641	−1.1114	6.4113	−0.13508
2.2	10.984	3.7253	−3.6040	−1.6671	7.3535	−0.25199
2.4	11.919	3.8232	−4.1844	−2.2206	8.4204	−0.42325
2.6	12.809	3.8478	−4.8163	−2.7814	9.6416	−0.66921
2.8	13.624	3.7791	−5.5110	−3.3602	11.0553	−1.01293
3.0	14.327	3.5960	−6.2811	−3.9688	12.709	−1.4805
3.2	14.874	3.2762	−7.1397	−4.6205	14.663	−2.1012
3.4	15.216	2.7961	−8.1007	−5.3300	16.990	−2.9080
3.6	15.291	2.1316	−9.1791	−6.1138	19.776	−3.9377
3.8	15.032	1.2574	−10.390	−6.9900	23.127	−5.2311

[636]

文献注释

处理自旋加权的球谐函数和椭球谐函数的文章是:

1. J. N. Goldberg, A. J. Macfarlane, E. T. Newman, *et al.*, *J. Math. Phys.*, 8, 2155–61 (1967).

2. R. A. Breuer, M. P. Ryan, Jr., and S. Waller, *Proc. Roy. Soc. (London)* A, 71–86 (1977).

3. E. D. Fackerell and R. G. Crossman, *J. Math. Phys.*, 18, 1849–54 (1977).

珀勒斯和楚科尔斯基已列表给出 λ 展开为 $a\sigma$ 的幂级数的系数, 分别对 $s=2$ (文献 4) 和 1 (文献 5):

4. W. H. Press and S. A. Teukolsky, *Astrophys. J.*, 185, Appendix C, 668 (1973).

5. S. A. Teukolsky and W. H. Press, ibid., 193, Table 2, 454 (1974).

对 $s=1/2$ 的 λ 类似幂级数展开的系数由佩基提供给本书作者.

后记

没有一种出类拔萃的美不给人以一定程度的陌生感.

—— 弗朗西斯 · 培根 (Francis Bacon)

美是各部分相互之间和部分对整体的固有和谐.

—— 维尔纳 · 海森伯 (Werner Heisenberg)

作者曾有机会问过亨利 · 摩尔 (Henry Moore), 应该怎样看雕塑: 是从远处还是从近旁? 摩尔的回答是, 最美妙的雕塑能够, 事实上也必须, 从所有距离上看, 因为在每个尺度上都会显示出新的美. 摩尔举了米开朗基罗的雕塑为例: 从匀称的整体直到精致的指甲. 自然界中黑洞的数学完美性, 也类似地由各部分相互之间和部分对整体的和谐中一定程度的陌生感而在各个层次上显示.

中英对照索引

索引页码为本书页边方括号中的页码, 对应英文原版书的页码

$\mathscr{D}_n, \mathscr{D}_n^\dagger$, 175, 383

　　相关引理　　lemmas concerning, 383-84

D 型时空　　type-D space-times, 59

　　对其的条件　　conditions for, 61-3

　　被满足:　　satisfied by:

　　克尔度规　　Kerr metric, 300

　　雷斯纳 – 诺兹特朗度规　　Reissner-Nordström metric, 225

　　史瓦西度规　　Schwarzschild metric, 135

　　对其中短程线运动的积分　　integral for geodesic motion in, 322

　　对其中零短程线运动的复数积分　　complex integral for null-geodesic motion in, 320

$\mathscr{L}_n, \mathscr{L}_n^\dagger$, 175, 383

　　相关引理　　lemmas concerning, 383-4

Geroch-Held-Penrose 形式　　Geroch-Held-Penrose formalism, 64, 429

$\mathscr{S}$ 函数　　$\mathscr{S}$-function, 466

　　对 $a = 0$ 的　　for $a = 0$, 501

　　对其的微分方程　　differential equation for, 470, 489

　　其表格　　tables of, 628, 631

$\mathscr{R}$ 函数　　$\mathscr{R}$-Function, 464, 465

　　对 $a = 0$ 的　　for $a = 0$, 501

　　对其的微分方程　　differential equation for, 469, 488

　　其表格　　tables of, 626, 627, 629, 630

X 和 Y 函数 (对轴对称时空的)　　X and Y functions (for axisymmetric space-times), 280

　　其变换性质　　transformation properties of, 281

A

爱因斯坦场方程 Einstein field-equations, 34

对非定常态轴对称时空的明晰形式 explicit forms for non-stationary axisymmetric space-times, 601-602

对球对称时空的明晰形式, 86 及以下 explicit forms for spherically-symmetric space-times, 86 et seq.

对轴对称时空的明晰形式 explicit forms for axisymmetric space-times, 274-277

爱因斯坦 – 麦克斯韦方程, 明晰形式对: Einstein-Maxwell equations, explicit forms for:

定常态轴对称时空的, 564 及以下 stationary axisymmetric space-times, 564 et seq.

简化到标准形式, 566 及以下 reduction to standard forms, 566 et seq.

黑洞集的 an assemblage of black holes, 588, 589-91

静态球对称时空的 static spherically-symmetric space-times, 206-7, 214

爱因斯坦张量 Einstein tensor, 31

另见爱因斯坦场方程 set also Einstein field-equations

其分量, 对定常态轴对称时空的 components of, for stationary axisymmetric space-times, 274, 275

其分量, 对非定常态轴对称时空的 components of, for non-stationary axisymmetric space-times, 141, 142, 602

B

巴丁 – 珀勒斯 – 楚科尔斯基不等式 Bardeen-Press-Teukolsky inequality, 371

伴随, 微分系统 Adjoint, differential systems, 153

其可简化性, 152 及以下 reducibility of, 152 et seq.

比安基恒等式: Bianchi identities:

定义 definition, 25, 26

独立的个数 number of independent, 33

纽曼 – 彭罗斯形式的, 48 及以下 in Newman-Penrose formalism, 48 et seq.

麦克斯韦张量的贡献 contributions to, by Maxwell tensor, 53

扰动理论中的 in perturbation theory, 606

四次形式的 in tetrad formalism, 39

线性化的 linearized, 447

已经线性化的 already linearized, 175, 241, 431, 581

彼得罗夫 D 型时空; 见 D 型时空 Petrov type-D space-times; see Type-D space-times

彼得罗夫分类, 58 及以下 Petrov classification, 58 et seq.

对不同类型的条件 conditions for different types, 61-2
变分方法: Variational methods:
对处理轴对称时空的, 614 及以下 for treatment of axisymmetric space-times, 614 et seq.
变分原理 Variational principle, 619
变换理论: Transformation theory:
对楚科尔斯基方程的 for Teukolsky equations, 400
对克尔扰动的 for Kerr perturbations, 502
对雷斯纳 – 诺兹特朗扰动的 for Reissner-Nordström perturbations, 245
对史瓦西扰动的 for Schwarzschild perturbations, 182
变量的分离 Separation of variables, 144, 147, 229, 231, 344, 386, 433, 464, 545
标量积 Scalar product, 29
并矢形式, 590 及以下 Dyad formalism, 538 et seq.
波动方程, 一维的, Wave equations, one-dimensional, 144, 150, 230, 235, 400, 503
另见变换理论 *see also* Transformation theory
相关定理, 161 及以下 theorem relating to, 161 et seq.

C

超辐射, 克尔时空中: Super radiance, in Kerr space-time:
对入射电磁波的 for incident electromagnetic-waves, 415, 419, 425
对入射引力波的 for incident gravitational-waves, 517, 520
另见霍金 – 哈特尔公式 *see also* Hawking-Hartle formula
其发生的条件 condition for occurrence of, 400, 415, 425
其缺失, 对入射狄拉克波的 absence of, for incident Dirac-waves, 558
其缺失, 对入射中微子波的 absence of, for incident neutrino-waves, 550
初值方程 Initial-value equations, 603
对非定常态轴对称扰动的, 604 及以下 for non-stationary axisymmetric perturbations, 604 et seq.
对准定常态轴对称扰动的 for quasi-stationary axisymmetric perturbations, 611
楚科尔斯基方程: Teukolsky equations:
对自旋 1 场的 for spin-1 fields, 386
对自旋 2 场的 for spin-2 fields, 434
其变换 transformation of, 397
楚科尔斯基函数: Teukolsky functions:
对其的积分等式 integral identities for, 487, 495-7, 501
其表格 tables of, 626-34
其相对归一化, s = 1 relative normalization of, s = 1, 392

其相对归一化, s = 2 relative normalization of, s = 2, 458
楚科尔斯基 – 斯塔罗宾斯基等式: Teukolsky-Starobinsky identities:
对自旋 1 场的, 386 及以下 for spin-1 fields, 386 et seq.
对自旋 2 场的, 436 及以下 for spin-2 fields, 436 et seq.

D

狄拉克方程 Dirac's equation, 543
对其的能量 – 动量旋量 energy-momentum spinor for, 559
简化到一维波动方程 reduction to one-dimensional wave-equations, 553
克尔几何中的 in Kerr geometry, 544
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 543
其分离, 克尔几何中的 separation of, in Kerr geometry, 546, 561
其中的守恒流 conserved current in, 553
在平直空间椭球坐标系中的分离 separation of in oblate-spheroidal coordinates, in flat space, 555
典则基 Canonical basis, 7
定常态轴对称时空: Stationary axisymmetric space-times:
X 和 Y 函数 X and Yfunctions, 280, 283
对度规的选择形式 chosen form for metric, 68
对其的基本方程 basic equations for, 274-5, 280
对其的黎曼张量 Riemann tensor for, 274
共轭度规 conjugate metrics, 276, 572
惯性系的拖曳 dragging of inertial frame, 69
规范的选择 choice of gauge, 278, 566, 584
动力学方程: Dynamical equations:
对非定常态轴对称扰动的 for non-stationary axisymmetric perturbations, 608
对准定常态轴对称扰动的 for quasi-stationary axisymmetric perturbations, 610, 611
度规扰动; 见克尔时空的扰动、雷斯纳 – 诺兹特朗时空的扰动、史瓦西时空的扰动 Metric perturbations; see Perturbations of Kerr space-time, Perturbations of Reissner-Nordström space-time, Perturbations of Schwarzschild space-time
度规张量: Metric tensor:
代数特别的 algebraically special, 58, 61
定义 definition, 26
对其的特别形式 special forms for, 68, 72, 85, 93, 205, 273, 277, 302, 564, 583, 588, 598
克尔 – 席尔德形式 Kerr-Schild form, 302

短程线 Geodesics, 20
类时的, 零的 time-like, null, 33
仿射参数化的 affinely parametrized, 20
其哈密顿量 Hamiltonians for, 96, 327
其拉格朗日量 Lagrangians for, 96, 224, 342
短程线方程 Geodesic equation, 20, 29, 30
其积分, 319 及以下 integrals of, 96, 97, 224, 319 et seq.
作为欧拉 – 拉格朗日方程的 as Euler-Lagrange equation, 29

E

恩斯特方程: Ernst equations:
对共轭度规的 for conjugate metrics, 285, 573
对有磁场的轴对称时空的 for axisymmetric space-times with electromagnetic fields, 570
对轴对称真空时空的 for axisymmetric-vacuum space-times, 284
其变换性质 transformation properties of, 285, 570

F

反射和透射问题: Problem of reflexion and transmission:
对克尔黑洞的: for Kerr black-hole:
对入射狄拉克波的 for incident Dirac-waves, 556
对入射电磁波的 for incident electromagnetic-waves, 410
对入射引力波的 for incident gravitational-waves, 514 et seq.
对入射中微子波的 for incident neutrino-waves, 548
对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 for Reissner-Nordström black-hole, 254
对史瓦西黑洞的, 163 及以下, 193 及以下 for Schwarzschild black-hole, 163 et seq., 193 et seq.
由复数势垒的, 410 及以下, 514 by complex potential-barriers, 410 et seq. 514
反射和透射系数 Reflexion and transmission coefficients, 164
对克尔黑洞的, 514 及以下 for Kerr black-hole, 514 et seq.
对入射电磁波的 for incident electromagnetic-waves, 416
以麦克斯韦标量和楚科尔斯基函数来表示的 expressed in terms of Maxwell scalars and Teukolsky functions, 418-19
对入射引力波的 for incident gravitational-waves, 519
以外尔标量和楚科尔斯基函数来表示的 expressed in terms of Weyl scalars and Teukolsky functions, 517-19
对入射中微子波的 for incident neutrino-waves, 550

其相等性, 对四个允许的势垒的 equality of, for four allowed potential barriers, 515
对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 for Reissner-Nordström black-hole, 255, 258
以外尔和麦克斯韦标量表示的 expressed in terms of Weyl and Maxwell scalars, 256
对其的积分方程 integral equations for, 170
对史瓦西黑洞的 for Schwarzschild black-hole, 165
以外尔标量表示的 expressed in terms of Weyl scalars, 196-8
其相等性, 对轴向和极向扰动的 equality of, for axial and polar perturbations, 164, 254
反射振幅 Reflexion amplitude, 164
相位差, 对轴向和极向扰动的 difference of phase, for axial and polar perturbations, 166, 254
方向导数 Directional derivatives, 36
克尔时空中的 in Kerr space-time, 383
史瓦西时空中的 in Schwarzschild space-time, 174
仿射联络 Affine connection, 16
另见联络一次型 *see also* Connection one-form
非定常态、非轴对称时空: Non-slationary, non-axisymmetric, space-times:
对度规的选择形式 chosen form for metric, 73
对其的黎曼张量分量 components of Riemann tensor for, 78, 79
非定常态轴对称时空 Non-stationary axisymmetric space-times, 70
对度规的简化形式, 598 及以下 reduced form for metric, 72, 139, 598 et seq.

G

哥尔德伯 – 萨赫定理 Goldberg-Sachs theorem, 62, 135, 300
葛根包尔函数 Gegenbauer functions, 144, 229, 253
共轭, 其运算: Conjugation, operation of:
对有电磁场的轴对称时空的 for axisymmetric space-times with electromagnetic fields, 572
对轴对称真空时空的 for axisymmetric-vacuum space-times, 276
共轭度规 Conjugate metrics, 276, 285, 572
观察, 一般的 Observations, general, 1, 198, 270, 427, 529, 583, 596, 637
惯性系 Inertial frame, 69
其拖曳 dragging of, 70, 142, 283, 289
光学标量, 56 及以下, 526 Optical scalars, 56 et seq., 526
规范自由度 Gauge freedom, 34
其选择 choice of, 68, 72, 93, 140, 275, 446, 566, 597-8, 620

H

哈密顿 – 雅可比方程 Hamilton-Jacobi equation, 344

黑洞解, 其稳定性 Black-hole solutions, stability of, 199, 262, 620

变分公式, 614 及以下 variational formulation, 614 et seq.

其 D 型特征 type-D character of, 63, 135, 238, 300, 596

回顾 Retrospect, 497

霍金 – 哈特尔公式 Hawking-Hartle formula, 526

J

积分等式 Integral identities, 487, 489, 495-6, 501

基: Bases:

对矢量空间的 for vector space, 5

对型的 for forms, 6

基矢: Basis vectors, 6:

另见基 *see also* Bases

纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 41

四次形式的 in tetrad formalism, 35

奇点: Singularity:

克尔时空的 in Kerr space-time, 309

雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 in Reissner-Nordström space-time, 214

裸的 naked, 375

史瓦西时空的 in Schwarzschild space-time, 92, 95

奇偶性, 扰动的 Parity, of perturbations, 203

另见轴向扰动、极向扰动 *see also* Axial perturbations, Polar perturbations

极向扰动 Polar perturbations, 142

对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 230

对其的特定积分 particular integral for, 235

对史瓦西时空的 for Schwarzschild space-time, 145

相关定理, 152 及以下 theorem relating to, 152 et seq.

对其的特定积分 particular integral for, 159

以轴向扰动表示的 expression in terms of axial perturbations, 162, 237

嘉当结构方程 Cartan's equations of structure, 22, 23

对特别情形的明晰形式 explicit forms for special cases, 75, 601

渐近行为: Asymptotic behaviours:

楚科尔斯基函数的 of Teukolsky functions, 417, 518

度规函数的 of metric functions, 70, 92, 289, 592

麦克斯韦标量的 of Maxwell scalars, 258, 409, 417-18

外尔标量的 of Weyl scalars,195-196, 256, 518, 522

降低指标 Lowering indices, 27
对旋量 for spinors, 534
结构常数 Structure constants, 38
Structure constants (continued)
对克尔时空的 for Kerr space-time, 449
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 45
四次形式的 in tetrad formalism, 39
近心点, 其进动 Perihelion, advance of, 108
静态黑洞: Static black-holes:
对其的一般观察 general observations on, 198, 270
另见扭曲的黑洞、雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞、史瓦西黑洞 *see also* Distorted black-holes, Reissner-Nordström black-holes, Schwarzschild black-holes
其集 an assemblage of, 592
静态轴对称时空 Static axisymmetric space-times, 583
另见外尔解 *see also* Weyl's solution

K

卡特定理: Carter's theorem:
从扰动理论导出的 derived from perturbation theory, 609
作为罗宾逊定理的特别情形 as special case of Robinson's theorem, 298
柯特维格 – 德弗雷斯方程 Korteweg-de Vries equation, 173, 203
柯西视界 Cauchy horizon, 205
克尔黑洞的 of Kerr black-hole, 313
雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 of Reissner-Nordström black-hole, 214
其穿越, 265 及以下, 270 crossing of, 265 et seq., 270
科腾 – 达波定理 Cotton-Darboux theorem, 70
可积条件 (克尔时空引力扰动中的) Integrability condition (in gravitational perturbations of Kerr spacetime), 457, 479
克尔度规 Kerr metric, 289
对其的霍金 – 哈特尔基 Hawking-Hartle basis for, 423
克尔 – 席尔德形式, 306 及以下 Kerr-Schild form, 306 et seq.
另见克尔时空 *see also* Kerr space-time
其 D 型特征 its type-D character, 300
其导出 derivation of, 286
其发现 discovery of, 302, 317
其共轭 conjugate of, 286
其唯一性 its uniqueness, 1, 292

其稳定性, 对轴对称扰动的 stability of, for axisymmetric perturbations, 620
克尔几何: Kerr geometry:
另见克尔度规、克尔时空 *see also* Kerr metric, Kerr space-time
其中的电磁波, 382 及以下 Electromagnctic waves in, 382 et seq.
另见克尔几何中的麦克斯韦方程 *see also* Maxwell's equations in Kerr geometry
其中的中微子波 neutrino waves in, 546
其中的自旋 1/2 粒子, 531 及以下 spin-1/2 particles in, 531 et seq.
克尔几何中的麦克斯韦方程 Maxwell's equations in Kerr geometry, 384
对矢量势的解 solution for vector potential, 395
其简化和分离 reduction and separation of, 385, 429
其解的完成 completion of solution of, 392
克尔 – 纽曼度规: Kerr-Newman metric:
另见克尔 – 纽曼时空 *see also* Kerr-Newman space-time
其 D 型特征 its type-D character, 579
其导出 derivation of, 573 et seq.
其发现 discovery of, 622
其共轭 conjugate of, 574-576
克尔 – 纽曼时空: Kerr-Newman space-time:
纽曼 – 彭罗斯形式描述 description in Newman-Penrose formalism, 579
其扰动 perturbations of, 580
克尔时空: Kerr space-time:
狄拉克方程的分离 separation of Dirac's equation, 544
对因果律的可能违反 possible violation of causality, 377
哈密顿 – 雅可比方程的分离 separation of Hamilton-Jacobi equation, 344
克尔几何中的电磁波传播; 见克尔几何中的麦克斯韦方程 propagation of electromagnetic waves in Kerr geometry; see Maxwell's equations in Kerr geometry
麦克斯韦方程的分离, 384 及以下 separation of Maxwell's equations, 384 et seq.
纽曼 – 彭罗斯形式描述 description in Newman-Penrose formalism, 299
其性质, 308 及以下 nature of, 308 et seq.
其引力扰动, 430 及以下 gravitational perturbations of, 430 et seq.
支配的方程组 systems of equations governing, 450-2
其中的环奇异性 ring singularity in, 309-10
其中短程线运动的追加积分 additional integrals of geodesic motion in, 324
支配外尔标量方程的分离 separation of equations governing Weyl scalars, 433
最大解析延伸, 313 及以下 maximum analytic extension, 313 et seq.

克尔时空的度规扰动, 430 及以下 Metric perturbations of Kerr space-time, 430 et seq.
问题的表述 statement of problem, 443
以基矢扰动表示的 expressed in terms of perturbations of basis vectors, 445-6
克尔时空的短程线: Geodesics in Kerr space-time:
一般处理, 342 及以下 general treatment, 342 et seq.
$a = M$ 情形 case of $a = M$, 357
$a^2 > M^2$ $a^2 > M^2$, 375
对因果律的违反 violation of causality, 377
负 r 区域的探索 exploration of domains of negative r, 357
类时短程线, 361 及以下 time-like geodesics, 361 et seq.
临界束缚的 marginally bound, 365
其图示 illustrations of, 365
零短程线, 347 及以下 null geodesics, 347 et seq.
偏振矢量沿其的传播 propagation of polarization vector along, 358
其图示 illustrations of, 354-7
运动常量 constants of motion, 327, 345, 367
支配 r 运动的方程, 350 及以下, 363 equations governing r-motion, 350 et seq., 363
支配 θ 运动的方程, 348 及以下, 362 equations governing θ-motion, 348 et seq., 362
主零迭合 principal null-congruences, 299-300, 349
在赤道面上的: in equatorial plane:
$a^2 > M^2$, 376 及以下 $a^2 > M^2$, 376 et seq.
类时短程线: time-like geodesics:
临界束缚的 marginally bound, 339
其图示 illustration of, 334
圆形的和相关的轨道, 334 及以下, 341 circular and associated orbits, 334 et seq., 341
零短程线: null geodesics:
临界轨道 critical orbits, 329, 341
其图示 illustrations of, 332
支配其的方程 equations governing, 328
克尔 – 时空的扰动 (纽曼 – 彭罗斯形式的): Perturbations of Kerr space-time (in Newman-Penrose formalism):
从其导出的积分等式 integral identities derived from, 487, 489, 495-6, 501
定义和引理 definitions and lemmas, 383, 432
规范的选择 choice of gauge, 434, 443

回顾 retrospect, 497
基本方程的解耦和分离 decoupling and separation of basic equations, 433, 464, 469-70, 529
另见可积条件、斯塔罗宾斯基常数 *see also* Integrability condition, Starobinsky constant
已经线性化的方程 equations already linearized, 431, 432
支配其的方程组 systems of equations governing, 450-2
最后的观察 a last observation, 529
克尔 – 席尔德度规 Kerr-Schild metrics, 302
克莱因佯谬 Klein paradox, 561
克里斯托费尔联络 Christoffel connection, 29
其推论, 30 及以下 consequences of, 30 et seq.
括号标记 Bracket notation, 442

L

朗斯基行列式 Wronskian, 164, 167, 194, 403, 552, 557
莱维 – 齐维塔符号 Levi-Civita symbol, 68, 534
雷杰 – 惠勒方程 Regge-Wheeler equation, 144
雷斯纳 – 诺兹特朗度规: Reissner-Nordström metric:
其导出 derivation of, 205, 214
雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞: Reissner-Nordström black-hole:
另见雷斯纳 – 诺斯特朗时空、柯西视界 *see also* Reissner-Nordström space-time, Cauchy horizon
其集, 极端的 an assemblage of, extreme, 593
其稳定性, 262 及以下 stability of, 262 et seq.
准正则模式 quasi-normal modes, 262
雷斯纳 – 诺兹特朗时空: Reissner-Nordström space-time:
短程线; 见短程线 geodesics; see Geodesics
纽曼 – 彭罗斯形式描述 description in Newman-Penrose formalism, 224
其扰动, 226 及以下 perturbations of, 226 et seq.
通过度规扰动的 via metric perturbations, 226
通过纽曼 – 彭罗斯形式的, 238 及以下 via Newman-Penrose formalism, 238 et seq.
其稳定性, 262 及以下 stability of, 262 et seq.
其性质, 209 及以下 nature of, 209 et seq.
最大解析延伸 maximum analytic extension, 212
雷斯纳 – 诺兹特朗时空的短程线: Geodesics in Reissner-Nordström space-time:
类时 time-like, 219

带电粒子的 of charged particles, 224
第一和第二类的 of first and second kind, 221
其图示 illustrations of, 222, 223
圆形轨道, 其稳定性 circular orbits, stability of, 220
零短程线 null geodesics, 216
第一和第二类的 of first and second kind, 217
临界轨道 critical orbit, 218
其图示 illustration of, 219
雷斯纳 – 诺兹特朗时空的扰动: Perturbations of Reissner-Nordström space-time:
简化到一维波动方程 reduction to one-dimensional wave-equations, 230, 234
另见轴向扰动、极向扰动 *see also* Axial perturbations, Polar perturbations
通过度规扰动的, 228 及以下 via metric perturbations, 228 et seq.
通过纽曼 – 彭罗斯形式的 via Newman-Penrose formalism, 238
方程的解耦 decoupling of equations, 243
支配其的方程组 equations governing, 228, 233, 242
垒穿透, 其问题 Barrier penetration, problem of, 163, 428
另见势垒、反射和透射问题 *see also* Potential barriers, Problem of reflexion and transmission
黎曼几何 Riemannian geometry, 28
黎曼张量, 其分量: Riemann tensor, components of:
对定常态轴对称时空的 for stationary axisymmetric space-times, 274
对非定常态、非轴对称时空的 for non-stationary, non-axisymmetric space-times, 78, 79
对非定常态轴对称时空的 (在一般规范里) for non-stationary axisymmetric space-times(in a general gauge), 599-601
对静态球对称时空的 for static spherically-symmetric space-times, 86, 87
对克尔时空的 for Kerr space-time, 291-292
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 215
对玛居姆达 – 帕帕培特罗度规的 for Majumdar-Papapetrou metric, 589
对史瓦西时空的 for SchwarzschiId space-time, 95
黎曼张量: Riemann tensor:
定义 definition, 23
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 42
其对称性 symmetries of, 30
其四次分量 tetrad components of, 37
李导数 Lie derivative, 15
与外部导数的关系 relation to exterior derivative, 16
李括号 Lie bracket, 14, 38

李微分 Lie differentiation, 14
里奇恒等式 Ricci identity, 24, 33
四次形式的 in tetrad formalism, 39
里奇恒等式: Ricci identities:
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 46-7
线性化的 linearized, 470
消元关系, 从其导出的 eliminant relations, derived from, 47-8
以四次基的旋转系数表示的 expressed in terms of rotation coefficients in a tetrad basis, 39
里奇旋转系数, 见旋转系数 Ricci rotation-coefficients; see Rotation coefficients
里奇张量 Ricci tensor, 25, 31
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 42
其分量: components of:
对定常态轴对称时空的 for stationary axisymmetric space-times, 274, 601, 602
对非定常态轴对称时空的 for non-stationary axisymmetric space-times, 141
联络一次型 Connection one-form, 17
特别情形 special cases, 75, 598
由度规导出的 derived from a metric, 28
零迭合 Null congruence,56
另见光学标量、主零迭合 *see also* Optical scalars, Principal null-congruence
其为短程的条件 conditions for being geodesic, 56
其为无切变的条件 conditions for being shear-free, 62
零四次基 Null-tetrad basis, 41
对克尔 – 纽曼时空的 for Kerr-Newman space-time, 579
对克尔时空的 for Kerr space-time, 299, 300
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 225
对史瓦西时空的 for Schwarzschild space-time, 135
路径长度 Path length, 27
罗宾逊定理, 292 及以下 Robinson's theorem, 292 et seq.
罗宾逊引理 Robinson's lemmas, 294

M

玛居姆达 – 帕帕培特罗解 Majumdar-Papapetrou solution, 591
麦克斯韦标量 Maxwell scalars, 51
对克尔 – 纽曼时空的 for Kerr-Newman space-time, 579
对雷斯纳 – 诺兹特朗扰动的, 252 及以下 for Reissner-Nordström

perturbations, 252 et seq
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 226
麦克斯韦方程: Maxwell's equations:
从规范的选择导出的 derived from choice of gauge, 435
对 D 型度规已经线性化的 already linearized for type-D metrics, 239
对定常态轴对称时空的 for stationary axisymmetric space-times, 226
线性化的 linearized, 227
对非定常态、非轴对称时空的 for non-stationary, non-axisymmetric space-times, 83
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 51-2
冒号导数 Colon derivative, 74, 81, 598
面积定理 Area theorem, 374, 524
另见超辐射 *see also* Super radiance

N

内在导数: Intrinsic derivative:
并矢形式的 in dyad formalism, 538
四次形式的 in tetrad formalism, 37
能层 Ergosphere, 316
扭率 Torsion, 21
扭率张量 Torsion tensor, 19, 22
扭曲的黑洞 Distorted black-holes, 583
其平衡条件 conditions for equilibrium of, 586
纽曼 – 彭罗斯形式, 40 及以下 Newman-Penrose formalism, 40 et seq.
对其的零基 null basis for, 41
对其的旋量基, 538 及以下 spinorial basis for, 538 et seq.

P

帕帕培特罗变换 Papapetrou transformation, 277
庞加莱引理 Poincaré's lemma, 12
泡利矩阵 Pauli matrices, 536, 539, 543
彭罗斯过程, 366 及以下 Penrose process, 366 et seq.
可逆的能量提取 reversible extraction of energy, 373
另见超辐射 *see also* Super radiance
偏心率 Eccentricity, 103
虚的 imaginary, 111, 115
平行位移 Parallel displacement, 19

Q

曲率 Curvature, 21

曲率型, 21 及以下, 601 Curvature forms, 21 et seq., 77, 601

S

散射 (S) 矩阵 Scattering (S) matrix, 168

对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 for Reissner-Nordström black-hole, 260

其么正性 unitarity of, 168

对克尔黑洞的 for Kerr black-hole, 419, 520

对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 for Reissner-Nordström black-hole, 260

对史瓦西黑洞的 for Schwarzschild black-hole, 197

时空: Space-times:

定常态轴对称的 stationary axisymmetric, 66

非定常态、非轴对称的 non-stationary, non-axisymmetric, 73

非定常态轴对称的 non-stationary axisymmetric, 71

静态轴对称的 static axisymmetric, 583

球对称的 spherically symmetric, 85

时空的轴对称扰动 Axisymmetric perturbations of space-times,140

另见雷斯纳 – 诺兹特朗时空的扰动、史瓦西时空的扰动 *see also* Perturbations of Reissner-Nordström space-time, Perturbations of Schwarzschild space-time

其变分公式 variational formulation of, 603

史瓦西度规: Schwarzschild metric:

其导出, 85 及以下, 93 derivation of, 85 et seq., 93

其发现 discovery of, 136

史瓦西黑洞: Schwarzschild black-hole;

另见史瓦西时空 *see also* Schwarzschild space-time

其稳定性 stability of, 199

其准正则模式 quasi-normal modes of, 201

史瓦西时空, 86 及以下 Schwarzschild space-time, 86 et seq.

克鲁斯卡尔坐标中的描述 description in Kruskal frame, 90

纽曼 – 彭罗斯形式描述 description in Newman-Penrose formalism, 134

其短程线 (类时) 96 及以下 geodesics (time-like) in 96 et seq.

另见短程线 *see also* Geodesics

其扰动, 139 及以下 perturbations of, 139 et seq.

另见史瓦西时空的扰动 *see also* Perturbations of Schwarzschild space-time

其性质, 90 及以下 nature of, 90 et seq.

史瓦西时空的短程线: Geodesics in Schwarzschild space-time:
类时: time-like:
第二类的 of second kind, 108, 113
第一类的 of first kind, 103, 113
对其的后牛顿近似 post-Newtonian approximation to, 107
径向 radial, 98
具有虚偏心率的 with imaginary eccentricities, 111, 115
开放轨道 unbound orbits, 113 et seq.
其分类, 101 及以下, 114 classification of, 101 et seq., 114
其图示 illustrations of, 116-21
束缚轨道, 100 及以下 bound orbits, 100 et seq.
圆形轨道, 其稳定性 circular orbits, stability of, 106
零短程线: null geodesics:
第二类的 of second kind, 133
第一类的 of first kind, 130
回避锥 cone of avoidance, 127
径向 radial, 123
具有虚偏心率的 with imaginary eccentricities, 133
临界轨道 critical orbits, 124
其图示 illustrations of, 128, 129
史瓦西时空的扰动, 139 及以下 Perturbations of Schwarzschild space-time, 139 et seq.
简化到一维波动方程 reduction to one-dimensional wave-equations, 144, 150
另见轴向扰动、极向扰动 *see also* Axial perturbations, Polar perturbations
通过度规扰动的, 142 及以下 via metric perturbations, 142 et seq.
通过纽曼 – 彭罗斯形式的, 174 及以下 via Newman-Penrose formalism, 174 et seq.
支配其的方程组 equations governing, 143, 148, 176
作为克尔时空的极限考虑 considered as a limit of Kerr space-time, 500
势垒, 复数的 Potential barriers, complex, 405, 507
势垒: Potential barriers:
对克尔黑洞的: for Kerr black-hole:
对入射狄拉克波的 for incident Dirac-waves, 555
对入射电磁波的 for incident electromagnetic-waves, 404
对入射引力波的 for incident gravitational-waves, 507
对入射中微子波的 for incident neutrino-waves, 548
对雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的: for Reissner-Nordström black-hole:
对极向扰动的 for polar perturbations, 236-7

对轴向扰动的 for axial perturbations, 236-7
对史瓦西黑洞的: for Schwarzschild black-hole:
对极向扰动的 for polar perturbations, 150, 151
对轴向扰动的 for axial perturbations, 145, 146
它们的共同形式 their common form, 160, 187, 199, 236, 270, 505
势散射, 其理论, 166 及以下 Potential scattering, the theory of, 166 et seq.
应用到雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞, 267 及以下 application to Reissner-Nordström black-hole, 267 et seq.
事件视界 Event horizon(s), 85
穿过其的电磁能量流 flow of electromagnetic energy across, 421
穿过其的能流的正定性, 对自旋 1/2 波的 positivity of energy flow across, for spin-1/2 waves, 558
穿过其的引力能量流 flow of gravitational energy across, 523
克尔黑洞的 of Kerr black-hole, 313
雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 of Reissner-Nordström black-hole, 214
史瓦西黑洞的 of Schwarzschild black-hole, 91
在黑洞集中的 in an assemblage of black holes, 596
双变换 Duality transfonnation, 590
双基 Dual basis, 6
双重变换 Dual transformations, 185, 199, 270
存在的条件 condition for occurrence, 186, 246
推广版本 generalized versions, 505
斯塔罗宾斯基常数: Starobinsky constant:
对自旋 1 场的 for spin-1 fields, 388, 391
对自旋 2 场的 for spin-2 fields, 437, 440
其实部和虚部 real and imaginary parts of, 463
在变换理论中出现的 as it occurs in transformation theory, 408, 506
四次变换, 53 及以下, 180, 240, 423, 434, 581 Tetrad transformations, 53 et seq., 180, 240, 423, 434, 581
到霍金 – 哈特尔基 to Hawking-Hartle basis, 423, 525
四次标架: Tetrad frame:
对非定常态时空的 for non-stationary space-times, 81
对轴对称时空的 for axisymmetric space-times, 69
其选择的自由度 freedom in choice of, 53, 240, 446, 581
四次分量 Tetrad components, 36
与张量分量的关系 relation to tensor components, 36
四次形式, 34 及以下, 81 Tetrad formalism, 34 et seq., 81

T

提升指标 Raising indices, 27
对旋量 for spinors, 534
透射振幅 Transmission amplitude(s) 164
对其的级数展开, 171 及以下 series expansion for, 171 et seq.
其相等的条件 condition for equality of, 173
其相等性, 对轴向和极向扰动的 equality of, for axial and polar perturbations, 164, 254

W

瓦尔德不等式 Wald inequality, 370
外部 (或楔形) 积 Exterior (or wedge) product, 11
外部微分 Exterior differentiation, 12
外尔标量 Weyl scalars, 43
对克尔扰动的, 431 及以下, 518-20 for Kerr perturbations, 431 et seq., 518-20
对雷斯纳 – 诺兹特朗扰动的, 249 及以下 for Reissner-Nordström perturbations, 249 et seq.
对史瓦西扰动的, 188 及以下 for Schwarzschild perturbations, 188 et seq.
以其表示的引力能量流 flux of gravitational energy expressed in terms of, 522
外尔标量 Ψ_2 Weyl scalar, Ψ_2
对克尔 – 纽曼时空的 for Kerr-Newman space-time, 580
对克尔时空的 for Kerr space-time, 302
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 225
对史瓦西时空的 for Schwarzschild space-time, 136
支配其的方程, 对 D 型时空的 equations governing, for type-D space-times, 319
外尔解 Weyl's solutions, 623
外尔张量 Weyl tensor, 31
以外尔标量表示的 expressed in terms of Weyl scalars, 44
微分几何, 定义 Differential geometry, definitions, 3-10
另见黎曼几何 *see also* Riemannian geometry
微分型 Differential forms, 7
沃尔克 – 彭罗斯定理 Walker-Penrose theorem, 320

X

相对论异常 Relativistic anomaly, 104
协变微分: Covariant differentiation:
旋量场的 of spinor fields, 539

张量场的, 16 及以下 of tensor fields, 16 et seq.
型的微积分, 10 及以下 Calculus of forms, 10 et seq.
旋量: Spinors:
狄拉克的相关课程 Dirac's lectures on, 561
定义 definition, 533
跷跷板 see-saw, 535
作为旗 as a flag, 537
旋量分析, 531 及以下 Spinor analysis, 531 et seq.
旋转, 基的 Rotations, of bases, 180, 240, 423, 434, 581
I、II、III 类的 of classes one, two, and three, 53
旋转系数 Rotation coefficients, 37
其反对称性 antisymmetry of, 37
其明晰表示 explicit expressions for, 82, 300
作为自旋系数的 as spin coefficients, 42
薛定谔波动方程; 见波动方程, 一维的 Schrödinger wave-equation; see Wave equations, one-dimensional
循环恒等式 Cyclic identity, 26, 290

Y

雅可比恒等式 Jacobi identity, 15, 26
伊斯列定理 Israel's theorem, 299.
引力波: Gravitational waves:
另见反射和透射问题 *see also* Problem of reflexion and transmission
线性化理论 linearized theory, 521
引力扰动; 见克尔时空的扰动、史瓦西时空的扰动 Gravitational perturbations; see Perturbations of Kerr space-time, Perturbations of Schwarzschild space-time
影子规范 Phantom gauge, 180, 241
导致麦克斯韦方程 leading to Maxwell's equations, 435
对克尔 – 纽曼扰动的适用性 appropriateness for Kerr-Newman perturbations, 582
宇宙监督 Cosmic censorship, 375
约斯特函数 Jost function, 169

Z

泽里立方程 Zerilli equation, 150
轴对称时空; 见非定常态轴对称时空、定常态轴对称时空 Axisymmetric space-times; see Non-stationary axisymmetric space-times,

Stationary axisymmetric space-times
轴向扰动 Axial perturbations, 142
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 228
对史瓦西时空的, 143 及以下 for Schwarzschild space-time, 143 et seq.
以极向扰动表示的 expressed in terms of polar perturbations,162, 237
主零迭合 Principal null-congruences, 59
克尔时空中的 in Kerr space-time, 299, 349
雷斯纳 – 诺兹特朗时空中的 in Reissner-Nordström space-time, 216
史瓦西时空中的 in Schwarzschild space-time, 124, 135
转变系数 Conversion coefficient, 261
转换关系 Commutation relations, 38
另见结构常数 *see also* Structure constants
纽曼 – 彭罗斯形式的 in Newman-Penrose formalism, 45
线性化的 linearized, 448
准正则模式: Quasi-normal modes:
克尔黑洞的 of Kerr black-hole, 528
雷斯纳 – 诺兹特朗黑洞的 of Reissner-Nordström black-hole, 261
史瓦西黑洞的 of Schwarzschild black-hole, 201
自伴随 Self adjoint, 615, 621
自旋系数 Spin coefficients, 540
对克尔时空的 for Kerr space-time, 300
对雷斯纳 – 诺兹特朗时空的 for Reissner-Nordström space-time, 215
对史瓦西时空的 for Schwarzschild space-time, 135, 175
其旋量定义 spinorial definition, 540
其对称性 symmetry of, 541
以旋转系数表示的 expressed in terms of rotation coefficients, 42

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　（010）58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真　（010）82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码　100120

本书作者苏布拉马尼扬·钱德拉塞卡（Subrahmanyan Chandrasekhar），美籍印度裔物理学家和天体物理学家，因在星体结构和演化的研究而与另一位天体物理学家威廉·艾尔弗雷德·福勒共同获得 1983 年诺贝尔物理学奖。

本书是钱德拉塞卡的重要著作，前两章详细介绍了广义相对论中在黑洞研究方面用得比较多的数学技术，特别是纽曼 – 彭罗斯形式的引入和应用。然后介绍了史瓦西、RN 和克尔三种最为典型的黑洞和它们的时空结构，以及纽曼 – 彭罗斯形式在其中的应用。第四章则是以史瓦西黑洞为例介绍了黑洞的微扰理论。接下来则是针对宇宙中黑洞最普遍的形式——克尔黑洞的一系列讨论，首先是克尔时空中的测地线方程，之后则是分别详细用纽曼 – 彭罗斯形式讨论了克尔背景下的电磁场、引力场和旋量场的运动方程。最后一章则是简要引入了克尔 – 纽曼黑洞并且介绍了一般性的方法。纽曼 – 彭罗斯形式是弯曲时空中求解场的运动方程时能够使人们对方程分离变量的非常重要的一项技术，对人们研究黑洞的性质非常重要。这是一本研究黑洞时空，特别是黑洞微扰理论的一本经典著作，适合高年级本科生、研究生和研究黑洞物理的研究人员学习和参考。

学科类别：物理

ISBN 978-7-04-049097-8

9 787040 490978 >

定价 129.00元

academic.hep.com.cn

本书微信、微博

微信号：ldjjhwx

@朗道集结号