1945年诺贝尔物理学奖获得者
WOLFGANG PAULI 著作选译

泡利

PAULI LECTURES ON PHYSICS
VOLUME 1, 2, 3

泡利物理学讲义

（第一、二、三卷）

W. 泡利 著　洪铭熙 苑之方 译　留润州 校

高等教育出版社







1945年诺贝尔物理学奖获得者

WOLFGANG PAULI 著作选译

PAULI LECTURES ON PHYSICS

VOLUME 1, 2, 3

PAOLI WULIXUE JIANGYI

泡利物理学讲义

（第一、二、三卷）

W. 泡利 著　洪铭熙 苑之方 译　留润州 校

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

泡利物理学讲义．第1~3卷／（美）泡利（Pauli, W.）著；洪铭熙，苑之方译．— 北京：高等教育出版社，2014.8

书名原文：Pauli lectures on physics

ISBN 978-7-04-040409-8

Ⅰ.①泡… Ⅱ.①泡… ②洪… ③苑… Ⅲ.①理论物理学－高等学校－教材 Ⅳ.①O41

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第147362号

策划编辑 王 超	责任编辑 焦建虹	封面设计 王 洋	版式设计 余 杨
插图绘制 杜晓丹	责任校对 张小镝	责任印制 韩 刚	

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社 址	北京市西城区德外大街4号	网 址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印 刷	涿州市星河印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印 张	23.5	版 次	2014年8月第1版
字 数	440千字	印 次	2014年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	69.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

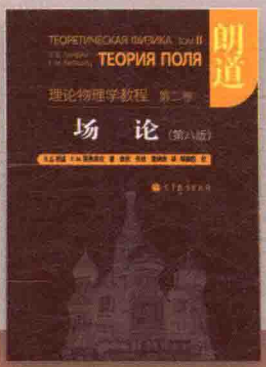
物料号 40409-00



诺贝尔物理学奖获得者著作选译



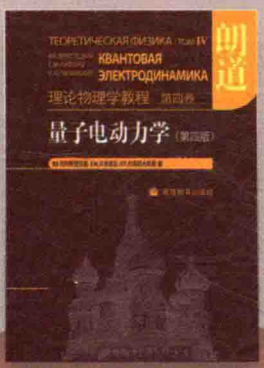
ISBN: 978-7-04-020849-8



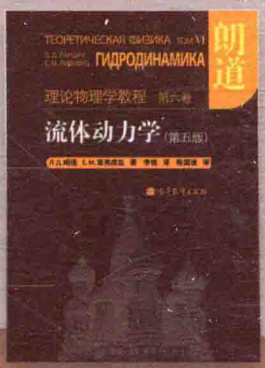
ISBN: 978-7-04-035173-6



ISBN: 978-7-04-024306-2



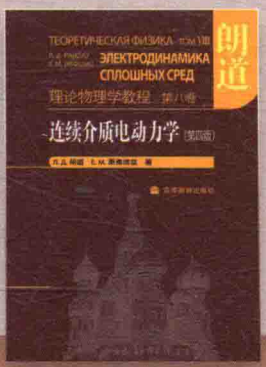


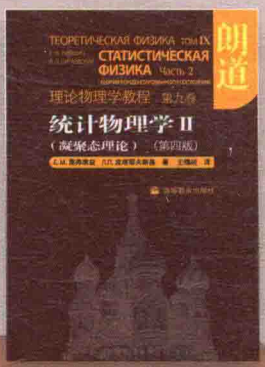


ISBN: 978-7-04-030572-2

ISBN: 978-7-04-034659-6







ISBN: 978-7-04-031953-8

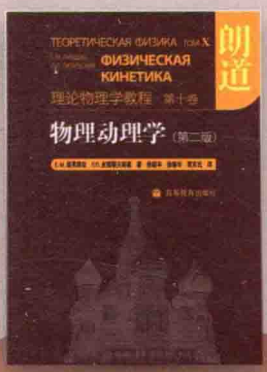
ISBN: 978-7-04-024160-0

有ISBN号的截至本书出版时已出版

本系列图书微信、微博

微信号：ldjjhwx

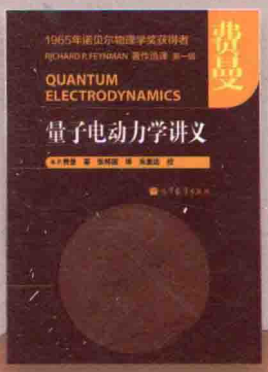
@朗道集结号



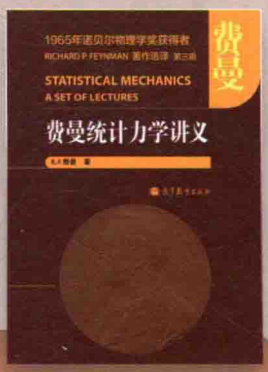




ISBN: 978-7-04-023069-7







ISBN: 978-7-04-036960-1







ISBN: 978-7-04-039141-1

再 版 说 明

本书为1981年中文版的重排版。利用重排机会,对全书进行了一些修改:根据有关规定修改了外国人名及物理学名词的中译名;根据国家有关标准规范使用了物理量的单位符号。

前　言

人们常说：科学方面的教科书很快会过时。可是泡利讲义，尽管其中一些是早在二十年以前讲授的，为什么现在还要出版呢？理由是简单的，因为泡利介绍物理学的方式一点也不过时。他的论量子力学基础的著名论文发表在1933年德国百科全书《物理学手册》中[①]。二十五年后，该文几乎未作改动地重新出现在新版本[②]中，而投给这部百科全书的大多数文稿却必须完全重写。出现这种惊人事实的原因就在于泡利的风格，在论文的透彻性和影响力方面，他的这种风格是与论文主题的伟大相称的。科学写作的风格是一种品质，这种品质当今正濒于消失。快速出版的压力是如此之大，以致人们把草率地写成的文章和书籍匆忙付印，而很少关心概念的细心阐述。目前，数学和仪器手段的技巧变得又复杂又困难，人们写作与学习上所花费的精力，大部分是用于获得这些技巧，而不是用于深入吃透重要概念。物理学的主要概念往往消失在数学论证的茂密丛林之中。这种情况并非一定如此。泡利讲义说明怎样才能够清晰地并用优美的数学形式把物理概念表达清楚，而不致被形式化的专门技巧所掩盖。

从字面的意义上讲，泡利不是一个有才艺的演说家。人们跟上他的课程往往是不容易的。但是，当他的思想脉络和他的逻辑结构变得明显时，注意听讲的追随者就会对主要概念留下一个新的更深刻的理解，并对精美的推理结构留下一个更透彻的领悟，这个精美的推理结构就是理论物理。这套讲课笔记不是他本人而是他的一些同事写的，这一事实，并不降低它们的价值。在其概念结构和数学严谨上，它们体现了大师的特点。只是间或在某些地方人们确实没见到大师的一些词语和说明。除了场的量子化那些讲义，人们对他的讲义并无过时之感，在场的量子化讲义中，有些概念的表达方式，今天对有些

① 这部《物理学手册》(*Handbuch der Physik*) 是 H. Geiger 和 K. Scheel 主编的。泡利这篇论文《*Dieallgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*》曾载入该手册第二版，第二十四卷，第一分册 (1933)。——中译者注

② 泡利这篇论文的新版本载入 S. Flügge 主编的《*Handbuch der Physik* (*Encyclopedia of physics*)》第五卷，第一分册 (1958)。——中译者注

人来说，也许显得陈旧。尽管如此，由于这些讲义的简洁性和直截了当地逼近中心问题，它们对现代的学生来说该是有益的。

愿本卷作为一个范例，说明创建理论物理学的伟人之一，是怎样表达和讲授理论物理学概念的。

维克托 F. 外斯科夫
于麻省坎布里奇市

目　　录

第一卷　电动力学

英译本主编序言 **2**

电动力学的历史发展和现代问题的概观 **3**

第一章　静电学和静磁学 **5**

§1. 库仑定律 5

§2. 点电荷的场 7

§3. 体电荷和面电荷 12

§4. 静电场的能量 15

§5. 例: 球对称的电荷分布 19

§6. 静电场方程同库仑定律的等效性的证明 21

§7. 电介质, 唯象的处理 23

§8. 电介质现象的电子论诠释 26

§9. 电势问题 31

§10. 曲线坐标 34

§11. 电势问题求解的几个例子 35

§12. 静磁学 42

§13. 单位和量纲 44

第二章　稳恒电流 **46**

§14. 稳恒电流理论 46

§15. 稳恒电流的磁场 51

§16. 闭合电流回路的磁场与磁偶极子分布的磁场的等效性 56

§17. 有质动力 59

§18. 电力和磁力的作用和反作用原理. 麦克斯韦应力张量 62

第三章 准静态 (电磁) 场 · · · · · **67**
§19. 法拉第电磁感应定律 · · · · · 67
§20. 电流系的能量 · · · · · 69
§21. 电路中的非稳恒电流 · · · · · 71
§22. 趋肤效应 · · · · · 78
§23. 运动导体的电磁感应定律 · · · · · 80

第四章 迅变 (电磁) 场 · · · · · **83**
§24. 麦克斯韦方程组 · · · · · 83
§25. 真空中的电磁波 · · · · · 86
§26. 能量守恒和动量守恒 · · · · · 89
§27. 有质介质中的电磁波 · · · · · 94
§28. 电磁波的辐射 · · · · · 94
§29. 匀速运动的点电荷的场 · · · · · 108
§30. 辐射阻尼 · · · · · 110

补充书目 · · · · · **115**
附录 英译本主编评注 · · · · · **116**
索引 (汉－英) · · · · · **118**

第二卷 光学和电子论

英译本主编序言 · · · · · **128**

第一章 几何光学 · · · · · **129**
§1. 费马原理 · · · · · 129
§2. 马吕斯和惠更斯原理. 成像定律 · · · · · 134
§3. 哈密顿理论 · · · · · 139
§4. 光度学 · · · · · 147

第二章 干涉和衍射理论 · · · · · **149**
§5. 波的运动学 · · · · · 149
§6. 折射, 反射, 干涉 · · · · · 158
§7. 衍射理论 · · · · · 162

第三章　麦克斯韦理论 · · · · · 178
§8. 理论基础 · · · · · 178
§9. 非吸收介质 (菲涅耳公式) · · · · · 181
§10. 吸收介质 (金属光学) · · · · · 185
§11. 驻波 · · · · · 189

第四章　晶体光学 · · · · · 190
§12. 波法线的关系 · · · · · 190
§13. 光线变量 · · · · · 195
§14. 奇异性 · · · · · 202
§15. 光进入和离开晶体 · · · · · 206

第五章　分子光学 · · · · · 209
§16. 无阻尼振子的色散 · · · · · 209
§17. 阻尼振子的色散 · · · · · 215
§18. 光的散射 · · · · · 218
§19. 旋光性 · · · · · 226
§20. 磁光学 · · · · · 233

补充书目 · · · · · 237
附录　英译本主编评注 · · · · · 238
索引 (汉－英) · · · · · 240

第三卷　热力学和气体分子运动论

英译本主编序言 · · · · · 250

第一章　基本概念和热力学第一定律 · · · · · 251
§1. 热力学变量 · · · · · 251
§2. 温度的概念 · · · · · 251
§3. 热量 · · · · · 252
§4. 热力学第一定律 · · · · · 253
§5. 热力学的态变化 · · · · · 255
§6. 热力学第一定律的数学表述 · · · · · 256
§7. 热力学第一定律的应用 · · · · · 257

第二章 热力学第二定律 · · · · · **263**
§8. 热力学第二定律的表述 · · · · · 263
§9. 热力学第二定律的定量预示 · · · · · 264
§10. 热力学第二定律的数学表述 · · · · · 268
§11. 喀拉西奥多里的热力学公理基础 · · · · · 269
§12. 自由能 · · · · · 275
§13. 吉布斯函数 · · · · · 277
§14. 理想气体混合物的熵 · · · · · 283
§15. 吉布斯佯谬 · · · · · 285
§16. 关于混合定律的记注 · · · · · 286

第三章 平衡 · · · · · **289**
§17. 范霍夫反应匣 · · · · · 289
§18. 吉布斯变分法 · · · · · 304
§19. 应用 (初级变分) · · · · · 304
§20. 关于二级变分的注释 · · · · · 313
§21. 温差电问题 · · · · · 316

第四章 能斯特热定理 · · · · · **319**
§22. 能斯特热定理 · · · · · 319
§23. 绝对零度的不可达到性 · · · · · 321

第五章 气体分子运动论 · · · · · **322**
§24. 压强的计算 · · · · · 322
§25. 速度分布 · · · · · 326
§26. 平均自由程和碰撞 · · · · · 329
§27. 输运现象 ($d \gg l$) · · · · · 332
§28. 输运现象 ($l \gg d$) · · · · · 337
§29. 位力的概念 · · · · · 342
§30. 应用 · · · · · 343

补充书目 · · · · · **348**
附录 英译本主编评注 · · · · · **350**
索引 (汉－英) · · · · · **352**

第一卷

电动力学

洪铭熙　苑之方　译

留润州　校

英译本主编序言

如本书《电动力学的历史发展和现代问题的概观》中所说，同他的老师 A. 索末菲相反，泡利选用归纳法教授电动力学，而索末菲却愿采用麦克斯韦方程组的公理表述法 (参看 A. 索末菲，电动力学中序言，A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, Academic Press, New York, 1952)。这种态度是泡利的特点，也能在这套书的其他讲义中看到 (除场的量子化外)。这表达了泡利对科学概念和思想的形成以及建立在它们之上的逻辑结构 (这是一个卓越的历史过程) 的强烈兴趣 (参看，例如泡利的论文《原型概念对开普勒的自然科学理论形成的影响》[①]中的导言，刊登在《*Naturerklärung und Psyche*》中，Rascher Verlag, Zürich, 1952)。

由于特别注意理论逻辑结构，这份讲义仍然是现今学生学习的有益的原始资料。戴隆 (A. Thellung) 的笔记很好地反映了泡利讲授的简洁风格；英文译本是以它为依据的。这些笔记于 1949 年在苏黎世联邦工业大学 (ETH) 出版时，戴隆还是泡利指导下的一名哲学博士学位研究生。后来，他成为泡利的助教，而现在是苏黎世大学理论物理学教授。他的笔记谨慎而准确 (这是戴隆的特点)，使得译者的工作变得比较容易。

在泡利看来，电动力学的中心问题是场的概念和能用精细结构常数 $e^2/(mc) = 1/137$ 来表达的基本电荷的存在。可以从本书附录中汇集的泡利著作的目录中看出，这个基本的纯数字曾深深地迷住了泡利。对泡利来说，关于数字 137 的解释是场论是否成功的试金石。可是至今还没有一种理论经得起这一考验。泡利去世时，数字 137 升华为一个不可思议的符号。当我在医院中看望泡利时，他关切地问我是否已注意到他的房间号码：137! 几天以后，他就在这个房间里与世长辞了。

查理 P. 安兹

日内瓦，1971 年 11 月 17 日

① 参看 *R. Kronig* 和 *V. F. Weisskopf* 主编的《*Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*》第一卷 (1964)，第 1023 页。——中译者注

电动力学的历史发展和现代问题的概观

电动力学是理论物理中比较年轻的分支。作为场物理学的一个范畴，它近来已变得十分重要。与粒子物理学相反，场物理学处理的是时空的连续函数（例如，弹性理论、流体力学等）。因为电具有原子性结构，所以粒子物理学在电动力学中亦起到一定的作用。

关于场的概念要追溯到法拉第；他用一种没有严格数学公式的直观方法，并引入力线的概念。麦克斯韦使理论获得严格的数学形式。这一理论所预言的电磁波的存在，后来由赫兹用实验方法证实了。光只不过是某一波长范围内的电磁波，因此可以把光学看作是电动力学的一个分支。

连续介质力学给场物理学提供了模型。于是，用类推法，人们曾相信光的传播需要“以太”，并且试图把光的传播现象归结为这种以太的力学性质所致（机械的自然观：自然界的所有定律都应在力学的基础上来解释）。麦克斯韦，玻耳兹曼和其他人设想出所谓以太发动机。然而，人们很快就认识到，所有这些理论都是很不自然和复杂的。这样，人们逐渐地放弃了这种方法，而物理场的概念便牢固地建立起来。然而，电磁场只能用所谓检验电荷来测量，所以，就同粒子物理学的概念发生了联系。

人们已逐渐明了，以太不具有任何原子性结构（就像人们对弹性介质所认为的），而且运动的概念只能应用于检验电荷，而不能应用于以太本身。后一事实曾导致相对论的形成。

如我们从电在本性上具有原子性这个事实所能看出的，认为场物理学胜过了粒子物理学的这种观点无论如何绝不是正确的。电荷的载体是负电子和正质子。此外，能用适当的方法人为地产生带正电的电子（正电子）、带负电的反质子以及其他带正电荷和负电荷的粒子（介子和超子）。所有电荷都是基本电荷的整数倍。

H. A. 洛伦兹和 L. 拉莫尔把用所谓“物质常数”表征的宏观物体电性质的差异追溯到真空中的麦克斯韦方程组和电荷的载体（电子论）。这样，他们大大简化了理论基础，已经证明这给相对论带来了特殊的方便。另一方面，还不能解释为什么电荷只以某一电量的整数倍出现的事实。迄今为止，还没有能够用

任何方式解释基本电荷的存在。这仍然是理论物理中尚待解决的问题。在麦克斯韦–洛伦兹理论以及在当代量子场论中，电子本身仍然是陌生者 [A–1]①。

场–粒子的描述提出了一个概念性的问题：虽然无须任何检验电荷就能用数学方法描述场，然而没有检验电荷却不能测量它。另一方面，检验电荷本身也产生场。无论如何，用检验电荷测量外场的同时，又确定这电荷本身所产生的场，那是不可能的。因此，就存在着某种二象性。所以，就物理学的认识论来说，电动力学是具有重大意义的 [A–1]。

电动力学能用两种表达方式：

1. 演绎法：从麦克斯韦方程组出发，再研究特殊事例。

2. 归纳法：从实验得到的基本定律出发，最终建成麦克斯韦方程组。这种方式较接近于历史的发展。

在本讲义中，我们将采用第二种方式。

① 注释 [A–1] 至 [A–4] 见附录。

第一章

静电学和静磁学

§1. 库仑定律

我们假定读者已经由实验物理学熟悉了导体和绝缘体的概念. 我们想在这几节中只考察其线度远小于它们的相对间距的那些带电体. 于是, 我们可以假定它们的电荷集中在某些点上 (点电荷).

这样的两个点电荷间的力是有心力, 并且满足作用和反作用原理 (作用 = 反作用). 这种力既可能是引力, 也可能是斥力, 它们的量值由下式给出

$$K = \frac{|e_1 \cdot e_2|}{r^2},$$

式中 e_1 和 e_2 是电荷的电量, 而 r 是它们的间距. 用矢量表示法 (图 1.1), 电荷 e_1 作用在电荷 e_2 上的力为

$$\boldsymbol{K}_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{n}_{12} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^3}(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) = -e_1 e_2 \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2}\frac{1}{r_{12}}, \tag{1.1}$$

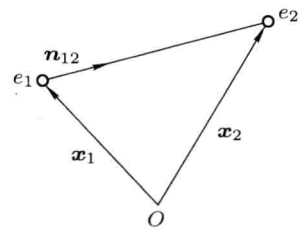


图 1.1

式中 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 为 e_1 和 e_2 的位矢, $r_{12} = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|$ 为 e_1 与 e_2 的间距, $\boldsymbol{n}_{12} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)/r_{12}$ 为由 e_1 指向 e_2 的单位矢. 这一从经验获得的关系称为库仑定律.

我们还必须附加由实验推论出来的另外两个事实:

1. 力的叠加. 电力按矢量加法定律 (平行四边形法则) 相加

$$\boldsymbol{K}_{1+2,3} = \boldsymbol{K}_{1,3} + \boldsymbol{K}_{2,3}.$$

2. 电荷守恒. 既不能产生也不能消灭的电荷, 按代数加法相加.

由于库仑定律中的各个量都可以改变, 因而库仑定律本身就内含地对电荷提供了一个充分的定义.

例如, 我们定义: (a) 倘若二电荷中的每一电荷对第三个电荷产生相同的效应, 则此二电荷相等; (b) 如果电荷 e_1 对第三个电荷 e_3 产生的效应同两个电量皆为 e_2 的电荷对 e_3 所产生的效应相同, 则电荷 e_1 是电荷 e_2 的两倍. 当然, 这两个电荷 (e_2) 间的距离必须远小于它们同 e_3 间的距离. 电荷既可能是正的, 也可能是负的. 同号电荷相斥, 异号电荷相吸.

我们也可以考察一个确定的电荷 e_1 作用在不同的电荷 e_2 上的各个力, 反之亦然. 这两种情况构成了电场强度定义的基础: 对一给定的 e_1, 其作用在检验电荷 e_2 上的力为

$$\boldsymbol{K}_2 = e_2\boldsymbol{E}. \tag{1.2}$$

式中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与 e_2 无关.

在由位于 Q 点的单个点电荷 e_Q 所产生的电场中, P 点的电场强度由库仑定律给出:

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e_Q}{r_{QP}^2}\boldsymbol{n}_{QP} = \frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q) = -e_Q\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_P}\frac{1}{r_{QP}}, \tag{1.3}$$

式中源点 Q 是固定的, 而场点 P 则是任意的. 对于几个点电荷的情况, 根据叠加原理求得

$$\boldsymbol{E}_P = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^2}\boldsymbol{n}_{QP} = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_P}\sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}}. \tag{1.4}$$

在任意电荷分布的普遍情况下, 电场强度也由下式定义

$$\boldsymbol{K} = e\boldsymbol{E}. \tag{1.5}$$

式中 $\boldsymbol{K}$ 为作用在检验体上的力; e 为检验体所带的电量, 它只与检验体本身有关; $\boldsymbol{E}$ 为电场强度, 与检验体无关, 而只取决于场.

很重要的一点是, 我们必须假定检验电荷的存在对场并无干扰, 或对场的影响小得可以略去. 在宏观静电学中这并不产生困难, 因为实际上可以使检验电荷的电量 e 任意地小. 再者, 在场源是固定的点电荷或准点电荷的情况中, e 甚至可能是任意地大. 另一方面, 如果场源是扩展的带电导体表面, 那么大电

量的检验电荷会引起场源电荷的位移, 从而改变了电场 (参见 §11). 同宏观静电学相反, 在原子范畴中却遇到巨大的困难. 在此, 由于不能使检验电荷任意微小, 加之场源不是静止的, 所以不能忽略检验电荷对场的反作用. 这表明在场的概念中有一定的困难 [A–1].

到此为止, 我们都是用粒子物理学的语言来描述电场. 在以后几节中, 我们要把由库仑定律所定义的电场看作一个独立的概念, 并研究它的性质.

§2. 点电荷的场

a. 场是保守的 (能量守恒)

从矢量分析知道, 这一性质可以由以下四个完全等效的表达式中的任一个来表示:

1. 对任意闭合曲线有

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0. \tag{2.1}$$

其物理意义为

$$e\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint \boldsymbol{K}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0,$$

即, 当带电粒子在电场中沿一个闭合路径运动一周时, 既不获得、也不损耗净功.

2. $\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 只取决于两端点 O 和 P 的位置 (图 2.1), 而与它们之间的路径无关. 由此不难证明这一积分必定具有如下形式

$$\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\varphi_P+\varphi_O. \tag{2.2}$$



图 2.1

证明: 我们定义 $\int_O^P \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=F(O,P)$. 于是, 对于任一点 P', 有

$$F(O,P')+F(P',P)=F(O,P)$$

或

$$F(O,P')-F(P,P')=F(O,P),$$

这是由于, 显然有 $F(P',P)=-F(P,P')$. 若保持 P' 固定, 则

$$F(O,P')=\varphi_O \quad 及 \quad F(P,P')=\varphi_P.$$

所以

$$\varphi_O-\varphi_P=F(O,P),$$

这就是所欲求的结果.

量 φ_P 称为 P 点的静电势. 它只被确定到相差一任意附加常数 (势的零点可任意选择).

3. $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$ (2.3)

或者表示为

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi;\quad \boldsymbol{E}=-\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}};\quad E_i=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad i=1,2,3.$$

4. $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0.$ (2.4)

场是无旋的. 或者表示为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E}=0;\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=0;$$

$\dfrac{\partial E_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial E_j}{\partial x_i}=0, i,j$ 循环.

根据斯托克斯定理:

$$\int_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_F \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f \tag{2.5}$$

(在右手坐标系中, 式中的法线方向与 C 的绕行指向必须保持如图 2.2 所示的关系), 表述 4 与能量定律的其他三种形式是等效的.

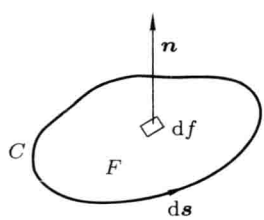


图 2.2

从上面四种表述中的任一种都可导出其他三种. 可以证明, 它们对任何有心力都成立. 因此, 它们对有心力的有限和也成立, 从而对于点电荷系的场也是成立的.

由点电荷系所产生的电势为

$$\varphi_P = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}}. \tag{2.6}$$

此处, 我们已经选定了任意附加常数, 使得 $\varphi(\infty) = 0$. φ 的这一表达式的正确性能够通过构成它的梯度

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}_P \varphi = \sum_Q \frac{e_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q)$$

来证明 (微分是对 P 的坐标施行的; 场源保持固定).

由于表述 1、2、3 和 4 对任意势场都是成立的, 所以它们对电场 $\boldsymbol{E}$ 所能提供的论述比库仑定律所能作出的要少得多. 只当把它们同下述定律结合在一起时, 它们才与库仑定律等效.

b. 电通量. 高斯定律

1. 单个点电荷. 通过以点源为球心的球面的电通量 (图 2.3) 为

$$\oint_K E_n \mathrm{d}f = \int_K \frac{e}{r^2} r^2 \mathrm{d}\Omega = 4\pi e.$$

对所有球面, 不论其大小如何, 通量都相同. 推广到任意闭曲面, 不难看出

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = -\oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}f = \begin{cases} 4\pi e, & \text{若 } Q \text{ 位于曲面 } F \text{ 之内}, \\ 0, & \text{若 } Q \text{ 位于曲面 } F \text{ 之外}. \end{cases} \tag{2.7}$$

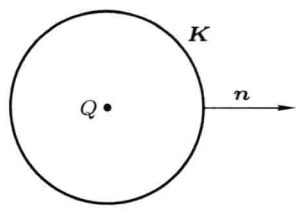


图 2.3

2. 多个点电荷. 在这种情况中,

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = -\oint_F \frac{\partial \varphi}{\partial n}\mathrm{d}f = 4\pi \sum_Q e_Q. \tag{2.8}$$

式中的和是对包含在曲面 F 之内的全部电荷取的.

根据高斯定理

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = \oint_F \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f = \int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \tag{2.9}$$

(式中 F 为包围体积 V 的闭曲面, 而 $\boldsymbol{n}$ 为外法线), 由式 (2.7) 和式 (2.8) 得

$$\operatorname{div}_P \boldsymbol{E} = 0, \quad P \neq Q. \tag{2.10}$$

由于 $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ 以及

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\varphi,$$

所以 φ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla_P^2\varphi = 0, \quad P \neq Q. \tag{2.11}$$

因为除在原点外,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}; \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3x_i^2 - r^2}{r^5},$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0,$$

立刻可以看出 $\varphi = e/r$ (对于单个点电荷) 或 $\varphi = \sum\limits_Q e_Q/r_{QP}$ (对于多个点电荷) 是方程式 (2.11) 的解. 对于包围原点的曲面,

$$-\oint_F \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}f = \oint_F \frac{1}{r^2}\left(\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{x}}{r}\right)\mathrm{d}f = 4\pi.$$

能量守恒

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = 0 \quad \text{或} \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

和高斯定律

$$\oint_F E_n \mathrm{d}f = 4\pi\sum_Q e_Q \quad \text{或} \quad -\oint_F \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}f = 4\pi\sum_Q e_Q,$$

(Q 在 F 内) 合在一起完全等效于点电荷的库仑定律.

关于斯托克斯定理和高斯定理的数学注记

就斯托克斯定理而言, 法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向和曲线 C 的绕行指向之间有一个确定的关系. 只当把 $\operatorname{curl}\boldsymbol{E}$ 和面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ 都看作矢量时, 这个规定才是必要的. 然而, 把它们看作反对称张量[①]则更为合适. 这一点通过坐标系的反演便可看出. 然而, 对于三维空间中的任一反对称张量

$$C_{ik} = A_iB_k - A_kB_i = -C_{ki}$$

① 关于张量的概念, 参见 §18.

(A_i 和 B_i 应该像矢量的分量那样变换), 借助于对全部三个指标是反对称的张量 ε_{ikl}

$$\varepsilon_{ikl}=\begin{cases}\pm 1 & \text{若 } ikl \text{ 为 1,2,3 的}\begin{pmatrix}\text{偶次}\\ \text{奇次}\end{pmatrix}\text{置换},\\ 0 & \text{若三个指标中至少有两个相等},\end{cases}$$

能够给定一个矢量 C_i, 即

$$C_i=\sum_{k<l}\varepsilon_{ikl}C_{kl}.$$

于是, 在能够通过原坐标系的真旋转 (即, 其旋转矩阵的行列式等于 $+1$) 导出的所有坐标系中, 矢量的分量 C_1, C_2 和 C_3 分别等于张量的分量 C_{23}, C_{31} 和 C_{12}. 若施行反射旋转 (其行列式等于 -1), 则将改变符号. 例如,

$$x_i'=-x_i \quad (i=1,2,3),$$
$$C_{kl}'=C_{kl}, \quad \text{但} \quad C_i'=-C_i.$$

从反演的观点来看, 旋度和面元都可以看作反对称张量 (矢量积). 于是, 可以写出

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\sum_{i<k}\int \operatorname{curl}_{ik}\boldsymbol{E}\mathrm{d}f_{ik}. \tag{2.12}$$

因此, 法线方向与绕行指向间的规定关系就没有必要了. 确实, 法线的概念不再出现. 这种形式的斯托克斯定理在任意 n 维空间中都是成立的. 这一极其普遍的定理是纯粹拓扑性质的; 即, 它与任何度规无关. 只需要 E_i 相对于 $\mathrm{d}x^i$ 逆步地变换, 即

$$\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\sum_i E_i\mathrm{d}x^i=\text{不变量}.$$

总可以把闭曲面想象为由具有共同边界的两个不同的曲面所构成. 若将式 (2.12) 应用于这两个曲面上, 则沿边界曲线的线积分相互抵消, 从而对于闭合曲面有

$$\sum_{i<k}\oint \operatorname{curl}_{ik}\boldsymbol{E}\mathrm{d}f_{ik}=0.$$

证明斯托克斯定理的最简易方式是: 首先对矩形证明它, 然后证明在任意坐标变换下该定理是不变的. 因此, 对于能够变换为矩形的所有曲面, 它必然都是正确的. 对于多连通域的情况, 通过适当的切割, 把它分割为单连通域, 然后将该定理应用于其中每一单连通域. 由于沿割线的线积分成对地抵消, 因此这一定理对多连通域也是成立的.

由矢量 A_i 和反对称张量 $C_{ik}=-C_{ki}$ 能构成张量

$$A_iC_{kl}+A_kC_{li}+A_lC_{ik}=D_{ikl}.$$

由于 D_{ikl} 对三个指标都是反对称的, 所以总能把它写成如下形式

$$D_{ikl}=\varepsilon_{ikl}D.$$

在高斯定理中, 通过下式的写法:

$$\begin{aligned}&\oint_F(E_i\mathrm{d}f_{kl}+E_k\mathrm{d}f_{li}+E_l\mathrm{d}f_{ik})\\&=\int_V\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\mathrm{d}V)_{ikl}=\int_V\operatorname{div}\boldsymbol{E}|\mathrm{d}V|\varepsilon_{ikl},\end{aligned}\tag{2.13}$$

就能够排除法向分量的概念. 可以看出, 高斯定理也具有拓扑特性. 由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ 是标量, 所以像等式右端一样, 等式左端也按行列式变换. 像斯托克斯定理那样, 高斯定理既不局限于三维空间, 也不受度规概念的限制.

与斯托克斯定理的证明相似, 高斯定理的最简易证法为: 先对立方体证明其正确性, 然后证明在任意坐标变换下该定理不变, 等等.

§3. 体电荷和面电荷

想象电荷是连续分布的, 而不是由一系列点电荷所组成, 则往往较为方便. 只要我们局限在宏观物理学的领域中, 则总可以忽略实际上电的原子性结构.

a. 体电荷

对于包含在体积 V 中的电荷, 我们设想实施如下的极限程序:

$$\begin{cases}\text{电荷数}\ \to\infty\\ \text{每一个别电荷的电量}\ \to 0,\end{cases}$$

来使总电荷保持恒定. 如此, 则

$$\sum_Q e_Q\longrightarrow e=\int_V\rho\mathrm{d}V\quad(V\text{ 中的总电荷}).$$

这样定义的连续函数 $\rho=\lim\limits_{V\to 0}(e/V)$ 称为体电荷密度. 于是式 (2.6) 的电势 φ_P 和式 (1.4) 的电场强度 $\boldsymbol{E}_P$ 变为

$$\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r_{QP}}\mathrm{d}V_Q,\tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{E}_P=-\operatorname{grad}_P\varphi_P=\int\frac{\rho_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)\mathrm{d}V_Q.\tag{3.2}$$

在这两个积分中, 同点电荷累加时所发生的情况相反, 当 P 点趋于 Q 时, 不存在奇点. 很粗略地讲, 被积函数 ρ_Q/r_{QP} 和 $\rho_Q(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)/r_{QP}^3$ 变为无穷大比体积元 $\mathrm{d}V$ 趋于零慢得多. 通过对极限的精密考虑, 不难证明这是严格正确的. 因此, 对于电荷的连续体分布, $\boldsymbol{E}$ 和 φ 在场源区域内部是正规的.

关于体电荷的情况, 高斯定律变为

$$-\oint_F \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathrm{d}f=\oint_F E_n\mathrm{d}f=4\pi\int_V \rho\mathrm{d}V. \tag{3.3}$$

由于被积函数的正规性, 利用高斯定理 (式 (2.9)), 式 (3.3) 可改写为

$$-\int_V \nabla^2\varphi\mathrm{d}V=\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=4\pi\int_V \rho\mathrm{d}V.$$

因为对任意体积 V, 特别是对任意小的体积, 上式都成立, 于是有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{3.4}$$

或

$$-\nabla^2\varphi=4\pi\rho. \tag{3.5}$$

式 (3.5) 称为泊松方程, 它是拉普拉斯方程 (式 (2.11)) 的推广.

b. 面电荷

对于二维曲面, 可以设想一个完全类似用于体电荷的方法. 如此, 则得到面电荷密度 ω 的概念. 类似地, 有

$$e=\int_F \omega\mathrm{d}f \text{ (曲面上的总电荷)},$$

$$\varphi_P=\int\frac{\omega_Q}{r_{QP}}\mathrm{d}f_Q, \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{E}_P=-\operatorname{grad}_P\varphi=\int\frac{\omega_Q}{r_{QP}^3}(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)\mathrm{d}f_Q. \tag{3.7}$$

当场点 P 在曲面上时, φ 仍为有限 (被积函数 $\sim 1/r$, 面元 $\sim r^2$). 因此, 经过带电面时 φ 是连续的.

另一方面, 电场强度垂直于曲面的分量却是不连续的. 将高斯定理 (式 (2.9)) 应用于包含一部分带电面的假想柱面 (如图 3.1 所示), 就可看出这一点:

$$\oint E_n\mathrm{d}f=4\pi\int\omega\mathrm{d}f. \tag{3.8}$$

在柱高趋于零而柱底保持不变的极限情况中,

$$\int(E_{n_1}+E_{n_2})\mathrm{d}f=4\pi\int\omega\mathrm{d}f.$$

由于底面积是任意的, 所以有

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\omega. \tag{3.9}$$

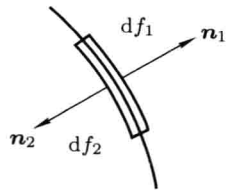


图 3.1

或者用法线的另一种定义 (图 3.2), 则

$$(E_n)_1 - (E_n)_2 = 4\pi\omega,$$
$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = -4\pi\omega.$$

因此, 经过带电面时 $\boldsymbol{E}$ 的法向分量是不连续的. 另一方面, 切向分量仍然是连续的. 证明: φ 在曲面两侧是相等的. 因此, 不论在面内和面外, 平行于曲面并在相同方向上的微分都必定给出相同的结果. 也能用斯托克斯定理来进行证明.

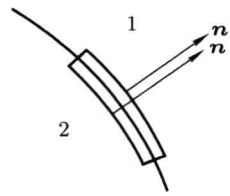


图 3.2

在导体上电场的边界条件: 导电体是具有可自由运动的电子的物质. 导体内电场强度的分量引起电荷的位移——电流. 无电流的条件, 或场的静态特性的条件为

1. 导体内部不可能存在电场:

$$\boldsymbol{E} = 0;$$

2. 在导体表面上, 电场强度的切向分量为零:

$$E_{//} = 0.$$

(由于切向分量是连续的, 因此, 正如在导体内部一样, 在导体外部该切向分量也必定为零.) 反之, 由于可能存在表面电荷, 导体外的法向分量一般不等于

零. 因此, 在导体内部电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为零, 而在导体外部电场强度则仅有法向分量

$$E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 4\pi\omega.$$

电势的梯度垂直于表面. 因此, 沿表面 φ 为常数, 即表面为一等势面.

§4. 静电场的能量

a. 点电荷

点电荷系的 (电) 势能等于把这些电荷从无穷远带回到它们的实际位形所需作的功. 对于相距 r_{12} 的两个电荷 e_1 和 e_2, 此功为

$$E_{\text{pot}} = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}.$$

对于任意个数的点电荷, 通过计算每对电荷的电势能, 并对所有各对取和, 求得

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i<k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}. \tag{4.1}$$

我们也可写成

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}{\sum_{i,k}}' \frac{e_i e_k}{r_{ik}}. \tag{4.2}$$

取和符号上的 "撇" 表示不包含 $i = k$ 的那些项. 从这个对称的表达式中可以看出, 这样定义的能量与从无穷远带回点电荷的次序无关.

还有第三种形式的 E_{pot}, 其中用到了电势的概念. 在第 i 个电荷的位置, 由除它本身外的所有电荷产生的电势为

$$\varphi_i' = {\sum_{\substack{k \\ (k\neq i)}}}' \frac{e_k}{r_{ik}}. \tag{4.3}$$

因而,

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \varphi_i'. \tag{4.4}$$

b. 体电荷

在这种情况中

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\iint \frac{\rho_P \rho_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_{P'}. \tag{4.5}$$

点电荷系中存在的 $i \neq k$ 的复杂性这里并不出现, 这是由于, 在表达式 $\int (\rho_{P'}/r_{PP'})\mathrm{d}V_{P'}$ 中, 不论体积元是否包含 P 点在内都没有什么区别.

用电势来表示, 则有

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_{P'}, \tag{4.6}$$

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \int \rho_P \varphi_P \mathrm{d}V_P. \tag{4.7}$$

c. 体电荷和面电荷

利用电势

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_{P'} + \int \frac{\omega_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}f_{P'} (\text{式 (4.6)+ 式 (3.6)}),$$

得出

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \int \rho_P \varphi_P \mathrm{d}V_P + \frac{1}{2} \int \omega_P \varphi_P \mathrm{d}f_P. \tag{4.8}$$

前一积分遍及包含体电荷分布的整个区域, 后一积分遍及所有带电面. 若不明显地引入势的概念, 则

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho_P \rho_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_{P'} + \iint \frac{\rho_P \omega_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}f_{P'} + \frac{1}{2} \iint \frac{\omega_P \omega_{P'}}{r_{PP'}} \mathrm{d}f_P \mathrm{d}f_{P'}. \tag{4.9}$$

根据静电学定律, 可将能量的这些表达式变换成遍及全部空间的积分.

首先, 若仅有体电荷, 则利用式 (3.4) 可得

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi \mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi} \int \varphi \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} \mathrm{d}V.$$

此外, 在矢量分析中有个熟知的恒等式 (对任一矢量 $\boldsymbol{E}$ 和任一标量函数 φ 都成立)

$$\mathrm{div}\,(\varphi \boldsymbol{E}) = \varphi \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi, \tag{4.10}$$

于是, 若 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{E}$ 在整个积分域中存在 (从而, $\boldsymbol{E}$ 必须是连续的), 则高斯定理给出

$$\oint \varphi E_n \mathrm{d}f = \int \varphi \mathrm{div}\, \boldsymbol{E} \mathrm{d}V + \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi \mathrm{d}V,$$

应用到我们的情况, 于是得到

$$E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{8\pi} \left\{ - \int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi \mathrm{d}V + \oint_K \varphi E_n \mathrm{d}f \right\}.$$

我们设想一个球 K 作为积分域, 而在极限情况下球的半径 r 趋于无穷大. 现在我们假定, 只是在有限的球内 $\rho \neq 0$, 或者, 在无穷远处 ρ 将充分快地趋于

零, 以致当 $K \to \infty$ 时对球面 K 的第二个积分趋于零. (若只在有限的区域内 $\rho \neq 0$, 则 φ 至少像 $1/r$ 那样快地趋于零, 而 $|\boldsymbol{E}|$ 至少像 $1/r^2$ 那样快地趋于零. 然而球面只是按 r^2 增加, 从而整个面积分至少像 $1/r$ 那样趋于零.) 因为 $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, 于是我们便得到著名的公式

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}V, \tag{4.11}$$

式中能量只用空间一切点的电场强度来表达. 量 $\boldsymbol{E}^2/(8\pi)$ 称为场的能量密度.

若也存在面电荷, 由于在带电面上 $\boldsymbol{E}$ 是不连续的, 高斯定理因而不能应用, 所以必须把该面 F 排除在积分域之外. 这将给出两个附加项:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2}\int \rho\varphi \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \omega\varphi \mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{8\pi}\left\{-\int (\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{grad}\varphi)\mathrm{d}V + \oint_K \varphi E_n \mathrm{d}f + \oint_F \varphi E_n \mathrm{d}f\right\} + \\ &\quad \frac{1}{2}\int \omega\varphi \mathrm{d}f. \end{aligned}$$

由于法线 $\boldsymbol{n}$ 的指向应由积分域向外, 即其指向与 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 相反 (参见图 4.1), 所以两个附加项相互抵消. 于是,

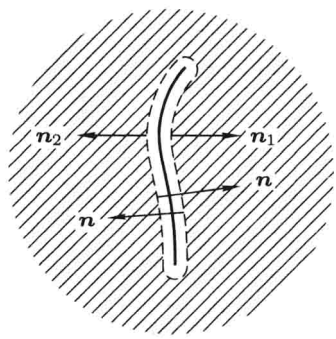


图 4.1

$$\frac{1}{8\pi}\oint_F \varphi E_n \mathrm{d}f = -\frac{1}{8\pi}\int \varphi(E_{n_1} + E_{n_2})\mathrm{d}f = -\frac{1}{2}\int \omega\varphi \mathrm{d}f,$$

若再假设当 $K \to \infty$ 时对球面的积分等于零, 则又得到

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{E}^2 \mathrm{d}V. \tag{4.11}$$

因此, 这一公式对于体电荷和面电荷都成立.

另一方面, 对于点电荷系这一积分是发散的. 在这种情况中, 必须把电场分解为由各个点电荷所产生的分量. 点电荷 e_k 在 P 点产生的电势和电场强度为

$$\varphi_k(P)=\frac{e_k}{r_P},\quad \boldsymbol{E}_k=-\operatorname{grad}\varphi_k.$$

现在我们来考察积分 $\int \boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_k\mathrm{d}V$, 其中 $i\neq k$. 若把各个点电荷包围在小球 K_i 和 K_k 中而除去那些奇点 (图 4.2), 并鉴于在整个积分域中 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$, 则由高斯定理得出

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_k\mathrm{d}V&=-\int \boldsymbol{E}_i\cdot\operatorname{grad}\varphi_k\mathrm{d}V\\&=-\int \operatorname{div}(\varphi_k\boldsymbol{E}_i)\mathrm{d}V+\int \varphi_k\operatorname{div}\boldsymbol{E}_i\mathrm{d}V\\&=-\oint_{K(\text{大球})}E_{in}\varphi_k\mathrm{d}f-\oint_{K_i}E_{in}\varphi_k\mathrm{d}f-\oint_{K_k}E_{in}\varphi_k\mathrm{d}f.\end{aligned}$$

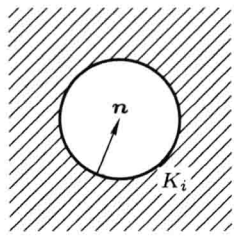


图 4.2

当大球趋于无穷大时, 第一项趋于零. 当我们令 K_k 趋于零时, 第三项趋于零. 只有第二项不为零. 当 $K_i\to 0$ 时, 得出

$$\varphi_k\to\frac{e_k}{r_{ik}},$$
$$-E_{in}=\frac{e_i}{r_{ik}^2},$$
$$-\oint_{K_i}E_{in}\mathrm{d}f=4\pi e_i.$$

于是,

$$-\oint_{K_i}E_{in}\varphi_k\mathrm{d}f\to 4\pi\frac{e_ie_k}{r_{ik}}.$$

因此, 对于两个点电荷, 得到

$$E_{\text{pot}}=\frac{e_ie_k}{r_{ik}}=\frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{E}_k\mathrm{d}V.\tag{4.12}$$

式中积分遍及整个空间.

对于任意多个点电荷, 我们有

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i<k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i<k} \int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi} \sum_{\substack{i,k \\ (i \neq k)}} \int \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_k \mathrm{d}V. \tag{4.13}$$

也可写成

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi} \int \left(\boldsymbol{E}^2 - \sum_i \boldsymbol{E}_i^2 \right) \mathrm{d}V. \tag{4.14}$$

(然而, 在这一情况中, 不能把上述积分分解为两个单独的积分, 因为它们会发散.)

§5. 例: 球对称的电荷分布

我们来考察只与离固定点 O 的距离 r 有关的体电荷分布 $\rho(r)$. 从而, 电势 $\varphi(r)$ 只是 r 的函数.

在这种情况中, 从泊松方程

$$-\nabla^2 \varphi = 4\pi\rho \tag{5.1}$$

出发是最简便的. 在极坐标中, 当算符 ∇^2 作用在只与 r 有关的函数 φ 上时, 具有如下的形式

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} (r\varphi) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}. \tag{5.2}$$

于是, 我们有

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left(r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \right) = 4\pi\rho,$$

$$-r^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = 4\pi \int_0^r \rho r^2 \mathrm{d}r \equiv e(r),$$

式中 $e(r)$ 为包含在半径为 r 的球内的电荷. 从而,

$$-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = E_r = \frac{e(r)}{r^2}. \tag{5.3}$$

在距电荷分布中心 O 为 r 处的电场强度只取决于包含在以 O 为中心、半径为 r 的球内的电荷. 球外的电荷, 只要是球对称分布, 并不影响 $\boldsymbol{E}$. 该电场强度与全部电荷 $e(r)$ 都集中在中心时相同. 电势由下式给出

$$\varphi(r) = -\int_0^r \frac{e(r)}{r^2} \mathrm{d}r = \int_0^r e(r) \mathrm{d} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$= e(r) \left. \frac{1}{r} \right|_0^r - \int_0^r \frac{1}{r} e'(r) \mathrm{d}r.$$

因为 $e'(r)=(\mathrm{d}/\mathrm{d}r)[e(r)]=4\pi r^2\rho$, 而且, 由于当 $r\to 0$ 时 $e(r)$ 按照 r^3 趋于零, 所以我们有

$$\varphi(r)=\frac{e(r)}{r}-4\pi\int_0^r \rho r\mathrm{d}r+\text{常数}. \tag{5.4}$$

a. 均匀带电球

$$\rho=\begin{cases}\rho_0=\text{常数} & r<a,\\ 0 & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$e(r)=\begin{cases}\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_0=e\dfrac{r^3}{a^3} & r<a,\\ \dfrac{4}{3}\pi a^3\rho_0\equiv e & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=E_r=\begin{cases}e\dfrac{r}{a^3} & r<a,\\ \dfrac{e}{r^2} & r\geqslant a;\end{cases}$$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{e}{2a^3}(3a^2-r^2) & r<a,\\ \dfrac{e}{r} & r\geqslant a.\end{cases}$$

(常数已这样选定, 使得 $\varphi(\infty)=0$, 而且在 $r=a$ 处 φ 是连续的.) 静电能的计算给出

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{pot}}&=\frac{1}{2}\int\rho\varphi\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\rho_0\cdot\frac{1}{2}\frac{e}{a^3}\int_0^a(3a^2-r^2)4\pi r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3e}{a^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e}{a^3}\left[3a^2\frac{a^3}{3}-\frac{a^5}{5}\right]=\frac{3}{5}\cdot\frac{e^2}{a}.\end{aligned}$$

利用 $\dfrac{1}{8\pi}\displaystyle\int E_r^2\mathrm{d}V$ 可得相同的结果.

b. 均匀带电球面

令

$$\omega=\frac{e}{4\pi a^2},$$

其中, e 为总电荷, a 为球的半径. 根据高斯定律,

$$r^2\cdot E_r=\text{常数}$$

在球面内、外都必定成立. 如果我们分别用 1 和 2 来表示球内和球外区域, 则

$$E_{r1}=\frac{C_1}{r^2}\quad r<a,$$

但是, 由于在球心不能存在不连续性, 所以 $C_1 = 0$, 于是

$$E_{r1} = 0.$$
$$E_{r2} = \frac{C_2}{r^2} \quad r > a;$$

但是

$$E_{r2} - E_{r1} = 4\pi\omega = \frac{e}{a^2} = (E_{r2})_{r=a},$$

所以, $c_2 = e$. 于是

$$E_r = \frac{e}{r^2}, \quad \varphi = \frac{e}{r} \quad r > a,$$
$$E_r = 0, \quad \varphi = \frac{e}{a} \quad r < a,$$

由此, 我们再次看到, 面电荷对外部的作用就如同它集中在球心一样. 而在球内, 它并不产生效应. 于是, 能量为

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \mathrm{d}V = \frac{e^2}{8\pi}\int_a^\infty \frac{4\pi r^2}{r^4}\mathrm{d}r = \frac{e^2}{2a}.$$

对于点电荷的极限情况, $E_{\text{pot}} \to \infty$.

§6. 静电场方程同库仑定律的等效性的证明

我们已从库仑定律出发导出了场方程式 (2.4)、式 (2.3), 或式 (3.4)、式 (3.5),

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

或

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla^2\varphi = -4\pi\rho.$$

现在要证明, 也可由这些方程反过来导出库仑定律. 为此, 我们还必须要求当 $r \to \infty$ 时 φ 至少要像 $1/r$ 那样快地趋于零.

为简单起见, 我们将只对体电荷进行证明. 为此, 要用到格林定理. 如果将 $\boldsymbol{A} = \varphi\operatorname{grad}\psi$ 代入高斯定理

$$\oint_F A_n \mathrm{d}f = \oint_F \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f = \int_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V,$$

那么, 由于

$$\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi, \tag{6.1}$$

我们得到格林第一恒等式:

$$\oint \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f = \int \varphi\nabla^2\psi\mathrm{d}V + \int \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi\mathrm{d}V. \tag{6.2}$$

对调式 (6.1) 中的 φ 和 ψ, 再与式 (6.1) 相减, 得

$$\mathrm{div}\,(\varphi \mathrm{grad}\,\psi - \psi \mathrm{grad}\,\varphi) = \varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi,$$

从而给出格林第二恒等式:

$$\oint \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f = \int(\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V. \tag{6.3}$$

对于在其中 φ 和 ψ 皆为正则的任意体积, 这些结果都是成立的.

把 φ 看作我们所求的势函数, 并令 $\psi_{P'} = 1/r_{PP'}$, 则可把格林第二恒等式用来积分泊松方程. 为了使被积函数是正则的, 我们把积分域限制在以固定点 P 为球心的小球面 K_P 与大球面 K 之间 (参见图 6.1). 因为

$$\nabla^2\psi = 0 \quad (\text{对于 } P \neq P'),$$

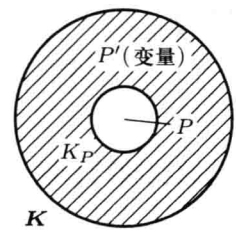


图 6.1

我们有[①]

$$\oint_K \left(\varphi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f_{P'} + \oint_{K_P}\left(\varphi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f_{P'}$$
$$= 4\pi\int\frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P.$$

由于我们所做的 φ 在无穷远趋于零的假设, 所以在球面 K 上的积分等于零. 此外, 在球面 K_P 上的积分中的第二项并无贡献. 由于在小球面上 $\partial(1/r)/\partial n = 1/r^2$, 所以小球面 K_P 上的积分给出 $4\pi\varphi_P$. 从而,

$$\varphi_P = \int\frac{\rho_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'},$$

这正是库仑定律.

如果存在面电荷, 可用类似的方式证明. 然而, 对于点电荷系的情况, 证明就不这样简单了.

① 式中第二个积分的积分域 K_P 英译版误印为 KP.——中译者注

§7. 电介质, 唯象的处理

我们考察在真空中的带电平行板电容器, 即两块平行带电金属板. 假设板的面积比它们的间距大得多, 以致于无须考虑边缘效应. 令一块板上的面电荷密度为 $+\omega$, 而另一块的为 $-\omega$ (参见图 7.1). 此时, 两板间存在匀强电场

$$E_x = +4\pi\omega,$$

而两板之外的电场为零. 因而两板间的电势差为

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\omega d,$$

式中 d 为两板的间距.

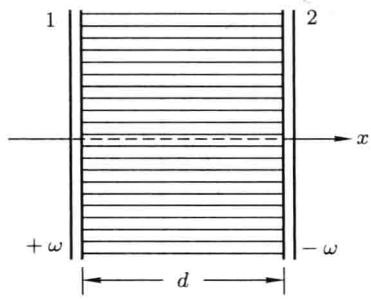


图 7.1

如果我们在两板之间放入绝缘体, 则将发生如下的现象:

1. 若把两板同电池组连接, 使它们的电势保持不变, 则有电流出现. 两板上的电荷增加.

2. 另一方面, 若两板是绝缘的, 则它们的电荷保持不变, 而两板间的电势差减小到 ε 分之一.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi\omega}{\varepsilon} d.$$

因数 ε 称为绝缘体的介电常数, 并且一般大于 1 [A–2].

上述现象可诠释如下: 在电介质的外表面形成电荷层, 靠近板 1 的一侧其面电荷密度为 $-(1-1/\varepsilon)\omega$[①], 而靠近板 2 的一侧其面电荷密度为 $+(1-1/\varepsilon)\omega$. 与板上原有的电荷合在一起, 结果在板 1 上的净面电荷密度为 ω/ε, 而板 2 上为 $-\omega/\varepsilon$.

不能直接观察到电介质表面上产生的电荷. 它的存在只能通过电势差来验证. 通过电传导并不能使它改变, 它实际上依附于介电物质, 并单纯地根

① 英译版有误, 已按德文原版校正, 又, 下文中, 英译版把 ω/ε 称为净电荷 (net charge), 实为净面电荷密度.——中译者注

据外场来自行调整. 这种类型的电荷称为极化电荷, 以区别于金属板上存在的真实 (传导) 电荷. 而后者是能够使之任意改变的.

以后我们将用 ρ_p 和 ω_p 代表极化电荷密度, ρ_t 和 ω_t 代表传导电荷密度. 于是, $\rho=\rho_p+\rho_t$ 和 $\omega=\omega_p+\omega_t$ 代表总电荷密度.

若设想在电容器极板与电介质间存在一薄层真空区域, 则电荷密度和电容器内部电场间的关系为 (参见图 7.2)

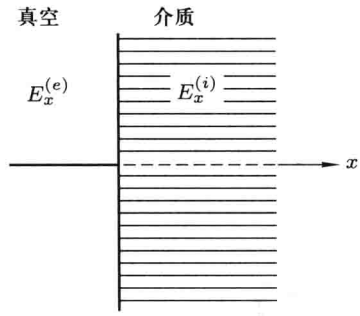


图 7.2

$$E_x^{(e)}=4\pi\omega,$$
$$E_x^{(i)}-E_x^{(e)}=4\pi\omega_p,\quad \text{式中 } \omega_p=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\omega.$$

于是

$$E_x^{(i)}=4\pi\left[\omega-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\omega\right]=\frac{4\pi}{\varepsilon}\omega,$$

或

$$E_x^{(i)}=\frac{1}{\varepsilon}E_x^{(e)},$$

以及

$$4\pi\omega_p=-(\varepsilon-1)E_x^{(i)}.$$

因此, 若在电介质与真空之间的界面上不存在传导电荷密度 (图 7.3), 则

$$E_n^{(e)}+\varepsilon E_n^{(i)}=0,$$
$$E_n^{(e)}+E_n^{(i)}=4\pi\omega_p=-(\varepsilon-1)E_n^{(i)}.$$

倘若设想两电介质之间存在一薄层真空区域, 则不难把这个关系推广到两个任意电介质的界面上 (图 7.4). 在这种情况中, 若不存在传导电荷, 则

$$\varepsilon_1E_{n_1}+\varepsilon_2E_{n_2}=0.$$

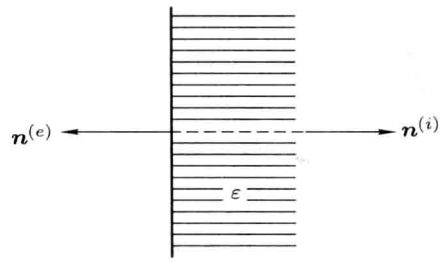


图 7.3

如果存在传导电荷, 则

$$\varepsilon_1 E_{n_1} + \varepsilon_2 E_{n_2} = 4\pi\omega_t.$$

对于真空, ε 等于 1.

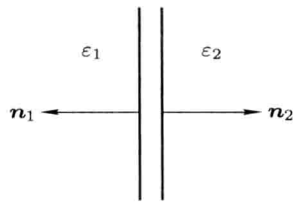


图 7.4

我们引入一个称为电位移 $\boldsymbol{D}$ 的新矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{7.1}$$

则两绝缘体界面上的最普遍关系式变为

$$D_{n_1} + D_{n_2} = 4\pi\omega_t. \tag{7.2}$$

由于

$$E_{n_1} + E_{n_2} = 4\pi\omega \tag{7.3}$$

(式中 $\omega = \omega_p + \omega_t$) 仍然成立, 从而

$$(\varepsilon_1 - 1)E_{n_1} + (\varepsilon_2 - 1)E_{n_2} = -4\pi\omega_p. \tag{7.4}$$

这是物质的一个重要性质.

在平行板电容器的匀强电场中, 只产生极化面电荷 (其密度为 ω_p). 然而, 在普遍情况下, 在绝缘体内部也产生极化体电荷 (其密度为 ρ_p).

由于这些 ω_t 是场 $\boldsymbol{D}$ 的面源, 因此利用一种极限过渡 (将一系列具有传导面电荷密度 ω_t 的薄层叠积在一起), 可以看出, 这些传导电荷的体密度 ρ_t 是 $\boldsymbol{D}$ 的体源:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=4\pi\rho_t. \tag{7.5}$$

由于

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho \tag{7.6}$$

(式中 $\rho=\rho_p+\rho_t$), 亦可得到

$$\operatorname{div}\{(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}\}=-4\pi\rho_p. \tag{7.7}$$

若媒质是均匀的, 即 ε 与位置无关, 则

$$(\varepsilon-1)\operatorname{div}\boldsymbol{E}=-4\pi\rho_p. \tag{7.8}$$

若以通常的方式将高斯定理应用于矢量 $(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}$ (然而, 那些 $\omega_p\neq 0$ 的面除外), 则知

$$\int\rho_p\mathrm{d}V+\int\omega_p\mathrm{d}f=0. \tag{7.9}$$

因此, 全部极化电荷的和为零.

若在两块电介质之间界层上 $\omega_t=0$, 则 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量 D_n 是连续的, 而其切线分量 $D_{//}$ 一般是不连续的. 这是由于下述事实所致: 只要 φ 连续, 并且 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ 仍然成立, 则 $E_{//}$ 是连续的.

§8. 电介质现象的电子论诠释

迄今在纯唯象基础上引入的极化电荷, 在电子论中被追溯到电偶极子.

电偶极子

首先考察相距为 d 的两个点电荷 $+e$ 和 $-e$. 用下面的矢量定义这样两个电荷的电偶极矩

$$\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{d}$$

(一般地, 对于其和为零的任意多个电荷, 定义

$$\boldsymbol{p}=\sum_i e_i\boldsymbol{x}_i,$$

式中 $\boldsymbol{x}_i$ 为这些电荷的位矢. 因 $\sum\limits_i e_i=0$, 这一矢量与坐标原点的位置无关.)

按图 8.1, 由两个电荷产生的电势为

$$\varphi_P=\frac{e}{r_{PQ_+}}-\frac{e}{r_{PQ_-}}.$$

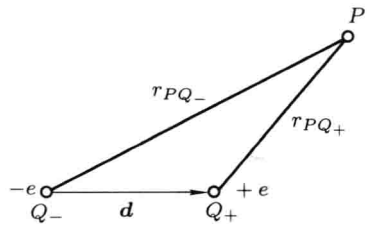


图 8.1

于是, 若 $r \gg d$ (极限过渡: $r \to \infty$, 或当 $d \to 0$ 时 $e \to \infty$, 使得 ed 保持有限), 两个电荷的这种排列叫做电偶极子. 电偶极子的电势的泰勒展开式给出

$$\varphi_P = e(\boldsymbol{d} \cdot \operatorname{grad}_Q)\frac{1}{r_{PQ}} = (\boldsymbol{p} \cdot \operatorname{grad}_Q)\frac{1}{r_{PQ}}. \tag{8.1}$$

(式中 grad_Q 代表对于 Q 点的坐标所取的梯度.) 于是, 偶极子产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P = (\boldsymbol{p} \cdot \operatorname{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}. \tag{8.2}$$

写成分量式, 则

$$E_K = \left(\sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_{Qi}}\right)\frac{x_{P_k} - x_{Q_k}}{r_{PQ}^3}, \quad (i,k = 1,2,3).$$

现在考察一块有限大小的绝缘体. 设在每一原子或分子上都存在一个偶极子. (暂时不去问这些偶极子是如何形成的.) 于是, 这些偶极子所产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}_P = \sum_Q (\boldsymbol{p} \cdot \operatorname{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}.\text{①} \tag{8.3}$$

现在通过用连续分布代替这些偶极子的不连续分布的近似法, 把上式的求和变换为积分. 令 $\boldsymbol{p}$ 为每个分子的电偶极矩, N 为每立方厘米中的分子数, 则每立方厘米中的电偶极矩 $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}$ 称为电极化度. 于是电场强度变为

$$\boldsymbol{E}_P = \int (\boldsymbol{P} \cdot \operatorname{grad}_Q)\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q. \tag{8.4}$$

希望对这积分做些变换, 为此需用推广的高斯定理: 对于任意矢量, 下式成立

$$(\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{B} + (\operatorname{div}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \operatorname{div}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}), \tag{8.5}$$

① 德文原版是 $\sum_{\boldsymbol{p}(\text{对全部偶极子})}$. ——中译者注

式中 $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ 是由矢量 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的广义乘积所构成的张量①. 用分量表示为

$$\sum_i \left(A_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) B_k + \left(\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) B_k = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(B_k A_i). \tag{8.6}$$

根据高斯定理, 对正则的矢量函数, 则有

$$\int (\boldsymbol{A}\cdot \operatorname{grad})\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = -\int (\operatorname{div}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\mathrm{d}V + \oint A_n \boldsymbol{B}\mathrm{d}f. \tag{8.7}$$

依照这关系, 得到

$$\boldsymbol{E}_P = -\int (\operatorname{div}\boldsymbol{P})\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V - \oint P_n^{(i)}\frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}f.$$

式中 $P_n^{(i)}$ 代表 $\boldsymbol{P}$ 的内法向分量. $\boldsymbol{E}_P$ 的这一形式表明, 电极化度的连续分布完全等效于极化电荷的体分布和面分布. 的确, 从第一个积分得出

$$\rho_P = -\operatorname{div}\boldsymbol{P}, \tag{8.8}$$

倘若积分域完全在闭曲面的一侧, 而该曲面把绝缘体包容在内时, 则第二个积分给出极化面电荷密度

$$\omega_P = -P_n^{(i)}.$$

另一种情况, 曲面可能是不连续的, 而且以这样一种方式位于绝缘体内部, 即它的两侧都被积分域所包围. 在这样的曲面上, 总极化电荷密度由下式给出

$$\omega_P = -(P_{n_1} + P_{n_2}). \tag{8.9}$$

第二种情况是较普遍的. 它把第一种情况作为特例 $(P_{n_2} = 0)$ 包括在内.

将高斯定理应用于矢量 $\boldsymbol{P}$, 再次给出

$$\int \rho_P \mathrm{d}V + \int \omega_P \mathrm{d}f = 0. \tag{8.10}$$

而且, 我们看到, 为了保持上节的唯象定律, 必须令 $\boldsymbol{P}$ 与 $(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}/(4\pi)$ 等同. 所以,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}. \tag{8.11}$$

作一个明显的假设

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}', \tag{8.12}$$

① 这句话是按德文原版译出的. 广义乘积原文为 allgemeine Produkt. $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{A})$ 代表 $\boldsymbol{AB}$, 一般地, $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. —— 中译者注

则介电常数 ε 也能够用一些原子性的量来表达. 式 (8.12) 中 α 为分子极化率, 而 $\boldsymbol{E}'$ 为有效电场强度, 即电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 所在处的有效电场强度, 但不包括偶极子本身所产生的场. 如果我们作一个粗略的近似 $\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}$, 则

$$\boldsymbol{P}=N\alpha\boldsymbol{E}$$

和

$$\varepsilon=1+4\pi\alpha N. \tag{8.13}$$

从经验发现, 对于静电场 $\alpha>0$, 所以, ε 大于 1 [A–2].

现在我们要考虑 $\boldsymbol{E}'$ 同 $\boldsymbol{E}$ 之间的差异, 以使理论更为精密. 宏观电场强度恰好是微观电场强度的平均:

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{V}\int \boldsymbol{E}_{分子}\mathrm{d}V.$$

令 $\boldsymbol{e}$ 代表单个偶极子的电场强度, 则

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'+N\int_K \boldsymbol{e}\mathrm{d}V.$$

这里已假定介质是各向同性的. 积分遍及包含偶极子的一个球体. 我们将会看到, 积分与球的大小无关.

$\int_K \boldsymbol{e}\mathrm{d}V$ 的计算[①]. 其几何图形示于图 8.2 中. 将采用柱面坐标 ρ,ζ. 令 R 为球的半径, $P(\rho,z)$ 为该球面上的一点. 显然,

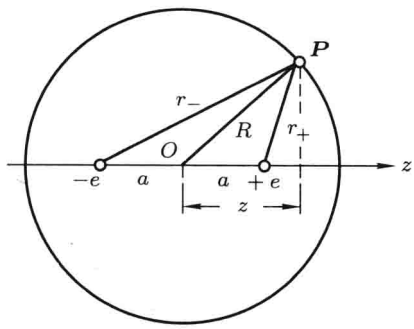


图 8.2

$$R^2=\rho^2+z^2.$$

① Lundblad, *Ann. d. Physik*, **57**, 183(1918).

由于对称性, 仅需考虑

$$\boldsymbol{e} = -e \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)$$

的 z 分量. 因

$$\boldsymbol{e}_z = -e\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta+a)^2}}\right\},$$

积分变为

$$\begin{aligned}\int_K e_z \mathrm{d}V &= -e\int_0^R 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \int_{-z=-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{+z=+\sqrt{R^2-\rho^2}} \mathrm{d}\zeta \\ &\quad \frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(\zeta+a)^2}}\right\}, \\ &= -e\int_0^R 4\pi\rho\mathrm{d}\rho\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}\right], \\ &= -e\int_0^R 4\pi z\mathrm{d}z\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+a^2-2az}} - \frac{1}{\sqrt{R^2+a^2+2az}}\right], \\ &= -e\int_{-R}^{+R}\frac{4\pi z\mathrm{d}z}{\sqrt{R^2+a^2-2az}}.\end{aligned}$$

作代换 $u^2 = R^2+a^2-2az$, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_K e_z \mathrm{d}V &= -e\cdot 4\pi\int_{|R-a|}^{R+a}\frac{R^2+a^2-u^2}{2a^2}\mathrm{d}u \\ &= -4\pi e\cdot\left.\frac{(R^2+a^2)u - \frac{1}{3}u^3}{2a^2}\right|_{|R-a|}^{R+a}\end{aligned}$$

若设 $R > a$, 则这一表达式事实上变成与 R 无关:

$$\int_K e_z \mathrm{d}V = -\frac{4\pi}{3}e\cdot 2a = -\frac{4\pi}{3}p.$$

式中 $p = 2ea$ 为偶极子的电矩. 于是, 作为电偶极子的本征场对宏观场的贡献, 我们得到

$$\int_K \boldsymbol{e}\mathrm{d}V = -\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}.$$

上面的计算是用有限的偶极子 ($a \not\to 0$) 进行的, 这一点很重要, 否则被积函数按 a 的幂展开时将会发散.

对各向同性的介质, 则得

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'-\frac{4\pi}{3}N\boldsymbol{p}=\boldsymbol{E}'-\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}. \tag{8.14}$$

一般说来, 这个公式对各向异性的介质是不成立的.

由于

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon-1)\boldsymbol{E}$$

与

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=N\alpha\boldsymbol{E}'=N\alpha\left(\boldsymbol{E}+\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P}\right)\\&=N\alpha\left[1+\frac{1}{3}(\varepsilon-1)\right]\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

分子极化率同介电常数之间的关系为

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}N\alpha. \tag{8.15}$$

这就是各向同性介质的克劳修斯–莫索提关系式.

若 $\varepsilon-1\ll 1$, 则 $\varepsilon+2\approx 3$, 而

$$\varepsilon-1\approx 4\pi N\alpha,$$

如此, 即得式 (8.13) 的近似公式.

§9. 电势问题

在库仑定律的基础上, 我们能计算给定的电荷分布所产生的电势. 然而, 实际上, 往往给出其他的量, 而电荷分布通常只是隐含地被确定.

φ 必须满足如下条件:

1. 在**导体的界面上**,

(a) 对于给定总电荷的孤立导体 $-\oint\varepsilon\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f=4\pi e$. 此外, 还已知 $\varphi=$ 常数 (然而, 此时并不给出该常数值).

或

(b) 若把导体接至恒定电势的电源, 则 $\varphi=\varphi_0$. 此时给出电势, 但并不给出电荷.

2. 在**绝缘体的界面上**, 若 $\omega_t=0$, 则 φ 和 $\varepsilon\partial\varphi/\partial n$ 是连续的.

这些就是 φ 的边界条件. 此外, 还有对于真空以及 ε 是连续的绝缘体都成立的微分方程

$$\operatorname{div}(\varepsilon\operatorname{grad}\varphi)=0. \tag{9.1}$$

因导体内部 φ 为常数, 所以无须关心导体内部. 在真空中 ($\varepsilon = 1$), 或一般地在 ε= 常数的区域内, 上述微分方程变为

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{9.2}$$

可以证明, 在这些条件下解是存在的. 这里我们不作证明——从物理学的角度来看, 解的存在是显然的. 此外, 不难证明, 若 $\varepsilon > 0$ (物理上, 这是显然的 [A–2]) 并且在无穷远处 φ 至少像 $1/r$ 那样快地趋于零, 则解是唯一的.

解的唯一性的证明. 假设: 存在满足全部所需条件的两个解 φ_1 和 φ_2. 然后我们考察该两个解的差

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

在导体面上,

(a) $\oint \varepsilon(\partial\psi/\partial n)\mathrm{d}f = 0, \quad \psi$= 常数,

或

(b) $\psi = 0$,

即, 在上述两种情况中都有

$$\oint \psi\varepsilon(\partial\psi/\partial n)\mathrm{d}f = 0.$$

在绝缘体界面上, $\varepsilon\partial\psi/\partial n$ 和 ψ 都是连续的, 而且在 ε 连续的整个区域中, $\mathrm{div}\,(\varepsilon \mathrm{grad}\,\psi) = 0$. 由于

$$\mathrm{div}\,(\psi\varepsilon \mathrm{grad}\,\psi) \equiv \psi \mathrm{div}\,(\varepsilon \mathrm{grad}\,\psi) + \varepsilon(\mathrm{grad}\,\psi)^2,$$

将高斯定理应用于把全部导体[①]和不连续面都除外的一个很大的球的内部, 得

$$\oint_{K\text{ 大球}} \psi\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f + \oint_{\text{导体表面}} \psi\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}f - \oint_{\text{绝缘体表面}} \psi\left(\varepsilon_1\frac{\partial\psi}{\partial n_1} + \varepsilon_2\frac{\partial\psi}{\partial n_2}\right)\mathrm{d}f$$
$$= \int \varepsilon(\mathrm{grad}\,\psi)^2\mathrm{d}V = 0,$$

由于等式左端的三个积分都等于零 (第一个积分为零是因为当 $r \to \infty$ 时, ψ 按 $1/r$ 趋于零), 因 $\varepsilon > 0$, 被积函数是正定的. 仅当 $\mathrm{grad}\,\psi = 0$, 即 $\psi =$ 常数时, 它才能等于零. 然而, 由于在无穷远处 $\psi = 0$, 所以处处 $\psi = 0$, 从而证明了解的唯一性.

数学注记. 微分方程

$$\mathrm{div}\,(\varepsilon \mathrm{grad}\,\varphi) = 0$$

① 德文原版和英译版都是 "金属体". ——中译者注

等效于变分问题:

$$J=\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi)^2\mathrm{d}V-\sum_i e_i\varphi_i=\text{极小},$$

对给定的边界条件.

对 i 的求和应遍及电荷已给定的全部导体 (情况 a). 于是,

$$\begin{aligned}\delta J&=\frac{1}{4\pi}\int\varepsilon\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,(\delta\varphi)\mathrm{d}V-\sum_i e_i\delta\varphi_i\\&=-\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{div}\,(\varepsilon\mathrm{grad}\,\varphi)\delta\varphi\mathrm{d}V+\frac{1}{4\pi}\int\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}\delta\varphi\mathrm{d}f-\\&\quad\sum_i e_i\delta\varphi_i=0.\end{aligned}$$

除属于情况 a 的那些导体表面外, 在所有的面上面积分都等于零. 由于 n 为指向导体内部的法线, 所以对于那样一些曲面, 面积分为 $\sum_i e_i\delta\varphi_i$. 于是, 仅剩下

$$\delta J=-\frac{1}{4\pi}\int\mathrm{div}\,(\varepsilon\mathrm{grad}\,\varphi)\delta\varphi\mathrm{d}V=0.$$

所以, 微分方程 (9.1) 为一必要条件.

另一方面, 可以证明, 由于 $\varepsilon>0$, 那么, 和边界条件一起, 对于极小值问题也是充分的. 的确, 令 φ 满足这个微分方程和这些边界条件. 取

$$\overline{\varphi}=\varphi+\varphi'$$

作为极小值问题的通解. 于是有

$$\begin{gathered}J(\overline{\varphi})=J(\varphi)+\frac{1}{8\pi}\int\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi')^2\mathrm{d}V,\\J(\overline{\varphi})\geqslant J(\varphi),\end{gathered}$$

因此 φ 确实是极小值问题的解.

物理诠释. 在变分问题中出现的被积函数具有能量密度的意义. 的确,

$$\frac{1}{8\pi}\varepsilon(\mathrm{grad}\,\varphi)^2=\frac{1}{8\pi}\varepsilon\boldsymbol{E}^2=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})=\frac{1}{8\pi}\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}).$$

式中 $\boldsymbol{E}^2/(8\pi)$ 为真空中电场的能量密度, 而 $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P})/2$ 为单位体积的电极化势能 (因数 $1/2$ 来自电极化正比于 $\boldsymbol{E}$ 这一事实). 如此, 两者之和给出电介质中的能量密度.

§10. 曲线坐标

以正交曲线坐标 u, v 和 w 表示的线元的平方具有如下的形式

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3}(\mathrm{d}x_i)^2 = e_1^2\mathrm{d}u^2 + e_2^2\mathrm{d}v^2 + e_3^2\mathrm{d}w^2. \tag{10.1}$$

(在正交坐标的情况中, 没有交叉项.) 式中 e_1, e_2 和 e_3 为 u, v 和 w 的函数.

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与线元的标积为

$$A_s\mathrm{d}s = \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} \equiv A_u e_1\mathrm{d}u + A_v e_2\mathrm{d}v + A_w e_3\mathrm{d}w.$$

若令 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\varphi$, 则表达式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\mathrm{d}w$$

必与

$$(\operatorname{grad}\varphi)_u e_1\mathrm{d}u + (\operatorname{grad}\varphi)_v e_2\mathrm{d}v + (\operatorname{grad}\varphi)_w e_3\mathrm{d}w$$

等同; 即, $\operatorname{grad}\varphi$ 的 u, v 和 w 分量为

$$(\operatorname{grad}\varphi)_u = \frac{1}{e_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad (\operatorname{grad}\varphi)_v = \frac{1}{e_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad (\operatorname{grad}\varphi)_w = \frac{1}{e_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}. \tag{10.2}$$

面元张量为

$$\mathrm{d}f_{uv} = e_1e_2\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}f_{vw} = e_2e_3\mathrm{d}v\mathrm{d}w, \quad \mathrm{d}f_{uw} = e_1e_3\mathrm{d}u\mathrm{d}w,$$

而且面元与 $\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ 垂直于该面元的分量的积为

$$\operatorname{curl}_n\boldsymbol{A}\mathrm{d}f = (\operatorname{curl}\boldsymbol{A})_u e_2e_3\mathrm{d}v\mathrm{d}w + (\operatorname{curl}\boldsymbol{A})_v e_1e_3\mathrm{d}u\mathrm{d}w + \cdots.$$

运用斯托克斯定理,

$$\oint A_s\mathrm{d}s = \int\left[\frac{\partial(e_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(e_2A_v)}{\partial w}\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}w + \cdots,$$

通过对比, 则得

$$(\operatorname{curl}\boldsymbol{A})_u = \frac{1}{e_2e_3}\left[\frac{\partial(e_3A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(e_2A_v)}{\partial w}\right], \quad \text{等等.} \tag{10.3}$$

不难证明 $\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi) = 0$.

因 $A_n\mathrm{d}f = A_ue_2e_3\mathrm{d}v\mathrm{d}w + A_ve_1e_3\mathrm{d}u\mathrm{d}w + A_we_1e_2\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,
高斯定理可写成

$$\oint A_n\mathrm{d}f = \int\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2e_3A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1e_3A_v) + \cdots\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

因第二个积分中的被积表达式为 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$①, 而且由于

$$\mathrm{d}V = e_1e_2e_3\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

于是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2e_3A_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1e_3A_v) + \frac{\partial}{\partial w}(e_1e_2A_w)\right]. \tag{10.4}$$

将 $\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\varphi$ 代入上式, 则得拉普拉斯算符 $\nabla^2 \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}$. 于是,

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{e_1e_2e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{e_2e_3}{e_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{e_1e_3}{e_2}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{e_1e_2}{e_3}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]. \tag{10.5}$$

此方程也可从变分原理:

$$\int(\operatorname{grad}\varphi)^2\mathrm{d}V = \text{极小}$$

导出.

§11. 电势问题求解的几个例子

用几个例子来说明电势问题求解的两种方法.

a. 电象法

1. 无限大导电板外的点电荷 e. 假定该板接地, 故其电势为 $\varphi = 0$. 电象法是设想在 e 对于板的镜像点上有一个虚电荷 $-e$. 这个象电荷应与电荷 e 共同确定板右侧的电场, 但对板左侧的电场应无影响 (图 11.1). 即

$$\begin{aligned} x < 0: &\quad \varphi = 0; \\ x > 0: &\quad \varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}. \end{aligned}$$

此 φ 满足方程 $\nabla^2\varphi = 0$, 并且在 $x = 0$ 处是连续的. 所以, 根据唯一性定理, 它就是问题的解.

为了求板上感生的面电荷, 我们注意到

$$E_x = \frac{e}{r^3}(x_P - a) - \frac{e}{r'^3}(x_P + a).$$

在 $x_P = 0$ 处,

$$r' = r, \quad E_x = -\frac{2a}{r^3}e = 4\pi\omega.$$

① 原文为: …… 被积函数为 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V$. ——中译者注

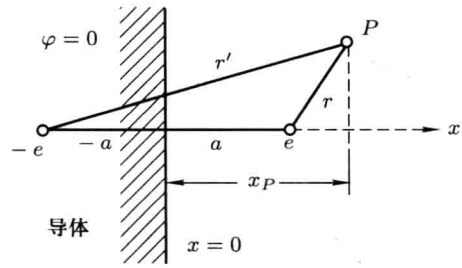


图 11.1

于是,

$$\omega=-\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}.$$

而导电板上的总电荷则为

$$\overline{e}=\int_0^\infty \omega\cdot 2\pi\rho\mathrm{d}\rho=\int_a^\infty \omega\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=-e,$$

式中 $r=\sqrt{\rho^2+a^2}, r\mathrm{d}r=\rho\mathrm{d}\rho$($\rho$ 为原点至板上某点的距离).

2. 半无限均匀电介质空间外的点电荷 e. 在此情况下, 边界条件为

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_-=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+,$$

式中 ε 为介质的介电常数. 再次设想一个对边界右侧的电场有贡献的象电荷 $-e'$(图 11.2), 但 $-e'$ 的量值有待确定. 于是,

$$x>0:\quad \varphi=\frac{e}{r}-\frac{e'}{r'},$$
$$x<0:\quad \varphi=\frac{e-e'}{r},$$

所以, 在 $r=r'$ 处 φ 是连续的. 于是,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_+=+\frac{a}{r^3}(e+e'),\quad \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_-=+\frac{a}{r^3}\varepsilon(e-e').$$

因此, 边界条件要求 $e+e'=\varepsilon(e-e')$. 从而

$$e'=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}e.$$

所以, 问题的解为

$$x>0:\quad \varphi=\frac{e}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{e}{r'},$$
$$x<0:\quad \varphi=\frac{2}{\varepsilon+1}\frac{e}{r}.$$

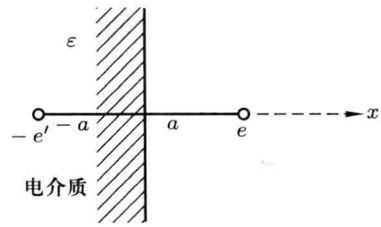


图 11.2

3. 导体球外的点电荷 e. 对每一点 P 都能用如下的关系式指定一个 "镜象" 点 P' (图 11.3):

$$\rho\rho' = a^2.$$

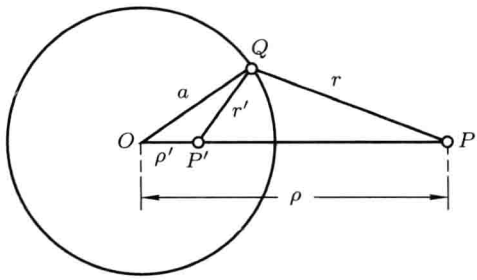


图 11.3

由于三角形 $OP'Q$ 与 OQP 相似 (在 O 点有公共角, 而且 $\rho'/a = a/\rho$), 所以对球面上所有的点 Q, 下列关系式都成立

$$\frac{r'}{r} = \frac{a}{\rho} = \frac{\rho'}{a} = \sqrt{\frac{\rho'}{\rho}} = \text{常数}.$$

这一关系能够用来求解电势问题.

第一种情况: 接地的球. 我们设想在点 P' 处的虚电荷 $-e$ 对外电场有贡献. 于是

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} \quad \text{球外},$$
$$\varphi = 0 \quad \text{球内}.$$

为了在球面上 φ 能连续, 下列关系必须成立:

$$e' = e \cdot \frac{r'}{r} = e\sqrt{\frac{\rho'}{\rho}}.$$

因此, e' 为常数, 从而问题得解. 球面上感生的总电荷为 $-e'$ (根据高斯定律).

第二种情况: 绝缘球. 设球不带电荷. 于是, 象电荷 $-e'$ 必须被抵消. 为此, 设想在球心有一正电荷 $+e'$, 令 R 代表从球心到场点的距离, 则

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{R} \quad R > a \text{ 时},$$
$$\varphi = \frac{e'}{a} \quad R < a \text{ 时},$$

式中 e' 仍由上述第一种情况中的公式给出.

对于电介质球的情况, 则不能得出封闭形式的解, 而是得到一个无穷级数. 对于两个导体球也是这样.

4. 均匀电场中的导体球. 若 $\rho \to \infty$ 和 $e \to \infty$ 使得 $e/\rho^2 \to E$, 则这一问题可以看作是上述第 3 段中的第二种情况的极限. 由此可见, 在球心产生一个电矩为 p 的电偶极子 (图 11.4):

$$p = e'\rho'.$$

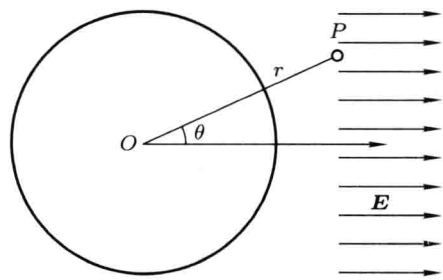


图 11.4

我们也可从下面的特别假设出发:

$$r > a: \quad \varphi = -Ex + A + B\frac{x}{r^3}.$$
$$r < a: \quad \varphi = A,$$

式中 Bx/r^3 为一个电偶极子的电势. 定义 $x = r\cos\theta$, 则也可写成

$$r > a: \quad \varphi = \cos\theta\left(-Er + \frac{B}{r^2}\right) + A.$$

当 $r = a$ 时, 若括号中的量为零, 则可实现 φ 的连续性. 于是,

$$B = Ea^3.$$

但常数 A 仍未确定; 然而, 它并无物理意义.

在球面上感生的电荷分布为

$$4\pi\omega = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \cos\theta\left(E + \frac{2B}{a^3}\right) = 3E\cos\theta.$$

由于 $\oint_{\text{球面}} \cos\theta \mathrm{d}f = 0$, 所以, 球面上的总电荷为

$$\oint \omega \mathrm{d}f = 0.$$

5. 在另一种电介质中的电介质球. 令球的介电常数为 ε_i (= 常数), 而周围介质的介电常数为 ε_a (= 常数). 设距球远处的场为均匀场, 并等于 E. 我们假定:

$$\varphi_a = -E\left(x + \varkappa\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\right) = -E\cos\theta\left(r - \frac{\varkappa}{r^2}\right), \quad r > a;$$
$$\varphi_i = -Dx = -Dr\cos\theta, \quad r < a.$$

在 $r = a$ 处的边界条件为

$$\varphi_i = \varphi_a: \quad E\left(1 - \frac{\varkappa}{a^3}\right) = D,$$
$$\varepsilon_i\frac{\partial\varphi_i}{\partial r} = \varepsilon_a\frac{\partial\varphi_a}{\partial r}: \quad E\left(1 + \frac{2\varkappa}{a^3}\right)\varepsilon_a = D\varepsilon_i.$$

由此得知, 若选取

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}a^3, \quad D = \frac{3\varepsilon_a}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_a}E,$$

则问题得解.

指出如下事实是有益的: 当 $\varepsilon_i = \varepsilon$ 和 $\varepsilon_a = 1$ 时, 便得到与克劳修斯–莫索提关系式 (式 (8.15)) 相似的表达式, 即

$$\varkappa = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}a^3.$$

正是由于这一事实, 克劳修斯和莫索提才能够通过电介质是由微小导体球组成的假设来阐明电介质现象 ①.

① 参看*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. V2, S. 329 或克劳修斯的原著, *Mechanische Wärmetheorie* (Braunschweig, 1887—91), Bd. 2, S. 62.

b. 函数论在二维问题中的应用.

若空间电荷分布只取决于两个笛卡儿坐标, 如 x 和 y, 因而在垂直于第三个坐标轴的所有平面上电荷分布都是相同的, 则在所有这些平面上, 电场也必定等同, 我们称之为二维问题. 这时能用解析函数论来求解.

令 w 为复变数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数:

$$w(z)=u+\mathrm{i}v \quad (u,v\text{为实函数}).$$

因

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial}{\partial x}(u+\mathrm{i}v)=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial y}(u+\mathrm{i}v),$$

故得到柯西–黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\text{ 和 }\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由此得到

$$\nabla^2 u=0\text{ 和 }\nabla^2 v=0,\quad \text{式中 }\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

即, u 和 v 都满足拉普拉斯方程. 因此, 我们将试图确定这样的解析函数, 使得它们的实部 u(或虚部 v) 代表所求的电势. 根据刘维尔定理, 一个处处 (包括无穷远) 正则的函数必为常数. 因此, 必须根据它们的奇点来表征这些函数的特征.

由于按照柯西–黎曼方程, $\partial u/\partial n=\partial v/\partial s$, 所以得到 (图 11.5)

$$\oint\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint\frac{\partial v}{\partial s}\mathrm{d}s=[v]\text{ (绕行一周后 }v\text{ 的增量)}.$$

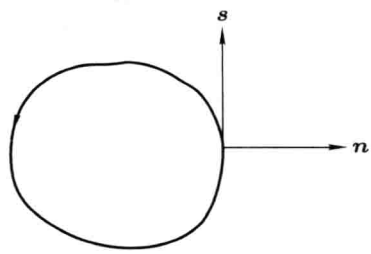


图 11.5

如果我们把电势 φ 和 u 等同起来, 则有

$$\oint\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=[v]=-4\pi\omega.$$

式中 ω 为一个单位高度的圆柱面上的电荷. 若假定电荷均匀分布在一条垂直于 $x-y$ 平面的无限长直线上, 则 ω 代表每单位长度的电荷.

这里, 绕行一周后 v 应有增量. 这正是复数的对数性质; 对 $w=\ln(z-z_0), v$ 得到增量 2π.

如果令

$$w=-\sum_Q 2\omega_Q \ln(z-z_0),$$

则可得到线电荷密度为 $\omega_1,\omega_2,\cdots$, 并垂直于 $x-y$ 平面, 且与 $x-y$ 平面相交于 $z_1,z_2,\cdots$ 的一组线电荷的解. w 的实部就是电势:

$$\varphi=u_P=-\sum_Q 2\omega_Q \ln r_{PQ},$$

式中

$$r_{PQ}=\sqrt{(x_p-x_Q)^2+(y_p-y_Q)^2}.$$

若电荷分布在 $x-y$ 平面上的投影是一个点集, 则在这些点上电势具有对数的奇点.

作为第二个例子, 计算由带电导体楔产生的电势. 我们臆断电势由函数

$$w=z^\mu$$

的虚部给出, 式中 μ 为实数并必须适当地确定. 对于 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则有

$$\varphi=v=\operatorname{Im} w=r'\sin\mu\theta.$$

因楔是导体 (图 11.6), 对所有的 r,r' 必有

$$v(r,\theta=0)=v(r',\theta=2\pi-\alpha),$$

所以 $\mu(2\pi-\alpha)=\pi$. 因此,

$$\mu=\frac{\pi}{2\pi-\alpha}.$$

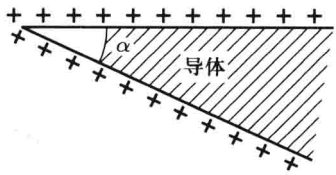


图 11.6

楔上的面电荷密度由下式给出

$$-4\pi\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = \mu r^{\mu-1}\cos\mu\theta\Big|_{\theta=0} = \mu r^{\mu-1}.$$

包含在半径为 r 的圆内的总电荷 $e(r)$ 为

$$-4\pi e(r) = \int_0^{2\pi-\alpha}\frac{\partial v}{\partial r}r\mathrm{d}\theta = -r^{\mu}\cos\mu\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi-\alpha} = +2r^{\mu}.$$

§12. 静磁学

电动力学现象不能仅由电场描述, 而且还需要磁场. 正如电场与电荷相互作用一样, 磁场与所谓磁偶极子相互作用, 借助于后者则能量度磁场 (以后将看到, 也可以用运动电荷来量度磁场).

同电的情况相比, 一个非常本质的差别是并不存在磁单极子, 它们总是成对地出现的, 因此 "总磁荷" 为零. 可以通过把磁偶极子的一个磁极移至足够远处而近似地得到单极子 (即, 很长的偶极子). 吉尔伯特 (Gilbert) 曾证明, 库仑定律对这些单极子也适用.

仿照静电学, 我们引进下列矢量:

磁场强度 $\boldsymbol{H}$, 对应于 $\boldsymbol{E}$;
磁化强度 $\boldsymbol{M}$, 对应于 $\boldsymbol{P}$;
磁感应强度 $\boldsymbol{B}$, 对应于 $\boldsymbol{D}$.

除了静磁学中不存在与传导电荷密度 ρ_t, ω_t 相类似的量这一十分重要的差别之外, 由磁偶极子产生的场的方程组却对应于静电学的场方程组 (式 (2.4)、式 (8.11) 和式 (7.5)):

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = 0 \tag{12.1}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M} \tag{12.2}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{12.3}$$

在界面上, 分量 $H_{//}$ 和 B_n 都是连续的. 若引进磁 (极化) 荷的体密度 σ 和面密度 χ, 则对应于式 (8.8) 和式 (8.9), 有

$$\sigma = -\operatorname{div}\boldsymbol{M} = +\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\boldsymbol{H},$$

$$\chi = -(M_{n_1} + M_{n_2}) = +\frac{1}{4\pi}(H_{n_1} + H_{n_2}).$$

同式 (7.9) 相似, 下式也是正确的:

$$\int \sigma\mathrm{d}V + \oint \chi\mathrm{d}f = 0.$$

仿照静电学 (式 (7.1)), $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 由本构方程 (Constitutive equation)

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{12.4}$$

相关联, 式中 μ 为磁导率, 并且对应于 ε [A–2]. 对于顺磁质 μ 大于 1, 并与温度有关; 对于抗磁质 μ 小于 1, 并与温度无关 [A–2]. 对于铁磁质, 在 $\boldsymbol{B}$ 同 $\boldsymbol{H}$ 之间不存在单值的关系 (例如, 当 $\boldsymbol{H}$ 为零时, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 可能不为零).

由于 $\boldsymbol{H}$ 是无旋的, 它能用一个标势来表示:

$$\boldsymbol{H}=-\operatorname{grad}\psi.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是无源的 (无散的), 它能用一个矢势 $\boldsymbol{A}$ 来表示[①]:

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}. \tag{12.5}$$

然而, 在相差一个标量函数的梯度的范围内, $\boldsymbol{A}$ 仍然是任意的. 因此, 我们甚至能够满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$ 的条件.

作为例子, 求在 z 轴方向、磁矩为 $\boldsymbol{m}$ 的偶极子场的矢势. 如从静电学所知, 它产生的场为

$$\boldsymbol{H}=m\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)=m\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{1}{r}.$$

式中, 微分是对场点坐标施行的.

我们臆断 $\boldsymbol{H}$ 的矢势为

$$\boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{x}}{r^3}=-\boldsymbol{m}\times\operatorname{grad}\frac{1}{r}. \tag{12.6}$$

于是,

$$A_x=m\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r},\quad A_y=-m\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r},\quad A_z=0,$$

所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0.$$

因 $\nabla^2(1/r)=0$, 我们得到 $\boldsymbol{H}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ 的分量为

$$\begin{aligned}
H_x&=m\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\frac{1}{r},\\
H_y&=m\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\frac{1}{r},\\
H_z&=-m\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{r}=+m\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r},
\end{aligned}$$

① 在没有可磁化的物质处, 场 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是一致的, 从而 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{H}$ 的矢势: $\boldsymbol{H}=\operatorname{curl}\boldsymbol{A}$.

从而, 证明了能用上面给出的 $\boldsymbol{A}$ 来表达 $\boldsymbol{H}$. 显然, 对于磁化强度的体分布, 则有

$$\boldsymbol{A}_P = \int \mathrm{d}V_Q \frac{\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{x}_{QP}}{r_{QP}^3} = -\int \mathrm{d}V_Q \boldsymbol{M} \times \mathrm{grad}_P \frac{1}{r_{QP}}, \tag{12.7}$$

按定义, 式中单位体积的磁矩 $\boldsymbol{M}$ 是磁化强度.

现在应该指出, 除了上面用到的在电的和磁的量间的明显相似性

$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}$
μ	ε

之外, 以后将会看到, 还存在另一种更基本的相似性, 即

$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D}$
$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{E}$
$-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}$
$1/\mu$	ε

§13. 单位和量纲

单位和量纲的定义, 在一定程度上是一种公认习惯的问题. 通过约定某些量是无量纲的方式, 能减少基本量纲的个数. 例如, 能为电荷选定一个新量纲, 或者将库仑定律

$$K = k\frac{e^2}{r^2}$$

中的常数 k 选为无量纲的: $[k] = 1$, 并从而将电荷归结为 cm、g 和 s 的组合. 这种定义是任意的. (在万有引力定律

$$F = f\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

的类似情况中, 若质量、长度和力的量纲已定下来, 则 f 就不是无量纲的了.) 令 $[k] = 1$, 对应于 cm · g · s 制. 此时, 因 $V = ke^2/r$ 代表能量, 电荷的量纲变为

$$\begin{aligned}[\text{电荷}]=(\text{erg}\cdot\text{cm})^{\frac{1}{2}} &= ([\mathrm{M}][\mathrm{L}]^3[\mathrm{T}]^{-2})^{\frac{1}{2}} \\ &= (ml^3t^{-2})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}[\text{电场强度}]=[\text{电荷}]\text{cm}^{-2} &= (\text{erg}\cdot\text{cm}^{-3})^{\frac{1}{2}} \\ &= (ml^{-1}t^{-2})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

电荷的绝对静电单位 (esu) 是这样定义的, 使得: 当 K 和 r 用 cm · g · s 单位量度时, k 是无量纲的而且等于 1.

另一方面, 若令 $k = 1/(4\pi)$, 便得到赫维赛德单位. 下文中将用下标 H 表示. 这种单位有某些优点. 它导致

$$K = \frac{e_{\mathrm{H}}^2}{4\pi r^2}, \quad \text{电场强度} = E_{\mathrm{H}} = \frac{e_{\mathrm{H}}}{4\pi r^2}, \quad e_{\mathrm{H}} = \sqrt{4\pi}e,$$

式中, e 为通常静电系单位 (esu) 中的电荷, 从而

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{K} = e\boldsymbol{E} = e_{\mathrm{H}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}.$$

于是在某些其他方程中并不出现因数 4π:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} = \rho_{\mathrm{H}} \quad \text{代替} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

而能量表示为

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int E_{\mathrm{H}}^2 \mathrm{d}V.$$

英译者注: 另一种常用的单位制是有理化 m · kg · s (mks) 制, 或乔吉制. 这种单位制具有赫维赛德单位所具有的有理化 (在许多方程中消除了因数 4π) 的优点, 而且还导致这样的结果, 使得电势、电流和电阻用 "实用" 单位: V、A 和 Ω.

在此单位制中, 基本量和基本单位是: 长度 (m)、质量 (kg)、时间 (s) 和电量 (C). 1C 定义为这样的电量: 在相距 1m 处的两个带有该电量的物体产生的相互作用力为 $1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2$ ($\equiv 1\mathrm{N}=10^5\mathrm{dyn}$).

在有理化 m · kg · s 制中, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, 其中

$$\varepsilon_0 = 8.454\times 10^{-12}\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-3}$$

称为自由空间的电容率. 电介质由电容率 $\varepsilon = \varkappa_e\varepsilon_0$ 所表征, 其中 $\varkappa_e$ 叫做物质的相对电容率或介电常数. 在静磁学中, 自由空间的磁导率 $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}^{-2}$. 仿照电的情况, 磁性物质的磁导率写成 $\mu = \varkappa_m\mu_0$.

第二章

稳 恒 电 流

§14. 稳恒电流理论

a. 定义

单位时间内通过导体整个截面的电量叫做电流强度 J:

$$J = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}. \tag{14.1}$$

电流密度 $\boldsymbol{i}$ 定义为一个矢量: 其方向与电流的方向一致, 其量值等于每秒通过垂直于 $\boldsymbol{i}$ 的单位截面的电量. 若在一导体中的电流密度与位置无关, 则

$$|\boldsymbol{i}| = \frac{J}{q},$$

式中 q 为导体的截面①. 由于在法线 $\boldsymbol{n}$ 方向通过面元 $\mathrm{d}f$ 的电流强度为 $i_n \mathrm{d}f$, 所以一般地下式成立:

$$J = \int_q i_n \mathrm{d}f. \tag{14.2}$$

通常, 电流强度用电磁单位 (emu) 量度. 然而, 也能用静电单位定义. 在后一情况中其量纲为

$$[J] = [Q]\mathrm{s}^{-1} = (\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} = (ml^3t^{-4})^{\frac{1}{2}},$$
$$[i] = [J]\mathrm{cm}^{-2} = (\mathrm{erg}\cdot\mathrm{cm}^{-3}\cdot\mathrm{s}^{-2})^{\frac{1}{2}} = (ml^{-1}t^{-4})^{\frac{1}{2}}.$$

b. 连续性方程

根据电荷守恒定律, 单位时间内从一闭曲面 F 内流出的电量等于单位时间内该闭曲面内电量的减少:

$$\oint_F i_n \mathrm{d}f = -\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \mathrm{d}V. \tag{14.3}$$

① 实为垂直于电流密度的截面.——中译者注

若根据高斯定理将面积分变换为体积分, 那么, 由于所考察的体积是任意的, 于是, 显然有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0. \tag{14.4}$$

这一关系式是普遍成立的, 称为连续性方程.

在稳恒电流的情况中, 按定义, 所有的函数都是与时间无关的: $\partial/\partial t \equiv 0$. 于是得到:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0, \quad \oint i_n \mathrm{d}f = 0. \tag{14.5}$$

c. 欧姆定律

从实验中发现, 当物质中有电流时, 矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 之间存在着如下的唯象关系:

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}. \tag{14.6}$$

式中, σ 为该物质的电导率. 上式称为欧姆定律. 若假设有一正比于速度的阻力作用在组成电流的运动带电粒子上, 则能微观地阐明这一关系.

令 N_+ 和 N_- 分别为单位体积内带正电荷 $+e$ 和负电荷 $-e$ 的粒子数, 则

$$\rho = (N_+ - N_-)e,$$
$$\boldsymbol{i} = N_+ \cdot e \cdot \boldsymbol{v}_+ - N_- \cdot e \cdot \boldsymbol{v}_-,$$

式中 $\boldsymbol{v}_+$ 和 $\boldsymbol{v}_-$ 分别为带正电荷和负电荷的粒子的速度. 于是, 欧姆定律意味着每一粒子受到一个阻力

$$\boldsymbol{K}_\pm = -w_\pm \boldsymbol{v}_\pm,$$

式中 w 为阻力率①. 这里的意义是: 当

$$\boldsymbol{K}_\pm = \mp e\boldsymbol{E},$$

即

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = -w_\pm \boldsymbol{v} \pm e\boldsymbol{E} = 0$$

时, 达到稳定状态. 实际上, 在极短时间内即达到这一稳定状态. 于是,

$$\pm \boldsymbol{v}_\pm = \frac{e}{w_\pm}\boldsymbol{E},$$

由此得到

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}, \quad \text{式中} \quad \sigma = e^2\left(\frac{N_+}{w_+} + \frac{N_-}{w_-}\right). \tag{14.7}$$

① 原文为 specific resistance, 按通用译名应为电阻率. 但此处并非我们通常的电阻率 $1/\sigma$ (σ 为电导率), 按其物理意义姑且译为阻力率, 以示区别. —— 中译者注

对金属而言, σ 中的第一项实际上等于零. 金属中电子受到的摩擦力正比于它们相对于正离子点阵的速度.

电导率的量纲为①

$$[\sigma] = \mathrm{s}^{-1}.$$

只要电流与时间无关, 就仍然有

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} = 0,$$

即, 从环绕闭合路径运动的带电粒子获取功是不可能的.

对于均匀导体 (即, 由均匀材料构成的、具有恒定截面积 q 的导体), 欧姆定律取实验物理学中常用的形式 (参见图 14.1):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = l|\boldsymbol{E}|,$$
$$J = q|\boldsymbol{i}|,$$

即

$$\varphi_1 - \varphi_2 = JR, \tag{14.8}$$

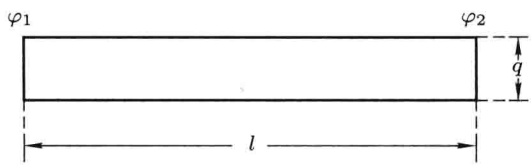


图 14.1

式中 $R = l/(\sigma q)$. 电阻 R 与导体的大小有关.

如我们即将看到的, 式 (14.8) 对于任意形状的导体也是成立的. 然而, 在这种情况中, R 不能如此简单地表达出来.

电阻的量纲为②

$$[R] = [\sigma \mathrm{cm}]^{-1} = \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{s} = 1/v.$$

d. 单位

电流强度:

$$1 \text{ 电磁单位 (emu)} = 3 \times 10^{10} \text{ 静电单位 (esu)} = 10 \text{ A};$$
$$1 \text{ A} = 0.1 \text{ emu} = 3 \times 10^9 \text{ esu}$$

① 采用静电单位.
② 采用静电单位.

电势:

$$1\ \text{esu} = 3 \times 10^{10}\ \text{emu} = 300\ \text{V}$$

$$1\ \text{V} = 10^8\ \text{emu} = 1/300\ \text{esu}.$$

电阻:

$$1\ \Omega = 1\ \text{V}/1\ \text{A} = 10^9\ \text{emu} = 1/(9 \times 10^{11})\text{esu}.$$

e. 焦耳定律

凡电流流过的地方都产生热, 而且单位时间单位体积所释放的热量为 ①

$$Q = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} = \sigma E^2 \tag{14.9}$$

由于

$$[\sigma E^2] = \text{erg} \cdot (\text{s} \cdot \text{cm}^3)^{-1},$$

所以量纲是正确的.

这一定律也可以从微观角度的考虑而获得. 作用在一个粒子上的力 $\boldsymbol{K} = e\boldsymbol{E}$ 单位时间所作的功为

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v} = e(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}).$$

所以单位时间单位体积的功为

$$e \cdot (N_+ \boldsymbol{v}_+ - N_- \boldsymbol{v}_-) \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}.$$

这一在导体内反抗阻力所消耗的功完全转化为热, 称为焦耳热.

长度为 l、横截面为 q 的均匀导体每秒所释放的总热量为

$$\overline{Q} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} ql = J(\varphi_1 - \varphi_2) = J^2 R. \tag{14.10}$$

我们将会看到, 表达式 $J(\varphi_1 - \varphi_2)$ 和 J^2R 对于任意导体也是正确的.

单位时间所释放的热量 (= 功率 = 能量/时间) 的单位为

$$1\ \text{V} \cdot 1\ \text{A} = 1\ \text{W} = 10^7\ \text{erg} \cdot \text{s}^{-1} = 1\ \text{J/s}.$$

f. 导体中的电流

在由均匀材料制成的导体中, σ 与位置无关, 所以有

$$\boldsymbol{E} = -\text{grad}\,\varphi, \quad \boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E} = -\sigma \text{grad}\,\varphi,$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{i} = 0, \quad \text{div}\,\boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0,$$

① 此式采用能量的单位, 例如 erg、J, 而不是通常的热量单位卡.——中译者注

因此 $\rho = 0$. 然而, 一般来说存在面电荷. 而且在导体表面上

$$i_n = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

在非均匀材料构成的导体中, 我们有

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (\rho \neq 0). \tag{14.11}$$

这一方程同流体力学中的势流方程极为相似. 所以电流的流线恰似流体力学中的势流的流线.

从数学的观点来说, 电流分布的问题如下所述: 两电极间的电势差 $\varphi_1 - \varphi_2$ 已给定 (图 14.2). 在表面上, $\sigma(\partial\varphi/\partial n) = 0$. 在内部, 我们有微分方程式 (14.11). 这些要求决定了电流分布 [A–3]. 由于 $\sigma(\partial\varphi/\partial n)$ 只在电极 1 和 2 上不为零, 所以由高斯定律得到

$$+\int_1 \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}f = -\int_2 \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}f = J.$$

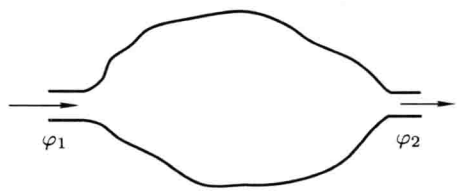


图 14.2

对于给定的几何形状, 若 φ 乘以一常数因数, 则电流强度也被乘以同一因数. 由此可见, 对于任意导体, 下式成立:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = JR.$$

现在我们也能以更普遍的方式证明焦耳定律了. 导体中产生的总热量为

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= \int \sigma E^2 \mathrm{d}V = \int \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{i} \cdot \operatorname{grad} \varphi \mathrm{d}V \\ &= +\int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i} \mathrm{d}V - \int \operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{i}) \mathrm{d}V = -\oint \varphi i_n \mathrm{d}f. \end{aligned}$$

因为, 只是在两电极上 $i_n \neq 0$, 所以我们有

$$\overline{Q} = (\varphi_1 - \varphi_2)J = J^2 R.$$

若存在多个电极, 则其结果为上式之和.

§15. 稳恒电流的磁场

我们暂且再把磁场看作是能用磁偶极子测量的.

奥斯特在他的著名实验中发现: 沿环绕电流的闭合曲线所取的稳恒电流所产生的磁场强度的线积分由下式给出

$$\oint H_s \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{c} J = 4\pi J_{\mathrm{emu}}. \tag{15.1}$$

式中 c 为光速, J 为静电单位制的电流强度, 而 J_{emu} 为电磁单位制的电流强度. 对于无限长载流柱体, 在柱坐标[①]中, 柱体外磁场强度的径向分量和角分量分别为

$$H_r = 0, \quad H_\varphi = \frac{2J}{c}\frac{1}{r}. \tag{15.2}$$

绕行指向和电流流向之间的关系如图 15.1 所示. 然而, 只当 $\boldsymbol{H}$ 被看作是矢量时这种关联才是必要的. 反之, 若将 $\boldsymbol{H}$ 看作反对称张量, 则这种关联便不必要了.

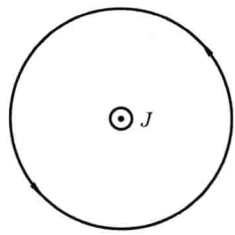


图 15.1 电流 J 流向纸面外

由于 $\boldsymbol{H}$ 的引出类似于电场强度, $\boldsymbol{H}$ 的量纲为

$$[H] = [E] = Q \cdot \mathrm{cm}^{-2},$$

由

$$[J] = Q \cdot \mathrm{s}^{-1},$$

于是得到

$$[c] = \mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

因此, c 确实具有速度的量纲.

我们将上述那些关系看作是稳恒电流的基本定律. 对应于 $\boldsymbol{E}$ 的方程为

$$\oint E_n \mathrm{d}f = 4\pi e, \quad \mathrm{curl}\, \boldsymbol{E} = 0,$$

① 英译版误为 "极坐标". —— 中译者注

这里我们有关于 $\boldsymbol{H}$ 的类似定律:

$$\oint H_s \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{c} J, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0. \tag{15.3}$$

(因为 $\oint_{\text{柱面}} H_n \mathrm{d}f = 2\pi r H_r = 0$, 所以 $\boldsymbol{H}$ 的第二个方程要求 $H_r = 0$.) 式 (15.1) 不仅在导体外成立, 而且在导体内部也成立:

$$\oint_c H_s \mathrm{d}s = \frac{4\pi}{c} J_F = \frac{4\pi}{c} \int_F i_n \mathrm{d}f, \tag{15.4}$$

式中 J_F 为流过由任意曲线 C 所包围的曲面 F 的电流强度 (图 15.2). 若导体是圆柱对称的 (半径为 a), 则我们知道, 在稳恒态情况下电流密度是均匀的 [A–3]. 若曲线 C 为一半径为 r 的圆, 则有

$$J_F = J\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad (r < a),$$

$$2\pi r H_\varphi = \frac{4\pi}{c} J \left(\frac{r}{a}\right)^2 : \begin{cases} H_\varphi = \dfrac{2J}{c} \dfrac{r}{a^2}, & (r \leqslant a), \\ H_\varphi = \dfrac{2J}{c} \dfrac{1}{r}, & (r \geqslant a). \end{cases}$$

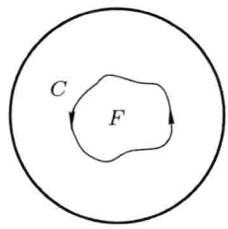


图 15.2

应用: 螺线管. 我们假定匝距远小于其长度 h 和直径. 在这一极限情况中, 我们能用一个在螺线管内部是均匀的、而在其外部为零的磁场作为实际磁场的粗略近似. 对于如图 15.3 所示的积分路径, 于是有

$$\int i_n \mathrm{d}f = NJ, \quad \oint H_s \mathrm{d}s = Hh = \frac{4\pi}{c} NJ,$$

式中 N 为匝数, J 为每匝的电流强度. 从而

$$H = \frac{4\pi N}{h} \frac{J}{c}. \tag{15.5}$$

螺线管内的磁场强度正比于电流强度.

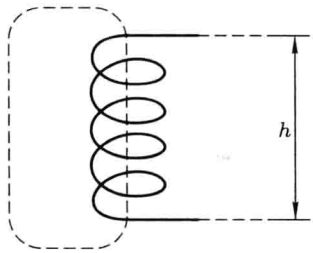


图 15.3

正如方程式 $\oint E_n \mathrm{d}f = 4\pi e$, 与之对应有等效的条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$, 对应于积分定律 $\oint H_s \mathrm{d}s = 4\pi J_F/c$ (式 (15.4)), 也存在与它等效的微分定律. 根据斯托克斯定理, 我们有

$$\int \operatorname{curl}_n \boldsymbol{H} \mathrm{d}f = \frac{4\pi}{c} \int i_n \mathrm{d}f.$$

由于此式对完全任意的曲面都成立, 所以有

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{i} = 4\pi \boldsymbol{i}_{\mathrm{emu}}. \tag{15.6}$$

这是在给定稳恒电流时确定其磁场的微分定律.

重要记注. 我们已看到, 对于任一矢量 $\boldsymbol{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{curl} \boldsymbol{a} = 0$. 所以只当 $\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0$ 时微分定律式 (15.6) 才是正确的. 然而, 对于非稳恒情况, 由于一般地 $\partial\rho/\partial t \neq 0, \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0$ 不再成立. 因此, 在这种情况中, 式 (15.6) 所表示的 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的关系也不再是正确的了.

利用矢势 $\boldsymbol{A}$ 计算 $\boldsymbol{H}$

若令

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}, \tag{15.7}$$

则条件 $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$ 自动地被满足. 现在必须来确定矢势 $\boldsymbol{A}$. 如在 §12 中曾提到的, 在相差一个标量函数的梯度范围内 $\boldsymbol{A}$ 是任意的. 即, 对于

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \psi$$

(式中 ψ 是任意的标量函数), $\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}'$ 仍然成立. 例如, 通过要求

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0, \tag{15.8}$$

能够确定函数 ψ. 对于稳恒电流的情况, 这是相当方便的.

由于矢量恒等式

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{a} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{a} - \nabla^2 \boldsymbol{a}, \tag{15.9}$$

矢势必须满足如下条件

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{15.10}$$

(式中采用的符号 ∇^2 代表用笛卡儿坐标表示的拉普拉斯算符, 并作用于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的每一个分量. 在曲线坐标中, 情况稍许复杂些.) 若满足下述条件:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0,\quad \nabla^2\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \tag{15.11}$$

则式 (15.10) 亦满足. 式 (15.11) 的第二个方程的每一分式与式 (3.5) $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$ 相似, 而后者的解已知为: $\varphi_P=\int\rho_Q\mathrm{d}V_Q/r_{PQ}$. 所以

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{i}_Q\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}. \tag{15.12}$$

我们还要证明 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$. 两次应用恒等式 (4.10)

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})\equiv f\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}f,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_P\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)&=\left(\operatorname{grad}_P\frac{1}{r_{PQ}}\right)\cdot\boldsymbol{i}_Q=-\left(\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r_{PQ}}\right)\cdot\boldsymbol{i}_Q\\&=-\operatorname{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)+\frac{1}{r_{PQ}}\operatorname{div}_Q\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

由此, 并考虑到 $i_n=0$ 和 $\operatorname{div}\boldsymbol{i}=0$, 于是有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_P\boldsymbol{A}&=-\frac{1}{c}\int\operatorname{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{i}_Q}{r_{PQ}}\right)\mathrm{d}V_Q+\frac{1}{c}\int\frac{1}{r_{PQ}}(\operatorname{div}\boldsymbol{i})_Q\mathrm{d}V_Q\\&=-\frac{1}{c}\oint\frac{i_n}{r_{PQ}}\mathrm{d}f_Q+\frac{1}{c}\int\frac{1}{r_{PQ}}(\operatorname{div}\boldsymbol{i})_Q\mathrm{d}V_Q=0.\end{aligned}$$

欲由 $\boldsymbol{A}$ 计算 $\boldsymbol{H}$, 现在我们应用恒等式

$$\operatorname{curl}(f\boldsymbol{a})\equiv f\operatorname{curl}\boldsymbol{a}+\operatorname{grad}f\times\boldsymbol{a}, \tag{15.13}$$

并考虑到 curl_P 对 $\boldsymbol{i}_Q$ 无作用, 于是得到

$$\boldsymbol{H}_P=\operatorname{curl}_P\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\int\operatorname{grad}_P\frac{1}{r_{PQ}}\times\boldsymbol{i}_Q\mathrm{d}V_Q,$$

从而

$$\boldsymbol{H}_P=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_Q\times\frac{(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^2}\mathrm{d}V_Q=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_Q\times\frac{\boldsymbol{t}}{r_{PQ}^2}\mathrm{d}V_Q, \tag{15.14}$$

式中 $\boldsymbol{t}$ 代表单位矢量 $\boldsymbol{t}=(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)/r_{PQ}$.

极限情况: 导线

对于其截面的线度远小于其长度的导体, 能够应用下述的理想化数学方法 (虽然, 它并非总是允许的).

令 Q 为导体的截面, $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为线元 (参见图 15.4). 由于 $\boldsymbol{i}$ 平行于 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$, 所以,

$$\int_{(\text{导体})}\boldsymbol{i}\mathrm{d}V=\int_{(\text{导体})}\boldsymbol{i}\mathrm{d}f|\mathrm{d}\boldsymbol{s}|=\int_s\int_Q i_n\mathrm{d}f\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_s J\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

于是有

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{J}{c}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q}{r_{PQ}} \tag{15.15}$$

和

$$\boldsymbol{H}_P=\frac{J}{c}\int\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q\times(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^3}=\frac{J}{c}\int\mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q\times\frac{\boldsymbol{t}}{r_{PQ}^2}. \tag{15.16}$$

这一表达式以毕奥–萨伐尔定律的名称而为人们所熟知.

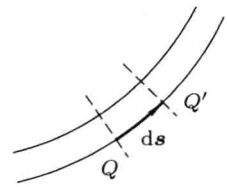


图 15.4

人们常说, 电流元 $J\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 产生的磁场强度为

$$\text{“d}\boldsymbol{H}\text{”}=\frac{J}{c}\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{t}}{r^2}.$$

然而, 由于电流元不满足连续性方程, 所以, 这样定义的 “$\mathrm{d}\boldsymbol{H}$” 不满足我们作为出发点的方程组. 实际上并不存在孤立的电流元. 所以, 毕奥–萨伐尔定律只能应用于闭合回路或无限长导体, 可以认为后者在无穷远处是闭合的.

作为验证, 我们将毕奥–萨伐尔定律应用于无限长导线 (图 15.5). 若这样选择坐标, 使 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 平行于 z 轴, 则 $x_P-x_Q=r=$ 常数, 于是有

$$H_y=\frac{J}{c}r\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(z^2+r^2)^{3/2}}=\frac{J}{c}r\cdot\left.\frac{z\dfrac{1}{r^2}}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right|_{-\infty}^{+\infty}=2\frac{J}{c}\frac{1}{r}.$$

这正是我们曾在式 (15.2) 中得到过的公式.

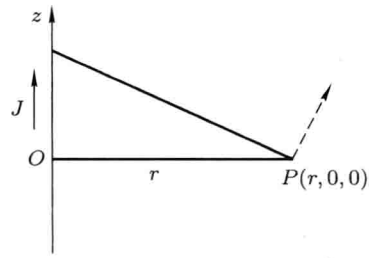


图 15.5

§16. 闭合电流回路的磁场与磁偶极子分布的磁场的等效性

我们首先对由闭合线电流回路产生的矢势进行变换, 这将引出磁矩的概念. 为此, 需要一个特殊形式的斯托克斯定理. 按照式 (15.13), 对于同位置无关的一个矢量 $\boldsymbol{a}$, 有

$$\operatorname{curl}(f\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a}.$$

对矢量 $f\boldsymbol{a}$ (其中 $\boldsymbol{a}$ 为恒矢) 应用斯托克斯定理 (式 (2.5)), 我们得到[①]

$$\oint (f\boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int (\operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}f,$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \oint f\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} \cdot \int \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} f\mathrm{d}f.$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 为任意矢量, 所以下式必定成立

$$\oint f\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} f\mathrm{d}f. \tag{16.1}$$

对矢势 $\boldsymbol{A}_P = (J/c)\oint \mathrm{d}\boldsymbol{s}_Q/r_{PQ}$, 此积分定理给出

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{J}{c}\int \boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}}\mathrm{d}f. \tag{16.2}$$

式中只有积分面的边界曲线 (即导电回路) 已确定, 而积分面本身是任意的. 另一方面, 在 §12 中我们曾看到, 具有磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的偶极子的矢势为

$$\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{m} \times \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r_{PQ}}. \tag{16.3}$$

于是, 我们看到, 由一闭合线电流回路所产生的矢势, 从而其磁场, 等效于每单位面积具有磁矩

$$\boldsymbol{m} = \frac{J}{c}\boldsymbol{n}$$

① 下面几个式子中标量 f 与面元 $\mathrm{d}f$ 中的 f 符号相同, 切勿混淆!——中译者注

的偶极子的一个面分布所产生的磁场, 式中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面的法线. 除边界曲线由电流回路确定外, 该曲面的选择是任意的.

特殊情况: 平面电流回路. 我们选择回路所环绕的平面作为积分面. 在此面上磁矩的分布是均匀的. 若场点距电流很远: $r_{PQ} \gg a$, 其中 a, 例如, 为回路的直径, 则得到进一步的简化. 于是, 对于面上的所有点 Q, 能够用 r_{PO} 来代替 r_{PQ}, 此处 O 为面上的任一固定点. 若 F 为该面的面积, 则

$$\boldsymbol{A}_P = -\frac{J}{c}F\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PO}} = -\boldsymbol{M} \times \operatorname{grad}_P \frac{1}{r_{PO}},$$
$$\boldsymbol{M} = \frac{J}{c}F\boldsymbol{n}.$$

于是, 在远距离处, 闭合电流回路的磁场等效于具有如上式所给出的磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的磁偶极子的磁场.

我们即将看到, 方才对电流回路所作的讨论也能够类似地应用于电流的体分布. 这些等效性是安培发现的. 实际上, 产生磁场的并不是磁偶极子, 而是电流回路, 这也是安培的见解. 在这一理论中, 磁偶极子并不是基本量; 相反, 磁性起源于分子和原子内部的微观电流 (叫做安培电流).

我们现在将上述思路推广而来考察偶极子的体分布. 令 $\boldsymbol{M}$ 代表单位体积的磁矩 (磁化强度), 则所产生的场的矢势为

$$\boldsymbol{A} = \int \boldsymbol{M} \times \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \mathrm{d}V. \tag{16.4}$$

我们希望将上式变换为

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{i}_m}{r}\mathrm{d}V + \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}_m}{r}\mathrm{d}f. \tag{16.5}$$

此式代表由分子体电流 $\boldsymbol{i}_m$[①] 和分子面电流 $\boldsymbol{j}_m$ 所产生的矢势. 为了进行这一变换, 我们需要一个以如下方式从高斯定理导出的积分定理: 由于恒等式

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \equiv \boldsymbol{b}\operatorname{curl}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{curl}\boldsymbol{b}, \tag{16.6}$$

利用一个恒矢 $\boldsymbol{a}$, 高斯定理式 (2.9) 给出

$$\boldsymbol{a} \cdot \oint \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{n}\mathrm{d}f = \oint (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}f = -\boldsymbol{a} \cdot \int \operatorname{curl}\boldsymbol{b}\mathrm{d}V.$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 是任意的, 所以有

$$\oint \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}\mathrm{d}f \equiv \int \operatorname{curl}\boldsymbol{b}\mathrm{d}V. \tag{16.7}$$

① 这里 $\boldsymbol{i}_m$ 和 $\boldsymbol{j}_m$ 实际上分别为分子体电流密度和面电流密度.——中译者注

借助于这一积分表达式, 并考虑到

$$\operatorname{curl}(f\boldsymbol{a}) = f\operatorname{curl}\boldsymbol{a} + \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{a},$$

则由式 (16.4) 得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \int \frac{1}{r}\operatorname{curl}\boldsymbol{M}\mathrm{d}V - \int \operatorname{curl}\left(\frac{\boldsymbol{M}}{r}\right)\mathrm{d}V \\ &= \int \frac{1}{r}\operatorname{curl}\boldsymbol{M}\mathrm{d}V - \oint \frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}}{r}\mathrm{d}f.\end{aligned}$$

所以, 磁化强度的体分布等效于体电流密度 $\boldsymbol{i}_m$ 和面电流密度 $\boldsymbol{j}_m$, 其中

$$\boldsymbol{i}_m = c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}, \tag{16.8}$$

$$\boldsymbol{j}_m = -c\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}. \tag{16.9}$$

上文考察的线电流回路的情况作为特殊情况包含在这个结果中. (在导体内部 $\boldsymbol{M}$ 是恒矢; 过渡到二维情况. 面电流转变为线电流, 并且存在每单位面积的磁矩, 而不是单位体积的磁矩.)

分子电流 $\boldsymbol{i}_m$ 和 $\boldsymbol{j}_m$ 与磁矩分布的等效性表明将磁性归因于这种分子电流的可能性, 正如安培所断言的那样.

为了同分子电流相区别, 我们将上文简单地称作 "电流" 的量命名为传导电流, 并将相应的电流密度写作 $\boldsymbol{i}_c$. 此外, 还有第三种电流, 即所谓运流电流, 它是由宏观电荷的运动形成的. 若 ρ 为运动物体的体电荷密度, $\boldsymbol{v}$ 为其速度, 则运流电流密度由下式给出

$$\boldsymbol{i}_k = \rho\boldsymbol{v}. \tag{16.10}$$

罗兰曾由实验证明, 由这种运流电流产生的磁场与通常的传导电流产生的磁场完全相同, 即下式成立

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}_c + \boldsymbol{i}_k). \tag{16.11}$$

这几段中所讨论的分子电流同磁矩分布的等效性论证了 §12 中所述的关于电介质的第二种相似性. 即, 微观磁场强度的平均值必须认为是与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 等同, 而不是与 $\boldsymbol{H}$ 等同. 这一论断可由下述事实获得: 对于稳恒情况,

$$\begin{aligned}&(1)\ \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \\ &(2)\ \operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{i}_c + \boldsymbol{i}_k + \boldsymbol{i}_m).\end{aligned} \tag{16.12}$$

式 (16.12) 是根据式 (12.2) 的关系 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$ 以及关于 $\operatorname{curl}\boldsymbol{H}$ 和 $\operatorname{curl}\boldsymbol{M}$ 的式 (16.11) 和式 (16.8) 两式导出的.

若存在面电流 $\boldsymbol{j}_m$, 则磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 具有不连续的切向分量. 对如图 16.1 所示的积分路径应用斯托克斯定理, 求得

$$\boldsymbol{B}_{//}^{(i)} - \boldsymbol{B}_{//}^{(e)} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{j}_m = 4\pi \boldsymbol{M}_{//}. \tag{16.13}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为法向单位矢量, $\boldsymbol{M}_{//}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 在曲面上的切向分量.

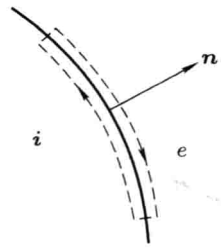


图 16.1

因此, $\boldsymbol{B}$ 场的旋度由存在的全部电流给出. 类似地, $\boldsymbol{E}$ 的源头 (散度) 由存在的全部电荷确定, 而且 $\boldsymbol{E}$ 是微观电场强度的平均值. 所以, 在这种较深刻的相似性的意义上, $\boldsymbol{B}$ 对应于 $\boldsymbol{E}$. 然而, $\boldsymbol{B}$ 是无源涡旋场, 而 $\boldsymbol{E}$ (在准静态中) 是无旋有源场 (所以算符 curl 与 div 亦须彼此对换).

同 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ 类似, 按照安培的观点, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}$ 只是一个辅助量. 在界面上, $\boldsymbol{B}$ 的法向分量是连续的, 而 $\boldsymbol{H}$ 具有连续的切向分量. 所以, 磁的量与电的量之间的更为本质的相似性为

$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{E}$
$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{D}$
$-\boldsymbol{M}$	$\boldsymbol{P}$

§17. 有质动力

直到现在, 我们已定义了 $\boldsymbol{H}$ 为作用在单位磁极上的力. 然而, 也能用作用在载流导体元上的力来定义 $\boldsymbol{H}$. 磁场作用在导体上的力叫做磁有质动力.

导体 L 作用在 P 点处 (图 17.1) 的单位磁极上的力为

$$\boldsymbol{K}_P = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{i}_Q \times (\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q)}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q. \tag{17.1}$$

另一方面, 该单位磁极在导体上 Q 点处所产生的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}_{QP} = \frac{\boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_P}{r_{PQ}^3}.$$

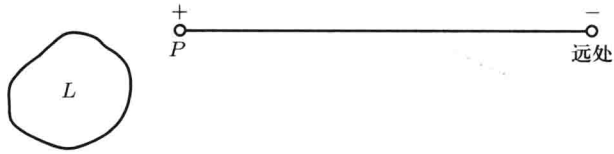


图 17.1

根据作用和反作用原理 (作用 = 反作用), 在 P 点处的单位磁极作用在导体上的力必须满足

$$\boldsymbol{K}_L = \int \boldsymbol{k}_{QP}\mathrm{d}V_Q = -\boldsymbol{K}_P,$$

式中 $\boldsymbol{K}_L$ 为总力 (即遍及所有的 Q 点积分而得的力). 因此

$$\boldsymbol{K}_L = \frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q \times \boldsymbol{H}_{QP}\mathrm{d}V_Q.$$

于是, 磁场强度 $\boldsymbol{H}_{QP}$ 作用在体积元 $\mathrm{d}V_Q$ 上的力似乎由 $(1/c)\cdot(\boldsymbol{i}_Q \times \boldsymbol{H}_{QP})\mathrm{d}V_Q$ 给出. 然而, 这一考虑只是探索性的. 首先, 尽管单位磁极的假设不是令人十分满意的, 但是, 如果第二个磁极是足够远, 毕竟还能实现. 然而, 上述考虑为什么不可能是严密的, 其主要原因在于: 作用和反作用原理仅适用于整个导体, 而并不能根据它求得作用于个别体积元上的力.

然而, 已证明, 单位体积的力确实为

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{H}. \tag{17.2}$$

这是自然界的一个新基本定律. 由此得知, 作用于导体线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 上的磁力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K} = \frac{J}{c}\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{H}. \tag{17.3}$$

由此能够证明: 位于均匀磁场 $\boldsymbol{H}$ 中的载流为 J 的导线回路所经受的转矩与作用在磁矩为 $\boldsymbol{M} = (J/c)\int_F \boldsymbol{n}\mathrm{d}f$ 的刚性磁偶极子上的转矩相同, 即 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}$. 安培仔细地研究了作用在导体上的这些磁有质动力, 并由此证实了在闭合电流回路与偶极子分布之间 (以及关于这些力的效应) 的完全等效性.

对于运流电流 $\boldsymbol{i}_k = \rho\boldsymbol{v}$ (其中 ρ 为运动物体的体电荷密度, $\boldsymbol{v}$ 为其速度), 上述关于力的定律也成立. 于是, 作用在具有电荷 $e = \int \rho\mathrm{d}V$ 的物体上的总力 $\boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{k}\mathrm{d}V$ 为

$$\boldsymbol{K} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}. \tag{17.4}$$

这个力以荷兰物理学家 H. A. 洛伦兹的名字命名为洛伦兹力. 正如 $\boldsymbol{E}$ 能由静止电荷定义和量度那样, $\boldsymbol{H}$ 能借助于运动电荷来定义和量度.

因此, 在电场和磁场同时存在的普遍情况中, 下述力的定律成立: 运动的带电物体每立方厘米上所受的力是由下述两个部分组成的

$$\boldsymbol{k}_e = \rho \boldsymbol{E} \quad (\text{电力}),$$

和 (17.5)

$$\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{H} \quad (\text{磁力}).$$

式中 $\boldsymbol{i}$ 为总电流密度, 如果存在运流电流, 也包含在内. 这一定律是十分普遍地成立的, 并不局限于稳恒电流的情况.

作用在电荷 e 上的总力包含下述两个部分

$$\boldsymbol{K}_e = e\boldsymbol{E}$$

和 (17.6)

$$\boldsymbol{K}_m = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}.$$

上述定律已由阴极射线 (电子) 在电场和磁场中的偏转而得到确证. 还必须注意, 由于洛伦兹力垂直于速度的方向, 所以它并不作功.

若 $\boldsymbol{H}_1$ 是由闭合线电流回路 (用 2 来标记) 所产生的, 则

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{J_2}{c}\oint_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)}{r_{12}^3}, \tag{17.7}$$

而作用在另一导体 (用 1 来标记) 的线电流元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$ 上的磁力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}_m^{(1)} = \frac{J_1 J_2}{c^2}\oint_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times (\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2))}{r_{12}^3}. \tag{17.8}$$

这就是我们根据经验所能说的全部 (线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$ 是能运动的). 反之, 若略去积分而探求确定两电流元相互作用的基本定律, 则是危险的. 在麦克斯韦理论发表以前, 人们确曾按 "超距作用" 的观点这样做过. 然而, 这样做时, 由于其他导体元的贡献不能略去, 所以人们超出了实验所能确定的范围. 因此, 解答不是唯一的. 对于这一基本定律所能要求的只是: 对它积分, 必须给出式 (17.8). 例如, 格拉斯曼 (Grassman) 曾得到这个 "基本定律"

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}_m^{(1,2)} = \frac{J_1 J_2}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1 \times (\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{n}_{21})}{r_{12}^2},$$

式中

$$\boldsymbol{n}_{21}=\frac{\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2}{r_{12}}$$

将上式对 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ 积分, 则得式 (17.8). 但是, 它表明

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}_m^{(1,2)}\neq-\mathrm{d}\boldsymbol{K}_m^{(2,1)}.$$

然而, 对于整个导体, 作用和反作用原理仍然是成立的. 另外, 还有一些能导致相同结果的 "基本定律".

在历史上, 最早的形式是安培根据如下的一些公理建立的: $\mathrm{d}\boldsymbol{K}^{(1,2)}$ 应具有 $\boldsymbol{n}_{12}=(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)/r_{12}$ 的方向, 应是 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ 的双线型, 并且对于 $r_{12},\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2$ 应是零级齐次的. 因此, 它必须具有如下的形式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{K}^{(1,2)}=\frac{J_1J_2}{c^2}\frac{\boldsymbol{n}_{12}}{r_{12}^2}\{\alpha(\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2)+\beta(\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{n}_{12})(\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\cdot\boldsymbol{n}_{12})\}.$$

根据式 (17.8), 系数 α,β 由下述要求确定:

$$\oint_2\mathrm{d}\boldsymbol{K}^{(1,2)}\equiv\mathrm{d}\boldsymbol{K}_m^{(1)}.$$

由于在非稳恒电流的情况中, 很难说磁场 (它实际是力的量度) 由哪个电流元产生. 所以这些 "基本定律" 完全缺乏物理意义. 从场论的观点来看, 人们不能探索这样的 "基本定律".

§18. 电力和磁力的作用和反作用原理. 麦克斯韦应力张量

在本节中只考虑电荷和电流的体分布.

首先介绍张量的概念. 一个三维空间中的张量是满足如下要求的九个量 $T_{ik}(i,k=1,2,3)$ 的一个系统: 当坐标系变换时, 它们应像两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量的积 a_ib_k 那样变换 (然而, 不需要 T_{ik} 能表示为 a_ib_k 的形式). 一个张量可能具有特殊的对称性:

$$T_{ik}=T_{ki},\quad \text{对称张量};$$
$$S_{ik}=-S_{ki},\quad \text{反对称张量}.$$

若只考虑坐标系的转动而不考虑反演[①], 则三维空间的反对称张量像矢量一样地变换. 由于 S_{ik} 像 $a_ib_k-a_kb_i$ 那样地变换, 所以反对称张量像矢量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 那样地变换.

① 参见 §2 的讨论.

力是一般矢量 (极矢), 电流密度 $\boldsymbol{i}$ 亦然. 因此, 根据式 (17.2), $\boldsymbol{H}$ 显然是反对称张量. 也能从毕奥–萨伐尔定律式 (15.16) 看出这一点. 本来应该把 H_x, H_y 和 H_z 分别写成 H_{23}, H_{31} 和 H_{12} (以及 $H_{ik} = -H_{ki}$). 而电场强度则为一般矢量.

我们用下列矢量表征张量 $\mathscr{T}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的标积:

$$\boldsymbol{T}_n \equiv (T_{n1}, T_{n2}, T_{n3}),$$

其中

$$T_{ni} = \sum_k T_{ik} n_k \quad (i = 1, 2, 3).$$

我们立即会看出, T_{ni} 如矢量的分量一样变换.

高斯定理具有如下形式

$$\int \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \mathrm{d}V = \oint \sum_k T_{ik} n_k \mathrm{d}f, \tag{18.1}$$

也能写成

$$\int \operatorname{div} \mathscr{T} \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{T}_n \mathrm{d}f, \tag{18.2}$$

式中

$$\operatorname{div} \mathscr{T} = \left(\sum_k \frac{\partial T_{1k}}{\partial x_k}, \sum_k \frac{\partial T_{2k}}{\partial x_k}, \sum_k \frac{\partial T_{3k}}{\partial x_k} \right). \tag{18.3}$$

若 $\boldsymbol{k}_e$ 和 $\boldsymbol{k}_m$ 能表示为

$$\boldsymbol{k}_e = \operatorname{div} \mathscr{T}^{(e)}, \quad \boldsymbol{k}_m = \operatorname{div} \mathscr{T}^{(m)}, \tag{18.4}$$

其中 $\mathscr{T}^{(e)}$ 和 $\mathscr{T}^{(m)}$ 应在无穷远处充分快地趋于零, 使得, 当积分域的界面变成无穷大时

$$\int \boldsymbol{k}_e \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{T}_n^{(e)} \mathrm{d}f \longrightarrow 0$$

和 (18.5)

$$\int \boldsymbol{k}_m \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{T}_n^{(m)} \mathrm{d}f \longrightarrow 0,$$

则不仅电力, 而且磁力也满足作用和反作用原理.

现在我们来证明, 稳恒电流和静止电荷 (即与时间无关的场) 都满足作用和反作用原理. 为此, 我们利用前面已导出的式 (17.5)、式 (3.4)、式 (2.4)、式 (15.6) 和式 (15.3) 诸关系式:

$$\boldsymbol{k}_e = \rho \boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{c} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

(因为这里我们考虑微观场, 所以采用对应于真空的方程.) 上列方程组也能写成

$$\boldsymbol{k}_e = \frac{1}{4\pi}\{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\},$$
$$\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{4\pi}\{\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{H} + \operatorname{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\}.$$

考虑纯数学的变换

$$\begin{aligned}[\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}]_1 &= (\operatorname{curl}_2\boldsymbol{E})E_3 - (\operatorname{curl}_3\boldsymbol{E})E_2\\ &= \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right)E_3 - \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)E_2\\ &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_1}{\partial x_k}E_k - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_1}E_k.\end{aligned}$$

在最后的表达式中加进了其和为零的两个多余的项. 对任一指标 i, 我们有

$$[\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}]_i = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)E_k$$

由此得出

$$\begin{aligned}4\pi k_{ei} &= \sum_k\left\{E_i\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\right) + \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i}\right)E_k\right\}\\ &= \sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k) - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}E^2.\end{aligned}$$

式中 E^2 是一个由对称张量缩并而成的标量. 利用克罗内克 (Kronecker) δ 符号

$$\delta_{ik} = \begin{cases}0, & (i\neq k)\\ 1, & (i=k)\end{cases} \tag{18.6}$$

(它本身对于正交变换是一个对称张量.) 我们能构成如下的张量:

$$4\pi T_{ik}^{(e)} = E_iE_k - \delta_{ik}\cdot\frac{1}{2}E^2$$

于是, 实际上有

$$4\pi\sum_k\frac{\partial T_{ik}^{(e)}}{\partial x_k} = \sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(E_iE_k) - \frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{2}E^2.$$

因此

$$T_{ik}^{(e)} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_iE_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}E^2\right\}$$

和 (18.7)

$$T_{ik}^{(m)}=\frac{1}{4\pi}\left\{H_iH_k-\frac{1}{2}\delta_{ik}H^2\right\}$$

满足式 (18.4). 这些是麦克斯韦应力张量. 若所有电流和电荷都局限于空间的有限区域内, 则场至少像 $1/r^2$ 那样快地趋于零, 并且当积分面变为无穷大时, 式 (18.5) 关于

$$\boldsymbol{T}_n^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{n}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\right\}$$

和

$$\boldsymbol{T}_n^{(m)}=\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{n}\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{H}^2\right\}$$

的面积分趋于零.

麦克斯韦应力张量是对称的. 这意味着合转矩为零 (角动量守恒).

证明: 单位体积的转矩为 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{k}$. 于是

$$d_{ij}=-d_{ji}=x_ik_j-x_jk_i=\sum_k\left(x_i\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k}-x_j\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}\right)$$

$$=\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(x_iT_{jk}-x_jT_{ik})-T_{ji}+T_{ij}.$$

且

$$T_{ij}-T_{ji}=d'_{ij},$$

根据高斯定理, 得

$$\int\boldsymbol{d}\mathrm{d}V=\oint\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{T}_n\mathrm{d}f+\int\boldsymbol{d}'\mathrm{d}V,$$

第一项等于零, 若 $T_{ij}=T_{ji}$, 则第二项也等于零.

取任一张量的迹, 我们能得到一个标量:

$$T=\sum_iT_{ii}=\text{标量}.$$

(由于 T_{ik} 像 a_ib_k 那样变换, 所以 T 像标量 $\sum_i a_ib_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 那样变换.) 关于麦克斯韦应力张量, 则有

$$\sum_iT_{ii}^{(e)}=\frac{1}{4\pi}\left\{E^2-\frac{3}{2}E^2\right\}=-\frac{1}{8\pi}E^2=-W_e, \tag{18.8}$$

$$\sum_iT_{ii}^{(m)}=-\frac{1}{8\pi}H^2=-W_m, \tag{18.9}$$

式中 W_e 为电场的能量密度. 在下文中我们将会看到, W_m 为磁场的能量密度.

赫维赛德单位在电学中和磁学中是十分相似的:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{e}_H = \sqrt{4\pi}\mathrm{e}, \quad \boldsymbol{E}_H = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\boldsymbol{E}, \\
\boldsymbol{k}_e = \rho\boldsymbol{E} = \rho_H \boldsymbol{E}_H, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E}_H = \rho_H, \\
\boldsymbol{i}_H = \sqrt{4\pi}\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{H}_H = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\boldsymbol{H}, \\
\boldsymbol{k}_m = \frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{i}_H \times \boldsymbol{H}_H, \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{H}_H = \frac{1}{c}\boldsymbol{i}_H, \\
W_e = \frac{1}{2}E_H^2, \quad W_m = \frac{1}{2}H_H^2.
\end{gathered}$$

英译者注: 在有理化 m · kg · s 制 (参见 §13 尾注) 中, 方程式与上面给出的相差一常数因数. 例如, 奥斯特定律 (式 (15.1)) 为

$$\oint \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{J},$$

而毕奥–萨伐尔定律 (式 (15.16)) 为

$$\boldsymbol{H}_P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{i}_Q \times \boldsymbol{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3}\mathrm{d}V_Q, \quad \text{式中 } \boldsymbol{r}_{PQ} = \boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q.$$

电流的单位为 A, 而 $\boldsymbol{H}$ 的单位为 A/m. 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 由可写成不同形式的一个本构方程相联系:

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} = \varkappa_m\mu_0\boldsymbol{H} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}.$$

式中 $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}^{-2}$ 为真空的磁导率, μ 为介质的磁导率 (单位为 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}^{-2}$), $\varkappa_m = \mu/\mu_0$ 为相对磁导率 (无量纲), $\chi_m = \varkappa_m - 1$ 为磁化率 (无量纲), 以及 $\boldsymbol{M}$ 为磁化强度. $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的单位都是 $\mathrm{Wb/m^2}$, 而 $1\mathrm{Wb} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/(\mathrm{C}\cdot\mathrm{s})$.

在有理化 m · kg · s 制中, 下列各方程成立

电学	磁学
$\boldsymbol{k}_e = \rho\boldsymbol{E}$,	$\boldsymbol{k}_m = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H}$,
$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho$,	$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$,
$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon\boldsymbol{E}^2$,	$W_m = \frac{1}{2}\mu\boldsymbol{H}^2$.

第三章

准静态 (电磁) 场

假定本章所要研究的电磁场是这样的: 在光通过所研究的物体的最大线度这样一段距离所需的时间内, 它变化极微. 如此, 则不需考虑场传播的有限速度.

§19. 法拉第电磁感应定律

对于准静态场, 前述诸方程必须附加的重要定律是法拉第电磁感应定律. 当不存在可磁化的物质时, 该定律的最普遍形式为

$$\oint_C E_s \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F H_n \mathrm{d}f. \tag{19.1}$$

同静态和稳恒态的情况相反, 这里电场强度沿闭合路径的线积分不再等于零 (图 19.1). 式 (19.1) 中的负号能用能量的观点来说明: 接通电流需要耗费功 (参见 §20).

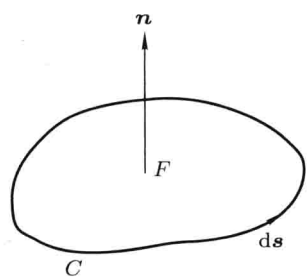


图 19.1

可将式 (19.1) 变换为

$$\int_F \operatorname{curl}_n \boldsymbol{E} \mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F H_n \mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\int_F \frac{\partial H_n}{\partial t}\mathrm{d}f.$$

由于此式对任意曲面都成立, 故必定有

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{19.2}$$

这是法拉第电磁感应定律的微分形式.

在可磁化的物质中, 应该用 $\boldsymbol{B}$ 来代替 $\boldsymbol{H}$:

$$\oint_C E_s \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_F B_n \mathrm{d}f, \tag{19.3}$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{19.4}$$

由式 (19.4) 得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0,$$

此式符合先前较严谨的假设式 (12.3)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{19.5}$$

或, 在真空中有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{19.6}$$

若在任一给定时刻式 (19.5) 或式 (19.6) 成立, 则由法拉第电磁感应定律推知, 在所有时刻都成立.

此外, 式 (3.4) 和式 (16.12) 两式成立. 因此

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{19.7}$$

和

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \tag{19.8}$$

或, 在真空中有

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{19.9}$$

最后两个方程是近似的, 这是由于: 由它们将得出 $\operatorname{div}\boldsymbol{i} = 0$, 然而, 这一条件并不严格满足. 本节中的所有其他方程都是严格成立的.

§20. 电流系的能量

现在我们能够计算电流系的能量, 这能量等于断开外加电压后感生电流所作的功. 因为单位体积的力由式 (17.5) 给出, 所以单位时间电流系单位体积所作的功为

$$A = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{k}_e + \boldsymbol{k}_m) = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} + 0. \tag{20.1}$$

假定, 外电场在 $t = 0$ 时断开, 那么, 利用式 (19.9), 感生电场随后所作的功为

$$W = \int \mathrm{d}t \int A \mathrm{d}V = \int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = \frac{c}{4\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{H} \mathrm{d}V.$$

因为

$$\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\operatorname{div} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

以及式 (19.2), 所以我们有

$$\begin{aligned} W &= \frac{c}{4\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}t \int \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H} \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int H^2 \mathrm{d}V \Big|_{t=0}^{t=\infty}. \end{aligned}$$

(在准静态情况中, 由于在无穷远处场足够快地趋于零, 所以, 面积分可以略去.) 于是, 因为 $t = \infty$ 时 $H = 0$, 所以我们得到

$$W = \frac{1}{8\pi} \int H^2 \mathrm{d}V. \tag{20.2}$$

这就是电流系的能量. 它也等于接通电流时所需作的功. 由于法拉第定律式 (19.1) 中的负号, 所以这里能量是正的.

因为 $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$, 所以下式仍然严格地成立:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}. \tag{20.3}$$

反之, 由式 (19.9) 得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0, \tag{20.4}$$

并且, 如 §15 中已证明的,

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{i} \mathrm{d}V}{r} \tag{20.5}$$

和

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \tag{20.6}$$

最后的三个方程仅仅是缓慢变化的场的近似方程. 由式 (20.2) 给出的能量 W 可变换为

$$W = \frac{1}{8\pi}\int H^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{A}\mathrm{d}V.$$

对上式作分部积分, 略去其中的面积分, 并考虑到式 (19.9), 则得到

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{A}\cdot \operatorname{curl}\boldsymbol{H}\mathrm{d}V = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{i}\mathrm{d}V.$$

再利用式 (20.5), 则有

$$W = \frac{1}{2c^2}\iint \frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}. \tag{20.7}$$

式 (20.7) 显示出与式 (4.5) (电场能) 有一定的类似性. 对一些个别的电路, 式 (20.7) 能写成如下形式:

a. 单个电路. 这里

$$W = \frac{1}{2}LJ^2. \tag{20.8}$$

式中 L 称为自感系数, 它是这样定义的, 使得

$$LJ^2 = \frac{1}{c^2}\iint \frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_{P'}. \tag{20.9}$$

由于 L 只取决于电路的几何形状, 所以这样定义是合理的. 即, 若电流强度 J 乘以某一因数, 则每点的电流密度 $\boldsymbol{i}$ 也乘以同样的因数. 这里只需预先假定: 被积函数中只能使用稳恒电流分布. 对于迅变场, L 是与频率相关的.

b. 双电路. 在这种情况中, 磁场能取正定二次型

$$W = \frac{1}{2}L_1J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_2J_2^2, \tag{20.10}$$

式中

$$L_{12}J_1J_2 = \frac{1}{c^2}\int_1 \mathrm{d}V_P\int_2 \mathrm{d}V_{P'}\frac{\boldsymbol{i}_P\cdot\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}. \tag{20.11}$$

若导体是丝状的, 则有

$$L_{12}J_1J_2 = J_1J_2\frac{1}{c^2}\oint_1\oint_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2}{r_{12}}. \tag{20.12}$$

由于 $r_{PP'}$ 保持有限, 这种过渡是容许的. 于是, 互感系数为

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{c^2}\oint_1\oint_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2}{r_{12}}. \tag{20.13}$$

反之, 对于自感的情况, 不能实施从空间导体到丝状导体的过渡, 否则可能导致完全错误的结果.

对于两个以上电路的推广是显然的.

螺线管的自感系数. 根据式 (15.5),

$$H = \frac{4\pi N}{h}\frac{J}{c}.$$

于是有

$$\frac{1}{2}LJ^2 = \frac{1}{8\pi}\int H^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{8\pi}\pi a^2 h \frac{16\pi^2 N^2}{h^2}\frac{J^2}{c^2},$$

$$L = \frac{1}{c^2}\frac{4\pi^2 a^2 N^2}{h} = \frac{1}{c^2}\frac{(2\pi a N)^2}{h} = \frac{1}{c^2}\frac{\Lambda^2}{h}, \tag{20.14}$$

式中 $\Lambda = 2\pi a N$ 为导线的总长度 (参见图 20.1).

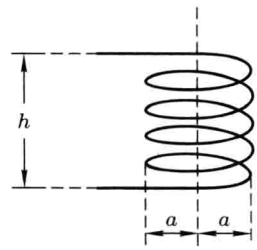


图 20.1

自感系数的量纲. 在 cm · g · s 单位中,

$$L_{\mathrm{emu}} = c^2 L_{\mathrm{esu}}, \quad [L_{\mathrm{emu}}] = \mathrm{cm}.$$

在 V–A (有理化 m · kg · s) 制中,

$$1\ \mathrm{H} = 1\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}} = 10^9\ \mathrm{emu}.$$

§21. 电路中的非稳恒电流

由式 (19.2) 和式 (20.3) 可得

$$\mathrm{curl}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

于是, 有静电关系式 (2.3) 的如下推广:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi. \tag{21.1}$$

现在我们要提出关于电路中电流变化的一个重要关系式. 设电流的空间分布为已知. 我们假设它与稳恒电流的情况相同. 首先考察一个具有两个电极的一般导体 (图 21.1). 如 §14 中所表明的,

$$\boldsymbol{i} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{21.2}$$

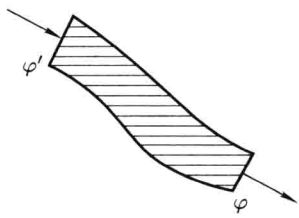


图 21.1

而单位时间内产生的热量, 一方面根据电阻 R 的定义由下式给出

$$\overline{Q} = \int \frac{\boldsymbol{i}^2}{\sigma} \mathrm{d}V = J^2 R, \tag{21.3}$$

另一方面, 由式 (21.1) 有

$$\overline{Q} = \int \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{i} \cdot \operatorname{grad} \varphi \mathrm{d}V - \frac{1}{c} \int \boldsymbol{i} \cdot \dot{\boldsymbol{A}} \mathrm{d}V.$$

若在

$$\operatorname{div}(\varphi \boldsymbol{i}) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

中略去 $\operatorname{div} \boldsymbol{i}$, 并用式 (20.5) 的 $\boldsymbol{A}$ 代入前式, 则得

$$\overline{Q} = -\oint \varphi i_n \mathrm{d}f - \frac{1}{c^2} \iint \frac{\boldsymbol{i}_P \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{i}_{P'}}{\partial t}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_{P'}.$$

求式 (20.9) 对时间的导数, 有

$$2LJ\dot{J} = 2\frac{1}{c^2} \iint \frac{\boldsymbol{i}_P \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{i}_{P'}}{\partial t}}{r_{PP'}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_{P'}$$

(因交换 P 和 P' 并不影响积分). 于是得到

$$\overline{Q} = J^2 R = -\oint \varphi i_n \mathrm{d}f - LJ\dot{J}, \quad J^2 R = \varepsilon J - LJ\dot{J},$$

式中

$$\varepsilon = \varphi' - \varphi$$

为电动势. 于是, 我们得到重要的方程

$$L\dot{J} + RJ = \varepsilon. \tag{21.4}$$

若设导体是丝状的, 我们会更容易地获得这个关系. 但这种方法并不正确.

对于包含电容器的电路, 我们得到一个附加项

$$-\oint \varphi i_n \mathrm{d}f = \varepsilon J - (\varphi_{1'} - \varphi_{2'})J.$$

在极板 $1'$ 和 $2'$ (参见图 21.2) 上的电荷之和保持恒定并等于零. 电荷由左端流入, 而从右端流出; 仿佛电流不间断地流过. 令电荷的电量为 e, 电容器的电容为 C, 则

$$\varphi_{1'} - \varphi_{2'} = \frac{e}{C}.$$

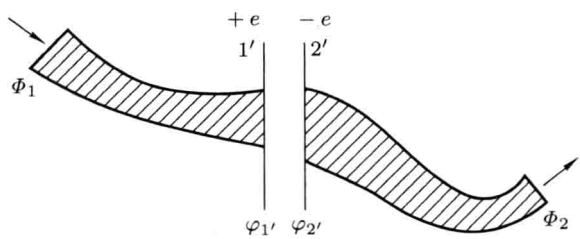


图 21.2

另一方面, 有

$$\dot{e} = J.$$

在此情况中, 微分方程变为

$$L\dot{J} + WJ + \frac{e}{C} = \varepsilon, \tag{21.5}$$

或者, 对它微分, 得

$$L\ddot{J} + W\dot{J} + \frac{J}{C} = \dot{\varepsilon}. \tag{21.6}$$

在双电路的情况中, Q 是对每一电路分别计算的. 而 $\boldsymbol{A}$ 却是由两个电路共同产生的. 因此,

$$\overline{Q}_1 = \int_1 \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = J_1^2 R_1 = -\oint_1 \varphi i_n \mathrm{d}f - \frac{1}{c}\int_1 \boldsymbol{i}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\mathrm{d}V,$$

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{1}{c}\int_1 \frac{\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'} + \frac{1}{c}\int_2 \frac{\boldsymbol{i}_{P'}}{r_{PP'}}\mathrm{d}V_{P'}.$$

同前面的计算完全类似, 可得到

$$\begin{aligned} L_1\dot{J}_1 + L_{12}\dot{J}_2 + R_1J_1 + \frac{e_1}{C_1} &= \varepsilon_1, \\ L_2\dot{J}_2 + L_{12}\dot{J}_1 + R_2J_2 + \frac{e_2}{C_2} &= \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{21.7}$$

若电路中不存在电容器, 则 e_i/C_i 项消失. 能量为

$$E = \frac{1}{2}L_1J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_2J_2^2 + \frac{1}{2}\frac{e_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{e_2^2}{C_2}. \tag{21.8}$$

因为

$$J_1 = \dot{e}_1, \quad J_2 = \dot{e}_2,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_1J_1 + \varepsilon_2J_2 - R_1J_1^2 - R_2J_2^2, \tag{21.9}$$

上式等于外力所作的功减去单位时间内产生的热量. 由于, 若以 $-J$ 代替 J, 以 $-t$ 代替 t, 该方程不是不变的, 所以其中的 R 具有摩擦力的特性.

因为我们曾假设空间电流的分布为已知, 并且也略去了辐射效应, 所以我们得到的是常微分方程, 而不是偏微分方程.

某些曲型微分方程的积分

1. 无电容的单个电路 (*RL* 电路). 其微分方程为

$$L\dot{J} + RJ = \varepsilon. \tag{21.10}$$

断开电源,

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 & (t < 0 \text{ 时}), \\ \varepsilon = 0 & (t > 0 \text{ 时}), \end{cases}$$

对应的解为

$$\begin{aligned} &J = J_0 = \frac{\varepsilon_0}{R} \quad (t < 0) \quad (\text{欧姆定律}), \\ &\dot{J} = -\frac{R}{L}J, \\ &J = J_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \end{aligned} \qquad (t > 0)$$

(积分常数已按 $t = 0$ 时电流应连续的条件选定.) 这个解对应于电流逐渐衰减.

接通电源,

$$\begin{cases} \varepsilon = 0 & (t < 0), \\ \varepsilon = \varepsilon_0 & (t > 0), \end{cases}$$

其解为

$$\begin{aligned} &J = 0 && (t<0),\\ &\dot{J} + \frac{R}{L}\left(J - \frac{\varepsilon_0}{R}\right) = 0 && (t>0),\\ &J - \frac{\varepsilon_0}{R} = C\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \end{aligned}$$

由于 J 在 $t=0$ 时是连续的, 所以有

$$C = -\frac{\varepsilon_0}{R},$$
$$J = \frac{\varepsilon_0}{R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}).$$

因为, 当 $t\to\infty$ 时, $J\to\varepsilon_0/R$. 起初, 由于自感电流逐渐增大; 在数量级为 L/R (正比于 $1/R$) 的时间内升到其最后的电流值.

2. 加上随时间周期变化的电动势. 线性表达式便于用复指数表示. 其后, 视需要, 可取其实 (或虚) 部. 即, 求得实系数线性微分方程的复数解后, 则其实部和虚部都是该方程的解.

因此设

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

式中 ω 为角频率, 等于频率的 2π 倍, 并试以

$$J = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

作为解. 对于这种形式的解, 微分算符相当于某种乘数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sim \mathrm{i}\omega,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \sim (\mathrm{i}\omega)^2 = -\omega^2.$$

于是式 (21.10) 给出

$$(L\mathrm{i}\omega + R)A = \varepsilon_0,$$
$$A = \frac{\varepsilon_0}{R + \mathrm{i}\omega L} = \frac{\varepsilon_0(R - \mathrm{i}\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

若 $\varepsilon_0 = |\varepsilon_0|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, 则也能写成

$$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\theta)}.$$

式中

$$|A| = |\varepsilon_0|/(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2} \quad 和 \quad \mathrm{tg}\,\theta = -\omega L/R.$$

因为

$$\mathrm{Re}\,(\varepsilon) = |\varepsilon_0|\cos(\omega t + \alpha)$$

和

$$\mathrm{Re}\,(J) = |A|\cos(\omega t + \alpha + \theta),$$

所以, 电流相对于外加电动势有 θ 角的相移.

3. 有电容的电路 (*RLC* 电路). 其微分方程为

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{C}J = \dot{\varepsilon}. \tag{21.11}$$

a. 受迫振荡: $\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. 设 $\alpha = 0$, 且 ε_0 为正实数. 并试以

$$J = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

为解. 于是, 式 (21.11) 给出

$$\left(-\omega^2 L + \mathrm{i}\omega R + \frac{1}{C}\right) A = \varepsilon_0 \mathrm{i}\omega,$$

$$A = \frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}{-\omega^2 L + \mathrm{i}\omega R + 1/C} = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

式中

$$|A| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/C\omega)^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = -\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right).$$

当分母极小时, $|A|$ 达到最大值 (图 21.3):

$$\left.\begin{aligned} \omega_m L - \frac{1}{C\omega_m} &= 0, \\ \omega_m &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ |A|_{\max} &= \frac{\varepsilon_0}{R} \end{aligned}\right\} \text{共振情况.}$$

$\mathrm{tg}\,\theta$ 在共振点处变号.

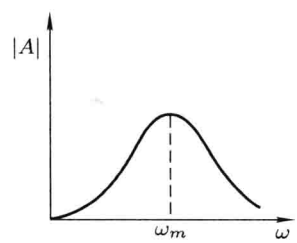


图 21.3

b. 自由振荡: $\varepsilon = 0$. 试以

$$J = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$$

为解. 此时振荡频率 ω_0 不是由电动势给定, 而是由微分方程式 (21.11) 所确定:

$$-L\omega_0^2 + R\mathrm{i}\omega_0 + \frac{1}{C} = 0, \quad \omega_0 = \frac{\mathrm{i}R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

存在两种可能性①:

① $\dfrac{R^2}{4L^2} < \dfrac{1}{LC}, R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$;

$$\mathrm{Re}\,(J) = A\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\right) t$$

(已适当选择时间 t 的原点). 这对应于阻尼振荡.

② $\dfrac{R^2}{4L^2} > \dfrac{1}{LC}, \quad R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$;

$$\omega_0 = \mathrm{i}\left(\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right),$$

$$\mathrm{Re}\,(J) = A \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}.$$

这里, 有两个解, 它们对应于平方根的两种符号. 这是非周期 (过阻尼) 的情况.

在周期情况 ① 中, 振荡频率 ω_0 比共振频率 ω_m 小些.

若 $R \ll 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, 则

$$\omega_0 \to \omega_m = 1/\sqrt{LC},$$

此式有时叫做汤姆孙方程.

4. 两个 *RLC* 电路的并联 (图 21.4). 若略去电路 1 和 2 间的相互作用, 并求式 (21.7) 对时间的微分, 则得

$$\dot{\varepsilon} = L_1\ddot{J}_1 + R_1\dot{J}_1 + \frac{J_1}{C_1} = L_2\ddot{J}_2 + R_2\dot{J}_2 + \frac{J_2}{C_2}.$$

① 英译者注: 除所讨论的阻尼和过阻尼两种情况 ① 和 ② 外, 还存在第三种可能性, 即, 当 $R^2/(4L^2) = 1/(LC)$ 时的情况. 此时,

$$\omega_0 = \mathrm{i}R/2L = \mathrm{i}/\sqrt{LC}$$

和

$$\mathrm{Re}\,(J) = A\mathrm{e}^{-[R/(2L)]t} = A\mathrm{e}^{-t/\sqrt{LC}} = A\mathrm{e}^{-\omega_m t}.$$

这叫做临界阻尼的情况.

仿照强迫振荡, 我们令

$$J_1 = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$
$$J_2 = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

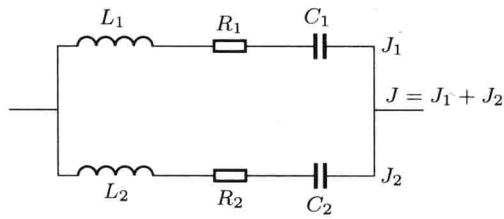


图 21.4

于是有

$$\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 = A_1\left(-L_1\omega^2 + R_1\mathrm{i}\omega + \frac{1}{C_1}\right) = A_2\left(-L_2\omega^2 + R_2\mathrm{i}\omega + \frac{1}{C_2}\right),$$
$$A_1 + A_2 = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0\left\{\frac{1}{-L_1\omega^2 + R_1\mathrm{i}\omega + 1/C_1} + \frac{1}{-L_2\omega^2 + R_2\mathrm{i}\omega + 1/C_2}\right\},$$
$$J = \mathrm{i}\omega\varepsilon\left\{\frac{1}{-L_1\omega^2 + R_1\mathrm{i}\omega + 1/C_1} + \frac{1}{-L_2\omega^2 + R_2\mathrm{i}\omega + 1/C_2}\right\}.$$

对于无电容的直流情况, 则有

$$J = \varepsilon\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

§22. 趋肤效应

迄今, 我们都是假定电流的空间分布与直流电的情况相同. 但是, 对于较高的频率, 由于自感现象, 电流总是倾向于被局限在导体的表面. 因此, 由于有效截面的减小, 电阻增大.

我们对半侧无穷大导体进行计算. (对柱形导体将出现贝塞尔函数.) 令电流分布平行于 y 轴 (图 22.1). (对于直流电流, 分布是均匀的). 利用下面这些方程:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \tag{22.1}$$
$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}, \tag{22.2}$$
$$\boldsymbol{i} = \sigma\boldsymbol{E}, \tag{22.3}$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{22.4}$$

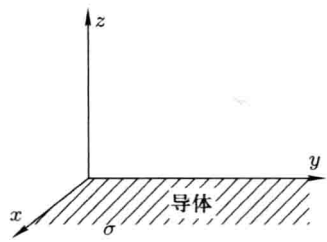


图 22.1

由于式 (22.3) 和式 (20.4) 两式, 下式也成立

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \tag{22.5}$$

由前三个方程得出

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{i}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$
$$\operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = -\frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

根据恒等式 (15.9), 并考虑到式 (22.5) 和式 (19.6), 导致

$$\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \\ \nabla^2 \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c^2}\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{22.6}$$

这两个方程与热传导方程极为相似. 由于曾作了通常的准静态场近似, 因此它们是不精确的. 然而, 它们对于阐明趋肤效应是足够的. 我们假定场具有 $E_y(z)$、$H_x(z)$ 的形式, 其他分量都为零. 这一假设已够用. 令电场是时间的周期函数:

$$E_y = E_y^0(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

代入式 (22.6) 中, 则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y^0}{\mathrm{d}z^2} = \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\mathrm{i}E_y^0.$$

令 $k^2 = 4\pi\sigma\omega\mathrm{i}/c^2$, 则其解为

$$E_y^0 = A\mathrm{e}^{kz}.$$

再引入量 $\varkappa = \sqrt{2\pi\sigma\omega/c}$, 即

$$k^2 = \varkappa^2 \cdot 2\mathrm{i}, \quad k = \pm\varkappa(1+\mathrm{i}), \tag{22.7}$$

则解变为

$$E_y = A\mathrm{e}^{\varkappa z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varkappa z+\omega t)}$$

或

$$\mathrm{Re}\, E_y = A\mathrm{e}^{\varkappa z}\cos(\omega t + \varkappa z). \tag{22.8}$$

因为 E_y 不可能随着深度的增加而增大, 所以我们必须限定 k 取正值. 因此, 随着 $z \to -\infty$, E_y 指数地减小. (对于 $\omega = k = 0$ 的情况, 我们最多得到 E_y 与 z 是线性相关的.)

由于

$$\frac{\sigma}{c^2} = \sigma_{\mathrm{emu}},$$

因此交流电流渗入的有效深度 $1/\varkappa$ 为

$$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\mathrm{emu}}\omega}}. \tag{22.9}$$

数值估计. 若频率 $\nu = \omega/(2\pi) = 50\mathrm{s}^{-1}$, 对于铜 $\sigma_{\mathrm{emu}} = 5.9 \times 10^{-4}\mathrm{s}\cdot\mathrm{cm}^{-2}$, 于是

$$1/\varkappa \sim 1\ \mathrm{cm}.$$

对于柱形导线的电阻, 计算给出渐近公式 ($\varkappa a \gg 1$)

$$R = R_0\frac{\varkappa a}{2}.$$

式中, R_0 为直流电阻, a 为导线的半径.

§23. 运动导体的电磁感应定律

下面的考虑阐述了相对论的初步.

令导体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动. 按照式 (17.6), 作用在运动电荷 e 上的力不是 $e\boldsymbol{E}$, 而是

$$e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right).$$

对于运动导体, 欧姆定律必须加以修正, 即, 以

$$\boldsymbol{E}^* = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) \tag{23.1}$$

代替 $\boldsymbol{E}$, 所以电流密度由下式给出

$$\boldsymbol{i} = \sigma\boldsymbol{E}^* \tag{23.2}$$

(上式只准确至 v/c 的第一级, 严格的考虑表明, σ 与方向有关.)

现在, 不附加其他物理假设, 能够纯数学地证明: 若

$$\oint E_s \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int H_n \mathrm{d}f \tag{23.3}$$

对静止曲面成立, 则

$$\oint_{\rightarrow} E_s^* \mathrm{d}s = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n \mathrm{d}f \tag{23.4}$$

对运动曲面成立. (符号 $\rightarrow$ 代表曲面及其边界曲线是运动的.)

上述结果同物理定律式 (23.2) 合在一起, 表明: 不论磁体相对静止导体缓慢运动 [图 23.1(a)], 或是导体以大小相等、方向相反的速度相对静止磁体运动 [图 23.1(b)], 由于 $\oint E_s^* \mathrm{d}s$ 在两种情况中是相同的, 因此, 导体和磁体间相同的相对运动感应出相同的电流. 在相对论中, 这一事实将被更进一步地推广.

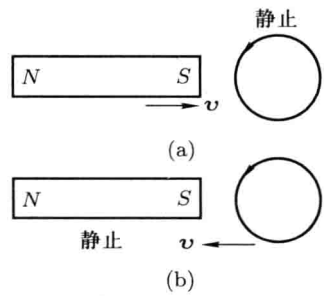


图 23.1

数学定理式 (23.4) 的证明. 对于在 t_0 时刻的任一矢量 $\boldsymbol{B}$, 下式成立:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} B_n \mathrm{d}f = \int \frac{\partial B_n}{\partial t}\mathrm{d}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t B_n(t_0)\mathrm{d}f. \tag{23.5}$$

我们在 t 和 $t+\mathrm{d}t$ 时刻的两个曲面上再增补一个由导体在 $\mathrm{d}t$ 时间所扫过的柱面, 从而构成一个闭合曲面 (参见图 23.2). 在此柱面上有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{v}\mathrm{d}t.$$

对闭合曲面应用高斯定理, 给出

$$\int \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}\mathrm{d}V = \int_{t+\mathrm{d}t} B_n(t)\mathrm{d}f - \int_t B_n(t)\mathrm{d}f + \int_C \boldsymbol{B}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{v}\mathrm{d}t),$$

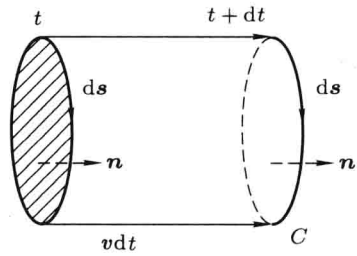


图 23.2

式中, $\boldsymbol{B}$ 的自变数取固定时刻 t 的值. 利用斯托克斯定理变换最后一个积分, 并因 $\mathrm{d}V = \mathrm{d}f v_n \mathrm{d}t$, 故得到

$$\begin{aligned}\int_{t+\mathrm{d}t} B_n(t)\mathrm{d}f - \int_t B_n(t)\mathrm{d}f &= \int \operatorname{div}\boldsymbol{B}\mathrm{d}V - \mathrm{d}t\int_C \mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \\ &= \mathrm{d}t\int\{\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B} - \operatorname{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\}_n\mathrm{d}f\end{aligned}$$

将此式代入式 (23.5) 中, 给出数学恒等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} B_n\mathrm{d}f = \int\left\{\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{B} - \operatorname{curl}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\right\}_n \mathrm{d}f. \tag{23.6}$$

这一关系式对任一可微矢量 $\boldsymbol{B}$ 都成立.

将上式应用在 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$ 的情况. 重要的是用到如下的事实

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

于是, 有

$$-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n\mathrm{d}f = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)_n \mathrm{d}f + \frac{1}{c}\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H})_s\mathrm{d}s,$$

根据式 (19.2) 和斯托克斯定理, 上式变为

$$\begin{aligned}-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\rightarrow} H_n\mathrm{d}f &= \oint\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right\}_s \mathrm{d}s \\ &= \oint E_s^*\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

于是, 定理式 (23.4) 得证.

第四章

迅变 (电磁) 场

§24. 麦克斯韦方程组

已用于准静态场中的方程组包含一个矛盾. 真空中的方程组为

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$
$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$$

由此, 得到

$$\operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0.$$

然而, 这不完全正确, 因为, 一般说来还有连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0.$$

(总可以认为面电荷密度是体电荷密度的极限情况.) 这种状况通过增添一附加项不难得到纠正. 从第四方程和连续性方程得

$$\operatorname{div}\left\{\boldsymbol{i} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right\} = 0.$$

因为 $\operatorname{div}\operatorname{curl} \boldsymbol{H} \equiv 0$, 若用 $\boldsymbol{i} + (1/4\pi)(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ 代替 $\boldsymbol{i}$, 则方程组便没有矛盾了. 这样,

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

这个附加项 $(1/c)(\partial \boldsymbol{E}/\partial t)$ 是由麦克斯韦引进的, 叫做位移电流. 对稳恒态场, 这

项不存在. 现在我们得到下列完全自洽的方程组:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}, \tag{24.1}$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}, \tag{24.2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \tag{24.3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{24.4}$$

这些就是著名的真空中的麦克斯韦方程组.

因为从式 (24.2) 和式 (24.4) 得

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \boldsymbol{i} = 0, \tag{24.5}$$

所以, 连续性方程现在表现为麦克斯韦方程组的一个结果. 对面电荷密度有颇类似的结果. 根据式 (7.3),

$$4\pi\omega = E_{n_1} + E_{n_2}.$$

电荷守恒定律要求

$$\dot{\omega} + i_{n_1} + i_{n_2} = 0^{①}.$$

由这两个方程, 得

$$4\pi(i_{n_1} + i_{n_2}) + \dot{E}_{n_1} + \dot{E}_{n_2} = 0.$$

即, 通过界面 $4\pi\boldsymbol{i} + \dot{\boldsymbol{E}}$ 的法向分量是连续的 (图 24.1).

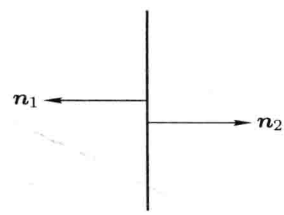


图 24.1

分子观点. 上述方程组对真空中的场强是正确的. 因此, 它们对微观场 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 也适用. 取 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的空间平均值便得到宏观场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$,

$$\overline{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{E}, \quad \overline{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{B},$$

对于宏观场, 下列方程组成立:

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}, \tag{24.1'}$$

① 英译版有误, 已改正.——中译者注

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}, \tag{24.2'}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{24.3'}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho. \tag{24.4'}$$

这就是有质介质的麦克斯韦方程组. 在这个方程组中, ρ 表示总电荷密度 (包括极化电荷), 而 $\boldsymbol{i}$ 是总电流密度,

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_c + c\operatorname{curl} \boldsymbol{M} + \dot{\boldsymbol{P}}, \tag{24.6}$$

式中 $\boldsymbol{i}_c$ 是传导电流密度, $c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}$ 是分子电流密度, 而 $\dot{\boldsymbol{P}}$ 是极化电流密度. 由于极化度 $\boldsymbol{P}$ 等于单位体积中的电偶极矩,

$$\boldsymbol{P} = (\Sigma e\boldsymbol{x})_{\text{单位体积}},$$

则

$$\dot{\boldsymbol{P}} = (\Sigma e\boldsymbol{v})_{\text{单位体积}}$$

的确是由偶极矩的变化所产生的电流密度.

若考虑到如 §7 和 §8 所示的 $\rho = \rho_t - \operatorname{div}\boldsymbol{P}$, 麦克斯韦方程组式 (24.2') 和式 (24.4') 能用 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 改写成

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}_c + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \tag{24.2''}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_t, \tag{24.4''}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别定义为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}, \tag{24.7}$$

和

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}. \tag{24.8}$$

正如从式 (24.2) 和式 (24.4) 得到式 (24.5) 那样, 从式 (24.2'') 和式 (24.4'') 可得到自由电荷的连续性方程

$$\dot{\rho}_t + \operatorname{div} \boldsymbol{i}_c = 0, \tag{24.5'}$$

除上述方程组外, 还必须附加唯象的 (半经验的) 本构方程:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \tag{24.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \tag{24.10}$$

$$\boldsymbol{i}_c = \sigma\boldsymbol{E}. \tag{24.11}$$

然而, ε、μ 和 σ 实际上不是常数; 其量值对于缓变场和迅变场是不同的. 对于周期场

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

(其中 $\boldsymbol{F}$ 代表 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{i}$ 中的任一个量); 它们是频率的函数

$$\varepsilon(\omega),\ \mu(\omega),\ \sigma(\omega).$$

在 $\omega \to 0$ 的极限情况中, 它们过渡到静态场的 ε、μ 和 σ. 这种频率关系在理论上只能借助于对介质的特殊模拟来确定. 最终的分析必然要引进量子论, 因为要牵涉原子结构问题. 对于任意 (非周期的) 场, ε、μ 和 σ 甚至不是数值而是算符. 唯象本构方程组式 (24.9)、式 (24.10) 和式 (24.11) 不如其他方程组那样普适.

连续性方程式 (24.5′) 和唯象本构方程式 (24.9) 和式 (24.11) 的推论是

$$\operatorname{div}\boldsymbol{i}_c = \sigma\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol{D} = \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho_t,$$

$$\dot{\rho}_t + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho_t = 0.$$

作积分, 得

$$\rho_t = \rho_t^0\mathrm{e}^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}.$$

即, 导体内的自由电荷密度要经过有限时间才消失. 这时间叫做弛豫时间.

§25. 真空中的电磁波

电磁波的存在是麦克斯韦方程组的一个重要结果. 在真空中,

$$\boldsymbol{i}_c = 0, \quad \rho_t = 0.$$

从式 (24.1) 取散度, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

所以, 式 (24.3) 并不是与式 (24.1) 无关的, 但它能多作出一些推断. 对周期场来说, 的确, 式 (24.3) 甚至是式 (24.1) 的一个推论. 类似地, 注意到 $\boldsymbol{i} = 0$, 由式 (24.2), 得出

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0,$$

对周期场, 甚至得到

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0, \tag{25.1}$$

当 $\rho = 0$ 时, 后者是从式 (24.4) 得到的普遍结果.

由式 (24.2) 的附加项 $\dot{\boldsymbol{E}}/c$ 推断: 可能存在电磁波. 即, 从式 (24.1) 和

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}} \tag{25.2}$$

消去 $\boldsymbol{H}$, 由此构成

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}},$$

并因式 (25.1), 人们得到 $\boldsymbol{E}$ 的著名波动方程:

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{E}}=0. \tag{25.3}$$

作

$$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E} \tag{25.4}$$

的代换, 式 (24.1)、式 (25.2)、式 (24.3) 和式 (25.1) 仍然是正确的. 因此,

$$\nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{H}}=0 \tag{25.5}$$

也成立.

作为波动方程组式 (25.3) 和式 (25.5) 的解的一个例子, 我们考察平面波:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{25.6}$$

(对这些方程, 实际上应考虑其实部, 因为只有它们才具有物理意义.) 我们曾令

$$\omega=2\pi\nu, \tag{25.7}$$

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}, \tag{25.8}$$

式中 ν 是频率, $\boldsymbol{n}$ 是波法线; 即, 单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 是垂直于等相面, 即所谓波面: $(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})=$ 常数. 在沿 $\boldsymbol{n}$ 方向相距 $\lambda=2\pi/k$ 处的一点, 其相位亦保持不变. 于是有

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}, \tag{25.9}$$

式中 λ 表示波长. 对于式 (25.6) 所给出的那种形式的解, 微分算符等效于某种乘数:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\sim\mathrm{i}\boldsymbol{k},\quad \frac{\partial}{\partial t}\sim-\mathrm{i}\omega,\\ &\nabla^2\sim-k^2,\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sim-\omega^2.\end{aligned} \tag{25.10}$$

把这些代入式 (25.3), 得

$$\left(-k^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right)E=0,\quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}. \tag{25.11}$$

为了保持相位不变, 我们必须以速度 ω/k 沿 $\boldsymbol{n}$ 方向前进, 因为此时有

$$x_{//}=\frac{\omega}{k}t,\quad k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x})=\omega t.$$

如此,

$$\frac{\omega}{k}=c \tag{25.12}$$

是相速. 量 c 包含在微分方程组内且与 ω 无关. 此外, 从式 (24.3) 和式 (25.1) 两式得

$$i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H})=0,\quad i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})=0,$$

所以

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}=0.$$

于是, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 都垂直于 $\boldsymbol{n}$, 即电磁波是横波.

由于式 (25.10), 从式 (25.2) 得到

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H})=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{E},$$

而从式 (25.8) 和式 (25.12) 两式则得

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{E},\quad \text{或}\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}.$$

于是, $\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{H}$. 因此, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$, 此外, 因为 $\boldsymbol{n}$ 是单位矢量, 而且 $\boldsymbol{H}$ 垂直于 $\boldsymbol{n}$, 所以

$$|\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{H}|\quad \text{或}\quad \boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{H}^2. \tag{25.13}$$

由于作式 (25.4) 给出的代换后, 方程组仍然是正确的, 于是有

$$\boldsymbol{H}=-(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}.$$

而且可以看出, 按 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的顺序构成一右手正交系 (图 25.1).

从式 (25.1) 和式 (25.13) 两式得到以后我们将要用到的关系式

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}E^2=\boldsymbol{n}H^2=\frac{1}{2}(E^2+H^2)\boldsymbol{n}. \tag{25.14}$$

麦克斯韦得到的这些结果涉及电磁波. 因为这里:

① 很自然地得出用机械论者的以太概念很难解释的横向性, 而且

② 一个被定义为纯电磁量的、并且从而由电流的磁场来确定的量 c 显示出与经验确定的光速相符合, 所以就自然地可把光当作是电磁波了.

因此, 光只不过是某种特殊波长的电磁波 (光的电磁理论). 后来, 赫兹和其他人发现了其他波长的电磁波 (无线电波、红外线).

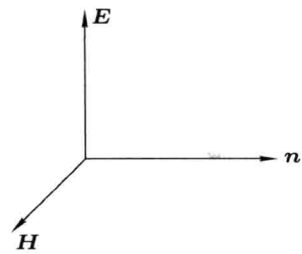


图 25.1

§26. 能量守恒和动量守恒

我们从麦克斯韦方程组式 (24.1)、式 (24.2)、式 (24.3) 和式 (24.4) 出发. 根据式 (17.5), 单位体积所受的力为

$$\boldsymbol{k} = \rho \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{H}. \tag{26.1}$$

因此, 单位时间内, 单位体积所作的功为

$$A = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{26.2}$$

a. 能量守恒

以 $c\boldsymbol{E}/(4\pi)$ 乘式 (24.2), 得出

$$A + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = 0,$$

而以 $c\boldsymbol{H}/(4\pi)$ 乘式 (24.1), 给出

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H} \cdot \dot{\boldsymbol{H}} + \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0.$$

把这两个式子加起来, 且由于

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{H},$$

便得到关系式

$$A + \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{S} = 0. \tag{26.3}$$

式中

$$W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) \tag{26.4}$$

是能量密度, 而

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{26.5}$$

是坡印亭矢 (量). 式 (26.3) 是场论中的能量守恒定律. 对式 (26.3) 积分, 给出

$$\int A\mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int W\mathrm{d}V + \oint S_n\mathrm{d}f = 0. \tag{26.6}$$

式中, 第一项是系统每秒所作的总功, 而第二项是系统中每秒能量的增量. 于是, 显然第三项必定代表每秒流出系统界面的总能量. 所以, $\boldsymbol{S}$ 具有能流密度的含义.

若界面是有吸收能力的, 或者它位于如此远处, 以致场尚未达到其上, 则第三个积分等于零. 系统所作的功等于它的能量减少①. 静态场的情况总是如此, 因为在远距离处, $|\boldsymbol{S}|$ 至少像 $1/r^4$ 一样快地衰减.

根据式 (25.14), 对于平面波, 有

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}cW. \tag{26.7}$$

它意味着能量传播的速度等于波的相速, 因而是很令人满意的.

b. 动量守恒

虽然这里有附加项, 思路却与 §18 相似.

从式 (26.1) 和麦克斯韦方程组 (24.1)~(24.4), 得到

$$\begin{aligned} 4\pi\boldsymbol{K} = 4\pi\int \boldsymbol{k}\mathrm{d}V &= 4\pi\int\left(\rho\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{H}\right)\mathrm{d}V \\ &= \int\left\{\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \operatorname{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}\times\boldsymbol{H}\right\}\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

由于

$$\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \quad \text{和} \quad \left(\operatorname{curl}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}\right)\times\boldsymbol{E} = 0,$$

故有

$$0 = \int\left\{\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{H} + \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E} - \frac{1}{c}\boldsymbol{E}\times\dot{\boldsymbol{H}}\right\}\mathrm{d}V.$$

利用缩写

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_e &= \int\{\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\}\mathrm{d}V, \\ \boldsymbol{J}_m &= \int\{\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{H} + \operatorname{curl}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}\}\mathrm{d}V, \end{aligned}$$

则得

$$4\pi\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J}_e + \boldsymbol{J}_m - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\mathrm{d}V.$$

① 英译版误译为 "增加". —— 中译者注

§18 中已证明

$$\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{J}_m)=\oint \boldsymbol{T}_n \mathrm{d}f,$$

式中

$$T_{ik}=T_{ik}^{(e)}+T_{ik}^{(m)} \tag{26.8}$$

已在式 (18.7) 中给出. 因而得到

$$\boldsymbol{K}=\oint \boldsymbol{T}_n \mathrm{d}f-\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \boldsymbol{S}\mathrm{d}V. \tag{26.9}$$

对于稳态场右边第二项精确地等于零, 而对准静场则可略去. 这个关系式的微分形式是

$$k_i=\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial S_i}{\partial t}\quad (i=1,2,3). \tag{26.10}$$

式 (26.9) 和式 (26.10) 的意义是仅当电磁场被认为不仅具有能量而且具有动量时, 动量才能守恒. 若用 $\boldsymbol{P}_{\text{机}}$ 表示总机械动量, 则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_{\text{机}}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{K}. \tag{26.11}$$

由此, 必须认为场具有一个电磁动量

$$\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}=\frac{1}{c^2}\int \boldsymbol{S}\mathrm{d}V. \tag{26.12}$$

这意味着每立方厘米中的动量为

$$\boldsymbol{g}=\frac{1}{c^2}\boldsymbol{S}. \tag{26.13}$$

若式 (26.9) 积分域的边界面位于在某确定时刻场尚未到达处, 则如庞加莱和爱因斯坦已指出的

$$\oint \boldsymbol{T}_n \mathrm{d}f=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{P}_{\text{机}}+\boldsymbol{P}_{\text{电磁}})=0,\quad \boldsymbol{P}_{\text{机}}+\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}=\text{恒量}. \tag{26.14}$$

然而, 一般说来, $\boldsymbol{P}_{\text{机}}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\text{电磁}}$ 并不分别为恒量.

c. 辐射压力

平面波是一种数学理想化情况: 它是无限延展的, 因而具有无限能量; 其频率是精确地确定的. 然而, 我们能在任意小的范围内变更波长. 这就足以产生一列有限波列了 (傅里叶积分理论). 这种具有很多驼峰但范围有限的波列叫做波包 (图 26.1), 根据式 (26.7), 其能量和动量为

$$E=\int W\mathrm{d}V,\quad \boldsymbol{P}_{\text{电磁}}=\frac{1}{c^2}\int \boldsymbol{S}\mathrm{d}V=\boldsymbol{n}\frac{E}{c},$$

因此, 沿一确定方向传播的、线度远比波长长的波列具有动量

$$\frac{\text{能量}}{\text{光速}}.$$

为了计算辐射压力, 这就足够了①.



图 26.1

最简单的情况. 垂直入射时的全反射 (图 26.2). 把式 (26.9) 应用于在 t_0 至 t_1 时间间隔内场所达到的曲面. 电磁动量变化了 $2E/c$, 很显然, 表面受到了反冲. 机械动量的变化是

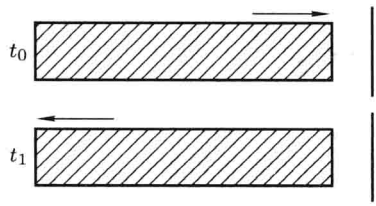


图 26.2

$$\Delta P_{\text{机}} = \frac{2E}{c}.$$

设 T 为波列入射到表面上的时间间隔, 则足够精确地有

$$E = TFI,$$

式中 F 是被辐射的面积, 而 $I = \overline{S}_x$ 是辐射强度. 于是,

$$\Delta P_{\text{机}} = pFT,$$

式中

$$p = 2\frac{I}{c} \tag{26.15}$$

是辐射压力.

容易看出, 以 θ 角入射的波色 则有 (图 26.3)

$$p = 2\frac{I}{c}\cos^2\theta. \tag{26.16}$$

① 辐射压力也能由式 (26.1) 直接计算.

对于完全吸收的情况 (图 26.4),

$$\Delta P_{\text{机}} = \frac{E}{c},$$
$$p = \frac{I}{c}. \tag{26.17}$$

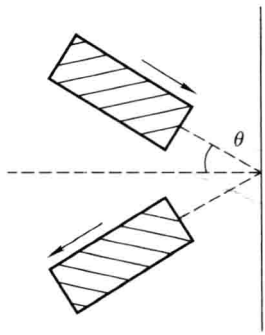


图 26.3

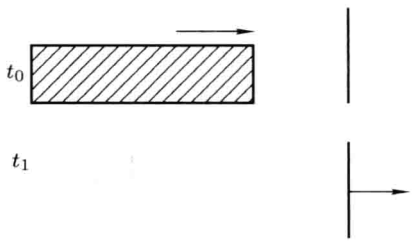


图 26.4

若无光的电磁理论便得不到这些结果. 我们主要地用到单位体积中的电磁动量是 $\boldsymbol{S}/c^2$. 辐射压力在实验上首先由列别捷夫证实了.

把动量与电磁场这样联系起来是很自然的, 否则就不能得到每一时刻能量和动量的守恒. 倘若光先是被发射, 然后又被吸收, 固然, 在吸收结束之后, 机械动量守恒定律再次成立; 然而不考虑场的存在是不自然的, 因为不能理解何以物质质点应该比场更为真实.

如此, 一方面, 以太 (现在把以太理解为所有可能的电磁场) 与力学量无关而独立地被描述了, 并且谈论以太的运动也是没有意义的. 另一方面, 理想的真空 ($\rho = 0, \boldsymbol{i} = 0$) 的方程组只是一种理想情况. 因为只有利用力学上描述的、带电荷的粒子才能产生和验证电磁场. 这里, 人们便遇到了值得注意的二象性. [A–1]

§27. 有质介质中的电磁波

有质介质与真空的区别在于磁化和极化. 若允许 ε 和 μ 可不等于 1, 则在自由电荷或电流不存在 ($\rho_t = \boldsymbol{i}_c = 0$) 时, 麦克斯韦方程组 (24.1′) ~ (24.4′) 变为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{\mu}{c}\dot{\boldsymbol{H}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$
$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = +\frac{\varepsilon}{c}\dot{\boldsymbol{E}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0.$$

于是, 波的相速为

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}. \tag{27.1}$$

对于由

$$v = \frac{c}{n} \tag{27.2}$$

定义的折射率, 我们得到

$$n^2 = \varepsilon\mu. \tag{27.3}$$

与 §25 相似, 对于平面波, 人们发现 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 在这里也构成右手正交系. 然而, $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的振幅之比不再等于 1 了. 而有

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) = \mathrm{i}k(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = +\frac{\mu}{c}\mathrm{i}\omega\boldsymbol{H},$$
$$k|\boldsymbol{E}| = \mu\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{H}|,$$
$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\omega^2, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$
$$|\boldsymbol{H}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\boldsymbol{E}|. \tag{27.4}$$

最后一个式子写成

$$\varepsilon\boldsymbol{E}^2 = \mu\boldsymbol{H}^2 \tag{27.5}$$

的形式最易记忆.

关于式 (27.3), 可以指出, 顺磁性或抗磁性总是很弱的, 所以, 对非铁磁物质, 实际上 $\mu = 1, n^2 = \varepsilon(\omega)$, 其中 $\lim\limits_{\omega\to 0} n^2(\omega) = \varepsilon_{\text{静态}}$ (静态介电常数). 电子论能阐明这一问题. 对于铁磁物质, 在 ω 的光学范围内, μ 实际上也等于 1, 这是由于高频时不出现铁磁性的缘故.

§28. 电磁波的辐射

本节给出由静态偶极子或准静态偶极子产生的场的推广.

a. 电磁势. 非齐次波动方程

这里从真空中麦克斯韦方程组 (24.1)~(24.4) 出发. 由 §20 和 §21 已知, 在引进的势 $\boldsymbol{A}$ 和 φ

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A} \tag{28.1}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \operatorname{grad}\varphi \tag{28.2}$$

时式 (24.1) 和式 (24.3) 同样地被满足. 把 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 代入式 (24.2), 由于式 (15.9), 得到

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}\right) - \nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}.$$

把 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 代入式 (24.4), 得

$$-\frac{1}{c}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{A}} - \nabla^2\varphi = 4\pi\rho.$$

在此, 对这个方程稍加改动是有用的:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi}) - \nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 4\pi\rho.$$

现在可以看出, 不像在准静态情况中那样要求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$, 而要求

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\dot{\varphi} = 0 \quad (\text{洛伦兹条件}) \tag{28.3}$$

是适宜的. 这样, 便得到 φ 和 $\boldsymbol{A}$ 的非齐次波动方程式:

$$-\nabla^2\varphi + \frac{1}{c^2}\ddot{\varphi} = 4\pi\rho, \tag{28.4}$$

$$-\nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{28.5}$$

因为

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}\boldsymbol{i} = 0, \tag{28.6}$$

所以, 式 (28.3)、式 (28.4) 和式 (28.5) 这三个方程是相容的. 在真空中 ($\rho = 0, \boldsymbol{i} = 0$) 这些关系就还原为齐次波动方程组了.

将用两种不同的方法对式 (28.3)、式 (28.4) 和式 (28.5) 进行积分.

b. 非齐次波动方程组的积分. 第一种方法

首先, 假设场在时间上是周期性的, 这样导致重大简化. 设电荷和电流密度为

$$\rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{28.7}$$

则,

$$\varphi = \varphi_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

由此得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim -\mathrm{i}\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sim -\omega^2.$$

考虑到

$$\frac{\omega}{c} = k, \tag{28.8}$$

由微分方程组 (28.3)~(28.5), 得

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} - \mathrm{i}k\varphi = 0, \tag{28.3'}$$

$$\nabla^2\varphi + k^2\varphi = -4\pi\rho, \tag{28.4'}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} + k^2\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}. \tag{28.5'}$$

模仿用于 §6 的方法, 不难把这些方程式积分. 那里证明

$$-\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$$

的解是

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_Q \mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}.$$

要得到这结果, 用到格林定理

$$\int (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V = \oint \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f,$$

式中 $\psi = 1/r_{PQ}$, 所以

$$\nabla^2\psi = 0 \quad P \neq Q.$$

对于现在的情况, 在格林定理中必须令

$$\psi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}} \tag{28.9}$$

这一 ψ 满足方程式

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \quad r \neq 0. \tag{28.10}$$

证明: 用极坐标, 式 (28.10) 变为

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\mathrm{d}^2(r\psi)}{\mathrm{d}r^2} + k^2(r\psi)\right\} = 0,$$

其解为

$$r\psi = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}kr}.$$

(在式 (28.9) 的解中, 我们取 $+\mathrm{i}$ 而不取 $-\mathrm{i}$ 的原因以后便会明了.)

我们再次取围线 P 点的一个大球 K 的内部作为积分域 V, 而用一个小球 k 把 P 点本身剔除. 这样, 再考虑到式 (28.10) 和式 (28.4′) 两式, 于是我们有

$$\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi=\varphi(\nabla^2\psi+k^2\psi)-\psi(\nabla^2\varphi+k^2\varphi)=+4\pi\rho\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

把它代入格林定理, 得

$$4\pi\int_V\rho_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q=\oint_k\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f+\oint_K\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}f.$$

在小球表面处,

$$\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r},\quad \mathrm{d}f=r^2\mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 是立体角. 并且,

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}=\frac{1}{r^2}(\mathrm{i}kr-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}.$$

这样, 遍及小球面的积分变为

$$\oint_k\mathrm{d}\Omega\left\{\varphi_Q-\mathrm{i}kr\varphi_Q+r\frac{\partial\varphi_Q}{\partial r}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}.$$

因为 $\partial/\partial n=\partial/\partial R$, 遍及大球面上的积分为

$$-\oint_K\mathrm{d}\Omega\left\{\varphi+R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}-\mathrm{i}k\varphi\right)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}.$$

现在把小球作极限过渡 $r\to 0$. 于是

$$\int_k\to 4\pi\varphi_P.$$

若大球变为无限大, 则 $R\to\infty$, $\lim\limits_{R\to\infty}\varphi=0$.
此外, 我们要求,

$$\lim_{R\to\infty}R\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}-\mathrm{i}k\varphi\right)=0. \tag{28.11}$$

若要求在大 R 的渐近域中,

$$\varphi\sim\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R},$$

那么, 就能满足式 (28.11). 由于

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}① & \text{描述出射波} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr+\omega t)} & \text{描述入射波} \end{array}\right\},$$

式 (28.11) 的意义是我们仅考察出射波 (若在上述方程组中全用 $-\mathrm{i}k$ 代换 $\mathrm{i}k$, 便可得到入射波). 式 (28.11) 叫做辐射条件 (按索末菲). 这条件不能从微分方程组得出, 而是一个重要的附加的物理要求. 为使解是唯一的, 必须加上这个条件.

当 $R\to\infty$, 在大球上的积分趋于零, 并得

$$\varphi_P=\int\rho_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q. \tag{28.12}$$

类似地处理 $\boldsymbol{A}$, 则得

$$\boldsymbol{A}_P=\frac{1}{c}\int\boldsymbol{i}_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q. \tag{28.13}$$

因为现在连续性方程式 (28.6) 能写成

$$\frac{1}{c}\mathrm{div}\,\boldsymbol{i}-\mathrm{i}k\rho=0,$$

所以辅助的洛伦兹条件式 (28.3′) 亦可满足. 利用恒等式

$$\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}f)\equiv f\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{grad}\,f$$

两次, 得到

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}&=\frac{1}{c}\int\mathrm{d}V_Q\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}=-\frac{1}{c}\int\mathrm{d}V_Q\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}\\&=-\frac{1}{c}\int\mathrm{d}V_Q\mathrm{div}_Q\left(\boldsymbol{i}_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}\right)+\frac{1}{c}\int\mathrm{d}V_Q(\mathrm{div}_Q\boldsymbol{i}_Q)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}.\end{aligned}$$

若用高斯定理把第一个积分变换为面积分, 并在无限大球面上计算, 则其值为零, 这样,

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{i}k\int\mathrm{d}V_Q\rho_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}=\mathrm{i}k\varphi,$$

这就是周期场的洛伦兹条件.

此外, 当 $\boldsymbol{A}$ 已知时, 式 (28.3′) 对确定 φ 是很有用的. 若在式 (28.7) 中作代换 $t\to t-r/c$, 因式 (28.8), 则有变换:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kr}$$

① 英译版此两式符号误换.——中译者注

因而, 式 (28.12) 和式 (28.13) 亦能表达为

$$\varphi_P(t)=\int \rho_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}, \tag{28.14}$$

$$\boldsymbol{A}_P(t)=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\left(t-\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}. \tag{28.15}$$

这种形式的解较式 (28.12) 和式 (28.13) 的形式普遍得多. 它不局限于时间–依赖的周期性 ($\sim \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$). 即, 倘若 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 是周期量的线性叠加 (傅里叶积分)

$$\rho(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$\boldsymbol{i}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{i}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

则对应的解也是线性叠加的:

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega,$$

$$\boldsymbol{A}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{A}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

即, 只要 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 能用按时间的傅里叶展开来表示, 则式 (28.14) 和式 (28.15) 便成立. 式 (28.14) 和式 (28.15) 所给出的这种形式的 φ_P 和 $\boldsymbol{A}_P$ 叫做推迟势 (因为 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 取 $t-r/c$ 时的值), 它们对应于辐射条件. 超前势当为

$$\varphi_P(t)=\int \rho_Q\left(t+\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}},$$

$$\boldsymbol{A}_P(t)=\frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\left(t+\frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}.$$

这些势表示入射球面波. 尽管它们是同一组微分方程的解, 但在自然界是不易实现的. 在无限空间中, 自然界只表现第一组解.

c. 周期场公式的讨论

解式 (28.12) 和式 (28.13) 的普遍结论是: 在远离电流系处 (即 ρ 和 $\boldsymbol{i}$ 显著不为零的区域) 形成一个辐射区[①]. 若电荷局限在有限空间内, 静态场和准静态场按 $1/r^2$ 衰减. 在迅变场情况中, 不仅势而且场强也按 $1/r$ 衰减.

对下面讨论来说, 区别三种不同长度是重要的:

$$d=\text{电流系的线度};$$

$$R=\text{场点 } P \text{ 到电流系的距离},$$

$$\lambda=2\pi/k=\text{波长}.$$

① 德文原版为 "波区", 后文也是这样.——中译者注

1. 辐射区的一般讨论. 考察

$$R \gg d \quad \text{和} \quad R \gg \lambda$$

处一场点 P(即, $kR \gg 1$). 这两个条件表征辐射区. 对于比值 d/λ, 则完全未作任何假设 (图 28.1).

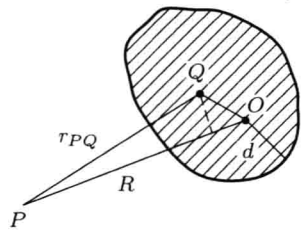


图 28.1

选取电流系内一点 O 为坐标原点, 则

$$r_{PQ} = R - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_Q,$$

式中 $\overline{OP} = R$, $\boldsymbol{x}_Q$ = 源点 Q (电流系中一点) 的位矢, 而 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}_P/\boldsymbol{r}$ 为在 P 方向上的单位矢. 在式 (28.12) 和式 (28.13) 中, 我们能以 R 代替分母中的 r_{PQ} (在指数中却不能), 则,

$$\varphi_P = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \int \mathrm{d}V_Q \rho_Q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_Q)},$$

$$\boldsymbol{A}_P = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \frac{1}{c} \int \mathrm{d}V_Q \boldsymbol{i}_Q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_Q)}.$$

过渡到场强

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} - \operatorname{grad}\varphi$$

时, 微分给出两项: 微分 $1/R$ 时, 数量级乘上 $1/R$ 因子; 微分指数函数时, 却乘上 k. 因为 $kR \gg 1$, 第一项可略去, 并得

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_P} \sim \mathrm{i}k \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{x}_P} \sim \mathrm{i}k \frac{\boldsymbol{x}_P}{R} \sim \mathrm{i}k\boldsymbol{n}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \mathrm{i}k(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}) \\ &= \frac{\mathrm{i}k}{c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \int (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{i})_Q \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}_Q)} \mathrm{d}V_Q. \end{aligned} \tag{28.16}$$

因

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \mathrm{i}k(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}),$$

由式 (28.3′) 得

$$\varphi = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A}.$$

因此,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}k(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A})) = \mathrm{i}k\boldsymbol{A}_\perp \\ &= \frac{\mathrm{i}k}{c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \int (\boldsymbol{i}_\perp)_Q \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}_Q)} \mathrm{d}V_Q, \end{aligned} \tag{28.17}$$

式中

$$\boldsymbol{i}_\perp = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}).$$

因 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{i}_\perp$, 于是可以看出:

(1) 只有 $\boldsymbol{i}$ 的垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的分量在产生场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 中起作用;

(2) $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 之间存在着与在平面波的情况相同 (§25) 的关系:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0, \\ &|\boldsymbol{E}|^2 = |\boldsymbol{H}|^2, \quad \boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{c}{4\pi} |\boldsymbol{E}|^2 \cdot \boldsymbol{n}. \end{aligned}$$

代替式 (28.17), 我们亦能写成

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{R} \frac{1}{c^2} \int \left(\frac{\partial \boldsymbol{i}_\perp}{\partial t} \right)_{\text{推迟}} \mathrm{d}V. \tag{28.18}$$

2. 辐射区中的偶极辐射. 除 $R \gg d$ 和 $R \gg \lambda$ 条件外, 现在还要求

$$\lambda \gg d$$

(即, $kd \ll 1$). 例如, 对于天线, 这种要求常常是能满足的.

指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})}$ 能展开为幂级数. 这对应于把辐射分解为多极辐射 (偶极辐射、四极辐射, 等等). 在第一级近似中, 我们令

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x})} = 1.$$

(即, 略去电流系内的推迟效应). 于是, 得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \frac{1}{c} \int \boldsymbol{i}_\perp \mathrm{d}V, \\ \boldsymbol{H} &= \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \frac{1}{c} \boldsymbol{n} \times \int \boldsymbol{i} \mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{28.19}$$

这种辐射叫做偶极辐射. 这时, 能明显地得出场强与 $\boldsymbol{n}$ 的关系. 令

$$\boldsymbol{j}=\int \boldsymbol{i}\mathrm{d}V. \tag{28.20}$$

则

$$\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{i}k}{c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{j}_{\perp},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{28.21}$$

对平行于 z 轴的线性振荡,

$$|j_{\perp}|=|j|\sin\theta.$$

于是坡印亭矢量 ($\boldsymbol{S}=(c/(4\pi))|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{n}$) 为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{c}{4\pi}\frac{k^2}{c^2R^2}j_0^2\sin^2\theta\sin^2(kR-\omega t+\alpha)\\&=\frac{1}{4\pi R^2}\frac{1}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\right)^2_{\text{推迟}}\sin^2\theta.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{d}f=R^2\mathrm{d}\Omega$, $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega=2/3$, $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=1/3$, 对整个球面积分便得到每秒辐射的能量:

$$\int S_n\mathrm{d}f=\frac{2}{3}\frac{1}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\right)^2_{\text{推迟}}. \tag{28.22}$$

辐射系为一点电荷且作整体振动的情况:

$$\boldsymbol{i}=\rho\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{j}=\int\boldsymbol{i}\mathrm{d}V=e\boldsymbol{v},$$

包含在上述情况中. 这样, 对振动的点电荷, 若 λ 大于电荷运动区域的线度, 则

$$\int S_n\mathrm{d}f=-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2_{\text{推迟}}. \tag{28.23}$$

自然, λ 必然也大于电荷的线度: $\lambda\gg a$. 对于电子 $a\sim e^2/mc^2\sim10^{-13}$ cm.

引进极化矢量 $\boldsymbol{P}$ 常常是有用的:

$$\boldsymbol{i}=\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t},\quad \rho=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}. \tag{28.24}$$

对于周期过程, 则 $\boldsymbol{P}=i\boldsymbol{i}/\omega$ 以及

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial^2\boldsymbol{P}_{\perp}}{\partial t^2}\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\Pi}_{\perp}}{\mathrm{d}t^2}, \tag{28.25}$$

式中

$$\boldsymbol{\Pi}=\int\boldsymbol{P}\mathrm{d}V,\quad \boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Pi}}{\mathrm{d}t}. \tag{28.26}$$

非线性振荡. 令 $\boldsymbol{\Pi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_2$ 为振荡的两个正交线性分量. 则

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_{1\perp} = \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n},$$
$$\boldsymbol{E}_2 = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}}_{2\perp} = \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n},$$

于是, 坡印亭矢量不是加性的:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \frac{c}{4\pi}\{\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1\}.$$

然而, 当积分遍及全部方向时, 交叉项便消失. 即, 在 $\boldsymbol{n}$ 方向上, 它们的分量为

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4\pi}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1\right)\\
&\quad = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n})\\
&\quad = \frac{c}{4\pi}\cdot 2(\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{E}_2) = \text{常数}[\boldsymbol{\Pi}_1 - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}_1)]\cdot[\boldsymbol{\Pi}_2 - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}_2)]\\
&\quad = \text{常数}[(\boldsymbol{\Pi}_1\cdot\boldsymbol{\Pi}_2) - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}_1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}_2)],
\end{aligned}$$

式中常数意味着与 $\boldsymbol{n}$ 无关. 现在利用 $\boldsymbol{\Pi}_1$ 垂直于 $\boldsymbol{\Pi}_2$ 的规定. 设 $\boldsymbol{\Pi}_1$ 平行于 x 方向, 而 $\boldsymbol{\Pi}_2$ 平行于 y 方向, 则上面表达式变为

$$(\text{常数})' \times n_x n_y.$$

积分遍及球面时, 它等于零. 这样, 若振荡是互相垂直的, 便得到一个重要的关系

$$\oint S_n \mathrm{d}f = \oint S_{1n}\mathrm{d}f + \oint S_{2n}\mathrm{d}f. \tag{28.27}$$

特殊情况: 圆振荡, 在光学中, 这情况是重要的. 这里, 线偏振光沿 x 方向和 y 方向发射, 而圆偏振光沿 z 方向. 在其他任意方向, 光是椭圆偏振的 (图 28.2).

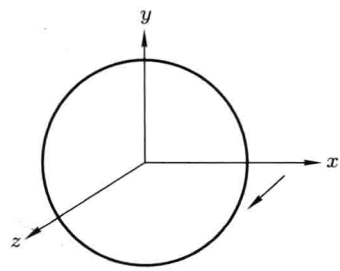


图 28.2

3. 赫兹矢量[①]. 在辐射区中, 有 $kR \gg 1$ (或 $R \gg \lambda$) 的条件. 现在我们将不再作这种限制. 而是, 对任意 kR, 只假定

$$d \ll \lambda, \quad d \ll R.$$

虽然我们将不再限于考察辐射区, 然而这种类型的辐射还是叫做偶极辐射.

在式 (28.12) 和式 (28.13) 中, 我们再次用平均值 R 代替 r_{PQ}, 则

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\int \boldsymbol{i}\mathrm{d}V = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{j}.$$

为了与常用的表示法联系起来, 令

$$\boldsymbol{j} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Pi}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\Pi},$$

所以

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{j} = -\mathrm{i}k\boldsymbol{\Pi}$$

和

$$\boldsymbol{A} = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{\Pi}. \tag{28.28}$$

由于式 (28.3′), 并考虑到 $\boldsymbol{\Pi}$ 与位置无关, 则

$$\varphi = -\mathrm{div}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{\Pi}\right) = -\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathrm{grad}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}, \tag{28.29}$$

现在, 来计算场强 (不略去 $1/kR$ 幂). 已能看出此解与偶极子有关, 因为当 $k=0$ 时, φ 变为电矩为 $\boldsymbol{\Pi}$ 的偶极子的静电势. 然而, 若偶极子振荡, 则其他各项仍然作出重要的贡献. 于是有

$$\boldsymbol{H} = \mathrm{curl}\,\boldsymbol{A} = -\mathrm{i}k\mathrm{grad}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\times\boldsymbol{\Pi}.$$

因为

$$\mathrm{grad}\,f(R) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\boldsymbol{n},$$

式中 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{x}/\boldsymbol{R}$, 所以

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}) = -\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left(\mathrm{i}k - \frac{1}{R}\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}.$$

从而

$$\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left(k^2 + \frac{\mathrm{i}k}{R}\right)\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}. \tag{28.30}$$

① 德文原版是 "赫兹振子". —— 中译者注

第一项已在辐射区中得到, 第二项在近距离处特别大; 而 φ 变为

$$\varphi = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi}) = \left(-\frac{\mathrm{i}k}{R^2}+\frac{1}{R^3}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\Pi}.$$

计算 $\operatorname{grad}\varphi$, 得

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left\{\left(-\frac{\mathrm{i}k}{R}+\frac{1}{R^2}\right)\boldsymbol{\Pi}+\left(k^2+\frac{3\mathrm{i}k}{R}-\frac{3}{R^2}\right)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})\right\}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \mathrm{i}k\boldsymbol{A}-\operatorname{grad}\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}k^2\boldsymbol{\Pi}-\operatorname{grad}\varphi\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left\{\left(k^2+\frac{\mathrm{i}k}{R}-\frac{1}{R^2}\right)\boldsymbol{\Pi}+\left(-k^2-\frac{3\mathrm{i}k}{R}+\frac{3}{R^2}\right)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})\right\}. \quad (28.31)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的这种解是以赫兹振荡偶极子 (赫兹振子) 命名而为人们所熟知.

过渡到 $d\to 0$ 的极限的可能性是存在的. 于是, 除存在奇点的原点外, 我们的公式是齐次方程组 ($\rho=0, \boldsymbol{i}=0$) 的解.

对于 $R\ll\lambda(kR\ll 1)$ 的情况, 我们有

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{R^3}\{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})-\boldsymbol{\Pi}\}.$$

这是电矩为 $\boldsymbol{\Pi}$ 的静电偶极子的场. (若设想 z 轴是沿着 $\boldsymbol{n}$ 的方向, 便立即可以看出此点).

对于 $\boldsymbol{H}$, 我们得

$$\boldsymbol{H} = \frac{\mathrm{i}k}{R^2}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi} = -\frac{1}{cR^2}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{j} = +\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{n}}{R^2}.$$

这只不过是电流为 $\boldsymbol{j}$ 的毕奥–萨伐尔场.

在辐射区, $R\gg\lambda(kR\gg 1)$, 我们得到先前的结果

$$\boldsymbol{H} = k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi},$$

$$\boldsymbol{E} = k^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\{\boldsymbol{\Pi}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})\}.$$

d. 非齐次波动方程的积分. 第二种方法

几乎全部光学都可应用周期 (时间) 依存的方法来处理. 然而, 我们还是给出另一种关于积分非齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\boldsymbol{x},t) \quad (28.32)$$

的方法. 在这第二种方法中, 不作关于时间的傅里叶积分或傅里叶级数的分解.

引进一个新变量.

$$t = \tau - \frac{r}{c} \tag{28.33}$$

其中 $r = |\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q|$. 并用球坐标[①] r, θ, ψ. 于是,

$$\rho(\boldsymbol{x}, t) = \rho\left(r, \theta, \psi; \tau - \frac{r}{c}\right).$$

按如下的表示法

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &\equiv \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_t \quad (t \text{ 为常数时的偏微分}), \\ \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} &\equiv \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_\tau \quad (\tau \text{ 为常数时的偏微分}). \end{aligned} \tag{28.34}$$

我们有

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度在 τ 固定的情况下变为

$$\mathrm{div}_\tau \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 A_r) + (\text{对 } \theta \text{ 和 } \psi \text{ 的导数})^{②},$$

在 t 固定的情况下, 为

$$\mathrm{div}_t \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + (\text{对 } \theta \text{ 和 } \psi \text{ 的导数}).$$

根据上面的关系, 应有

$$\mathrm{div}_\tau \boldsymbol{A} = \mathrm{div}_t \boldsymbol{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_r}{\partial t}.$$

应用于 $\boldsymbol{A} = (1/r)\nabla_t \varphi$ (式中 ∇_t 表示在 t 固定时的梯度). 给出

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_\tau\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right) &= \mathrm{div}_t\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right) - \frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t \partial r} \\ &= \frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi + \left(\nabla_t\frac{1}{r}\right)(\nabla_t\varphi) - \frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r} \\ &= \frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{rc}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}. \end{aligned}$$

① 德文原版、英译版都写作 "极坐标". —— 中译者注

② 英译版有误, 中译版已改正. —— 中译者注

积分时, 需要在 τ 固定时的导数, 因此, 我们用 $\mathrm{d}/\mathrm{d}r$ 代替 $\partial/\partial r$. 于是有

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_\tau\left(\frac{1}{r}\nabla_t\varphi\right) &= \frac{1}{r}\nabla_t^2\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{rc}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{rc^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\\ &= \frac{1}{r}\left\{\nabla_t^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right\} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left\{\varphi + r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}. \qquad (28.35)\end{aligned}$$

我们对用小球 k[①] 把 P 点 ($r=0$) 剔除的整个体积积分这一方程 (在 τ 固定情况下), 则得到 (图 28.3)

$$\int_{F+k}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t \mathrm{d}f = -4\pi\int\frac{\rho_Q(r,\theta,\psi;\tau-r/c)}{r}\mathrm{d}V_Q - \int_F\left(\varphi + r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega + \int_k\left(\varphi + r\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\mathrm{d}\Omega,$$

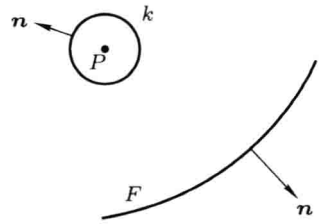


图 28.3

式中 $\mathrm{d}\Omega$ 是立体角元而 $\mathrm{d}V_Q = r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\Omega$. 在 $k\to 0$ 的极限情况中, 等式左端遍及小球的积分等于零, 而右端的积分等于 $4\pi\varphi_P$. 借助适用于任意曲面 F 的几何关系 $\mathrm{d}\Omega = (1/r^2)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{d}f$, 得到重要的公式

$$\varphi_P(\tau) = \int\frac{\rho_Q\left(r,\theta,\psi;\tau-\dfrac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}V_Q + \frac{1}{4\pi}\int_F\mathrm{d}f\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t + \left(\frac{\varphi}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\right\}. \qquad (28.36)$$

在此公式中, τ 是固定的并且 $r\equiv r_{PQ}$.

这一公式也可作为齐次波动方程

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

的一个解. 在这种情况中,

$$4\pi\varphi_P = \int_F\mathrm{d}f\left\{\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_t + \left(\frac{\varphi}{r^2}+\frac{1}{rc}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\right\}. \qquad (28.37)$$

① 为了与前面一致, 已改 K 为 k; 这样也与德文原版一致.——中译者注

若曲面 F 是一个球面, 则 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})=1$, $\mathrm{d}f=r^2\mathrm{d}\Omega$, $(\partial/\partial n)_t=\dfrac{\partial}{\partial r}$, 故得

$$4\pi\varphi_P=\int_F \mathrm{d}\Omega\left\{\varphi+r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right\}. \tag{28.38}$$

对这一情况, 有

$$\lim_{r\to\infty}\varphi=0^{①}.$$

此外, 若还满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0, \tag{28.39}$$

则能把曲面 F 移至无限远. 因而面积分等于零.

对于 $\varphi=\varphi_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $k=\omega/c$, 则又变成先前的关系.

§29. 匀速运动的点电荷的场

考察这种情况是为狭义相对论作准备.

我们从下列方程组出发,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\dot{\varphi}=0,^{②}\\
&\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\ddot{\varphi}=-4\pi\rho,\\
&\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{A}}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}.
\end{aligned}$$

设电荷 ρ 以速度 $\boldsymbol{v}$ 在 x 方向运动, 即, $x_Q=vt$. 我们探求仅与场点相对于电荷的坐标 $(x-vt,y,z)$ 有关的麦克斯韦方程组的解, 所以, 时间依存关系应仅以 $(x-vt)$ 的形式出现. 于是

$$\frac{\partial}{\partial t}=-v\frac{\partial}{\partial x}.$$

从

$$i_x=v\rho,\quad i_y=i_z=0,$$

得

$$A_y=A_z=0,\quad \frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

表达式

$$A_x=\left(\frac{v}{c}\right)\varphi$$

① 英译版误为 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi_P=0$. ——中译者注

② 英译版有误, 已改正. ——中译者注

满足这个方程. 只是还必须满足 φ 的方程:

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{29.1}$$

因数 $(1-v^2/c^2)$ 意味着缩短. 为了得到与静态相同的结果, 引进

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{29.2}$$

则 φ 的方程变为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{29.3}$$

且其解为

$$\varphi=\frac{e}{r'}. \tag{29.4}$$

然而, 这里

$$r'^2=\frac{(x-vt)^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}+y^2+z^2. \tag{29.5}$$

对于电场, 有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}-\operatorname{grad}\varphi;\\
&E_x=\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\
&E_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_x&=\frac{e}{r'^2}\frac{x-vt}{r'}\\
E_y&=\frac{e}{r'^2}\frac{y}{r'}\\
E_z&=\frac{e}{r'^2}\frac{z}{r'}
\end{aligned}\right\}\boldsymbol{E}=\frac{e}{r'^3}\boldsymbol{r}. \tag{29.6}$$

所以, $\boldsymbol{E}$ 是在 $\boldsymbol{r}=(x-vt,y,z)$ 的方向上而不是沿 $\boldsymbol{r}'=(x',y,z)$ 的方向. $r'=$ 常数的等势面是一个扁旋转椭球 (赫维赛德椭球). 矢量 $\boldsymbol{E}$ 不垂直于这些等势面.

对于磁场, 有

$$\begin{aligned}
&H_x=0,\quad H_y=+\frac{\partial A_x}{\partial z}=+\frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{v}{c}E_z,\\
&H_z=-\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\frac{v}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=+\frac{v}{c}E_y.
\end{aligned}$$

用 $\boldsymbol{v}=(v,0,0)$, 上式可写成

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E} \tag{29.7}$$

和

$$\boldsymbol{A} = \frac{e\boldsymbol{v}}{cr'}. \tag{29.8}$$

这些关系是一个更普遍结果的先驱: 麦克斯韦方程组对于一变换群 (洛伦兹群) 是不变的, 该变换是对匀速运动的坐标系间所作的变换, 并有如下的性质:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

对坐标的一种特殊选择, 其变换有下列形式

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

场强也是以使得麦克斯韦方程组保持不变的方式变换的. 这样, 自然定律对所有的参考系都相同. 新颖的结果是时间也要变换. 在牛顿和伽利略的物理学中, 有

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

这里相反, 在不同空间点上的两个事件, 对于一个参考系是同时的, 而对于另一个参考系就不同时了. 这是与电磁场的有限传播速度密切相关的.

§30. 辐射阻尼

我们已看到 (式 (28.23)), 由

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{e^3}\dot{v}^2_{\text{推迟}} \tag{30.1}$$

给出一个振荡点电荷每秒辐射的能量. 根据能量守恒定律, 场必须给予电荷一个反作用力. 这个力可由考虑下式而猜测出来

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}.$$

然而, 由于能量涨落, 只需要求这关系对时间平均量成立:

$$\overline{\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{v}} = \overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\dot{\boldsymbol{v}}^2} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v})} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\overline{\ddot{\boldsymbol{v}}} \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

因等式右端第一项是全导数, 故等于零. 这样便得到辐射的反作用 (辐射阻尼力):

$$\boldsymbol{K} = +\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\boldsymbol{x}}. \tag{30.2}$$

这仅是一种探索性的考虑. 然而, 这种力可从场对电子的反作用直接推导出来. 为此, 必须假设电荷是有限广延的. 我们发现, 若略去 $(v/c)^2$ 阶各项, 则

式 (30.2) 是正确的.

有限广延电荷的自 (作用) 力的计算[A–4]

用运动的电荷分布 $(\rho, \boldsymbol{i})$ 代表电子, 并将对电荷及其运动作某些特殊的假设.

电子在一任意点 P 处产生的场为

$$\boldsymbol{E}_P = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}_P - \mathrm{grad}_P\varphi_P, \tag{30.3}$$

$$\boldsymbol{H}_P = \mathrm{curl}_P\boldsymbol{A}_P, \tag{30.4}$$

式中

$$\varphi_P(t) = \int \rho_Q\left(t - \frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}, \tag{30.5}$$

$$\boldsymbol{A}_P(t) = \frac{1}{c}\int \boldsymbol{i}_Q\left(t - \frac{r_{PQ}}{c}\right)\frac{\mathrm{d}V_Q}{r_{PQ}}. \tag{30.6}$$

本段关心的是质点本身区域中存在的场. 由于这区域很小, 因而推迟现象不起主要作用. 按 $-r/c$ 幂展开:

$$\begin{aligned}\varphi_P &= \int \frac{1}{r_{PQ}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{r_{PQ}}{c}\right)^n\frac{\partial^n\rho_Q}{\partial t^n}\mathrm{d}V_Q\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int r_{PQ}^{n-1}\rho_Q\mathrm{d}V_Q,\\ \boldsymbol{A}_P &= \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{c}\right)^n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int r_{PQ}^{n-1}\boldsymbol{i}_Q\mathrm{d}V_Q.\end{aligned}$$

在 φ 的表达式中, $n=0$ 的项就是库仑势. 因 $\int\rho_Q\mathrm{d}V_Q = e =$ 常数以及 $(\partial/\partial t)$ (常数)=0, 所以, $n=1$ 的项为零. 在级数中其余各项里, 用 $n+2$ 代换 n, 则得

$$\varphi_P = \int\frac{\rho_Q}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_Q + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}\left(-\frac{1}{c}\right)^{n+2}\frac{\partial^{n+2}}{\partial t^{n+2}}\int r_{PQ}^{n+1}\rho_Q\mathrm{d}V_Q.$$

这里, $\partial/\partial t$ 仅作用于 ρ_Q. 应用连续性方程

$$\frac{\partial\rho_Q}{\partial t} = -\mathrm{div}_Q\boldsymbol{i}_Q,$$

并由于恒等式 (4.10) (高斯定律) 以及在积分号下,

$$\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_Q = -\boldsymbol{i}_Q\cdot\mathrm{grad}_P,$$

便得

$$\varphi_P = \int \frac{\rho_Q}{r_{PQ}} \mathrm{d}V_Q - \frac{1}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \times \left(-\frac{1}{c}\right)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \int \boldsymbol{i}_Q \cdot \mathrm{grad}_P r_{PQ}^{n+1} \mathrm{d}V_Q.$$

所以, 从式 (28.2) 得到电场强度

$$\boldsymbol{E}_P = -\mathrm{grad}_P \int \frac{\rho_Q}{r_{PQ}} \mathrm{d}V_Q - \frac{1}{c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{c}\right)^n \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \times \int \left\{ \frac{1}{n!} \boldsymbol{i}_Q r_{PQ}^{n-1} - \frac{1}{(n+2)!} \mathrm{grad}_P (\boldsymbol{i}_Q \cdot \mathrm{grad}_P r_{PQ}^{n+1}) \right\} \mathrm{d}V_Q. \tag{30.7}$$

为了计算场作用在质点上的力, 我们作如下假设:

1. 电荷分布是刚性的, 且仅作移动 (虽然是非匀速的). 即

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}, t) = \rho(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{v}(t), \tag{30.8}$$

式中 $\boldsymbol{v}(t)$ 与 $\boldsymbol{x}$ 无关.

2. 选择 $v/c \ll 1$ 的参考系. 仅取 v/c 的零阶项. 这意味着对加速度或 $\boldsymbol{v}$ 的高阶时间导数的大小不作限制性的假设. 的确, 我们的推导在电子的瞬时静止系统中是精确的. 此外, v/c 的第一阶项等于零, 所以, 第一个被略去的项是 $(v/c)^2$ 阶的.

根据式 (26.1) 和式 (30.8) 两式, 单位体积的力为

$$\boldsymbol{k} = \rho(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}).$$

作用在电子上的总力仍然是

$$\boldsymbol{K} = \int \rho_P \boldsymbol{E}_P \mathrm{d}V_P,$$

因为磁的洛伦兹力是 $(v/c)^2$ 阶的. 若把展开式 (30.7) 代入上面 $\boldsymbol{K}$ 的表达式中, 则因

$$\iint \rho_P \rho_Q \frac{\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_Q}{r_{PQ}^3} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_Q = 0,$$

可以看出库仑项消失 (交换积分变量, 便可看出). 只保留

$$\boldsymbol{K} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{K}^{(n)}, \tag{30.9}$$

式中

$$\boldsymbol{K}^{(n)}=-\left(-\frac{1}{c}\right)^{n+2}\int\rho_P\mathrm{d}V_P\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\times$$
$$\int\rho_Q\left\{\frac{1}{n!}\boldsymbol{v}r_{PQ}^{n-1}-\frac{1}{(n+2)!}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_P\boldsymbol{r}_{PQ}^{n+1})\right\}\mathrm{d}V_Q. \quad (30.10)$$

主要项是 $\boldsymbol{K}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{K}^{(1)}$.

在计算 $\boldsymbol{K}^{(0)}$ 时, 出现含有 $\partial\rho_Q/\partial t$ 的项. 根据式 (24.5) 和式 (30.8) 两式, 它等于 $-\mathrm{div}_Q(\rho_Q\boldsymbol{v})$. 运用积分定理式 (8.7) 可将积分项

$$+\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\mathrm{div}_Q(\rho_Q\boldsymbol{v})\left\{\boldsymbol{v}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q$$

变换为

$$-\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_Q\left\{\boldsymbol{v}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_Q r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

因为微分算符仅作用于 r_{PQ}, 所以 grad_Q 可用 $-\mathrm{grad}_P$ 代换, 反之亦然, 于是上面的积分项等于

$$+\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_P\left\{\boldsymbol{v}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_Q(\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}_Q r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

交换积分变量会得到同样的结果(虽然反号). 这表明该项必须为零. 于是, $\boldsymbol{K}^{(0)}$ 中仍保留的项为

$$\boldsymbol{K}^{(0)}=-\frac{1}{c^2}\iint\rho_P\rho_Q\left\{\dot{\boldsymbol{v}}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{1}{2}\mathrm{grad}_P(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{grad}_P r_{PQ})\right\}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q.$$

假设电荷分布是球对称的, 则可简化这一积分. 关于

$$\frac{\partial^2 r_{PQ}}{\partial x_{P_i}\partial x_{P_k}}=\delta_{ik}\frac{1}{r_{PQ}}-\frac{(x_{P_i}-x_{Q_i})(x_{P_k}-x_{Q_k})}{r_{PQ}^3}$$

的积分, 当 $i\neq k$ 时为零, 并且可用 $\nabla^2 r/3=2/3r$ 代换 $\partial^2 r_{PQ}/\partial x_{P_i}^2$, 所以,

$$\mathrm{grad}_P(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\mathrm{grad}_P\boldsymbol{r}_{PQ})\to\frac{2}{3}\dot{\boldsymbol{v}}\frac{1}{r_{PQ}}$$

和

$$\boldsymbol{K}^{(0)}=-\mu\dot{\boldsymbol{v}}, \quad (30.11)$$

式中

$$\mu=\frac{2}{3}\frac{1}{c^2}\iint\frac{\rho_P\rho_Q}{r_{PQ}}\mathrm{d}V_P\mathrm{d}V_Q. \quad (30.12)$$

因为

$$\frac{1}{2}\iint \frac{\rho_P \rho_Q}{r_{PQ}} \mathrm{d}V_P \mathrm{d}V_Q = E_{\text{静电}}$$

表示静电能 (参见式 (4.5)), 故 μ 也能写成

$$\mu = \frac{4}{3}\frac{E_{\text{静电}}}{c^2}. \tag{30.13}$$

因为 $\boldsymbol{K}^{(0)}$ 有惯性力的特征, 所以 μ 能诠释为电磁质量. 若认为电荷局限在半径为 a 的球体内, 则 $E_{\text{静电}}$ 具有 e^2/a 的数量级, 其中 e 是电子的电荷 (参见 §5).

关于 $\boldsymbol{K}^{(1)}$, 我们求得

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = +\frac{1}{c^3}\int \rho_P \mathrm{d}V_P \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho_Q \left\{\boldsymbol{v} - \frac{1}{6}\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad}_P r_{PQ}^2)\right\}\mathrm{d}V_Q.$$

因为

$$\mathrm{grad}_P(\boldsymbol{v}\cdot \mathrm{grad}_P r_{PQ}^2) = 2\boldsymbol{v}$$

和

$$\int \rho_P \mathrm{d}V_P = \int \rho_Q \mathrm{d}V_Q = e,$$

所以

$$\boldsymbol{K}^{(1)} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} \tag{30.14}$$

是辐射阻尼力. 它与电荷的分布完全无关. (特别是, 允许 $a \to 0$.)

式 (30.9) 展开式的高次项与 a 的幂成比例:

$$K^{(2)} \propto a, \quad K^{(3)} \propto a^2.$$

若 a 足够小, 这些都可以略去.

因此, 除式 (30.14) 所给出的阻尼力外, 我们还得到另外一项 (式 (30.11) 中的项), 然而, 若把电子运动方程写成

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{K} = -\mu\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} + \cdots,$$

则可看出, m 和 μ (分别是力学质量和电磁质量) 是不可能分割的, 因为这方程亦能写成

$$(m+\mu)\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} + \cdots. \tag{30.15}$$

所以, $m+\mu$ 只不过是电子的总质量.

对于点电子 ($a=0$), 电磁质量 μ 为无限大.

补 充 书 目

一般著作

M. ABRAHAM and R. BECKER, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism* (Hafner, New York, 无日期).

J. FRENKEL, *Lehrbuch der Elektrodynamik* (Berlin, 1926).

A. SOMMERFELD, *Lectures on Theoretical Physics, Vol. 3: Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1952).

H. A. LORENTZ, *Vorlesungen über theoretische physik* (Leipzig, 1907).

H. A. LORENTZ, Theorie der magneto-optischen Phänomene, *Encycl. math. Wiss.*, Vol. 5, part 3 (Leipzig, 1909–1926).

J. C. MAXWELL, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford, 1888; reprinted by Dover Publications, New York, 1954).

专门著作

H. A. LORENTZ, *Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (Leipzig, 1909; reprinted by Dover Publications, New York, 1952).

J. LARMOR, *Aether and Matter* (Cambridge, 1900).

其他书目

R. BECKER, *Electromagnetic Fields and Interactions*, edited by F. Sauter (Blaisdell, New York, 1964), 2 vols. (代替 M. ABRAHAM and R. BECKER, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism.*)

J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics* (Wiley, New York, 1962).

L. D. LANDAU and E. M. LIFSHITZ, *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, New York, 1960).

W. K. H. PANOFSKY and M. PHILLIPS, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962).

W. R. SMYTHE, *Static and Dynamic Electricity* (McGraw-Hill, New York, 1950).

J. A. STRATTON, *Electromagnetic Theory* (McGraw-Hill, New York, 1941).

附录　英译本主编评注

[A–1] (§1, §26)　这些章节, 虽然不是泡利本人的手笔, 却反映了泡利对理论物理基本问题的极其深刻的信念. 在他整个科学生涯中, 他反复地表达了这些信念. 这种看法可以从下面有关泡利著作中得到证实. [方括号中指的是 R. Kronig 和 V. F. Weisskopf 主编的《泡利科学论文集》(*Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*) (John Wiley, New York, 1964) 中的卷号和页号]:

Verhandl. Deutsche Physik. Ges. **21**, 742–750 (1919) [第二卷, 8–9 页].

Encyclopädie der mathematischen Wiss., vol. 5, Part. 2, B. G. Teubner (Leipzig, 1921), pp. 539–775 [第一卷, 237 页].

Scientia **59**, 65–76 (1936) [第二卷, 747–748].

Prix Nobel 1946, pp. 131–147 (Stockholm, 1948) [第二卷, 1095 页].

Helv. Phys. Acta, Suppl. **4**, 261–267 (1956) [第二卷, 1304–1306 页].

Universitas **13**, 593–598 (1958) [第二卷, 1367 页].

[A–2] (§7, §8, §9, §12)　物质的一般静电和静磁性质应是介电的和抗磁的, $\varepsilon > 1$ 和 $\mu < 1$. 这从 ε, μ 与温度无关反映出来 (半导体的抗磁性除外), 即, ε 和 μ 不是来源于统计的结果. 这种情况对应于 (§12 末尾) 第二种相似性; 并且, $\varepsilon - 1 > 0$ 和 $(1/\mu) - 1 > 0$ 表示使介质极化必须作功.

第一种相似性 (§12 末尾) 适用于分子的或原子的 (但非永久的) 电矩或磁矩情况; $\varepsilon - 1 > 0$ 和 $\mu - 1 > 0$ 是由于在外场作用下取向一致, 并再次表明使介质极化必须作功. 这里, ε 和 μ 来源于统计的结果, 故与温度有关.

在永久电矩或磁矩的情况中, $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{M}$ 分别为 $\boldsymbol{E}$ 的非线性函数 (铁电现象) 或 $\boldsymbol{H}$ 的非线性函数 (铁磁性, 亚铁磁性, 反铁磁性).

[A–3] (§14, §15)　在侧面上 $\partial\varphi/\partial n = 0$, 在基面上 $\varphi = \varphi_1 =$ 常数和 $\varphi = \varphi_2 =$ 常数的稳态导体的边界值问题具有唯一的解 φ; 其证明与在静电问题所作的完全相同 (§9).

柱面对称时, φ 与方位角 (在 §15 中也是 φ) 无关, 并且因 $\sigma =$ 常数, 故通过检验可证实 $\varphi = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{E} =$ 恒量, 是一个解. 所以, $\boldsymbol{i} =$ 恒量.

[A–4] (§30)　在对理论有益的一个新近贡献中, Rohrlich 论及这里以及其他文献中所叙述的传统计算并不是协变的, 所以式 (30.13) 不是电磁质量的正确表达式 (F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Addison-Wesley Publishing (Co. Reading, Mass., 1965). 根据 Rohrlich (他的式 (6.21)), 正确方法给出的结果是

$$P^{\alpha}_{\text{自}} = \mu v^{\alpha},$$

式中, $P^{\alpha}_{\text{自}}$ 是质点机械动量四矢量中的自相互作用部分, v^{α} 是速度四矢量, 而

$$\mu = \frac{E_{\text{静电}}}{c^2}.$$

由于此式满足爱因斯坦的质能关系, 所以它比式 (30.1) 更加令人满意.

索引

(汉－英)

二　画

力的叠加　Superposition of forces, §1
力矩　Torque, §18
入射波　Incoming wave, §28

四　画

以太　Aether, §25, §26
分子电流　Molecular current, §16, §24
分子极化率　Polarizability, molecular, §8
介电常数　Dielectric constant, §7, §8, §9, §13, §27
介质中的电磁波　Electromagnetic waves in media, §27
互感　Mutual inductance, §20
反射旋转　Improper rotation, §2
无电流和电荷情形的麦克斯韦方程组　Maxwell equations in absence of charges or currents, §27
瓦特 (单位)　Watt (unit), §14
韦伯 (单位)　Weber (unit), §18

五　画

电子论　Electron theory, §8
电力　Electric force, §17
电介质　Dielectric, §7, §8, §11, 附录
电位移矢量 ($\boldsymbol{D}$) 的平行分量的不连续性　Discontinuity of parallel component of D, §7

电导率	Conductivity, §14
电动势	Electromotive force, §21
电阻的定义	Definition of resistance, §14
电场的定义	Definition of electrical field, §1
电场的能量	Energy of electric field, §4, §13
电场的能量密度	Energy density of electric field, §4, §9, §18
电极	Electrodes, §14, §21
电容	Capacitance, §21
电容器	Condenser (capacitor), §7, §21
电荷守恒	Conservation of charge, §1
电路	Circuits, §20, §21
电流分布	Current distribution, §14
电流的定义	Definition of current, §14
电流系的能量	Energy, of current system, §20
电流密度的定义	Definition of current density, §14
电量和磁量的类比	Electric and magnetic quantities, analogy of, §12, §16, 附录
电偶极子	Electric dipole, §8
电偶极矩	Electric dipole moment, §8, §24
电磁场的能量密度	Energy density of electromagnetic field, §26
电磁动量	Momentum, electromagnetic, §26
电磁单位	Electromagnetic units (emu), §14, §15
电磁质量	Electromagnetic mass, §30, 附录
电象法	Method of images, §11
边值问题	Boundary value problem, 附录
功	Work, §2, §19, §20, 附录
本构方程	Constitutive equation, §12, §24
平面波	Plane waves, §25, §26, §24, §28
出射波	Outgoing wave, §28
对称张量	Symmetric tensor, §18
矢势的定义	Definition of vector potential, §12

六　　画

齐次波动方程	Homogeneous wave equation, §25
安培 (单位)	Ampere (unit), §13, §14
安培的 “基本定律”	Ampere, “fundamental law” of, §17
安培电流	Amperean currents, §16
光的电磁理论	Electromagnetic theory of light, §25, §26
光速	Velocity of light, §25

多极子 Multipoles, §28
共振 Resonance, §21
有理化 m·kg·s (单位) 制 Rationalized mks units, §13, §18
有效场 Effective field, §8
有质动力 Ponderomotive forces, §17
动量守恒 Conservation of momentum, §26
场的概念 Field concept, §2
列别捷夫 Lebedev, P. N., §26
刘维尔定理 Liouville's theorem, §11
毕奥－萨伐尔场 Biot-Savart field, §28
毕奥－萨伐尔定律 Biot-Savart law, §15, §18
导体 (金属) Conductor (metal), §3, §9, §11, §12, §14–§17, §20, §21, §22, §23
导体上的边界条件 Boundary conditions at conductors, §3, §9
自由电荷 Conduction (true) charge, §7, §24
自由振荡 Free oscillations, §21
自作用力 Self-force, §30
自感 Self-inductance, §20
曲线 (正交) 坐标 Curvilinear (orthogonal) coordinates, §10
曲线坐标中的拉普拉斯算符 Laplacian in curvilinear coordinates, §10
吉尔伯特 Gilbert, W., §12
乔吉 (单位) 制 Giorgi (units), §13
弛豫时间 Relaxation time, §24
伏特 (单位) Volt (unit), §13, §14

七 画

阻力率 Specific resistance, §14
作用－反作用原理 Action-reaction principle, §1, §17, §18
作用于－电荷上的力 Force acting on a charge, §17
作用于导体上的力 Force on a conductor, §17
两点电荷间的力 Force between two point charges, §1
极化矢 Polarization vector, §8, §28
极化的定义 Polarization, definition of, §5
极化电荷 Polarization charge, §7
极化电流 Polarization current, §24
体电荷 Volume charge, §3, §4
体电荷的势能 Potential energy for volume charge, §4

体电荷密度 Volume charge density, §3, §7
体电流密度 Current density volume, §16
传导电流 Conduction current, §16, §24
运流电流 Convection current, §16
运动导体的感应现象 Induction for moving conductors, §23
位移矢量 Displacement vector, §7, §8
位移电流 Displacement current, §24
折射率 Index of refraction, §27
库仑 (单位) Coulomb (unit), §13, §28
库仑定律 Coulomb's law, §1, §6
亨利 (单位) Henry (unit), §21
麦克斯韦应力张量 Maxwell stress tensor, §18
克劳修斯－莫索提关系式 Clausius-Mosotti relation, §8, §11
角动量守恒 Conservation of angular momentum, §18
连续性方程 Continuity equation, §14, §24, §28
抗磁性 Diamagnetism, §12, §27, 附录
宏观电场 Macroscopic electrical field, §8, §24
宏观磁场 Macroscopic magnetic field, §24
函数论 Function theory, §11
阻尼振荡 Damped oscillation, §21

八　　画

点电荷 Point charge, §1, §2, §4, §28, §29
点电荷的场 Point charge, field of, §1, §2, §28, §29
点电荷的势能 Potential energy for point charges, §4
面电荷 Surface charge, §3, §4, §24
面电荷密度 Surface charge density, §3, §7, §11
面电流密度 Surface current density, §16
势流 Potential flow, §14
张量的概念 Concept of tensor, §18
波包 Wave packet, §26
波长 Wavelength, §25
波法线 Wave normal, §25
庞加莱 Poincaré, H., §26
物质介质中的
　麦克斯韦方程组 Maxwell equations for material media, §24
金属, 见导体 (金属) Metal
非齐次波动方程 Inhomoqeneous wave equation, §28

非周期 (过阻尼) 振荡 Oscillations, aperiodic (overdamped), §24
线偏振光 Linearly polarized light, §28
变分问题 Variational problem, §9
变分原理 Variation principle, §10
法拉第电磁感应定律 Faraday's law of induction, §19
拉普拉斯方程 Laplace equation, §2, §11
欧姆 (单位) Ohm (unit), §13, §14
欧姆定律 Ohm's law, §14, §23
泊松方程 Poisson equation, §3, §5
坡印亭矢量, 见能流密度 Poynting vector.

九 画

绝对静电荷 (单位) Units, absolute electrostatic charge (esu), §13, §14
绝缘体 Insulator, §7, §8, §9, §11
绝缘体上的边界条件 Boundary conditions at insulators, §9
总电荷 Total charge, §24
总电流 Total current, §24
保守场 Conservative field, §2
柱坐标 Cylindrical coordinate, §8
顺磁性 Paramagnetism, §12, §27
相速 Phase velocity, §25, §26, §27
相对论 Relativity, theory of, §29
柯西－黎曼方程 Cauchy-Riemann equation, §11
洛伦兹 Lorentz, H. A., §17
洛伦兹力 Lorentz force, §17, §30
洛伦兹条件 Lorentz condition, §28
洛伦兹群 Lorentz group, §29
标量 Scalar, §2, §18

十 画

流线 Stream lines, §14
偶极子的电场 Electric field of dipole, §8
偶极子的势 Potential of dipole, §8
偶极子场的矢势 Vector potential of field of dipole, §12
(电) 偶极矩 Dipole moment, electric, §8, §24
偶极辐射 Dipole radiation, §27, §28
荷电粒子的电流密度 Current density of charged particles, §14

荷电面上 E 的不连续性 Discontinuity of E at charged surfaces, §3
真空中的电磁波 Electromagnetic wave in vacuum, §25
真空中的麦克斯韦方程组 Maxwell equations for vacuum, §24
真旋转 Proper rotation, §2
能量守恒 Conservation of energy, §2, §26
能流密度 Energy current density, §26
铁磁性 Ferromagnetism, §12, §27, 附录
热传导 Heat conduction, §22
圆偏振光 Circularly polarized light, §28
准静场 Quasi-static fields, §19, §28
爱因斯坦 Einstein, A., §26
爱因斯坦质－能关系 Einstein mass-energy relation, 附录
高斯定律 Gauss's law, §2
高斯定理 Gauss's theorem, §2, §8, §18
格拉斯曼的 "基本定律" Grassman, "fundamental law" of, §17
格林定理 Green's theorem, §6, §28
索末菲 Sommerfeld, A., §28

十 一 画

渐近 (区) 域 Asymptotic region, §28
基本定律 "Fundamental laws", §17
排列符号 Permutation symbol, §2
推迟势 Retarded potential, §28
球坐标 Spherical coordinate, §5
球面波 Spherical wave, §28

十 二 画

超前势 Advanced potential, §28
超距作用 Action at distance, §17
等势面的能量密度 Energy density of equipotential surfaces, §3, §29
焦耳定律 Joule's law, §14
焦耳热 Joule heat, §14
奥斯特定律 Oersted's law, §15, §18
强迫振荡 Forced oscillation, §21
椭圆偏振光 Elliptically polarized light, §28
趋肤效应 Skin effect, §22
斯托克斯定理 Stokes's theorem, §2

十 三 画

解析函数 Analytic function, §51, §11
微观电场 Microscopic electrical field, §8, §24
微观磁场 Microscopic magnetic field, §24
频率 Frequency, §25
感应定律 Law of induction, §19
辐射反作用 Radiation reaction, §30
辐射区 Radiation zone, §28
辐射压力 Radiation pressure, §26
辐射条件 Radiation condition, §28
辐射阻尼力 Radiation damping force, §30
辐射能量 Radiated energy, §28

十 四 画

稳恒 (态) 电流 Steady-state current, §14–§17
静电势 Electrostatic potential, §2, §9
赫兹 Hertz, H., §25
赫兹矢量 Hertz vector, §28
赫兹振荡偶极子 Hertz oscillating dipole, §28
赫维赛德 (单位) 制 Heaviside (units), §13, §18
赫维赛德椭球 Heaviside ellipsoid, §29
磁力 Magnetic force, §17
磁化 Magnetization, §12, §16
磁化率 Magnetic susceptibility, §18
磁场的定义 Definition of magnetic field, §12
磁场的能量密度 Energy density of magnetic field, §18
磁导率 Magnetic permeability, §12, §13
磁有质动力 Magnetic ponderomotive forces, §17
磁极 Magnetic pole, §16
磁体 Magnet, §23
磁 (荷的) 体密度 Magnetic volume density, §12
磁 (荷的) 面密度 Magnetic surface density, §12
磁荷 Magnetic charge, §12
磁单极子 Magnetic monopoles, §12
磁矩 Magnetic moment, §16
磁量和电量的类比 Magnetic and electric quantities, analogy of, §12, §16, 附录
磁偶极子 Magnetic dipole, §12

磁偶极子的磁场 Magnetic field of dipole, §12
磁感应 (强度) Magnetic induction, §12, §16
磁感应强度的不连续性 Discontinuity of induction, §16

十 五 画

横向性 Transversality, §25

十 七 画

螺线管 Solenoid, §15, §20
螺线管的自感 Self-inductance for solenoid, §20

第二卷

光学和电子论

洪铭熙　译

留润州　校

英译本主编序言

当泡利在苏黎世联邦工业大学教授光学时，这门学科，如同力学那样，主旨是给学生学习对波动力学的观念作准备。在这方面，本书中有关哈密顿理论的一节及其在晶体光学一节中对各向异性介质的应用是人们特别感兴趣的。但在其他方面，在泡利的时代，光学则是一门辉煌已成过去的学科。

随着激光的出现，这种状态已根本地改变了，激光把光学重置于科学的前沿。诸如非线性光学和全息学 (今年[①]获得诺贝尔奖) 已开拓了完全新的各种工艺学；对于后者，旧式线性经典光学的大量知识却是必要的初阶。

这是关于科学发展的不可预测性的吸引人的一课。这也许是这次英译的最好理由吧。因为泡利对细节的论述不如对评论性和逻辑性的阐述那样关心。这使得现有的讲义成为这学科的一个简洁而又深为有益的导论。

由夏代格 (Scheidegger) 整理并于 1948 年出版的德文笔记不是没有缺陷的。因此，泡利支持由厄丢士 (P. Erdös) (现任托拉哈塞城佛罗里达大学教授) 整理的笔记作为第二种文本。这里的英译本毕竟选择了第一种文本，这是因为它较好地反映出泡利原来的精神和简练的风格。这些缺陷已经消除，并在附录的评注中加上了一些精确的注释。这种澄清方法使译者的工作值得特别一提。看到我们全体的艰苦工作产生了我所始终喜爱的一个教程的改进了的文本，使我这个编者感到十分欣幸。

查理 P. 安兹

日内瓦，1971 年 11 月 2 日

① 指 1971 年——中译者注

第一章

几 何 光 学

§1. 费马原理

如果有两种折射率为 n_1 和 n_2 的均匀、各向同性的介质 M_1 和 M_2, 那么斯涅耳定律

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{1.1}$$

成立. (参见图 1.1) 在 $n_1/n_2 > 1$ 的情况下, θ_1 增大时, 将达到某点, 如果 θ_1 再增大, 则 θ_2 就不再有实解. 在由 $\sin\theta_1^{(l)} = n_2/n_1$ 所定义的临界角, 折射光平行于 M_1 和 M_2 的界面前进. 实验表明 $\theta_1 > \theta^{(l)}$ 时, 发生全反射. 然而, 无论是否全反射, 总有一些反射发生. 除折射光线外, 还有反射光线; 即, 原来的光线分裂为两条. 对于反射光线, 我们有定律:

$$\theta_1' = \theta_1. \tag{1.2}$$

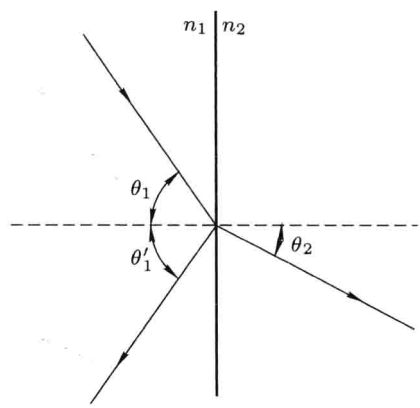


图 1.1

折射光线以及反射光线都在入射面内.

折射率与入射角无关是各向同性介质的特征. 另一方面, 应注意 n 与光的颜色有关. 按定义, 在真空中, 对所有颜色的光 $n=1$. 因此, 在物质介质中, n 一般大于 1.

折射定律和反射定律一样, 都能用一种致极性质加以表征. 如果我们用光程 L 表示折射率与光线通过的路径的乘积,

$$L = n_1 P_1 Q + n_2 P_2 Q, \tag{1.3}$$

那么费马原理说: 光线总是以

$$\delta L = 0 \tag{1.4}$$

的方式前进. 这个定律与上面的折射定律和反射定律等效.

[证明]:

a. 折射定律

由图 1.2 我们看出

$$L = n_1 a_1 / \cos\theta_1 + n_2 a_2 / \cos\theta_2,$$

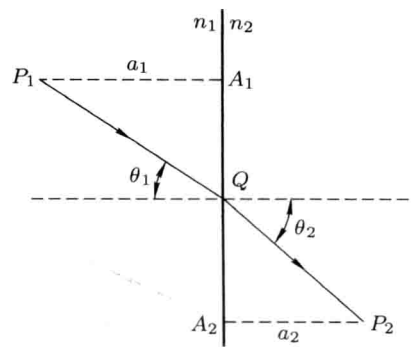


图 1.2

$A_1A_2 = a_1\tan\theta_1 + a_2\tan\theta_2 =$ 常数 (辅助条件). 用拉格朗日乘子法, 对 θ_1 和 θ_2 的任意变分, 我们得到

$$\delta L + \lambda\delta(A_1A_2) = 0.$$

这样,

$$a_1\left(\frac{n_1\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_1}\right)\delta\theta_1 +$$
$$a_2\left(\frac{n_2\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2} + \lambda\frac{1}{\cos^2\theta_2}\right)\delta\theta_2 = 0,$$

所以,

$$n_1 \sin\theta_1 + \lambda = 0,$$
$$n_2 \sin\theta_2 + \lambda = 0.$$

从这些方程式中消去 λ, 得

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \qquad \text{[证毕]}$$

b. 反射定律

如果 P^* 是 P 的像, 那么无须计算便可看出 (参看图 1.3)

$$P_0Q' + Q'P^* > P_0Q + QP^*.$$

所以, 光程是极小.

[证毕]

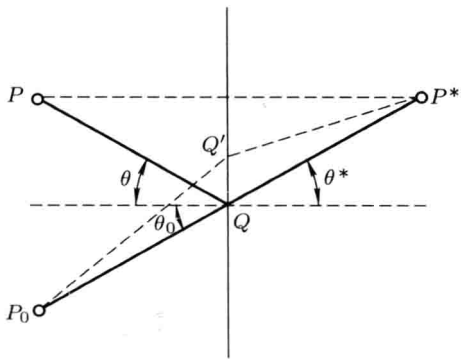


图 1.3

对于弯曲的表面, 光程不必是极小; 只需要是极值. 以后, 我们将看到, 由于光速正比于 $1/n$, 那么光程正比于光线的通过时间. 这样, 按照费马 (原理), 这个量应是极值. 然而, 仅当考虑波动光学时, 通过时间的概念才有意义.

如果我们现在考虑具有连续可变折射率 $n = n(x, y, z)$ 的介质, 那么对这种情况, 我们也不难公式化费马原理. 对应于式 (1.4), 我们可把原理表达如下. 在固定点 P_1 和 P_2 之间, 光线这样行进:

$$\delta S \equiv \delta \int_{P_1}^{P_2} n \mathrm{d}s = 0 \quad (P_1, P_2 \text{ 固定}). \tag{1.5}$$

如果 u 是表征给定曲线的参数, 那么

$$S = \int_{u_1}^{u_2} n \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}u,$$

其中

$$x_i = x_i(u) + \delta x_i(u) \quad (i = 1, 2, 3)$$

是一条邻近曲线, 并且 P_i 对应于 $x(u_i)$. 那么,

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial n^{①}}{\partial x_k} \delta x_k \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + n \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}u} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} (\delta x_k) \cdot \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} \mathrm{d}u.$$

这里, 我们已用到微分 δ 和 d 是互相独立的事实, 所以 $\delta \mathrm{d}x = \mathrm{d}\delta x$. 如果把最后公式的第二项分部积分, 便有

$$\delta S = \int_{u_1}^{u_2} \sum_k \left\{ \frac{\partial n}{\partial x_k} \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \left(n \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}u} \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) \right\} \delta x_k \mathrm{d}u + \sum_k n \frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}u} \left[\sum_i \left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}u} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \delta x_k \Big|_{P_1}^{P_2}.$$

因为假定 P_1 和 P_2 是固定的, 因此 $\delta x\big|_{P_1} = \delta x\big|_{P_2} = 0$, 并且最后一项为零. 然而, 仅当上式中被积函数恒等于零时, δS 才能对 δx_k 的其他任意选择等于零. 如果选择参数 u 等于沿致极曲线的弧长 s, 并用矢量记法, 那么这导致条件

$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left(n \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \right). \tag{1.6}$$

可能这样想, 在整个推导过程中, 参数 u 是不必要的, 从开始便可以设它等于 s. 然而, 却不能这样做, 因为虽然人们当然能沿致极曲线选取 $u = s$, 却不能同时沿变更的比较曲线这样做.

现在, 如果限定在 P_1 与 P_2 间的曲线仍为致极曲线的条件下, 研究对应于端点 P_1 和 P_2 改变时 S 的变分, 便有

$$\delta S = n \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \cdot \delta \boldsymbol{x} \right) \Big|_{P_1}^{P_2}. \tag{1.7}$$

这里, 费马原理也仅说明光程 $\int n \mathrm{d}s$ 应是极值; 而没有详细说明是怎样

① 德文原版中把 n 误为 u.——中译者注

的极值. 后面的问题在物理学上是全然无足轻重的.

如果把式 (1.6) 再分解成两部分, 那么应当指出, 得不到三个独立的方程式. 由于

$$\sum_k \left(\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1,$$

方程式间必然存在一个关系. 展开式 (1.6), 得到

$$\operatorname{grad} n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} + n\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}.$$

如果取 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$ 与式 (1.6) 的标积, 便有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\operatorname{grad} n &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s^2}n,\end{aligned}$$

所以 $(\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s)\cdot\operatorname{grad} n = \mathrm{d}n/\mathrm{d}s$, 这在几何上是理所当然的, 而且无其他含义. 由此得知, 只有矢量的分量才有物理意义.

著名的弗莱纳公式之一是 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s^2 = \boldsymbol{e}/R$, 其中 $\boldsymbol{e}$ 是在密切面内的单位矢量, 并且垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}s$, R 是曲率半径. 于是得到

或

$$\left.\begin{aligned}(\operatorname{grad} n)_\perp &= \frac{n}{R}\cdot\boldsymbol{e}\\ \{\operatorname{grad}(\ln n)\}_\perp &= \frac{\boldsymbol{e}}{R}\end{aligned}\right\}. \tag{1.8}$$

在 n 仅为一个坐标的函数 (例如 $n(x)$) 的特殊情况下,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = 0,$$

所以

$$n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \text{常数}, \quad n\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \text{常数},$$

并且光线保持在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z =$ 常数的平面内. 然而, 可以这样选取坐标系, 使得光线是在 $x-y$ 平面内. 那么

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = 0, \quad n\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \text{常数},$$

$$\theta = \measuredangle\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}, x\right), \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\theta,$$

所以得到

$$n\sin\theta = \text{常数}.$$

于是, 再次得到斯涅耳定律.

由这里发展起来的方程组 (具有给定初始条件的二阶微分方程组), 清楚地看出, 在这种理论结构中, 光线决不能分裂成两部分. 如果指定了点和初始方向, 那么, 光线以后的行程便完全被确定了. 然而, 这和光线在两种介质的界面总发生分裂这一事实不相符合. 由此可见, 费马原理只能是现实的某种近似.

§2. 马吕斯和惠更斯原理. 成像定律

现在我们想研究函数 S 的性质, 其中

$$S=\int_{P_1}^{P_2} n\mathrm{d}s = S(P_1,P_2).$$

由式 (1.7), 得

在 P_1 处,

$$\operatorname{grad} S\cdot\delta\boldsymbol{x} = -n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right),$$

在 P_2 处,

$$\operatorname{grad} S\cdot\delta\boldsymbol{x} = n\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right),$$

所以有

$$\operatorname{grad} S = \mp n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} \tag{2.1}$$

和

$$|\operatorname{grad} S|^2 = n^2. \tag{2.2}$$

这个最后的方程常称为程函方程, S 称为程函. 这些名称在文献中不总是唯一的.

可以用下列方式引进一个相关的函数 $\overline{S}$ 代替函数 S: 令 F 是空间中任意指定的曲面,

$$x_k^0=\varphi_k(u,v) \quad 或 \quad F(\boldsymbol{x}^0)=0,$$

并令 P 是曲面外一点. 那么

$$\overline{S}=\overline{S}(F,P)=\int n\mathrm{d}s,$$

其中要取垂直于 F 并通过 P 点的光线作为 F 和 P 间的积分路线. 以上的普遍变分公式 (1.6) 和式 (1.7), 于是暗示

$$\delta\overline{S}=\int_{P_0}^{P}\left\{\frac{\partial n}{\partial\boldsymbol{x}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)\right\}\cdot\delta\boldsymbol{x}\mathrm{d}s+n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\cdot\delta\boldsymbol{x}\Big|_{P_0}^{P}.$$

这里, 因为取致极曲线为积分路线, 故第一项等于零; 因为边界条件的缘故, 在下限处第二项等于零. 这样, 作 P 点的变分, 便有

$$\operatorname{grad}_P \overline{S} = n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}. \tag{2.3}$$

这是马吕斯定律. 用文字表达是: 如果光线曾一时正交于曲面 F, 那么, 总是存在一些正交于光线的曲面, 即 $\overline{S}=$ 常数的曲面.

S 与 $\overline{S}$ 之间存在一个重要的几何关系, 叫做惠更斯原理: 曲面 $\overline{S}=$ 常数是与 F 的每一点 P_0 相关联的曲面 S $(P_0, P)=$ 常数的包络(面).

[证明]

令 u, v 是曲面参数. 用标准方法, 通过对参数求导, 得到曲面 $S=$ 常数的包络方程:

$$\frac{\partial S}{\partial u}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial v}=0,$$

所以

$$\operatorname{grad}_{P_0} S\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}=0, \quad \operatorname{grad}_{P_0} S\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}=0,$$

由此得到, 恰好是那些正交于给定曲面的光线穿过包络 (面).

[证毕]

描述各向同性介质中的现象时有两种可能性. 我们希望进一步研究方程

$$\operatorname{grad} n=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)$$

和

$$|\operatorname{grad} S|^2=n^2$$

间的联系. 曾经指出, 由常微分方程式 (1.6) 的解, 能组成偏微分方程式 (2.2) 的解. 然而, 反过来也是正确的: 由式 (2.2) 的足够普遍的解, 便能得到式 (1.6) 的解.

我们考察双参数曲面族 $F(\boldsymbol{x}^0, a_1, a_2)=0$[①] 和对应函数

$$\overline{S}(F, P)=\overline{S}(P, a_1, a_2),$$

由于式 (2.3), $\overline{S}(F, P)$ 也满足方程式 (2.2). 对 a_1 和 a_2 微分, 得到

$$\nabla\overline{S}\cdot\nabla\frac{\partial\overline{S}}{\partial a_1}=0, \quad \nabla\overline{S}\cdot\nabla\frac{\partial\overline{S}}{\partial a_2}=0;$$

即, 曲面 $\dfrac{\partial\overline{S}}{\partial a_1}=$ 常数与 $\dfrac{\partial\overline{S}}{\partial a_2}=$ 常数正交于曲面 $\overline{S}=$ 常数. 如果假定这样选取

① 德文原版中有删去这前半句的符号.——中译者注

双参数曲面族 F, 使得曲面 $\dfrac{\partial\overline{S}}{\partial a_1}=$ 常数和 $\dfrac{\partial\overline{S}}{\partial a_2}=$ 常数不重合, 那么, 它们相交形成一条曲线, 后者正交于 $\overline{S}=$ 常数, 并且平行于 $\nabla\overline{S}$. 这条曲线是光线方程的解. 这点可以看出如下. 如果我们写 $\dfrac{\partial\overline{S}}{\partial a_i}=b_i$, 那么这种曲线的方程变成

$$x_k=f_k(s,a_1,a_2,b_1,b_2).$$

记住 $\nabla\overline{S}$ 是平行于 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$ 的, 并用式 (2.2), 我们可以写 $\nabla\overline{S}=n\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}$, 由此得到

$$\begin{aligned}n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_i}{\mathrm{d}s}\right)&=n\sum_k\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\overline{S}}{\partial x_i}=\sum_k\frac{\partial\overline{S}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\overline{S}}{\partial x_k\partial x_i}\\&=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2}\sum_k\left(\frac{\partial\overline{S}}{\partial x_k}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}n^2\right)=n\frac{\partial n}{\partial x_i},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right)=\operatorname{grad}n,$$

正是式 (1.6). [证毕]

这种计算表明, 全微分方程和与其相缔合的偏微分方程之间有一个十分重要的特殊关系. 这种关联以后将大大地推广. 这些关系是被哈密顿首先发现的.

作为变分原理的一个应用, 这里将讨论有关曲面使用宽光线锥精密成像的几个定理.

a. 用方向的一维簇构成一维点簇的像

不带撇的表示物空间的量, 带撇的表示像空间的量. 从 P 发出的所有光线以某种方法会聚于 P' 点, 类似地, 从 Q 点发出的光线会聚于 Q' 点; 此外, 它们与 $\overrightarrow{PQ}=\delta\boldsymbol{x}$ 同在一平面内. 如果用 $\boldsymbol{t}$ 表示光线的单位切向矢量, 那么, 由式 (1.7), 变分定律说

$$\begin{aligned}\delta S&=S(P,P')-S(Q,Q')\\&=n(\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{x})-n'(\boldsymbol{t}'\cdot\delta\boldsymbol{x}').\end{aligned}$$

这样, 用 $|\delta\boldsymbol{x}|=\delta l$, 有

$$\delta S=n\delta l\cos(\boldsymbol{t},\delta\boldsymbol{x})-n'\delta l'\cos(\boldsymbol{t}',\delta\boldsymbol{x}').$$

这个方程式的右端必须与光线锥中所考虑的是哪条光线无关. 如果用 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 表示光线锥中的两条光线, 那么, 可以推断,

$$\begin{aligned}&n\delta l\{\cos(\boldsymbol{t}_1,\delta\boldsymbol{x})-\cos(\boldsymbol{t}_2,\delta\boldsymbol{x})\}\\&=n'\delta l'\{\cos(\boldsymbol{t}_1',\delta\boldsymbol{x}')-\cos(\boldsymbol{t}_2',\delta\boldsymbol{x}')\}.\end{aligned}$$

可以写成矢量形式

$$n(\boldsymbol{t}_1-\boldsymbol{t}_2)\cdot\delta\boldsymbol{x}=n'(\boldsymbol{t}_1'-\boldsymbol{t}_2')\cdot\delta\boldsymbol{x}', \tag{2.4}$$

这是布隆斯 (Bruns) 定律. 按照推导, 这个定律当然仅适用于足够小的 $\delta\boldsymbol{x}$.

b. 用方向的二维簇构成二维点簇的像

记号和 a 中相同. 此外, 令 E 是 $\delta\boldsymbol{x}$ 的平面, 并且 $\boldsymbol{\tau}$ 是 $\boldsymbol{t}$ 在 E 中的投影. 那么,

$$\boldsymbol{t}\cdot\delta\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{x},$$

并且, 由 a, 得到

$$\begin{aligned}n(\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}_2)\cdot\delta\boldsymbol{x}&=n'(\boldsymbol{\tau}_1'-\boldsymbol{\tau}_2')\cdot\delta\boldsymbol{x}',\\ n(\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}_3)\cdot\delta_1\boldsymbol{x}&=n'(\boldsymbol{\tau}_1'-\boldsymbol{\tau}_3')\cdot\delta_1\boldsymbol{x}',\end{aligned}$$

此外, 其中各个 $\boldsymbol{\tau}$ 已这样选取, 使得 $\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}_2$ 和 $\boldsymbol{\tau}_1-\boldsymbol{\tau}_3$ 不是平行的. 对 $\delta\boldsymbol{x}$ 和 $\delta_1\boldsymbol{x}$ 也一样. 按熟悉的恒等式

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}),$$

得到

$$\begin{aligned}&(\delta\boldsymbol{x}\times\delta_1\boldsymbol{x})\cdot[(\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_1)\times(\boldsymbol{\tau}_3-\boldsymbol{\tau}_1)]\\ &=[\delta\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_1)][\delta_1\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_3-\boldsymbol{\tau}_1)]-\\ &\quad[\delta_1\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_1)][\delta\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\tau}_3-\boldsymbol{\tau}_1)].\end{aligned}$$

用 n^2 乘此式, 并用上面得到的恒等式, 我们发现表达式

$$n^2([\delta\boldsymbol{x}\times\delta_1\boldsymbol{x}]\cdot[(\boldsymbol{\tau}_2-\boldsymbol{\tau}_1)\times(\boldsymbol{\tau}_3-\boldsymbol{\tau}_1)])$$

等于带撇量的同样表达式. 最后的表达式中出现的第一个矢量积的几何意义是由 $\delta\boldsymbol{x}$ 与 $\delta_1\boldsymbol{x}$ 定义的面积元. 然而, 第二个矢量积的意义是由光线 $\boldsymbol{t}_1$、$\boldsymbol{t}_2$ 和 $\boldsymbol{t}_3$ (对足够小的 $\Delta\boldsymbol{\tau}$) 定义的立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 的二次投影曲面面积. 由此得到

$$n^2\mathrm{d}f\mathrm{d}\Omega\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{t})=n'^2\mathrm{d}f'\mathrm{d}\Omega'\cos(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{t}'), \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{N}$ 是曲面 $\mathrm{d}f$ 的法线. 这个方程式叫做基尔霍夫–克劳修斯定律.

c. 把两个定理应用于旋转对称系统

1. 设用一有限张角为 $2u$ 且包含轴光线的光线锥使垂直于对称轴的曲面成像为相似形状的曲面.

考虑通过轴的一个截面. 用 y 代替 $\delta \boldsymbol{x}$ 并以 $\boldsymbol{t}_1$ 和 $\boldsymbol{t}_2$ 作为光线锥的最外边的光线, 运用式 (2.4), 我们得到重要的正弦条件:

$$ny \sin u = n'y' \sin u'. \tag{2.6}$$

无论何时, 只要已作的几何假设能适用, 这个条件总是满足的. 由基尔霍夫定律式 (2.5) 也能导出正弦条件.

2. 用张角为 $2u$ 的光线锥使轴的各段成像. 取 $\boldsymbol{t}$ 为光线锥的最外光线, $\boldsymbol{t}_2$ 为轴光线, 那么由式 (2.4) 得到

$$nl(1 - \cos u) = n'l'(1 - \cos u'). \tag{2.7}$$

一般说来, 条件式 (2.6) 和式 (2.7) 不能两者都被满足. 仅在 $u = u', ny = n'y'$ 和 $nl = n'l'$ 时, 这才可能. 实际上 (对透镜来说) 不是这样. 然而, 当 u 和 u' 很小时, 两个条件都能近似地被满足.

d. 在连结严格被成像点的线是光线本身的平面内, 用平面内的光线对平面成像[①]

令 P_1, P_2 和 P_3 为严格被成像的点 (图 2.1). 由式 (2.7), 得到

$$nl_{12}(1 - \cos u) = n'l'_{12}(1 - \cos u').$$

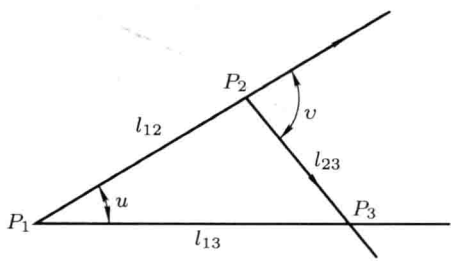


图 2.1

另一方面, 我们也有

$$nl_{13}(1 - \cos u) = n'l'_{13}(1 - \cos u')$$

① 德文原版与英译版中均为曲面, 都未明确为平面.——中译者注

和

$$nl_{23}(1-\cos v)=n'l'_{23}(1-\cos v'),$$

所以

$$l_{12}:l_{13}:l_{23}=l'_{12}:l'_{13}:l'_{23}.$$

这样, 三角形是相似的, 所以它们的对应角相等:

$$u=u',\quad v=v',\quad nl=n'l'.$$

§3. 哈密顿理论

a. 特殊齐次形式 (各向同性体)

在几何光学中, 我们已熟知费马的基本致极原理

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}n\mathrm{d}s=0.$$

另一方面, 我们知道, 在质点力学中, 由致极原理

$$\delta\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{2m(E-V(x))}\mathrm{d}s=0 \tag{3.1}$$

确定质点轨道. 因此, 如果我们设 $n^2=2m(E-V)$, 那么我们得到一个力学方程与光学方程之间的变换方案, 使得每个光学问题有一个力学问题与之相关联. 然而, 这种类似不是对现象的时间变化而言, 而是把势场中有给定初能量的质点的轨道与在指定折射率 (作为位置的函数) 的介质中的光线联系起来.

这样, 在光学中和在力学中一样, 式 (1.5) 的致极原理能表达为正则形式. 如果我们令

$$\boldsymbol{p}=n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}, \tag{3.2}$$

则

$$\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}=n.$$

以 v 作参数, 则得

$$\begin{aligned}0=\delta S&=\delta\int n\mathrm{d}s=\delta\int\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\delta\int\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v\\&=\int\left\{\delta\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}+\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\delta\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}v=\int\left(\delta\boldsymbol{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v}\cdot\delta\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}v+\\&\quad\boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{x}\Big|_{P_1}^{P_2}.\end{aligned}$$

然而, 现在必须注意 $\delta\boldsymbol{x}$ 和 $\delta\boldsymbol{p}$ 不再能独立地改变了. 由于式 (3.2), 我们必定有

$$\delta G = 0, \quad \text{其中} \quad G = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p}^2 - n^2). \tag{3.3}$$

那么, 用拉格朗日乘子法, 由 $\delta S = 0$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v} = \lambda\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v} = -\lambda\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

或者, 代换后有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v} = \lambda\boldsymbol{p}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}v} = \lambda n\frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{3.4}$$

显然, 这些是和式 (3.2) 一样的方程组. 通过比较, 得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}v}\right)^2 = \lambda^2 n^2, \quad \text{由此得到 } \lambda n = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v}.$$

代入式 (3.4), 便得出正则方程

$$n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{p}, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial n}{\partial \boldsymbol{x}}. \tag{3.5}$$

从这两个方程中消去 $\boldsymbol{p}$, 便得到熟悉的光线方程式 (1.6). 在这种类似的基础上, 一切事件都自然而精确地如同在力学中那样进行. 如果令 $n^2 = 2m(E - V)$, 那么通过代换不难验证, $\boldsymbol{p}$ 变为机械动量, 并且 $\delta G = 0$ 变成能量守恒定律.

此外, 我们注意到, 数学上三维性在计算中不起任何作用. 事实上, 我们知道, 全部形式工作在 N 个质点的力学 (其中有 $3N$ 维) 中能以完全同样的方式来完成. 然而, 在光学中只出现三维.

b. 最普遍的齐次形式 (晶体光学)

此外, 也可以看出, $\delta\int n\mathrm{d}s = 0$ 中的函数 n 的特定形式是不重要的. 这样, 在完全普遍的情况下, 我们将令

$$\delta S = \delta\int_{P_1}^{P_2} L\mathrm{d}u = 0, \tag{3.6}$$

其中 u 是任意参数, 并且 L 是满足下列条件的函数:

$$L = L\left(q_1, \cdots, q_{f+1}, \underbrace{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}u}}_{q_1'}, \cdots, \underbrace{\frac{\mathrm{d}q_{f+1}}{\mathrm{d}u}}_{q_{f+1}'}\right),$$

和

$$L(q_1,\cdots,q_{f+1},\lambda q_1',\cdots,\lambda q_{f+1}')=\lambda L(q_i,q_i'). \tag{3.7}$$

式 (3.7) 的要求是必要的, 因为参数 u 是完全任意的, 并且必须要求变分原理式 (3.6) 对于更换参数是不变的. (验算一下!)[①]在光学的情况中, 我们有 $f=2$. 对应于式 (3.7) 的欧拉齐次性关系是

$$\Sigma q_k'\frac{\partial L}{\partial q_k'}=L. \tag{3.8}$$

类似于式 (3.2), 再令

$$p_k=\frac{\partial L}{\partial q_k'}. \tag{3.9}$$

由式 (3.8) 和式 (3.9), 于是得

$$L=\sum p_kq_k',\quad 0=\delta S=\delta\int(\sum p_kq_k')\mathrm{d}u. \tag{3.10}$$

因为 L 对 q_k' 是一次齐次的 (按照式 (3.7)), 那么 p_k 是零次齐次的. 倘若从式 (3.9) 中前 f 个方程解出 $q_k'(k=1,2,3,\cdots,f)$, 然后把这些代到式 (3.9) 的第 $(f+1)$ 个方程式中, 那么得到形式为

$$p_{f+1}=p_{f+1}(q_1,\cdots,q_{f+1},p_1,\cdots,p_f,q_{f+1}')$$

的关系. 由于 p_{f+1} 对 q_{f+1}' 的齐次性 (零次), 可以推断 p_{f+1}[②]不能依赖于 q_{f+1}'. 这样, 类似于式 (3.3), 必然存在一个关系

$$G(p_1,\cdots,p_{f+1},q_1,\cdots,q_{f+1})=0. \tag{3.11}$$

变分原理式 (3.10), 连同辅助条件式 (3.11) 一起, 确定了光线的行程, 变分成为

$$\begin{aligned}\delta\int L\mathrm{d}u&=\delta\int\sum_k p_kq_k'\mathrm{d}u=\sum_k\int\left[\delta p_k\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}+p_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\delta q_k\right]\mathrm{d}u\\&=\sum_k\int\left(\delta p_k\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}-\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}u}\delta q_k\right)\mathrm{d}u+p_k\delta q_k\Big|_{P_1}^{P_2}\end{aligned} \tag{3.12}$$

用辅助条件式 (3.11) 最后得到

$$q_k'=\lambda\frac{\partial G}{\partial p_k},\quad p_k'=-\lambda\frac{\partial G}{\partial q_k}. \tag{3.13}$$

① 德文原版中有此句.——中译者注

② 英译版误为 p_{f+1}'.——中译者注

另一方面, 由式 (3.6) 十分普遍地得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial L}{\partial q_k'}=\frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

(这里, 没有辅助条件, 因为我们用原来 (数量) 的变量工作而没有引进 p_k 等.) 这样, 式 (3.13) 的最后一个式子也能写成

$$p_k'=\frac{\partial L}{\partial q_k}=-\lambda\frac{\partial G}{\partial q_k}. \tag{3.14}$$

方程式 (3.13) 和式 (3.14) 叫做正则方程 (类似于式 (3.4) 和式 (3.5)).

这里也能考察曲面 $S=$ 常数 (波面), 其中

$$S=\int_{P_1}^{P_2}L\mathrm{d}u.$$

如果在变分原理式 (3.6) 中, 保持 P_1 固定, 与此同时, 允许 P_2 在曲面 $S=$ 常数上变动, 那么, 按结构推定必有 $\delta S=0$ (积分是沿致极曲线进行). 无论如何, 由普遍变分公式 (3.12) 可以推断

$$\sum_k\frac{\partial L}{\partial q_k'}\delta q_k=0,\quad \delta q\text{ 在 }S=\text{ 常数上}. \tag{3.15}$$

这是所谓横向性条件. 一般说来, 这不是 $\delta S=0, P_1$ 固定时的正交性关系式 (1.7). 这样, 光线只是横过曲面 $S=$ 常数, 而不是垂直于它.

容易构成 S 函数的微分方程. 由普遍变分公式 (3.12), 得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_k}=p_k, \tag{3.16}$$

代入式 (3.11), 得出

$$G\left(\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_{f+1}},q_1,\cdots,q_{f+1}\right)=0. \tag{3.17}$$

如果现在假定我们已有式 (3.17) 依赖于 f 个常数 $a_\rho(\rho=1,2,3,\cdots,f)$ 的解, 那么下列定理成立: 方程组

$$\frac{\partial S}{\partial a_\rho}=b_\rho \tag{3.18}$$

确定光线. 这是前面提过的全微分方程和它的缔合偏微分方程之间的关系的推广.

[证明]:

由式 (3.18),

$$q_k=\varphi_k(u,a_1,\cdots,a_f,b_1,\cdots,b_f). \tag{3.19}$$

(其中我们默设方程组 (3.18) 对 q_k 是可解的; 就是说, 矩阵 $\partial^2 S/(\partial a_\rho \partial q_k)$ 是 f 秩的). 如果把它代入式 (3.16), 便得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k = \psi_k \quad (a_1, \cdots, a_f, b_1, \cdots, b_f, u). \tag{3.20}$$

把式 (3.17) 看作 q 和 a 的函数, 对 a_ρ 微分时得出

$$\sum_k \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_\rho} = 0. \tag{3.21}$$

另一方面, 由式 (3.18) 对 u 微分, 得

$$\sum_k \frac{\partial^2 S}{\partial a_\rho \partial q_k} \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u} = 0. \tag{3.22}$$

这些关系仅当

$$\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u} = \lambda \frac{\partial G}{\partial p_k} \tag{3.13a}$$

时, 能同时满足. 类似地, 由式 (3.17) 对 q 微分, 得

$$\left.\frac{\partial G}{\partial q_k}\right|_{p \text{ 固定}} + \sum_l \frac{\partial G}{\partial p_l} \frac{\partial^2 S}{\partial q_l \partial q_k} = 0.$$

代入 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}$ (由式 (3.20)), 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}u} = \sum_l \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l} \frac{\mathrm{d}q_l}{\mathrm{d}u} = \lambda \sum_l \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} = -\lambda \frac{\partial G}{\partial q_k}. \tag{3.13b}$$

无论如何, 由式 (3.18)、式 (3.19) 和式 (3.20) 给出的方程式 (3.17) 的解满足正则方程组 (3.13)[①], 如先前已表明的那样, 它们等价于光线方程. [证毕]

这里, 我们可以再考虑由下面定义的相关函数代替 S:

$$\overline{S}(P) = \int_{P_0}^{P} L\mathrm{d}u,$$

其中 P 已给定且 P_0 是在超曲面 $F(q) =$ 常数上. 沿通过 P 并且横截曲面 $F =$ 常数的光线取作积分路线 (条件式 (3.15)). 再次得出惠更斯原理, 其中, $\overline{S} =$ 常数是对应于给定曲面的点的曲面 $S =$ 常数的包络 (面). (证明类似于 §2 中用于惠更斯原理的.)

在这小节中给出的理论将用于晶体中光的传播 (参看 §13). 应该注意的是, 在这种情况中, 仍然能够定义 "波面"($S =$ 常数). 虽然 "波法线" $\boldsymbol{p} = \{p_1, \cdots\}$ 的确垂直于这个曲面, 但一般说来, 它并不平行于光线方向 $\boldsymbol{q}' = \{q_1', \cdots\}$.

① 即式 (3.13a) 和式 (3.13b). ——中译者注

c. 哈密顿理论的非齐次形式

在变分原理式 (3.6) 中, 把坐标 q_{f+1} 作为参数 u 引进. 那么,

$$q'_k = \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}u}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}q_{f+1}} = \frac{q'_\alpha}{q'_{f+1}}. \tag{3.23}$$

指标有下列变程: $\alpha = 1, 2, 3, \cdots, f$; $i, k = 1, 2, 3, \cdots, f+1$. 因为 $L(q', q)$ 对 q' 是一次齐次的, 便有

$$L = \overline{L}(q_1, \cdots, q_{f+1}, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_f) q'_{f+1}, \tag{3.24}$$

$$L\mathrm{d}u = \overline{L}\mathrm{d}q_{f+1}. \tag{3.25}$$

于是,

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

并得到 (由式 (3.23) 和 式 (3.24))

$$p_{f+1} = \frac{\partial L}{\partial q'_{f+1}} = \overline{L} - \sum_\alpha \dot{q}_\alpha \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv -H,$$

$$H = \sum_\alpha \dot{q}_\alpha p_\alpha - \overline{L}, \quad p_{f+1} + H = 0. \tag{3.26}$$

引进函数 H 可以重写正则方程式 (3.13). 式 (3.26) 的第二个方程起辅助条件式 (3.11) 的作用, 所以, 从式 (3.13) 能消去参数 λ:

$$G \equiv p_{f+1} + H(p_\alpha, q_\alpha; q_{f+1}) = 0. \tag{3.27}$$

由式 (3.13)

$$\frac{\mathrm{d}q_\alpha}{\mathrm{d}u} = \lambda \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}u} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{\mathrm{d}q_{f+1}}{\mathrm{d}u} = \lambda, \quad \frac{\mathrm{d}p_{f+1}}{\mathrm{d}u} = -\lambda \frac{\partial H}{\partial q_{f+1}}.$$

消去 λ, 我们得到正则方程的非齐次形式

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{3.28}$$

此外, 得到

$$\frac{\partial H}{\partial q_{f+1}} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}q_{f+1}}. \tag{3.29}$$

在非齐次情况中, 也得到全微分方程, 光线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_{f+1}} \left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_\alpha},$$

和它的缔合偏微分方程的关联, 而且的确其中要再次限定辅助条件式 (3.11) 为式 (3.27). 把 $p_k = \partial S / \partial q_k$ 代入式 (3.27), 得到

$$\frac{\partial S}{\partial q_{f+1}} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, q_{f+1}\right) = 0.$$

这样, 能确定 $S = S(q_i, a_\alpha)$, 并且

$$\frac{\partial S}{\partial a_\alpha} = b_\alpha$$

再次是光线方程组. 当然, 照这样代换, H 也将与 f 个常数 a_α 有关.

各向同性的光学系统. 非齐次形式对这些系统 ($f = 2$) 是实用的.

$$\overline{L} = n(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{或} \quad \overline{L}\mathrm{d}x_3 = n\mathrm{d}s,$$
$$p_\alpha = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{x}_\alpha} = n\dot{x}_\alpha(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-\frac{1}{2}} = n\mathrm{d}x_\alpha/\mathrm{d}s;$$

所以

$$n^2 - p_1^2 - p_2^2 = n^2/(1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

(该式通过代换能得到验证), 并且

$$\overline{L} = n^2(n^2 - p_1^2 - p_2^2)^{-\frac{1}{2}},$$
$$H = -\sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2} = -p_3.$$

① 「我们引进特征函数 S,

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = p_k = n\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} \quad (k = 1, 2, 3),$$

并进行变换

$$V(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p}) = S - \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{p}^0\cdot(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{a}^0),$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}^0$ 是任意的 [A–1]②, 并且

$$\mathrm{d}S = \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0.$$

于是

$$\mathrm{d}V = \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0 - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} +$$
$$(\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{a}^0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}^0 = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p} + (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{a}^0)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}^0$$

和

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{p}} = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{p}^0} = \boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{a}^0.\ 」$$

① 「 」在德文原版中有修改符号. 表示移到本分节各向同性的光学系统之前. —— 中译者注

② 评注 [A–1]—[A–7] 在附录中.

我们回到非齐次形式来

$$p_3 = \sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2} = -H.$$

记下

$$\begin{aligned} &W(p_1^0, p_2^0, p_1, p_2) \\ \equiv\ &V(p_1^0, p_2^0, \sqrt{n^{0^2} - p_1^{0^2} - p_2^{0^2}}, p_1, p_2, \sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2}), \end{aligned}$$

我们有

$$\mathrm{d}W = -\sum_\alpha X_\alpha \mathrm{d}p_\alpha + \sum_\alpha X_\alpha^0 \mathrm{d}p_\alpha^0,$$

并有

$$X_\alpha = x_\alpha - a_\alpha + \frac{\partial p_3}{\partial p_\alpha}(x_3 - a_3) = x_\alpha - a_\alpha - \frac{p_\alpha}{\sqrt{n^2 - p_1^2 - p_2^2}}(x_3 - a_3),$$

及 X_α^0 的类似关系.

轴对称系统 (旋转对称). 令 z 轴是旋转轴, 我们设

$$\left.\begin{aligned} x_1 = x, &\quad \mathrm{d}x/\mathrm{d}s = u \\ x_2 = y, &\quad \mathrm{d}y/\mathrm{d}s = v \\ x_3 = z, &\quad \mathrm{d}z/\mathrm{d}s = w \end{aligned}\right\} \text{(方向余弦)}.$$

并沿 z 轴选取任意点 $\boldsymbol{a}^0$ 和 $\boldsymbol{a}$.

按照各向同性物体的普遍公式,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= -nX, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = -nY, \\ \frac{\partial W}{\partial u^0} &= n^0 X^0, \quad \frac{\partial W}{\partial v^0} = n^0 Y^0, \end{aligned}$$

且有

$$X = x - \frac{nu}{n\sqrt{1 - u^2 - v^2}}(z - a) = x - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}(z - a).$$

这表明 (X, Y) 和 (X^0, Y^0) 分别表示光线与 a 和 a^0 处垂直于轴的平面相交的点的坐标.

函数 W 和 V 的几何意义从解析定义

$$W = S - n\boldsymbol{t} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + n^0 \boldsymbol{t}^0 \cdot (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{a}^0)$$

直接得到 (这里 $\boldsymbol{t}$ 是平行于光线的单位矢量). 在图 3.1 中, 显然它是从 N^0 到 N 的光程. 函数 $V(\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{p})$ 和 $W(p_1^0, p_2^0, p_1, p_2)$ 叫做角程函.

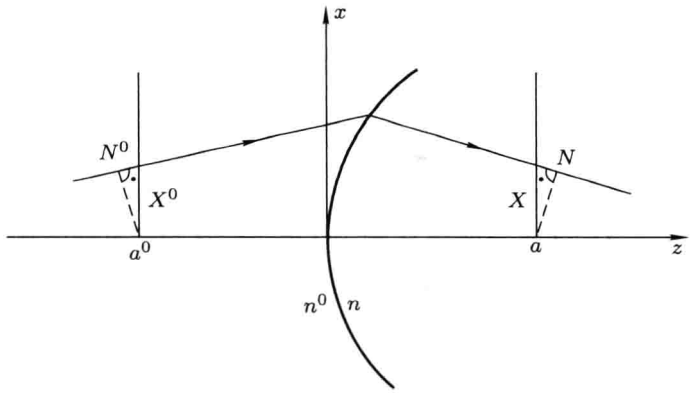


图 3.1

§4. 光度学

我们从对所有光学过程 (除发射和吸收外), 总光量 L 是守恒的这一假设出发. 当考虑以光线为界的截面时, 总光量也是守恒的. 从这些前提出发, 朗伯和开普勒得到下面的定律.

令 F 为辐射 (曲) 面, f 是辐照 (曲) 面 (图 4.1). 那么, $\mathrm{d}L = K\mathrm{d}\Omega$, 其中 K 是与 F 有关的一个常数. 如果 $\mathrm{d}f$ 是辐照 (曲) 面元, 那么

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}f\cos\alpha}{r^2},$$
$$E = \frac{K\cos\alpha}{r^2}, \quad \mathrm{d}L = E\mathrm{d}f. \tag{4.1}$$

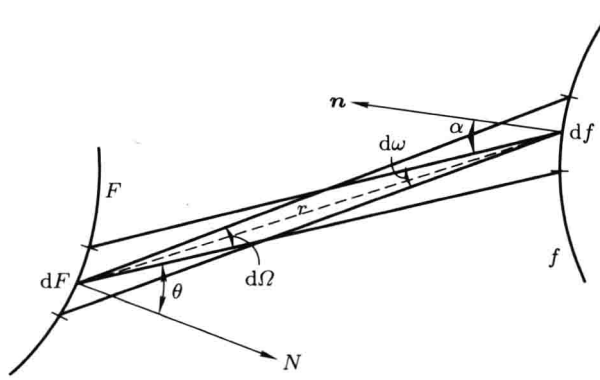


图 4.1

这样, 如果两 (曲) 面元的 E 相等, 则两者表现同等明亮; E 叫做照度. 的确, 当

试图对不同颜色确定同等亮度, 实际上遇到很多困难①.

朗伯提出一个附加的 (虽然是可疑的) 定律: K 依赖于光发射的方向,

$$K = I\mathrm{d}F\cos\theta, \tag{4.2}$$

其中 I 叫做比光强 (或光度亮度). 由于 $I = I(\theta)$, 当然可以说式 (4.2) 是纯粹形式的. 只有在辐射为热平衡的情况下, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\theta = 0$ (各向同性辐射体). 发光球对眼表现成一个均匀亮度的发光盘就是这种情况.

这两个定律 (式 (4.1) 和式 (4.2)) 结合便得出

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= I\mathrm{d}f\mathrm{d}F\cos\alpha\cos\theta/r^2, \\ \mathrm{d}\Omega &= \mathrm{d}f\cos\alpha/r^2 = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{4.3}$$

对常数 I, 积分式 (4.3) 得到射进半张角为 U 的圆锥中的全部 L:

$$\begin{aligned} L &= \int I\mathrm{d}f\mathrm{d}F\cos\alpha\cos\theta/r^2 \\ &= I\mathrm{d}F\int_0^{U②}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \pi I\mathrm{d}F\sin^2 U. \end{aligned}$$

对于 $U = \dfrac{\pi}{2}$,

$$L = \pi I\mathrm{d}F.$$

严格光学成像. 根据前面的讨论, 通过对应面元的光量必须相等: $L = L'$. 因此,

$$I\mathrm{d}f\cos\alpha\mathrm{d}\omega = I'\mathrm{d}f'\cos\alpha'\mathrm{d}\omega'.$$

然而, 由式 (2.5) 可以推断

$$n^2\mathrm{d}f\cos\alpha\mathrm{d}\omega = n'^2\mathrm{d}f'\cos\alpha'\mathrm{d}\omega',$$

所以

$$I/n^2 = I'/n'^2. \tag{4.4}$$

① 参看 J. H. C. MÜLLER 和 C. S. M. POUILLET, 物理教科书 (Vieweg Verlag, Braunschweig, 1925–1934), 第 11 版, 卷 1—5.

② 此处英译版中误为 $\pi/2$. —— 中译者注

第二章

干涉和衍射理论

§5. 波的运动学

存在一些光学现象, 它们与到目前为止所提供的几何光学理论相矛盾. 此外, 它们也不能用光的微粒说来解释. 这类现象总是出现在折射率变化非常迅速 (但可能连续) 的地方. 其中有先前考虑过的一根光线分裂为一根折射光线和一根反射光线的情形, 它是一种无论如何不能用曲面不连续性的数学无穷小理论解释的现象. 此外, 实验物理学中所熟悉的衍射和干涉效应属于这类现象.

所有这些现象都能借助波的概念来处理, 但这里暂时忽略光所特有的横向性. 这个理论的定量表达是由杨、菲涅耳和欧拉开创的.

a. 振动

谐振动的最简单形式是

$$x = A\cos(\omega t + \delta),$$

其中 $\omega = 2\pi\nu$ 是圆频率, ν 是每秒振动数. 叠加原理成立:

$$A_1\cos(\omega t + \delta_1) + A_2\cos(\omega t + \delta_2) = A\cos(\omega t + \delta),$$

并且有下列关系

$$A_1\cos\delta_1 + A_2\cos\delta_2 = A\cos\delta,$$

$$A_1\sin\delta_1 + A_2\sin\delta_2 = A\sin\delta,$$

由此可以确定 A 和 δ. 用复数记法, 公式较简单. 我们有:

$$a = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} \quad (\text{复振幅}),$$

$$x = A\cos(\omega t + \delta) = \mathrm{Re}\, A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\delta)} = \mathrm{Re}\, a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{5.1}$$

和叠加原理: 对两个振动的叠加

$$a = a_1 + a_2. \tag{5.2}$$

图 5.1 给出叠加的几何图示. 只要我们仅仅是处理线性运算, 那么写成复数形式, 则一切都很简单地进行. 无论如何, 用二次表达式时, 必须小心; 例如一般说来, 强度 I 是 $I \propto (\mathrm{Re}\, a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})^2 = (\mathrm{Re}\, u)^2 = x^2$, 其中 $u = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. 于是,

$$I \propto \frac{1}{2}(u^* + u)^2 = u^* u + \frac{1}{2}(u^2 + u^{*2}) = |a|^2 + \mathrm{Re}\, a^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t},$$
$$I \propto |a|^2\{1 + \cos(2\omega t + 2\delta)\}.$$

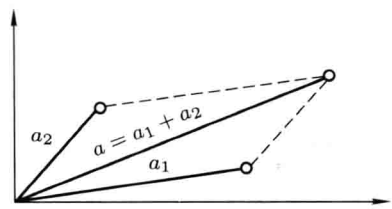


图 5.1

括号内第一项是常数, 而第二项是振荡的. 除 ω 很大以及所考察的是 I 的时间平均值外, 不能简单地略去强度中的振荡项.

矢量振动. 这里, $\boldsymbol{u}$ 不是标量而是矢量:

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{u},$$

和 $\boldsymbol{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 是复矢量, 即 a_i 是复数. 作这类振动的点的轨迹是在一个固定平面内, 并且是一个椭圆 (可能退化成圆或直线).

[证明] **a. 轨迹在一个平面内.**

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Re}\, \mathrm{i}\omega\boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$
$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \boldsymbol{a}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \times \mathrm{i}\omega\boldsymbol{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{Re}\, \frac{\omega}{2}\mathrm{i}\boldsymbol{a}^* \times \boldsymbol{a},$$

由于 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$. 然而, $\mathrm{i}\boldsymbol{a}^* \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$ 是实数, 因为 $\boldsymbol{c}^* = \boldsymbol{c}$. 这样, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{v} = \omega\boldsymbol{c}/2$ 是常矢, 所以在整个运动期间, 点都在垂直于 $\boldsymbol{c}$ 的平面内.

轨迹是一个椭圆. 选取运动平面作为 $X - Y$ 平面. 那么,

$$X = \frac{1}{2}(a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a_1^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$
$$Y = \frac{1}{2}(a_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a_2^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}).$$

设

$$a = a_1 + \mathrm{i}a_2, \quad a^* = a_1^* - \mathrm{i}a_2^*,$$
$$b = a_1 - \mathrm{i}a_2, \quad b^* = a_1^* + \mathrm{i}a_2^*,$$

便得到

$$X + \mathrm{i}Y = \frac{1}{2}(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + b^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$
$$X - \mathrm{i}Y = \frac{1}{2}(b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}).$$

我们现在把坐标系 (X, Y) 旋转到 (ξ, η):

$$\xi + \mathrm{i}\eta = (X + \mathrm{i}Y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{2}(a'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + b'^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$
$$\xi - \mathrm{i}\eta = (X - \mathrm{i}Y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{2}(b'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a'^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$

其中

$$a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \quad a'^* = a^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha},$$
$$b' = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}, \quad b'^* = b^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha},$$

并且这样确定转角 α 使得 a'/b' 变为实的和正的 (对应于这旋转的坐标叫做简正坐标).

特殊情况 $b = 0$ 时得出 $X + \mathrm{i}Y = (1/2)a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, 很清楚这是圆运动; 这对 $a = 0$ 也是正确的 [A–2]. 除这种特殊情况外, 得到

$$b'/a' = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\alpha}b/a = \rho \quad (\text{实的和正的}),$$
$$b/a = \rho\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha},$$

其中 2α 被确定到模 2π 之内, 因而, α 在模 π 之内. 所以

$$\xi + \mathrm{i}\eta = \frac{1}{2}(a'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \rho a'^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$
$$\xi - \mathrm{i}\eta = \frac{1}{2}(\rho a'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + a'^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}),$$

并且设 $a' = 2C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$, 则

$$\left.\begin{aligned}\xi &= C(1+\rho)\cos(\omega t + \delta)\\ \eta &= C(1-\rho)\sin(\omega t + \delta)\end{aligned}\right\},$$

这是椭圆方程式, 因为消去时间因子, 得出

$$\frac{\xi^2}{[C(1+\rho)]^2}+\frac{\eta^2}{[C(1-\rho)]^2}=1.$$

若 $\rho=1$, 则得到一个沿直线的振动. [证毕]

傅里叶定理 许可把周期过程表示为谐和过程的叠加:

$$\left.\begin{aligned} &f(t+T)=f(t)\\ &f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\\ &a_n=\frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t \end{aligned}\right\}, \tag{5.3}$$

其中 $\omega=2\pi/T$ 是圆频率. 为使公式 (5.3) 成立, f 无须是连续的, 但须是有界变化.

如果 f 是实的, 那么

$$a_{-n}=a_n^*$$

此外, 由于因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}$ 的正交性, 对于系数 a_n, 我们有

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left|f(t)-\sum_{n=-N}^{+N}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t}\right|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t-2\sum_{-N}^{+N}a_na_n^*+\sum_{-N}^{+N}a_na_n^*=\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t-\sum_{-N}^{+N}|a_n|^2.$$

由此得到贝塞尔不等式

$$\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t\geqslant\sum_{-N}^{+N}|a_n|^2, \tag{5.4}$$

当 $N\to\infty$, 它变为完备 (性) 关系

$$\frac{1}{T}\int|f(t)|^2\mathrm{d}t=\sum_{-\infty}^{+\infty}|a_n|^2. \tag{5.5}$$

形式地作下列极限过渡:

$\omega\to 0, n\to\infty, n\omega\to\nu$ (固定的), $T\to\infty$,

$\omega=\Delta\nu, \omega\Sigma\to\int\mathrm{d}\nu, a_n=\omega A(\nu)$,

就能把傅里叶公式推广而包括非周期运动. 那么,

$$\left.\begin{aligned} A(\nu) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t}\mathrm{d}t \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t}\mathrm{d}\nu \end{aligned}\right\}. \tag{5.6}$$

完备关系变成帕塞瓦尔 (Parseval) 公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\nu)|^2\mathrm{d}\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t. \tag{5.7}$$

自然, 全部积分必须存在, 并且在无限远处函数 "足够快地" 趋于零时, 才允许作这种极限过渡.

b. 波

沿 x 方向传播的平面波可用

$$u = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

表示, 其中

$$u(x,t) = u(x,t+\tau), \tag{5.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}, &\quad \nu = \frac{1}{\tau} \\ k = 2\pi\mu = \frac{2\pi}{\lambda}, &\quad \mu = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\}. \tag{5.9}$$

对于

$$x = vt + \text{常数} = \frac{\omega}{k}t + \text{常数},$$

余弦的位相,

$$\varphi \equiv kx - \omega t + \delta$$

仍然是常数. 因此,

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{5.10}$$

是波的相速.

一般说来, ω 与 k 之间存在一定关系:

$$\omega = f(k), \quad \text{(色散定律)} \tag{5.11}$$

特殊情况: ω 与 k 无关, $\omega/k = c$. 这适用于真空中的光.

在三维情况中, 我们用矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{k}$:

$$u = A\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t + \delta). \tag{5.8'}$$

这样, $\boldsymbol{k}$ 垂直于等位相面. 波面法线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 的关系是

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\frac{2\pi}{\lambda},\quad \text{且}\quad \boldsymbol{n}^2=1. \tag{5.9'}$$

色散定律变为

$$\omega=f(k_1,k_2,k_3)=f(\boldsymbol{k}). \tag{5.11'}$$

如果介质是各向同性的, 则简化为

$$\omega=f(|\boldsymbol{k}|).$$

线性叠加原理是这里所考虑的波的一个普遍性质. 它说: 如果 u_1 和 u_2 是介质中两种可能的波态, 那么, $c_1u_1+c_2u_2$ 也是可能的态. 为使 u_1 和 u_2 是两个可能的态, 色散定律必须被满足.

线性叠加原理在波动理论中具有非常深远的意义, 而且在光学中也很适用 [A–3]. 可是, 对于机械波, 仅在振幅足够小的情况下才适用 (参看, 例如, 黎曼关于空气中爆炸波的著作). 由叠加原理, 傅里叶定理允许把介质中的任意波态表示如下:

$$\left.\begin{aligned} u&=\iiint A(k_1,k_2,k_3)\cos[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t+\delta(\boldsymbol{k})]\mathrm{d}^3k\\ &=\mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\mathrm{d}^3k \end{aligned}\right\}. \tag{5.12}$$

其中 $a=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}$. 换句话说, 如果给出任何一种式 (5.11′) 形式的色散定律, 并且 (对于光学) 要求线性叠加原理适用, 那么式 (5.12) 便给出问题的普遍解.

用式 (5.12), 初值问题

$$\begin{aligned} u(x,0)&=u_0(x),\\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}&=\dot{u}_0(x), \end{aligned}$$

是可解的; 这是因为

$$\begin{aligned} u_0&=\mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3k,\\ \dot{u}_0&=\mathrm{Re}\iiint(-\mathrm{i})\omega a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3k\\ &=\mathrm{Im}\iiint\omega(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3k, \end{aligned}$$

由此利用傅里叶逆变换公式确定复量 a:

$$\frac{1}{2}[a(k)+a^*(-k)]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint u_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x,$$

$$(-\mathrm{i})\frac{1}{2}[\omega(k)a(k)-\omega(-k)a^*(-k)]=$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint \dot{u}_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x.$$

群速. 我们考虑一个波包, 即形式如式 (5.12) 给出的许多波的叠加:

$$u(x,t)=\mathrm{Re}\iiint a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\mathrm{d}^3k=\mathrm{Re}\,w.$$

这里, 假定 $a(\boldsymbol{k})$ 仅在 $\boldsymbol{k}$ 附近某小区域 (例如, $\boldsymbol{k}\pm\Delta\boldsymbol{k}$) 内显著不为零. 波包的中心用

$$\overline{x}_i(t)=\frac{\int x_iu^2\mathrm{d}V}{\int u^2\mathrm{d}V} \tag{5.13}$$

代表.

我们将看到, 能量正比于 u^2, 所以, 式 (5.13) 即是能量 "中心". 我们有

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(w+w^*)$$

且有

$$w=\iiint a(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\mathrm{d}^3k,$$

所以

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x, \tag{5.14}$$

和

$$u^2=\frac{1}{4}(w^2+w^{*2})+\frac{1}{2}ww^*.$$

这样, u^2 包含两种类型的项, 常数项和两倍频率的振荡项. 略去振荡项 (时间平均), 然后得到

$$\overline{x}_i(t)=\frac{\int x_iww^*\mathrm{d}V}{\int ww^*\mathrm{d}V}. \tag{5.14$'$}$$

分子变为

$$\begin{aligned}\int x_i w w^* \mathrm{d}V &= \int \mathrm{d}^3 x w^* \int a(\boldsymbol{k}) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial k_i} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}) \mathrm{d}^3 k \\ &= \int \mathrm{d}^3 x w^* \int \left(\mathrm{i} \frac{\partial a}{\partial k_i} + t \frac{\partial \omega}{\partial k_i} a \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)} \mathrm{d}^3 k \\ &= (2\pi)^3 \left(\int a^* \mathrm{i} \frac{\partial a}{\partial k_i} \mathrm{d}^3 k + t \int \frac{\partial \omega}{\partial k_i} a^* a \mathrm{d}^3 k \right),\end{aligned}$$

其中我们已分部积分并用了式 (5.14). 用帕塞瓦尔公式 (式 (5.7)), 分母变为

$$\int w w^* \mathrm{d}^3 x = (2\pi)^3 \int a a^* \mathrm{d}^3 k,$$

于是

$$\overline{x}_i(t) = \frac{\int a^* \mathrm{i} \left(\dfrac{\partial a}{\partial k_i} \right) \mathrm{d}^3 k}{\int a^* a \mathrm{d}^3 k} + \frac{\int \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial k_i} \right) a^* a \mathrm{d}^3 k}{\int a^* a \mathrm{d}^3 k} t.$$

这样,

$$\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_i} \right)} \tag{5.15}$$

是波包中心的传播速度.

群速定义为

$$\boldsymbol{U} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}}. \tag{5.16}$$

在光学中, $\boldsymbol{U}$ 的方向是几何光学中光线的方向. 在推导群速中, 我们是任意取 u^2 作为能量的量度. 如果人们采用任意二次型 $\varphi(\omega)u^2$ (例如 $(\partial u/\partial t)^2$, 因为 $\partial/\partial t \propto \omega$), 会得到完全相同的结果.

各向同性的情况. 我们考虑一个波包, 式 (5.12). 对于各向同性情况, 必定有

$$\omega = \omega(k), \quad k = |\boldsymbol{k}|.$$

如果波包足够小, 那么

$$\overline{v} \simeq v = \frac{\omega}{k}, \quad U = v + k \frac{\partial v}{\partial k} = v - \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda}.$$

在各向同性的情况中, 因为关系式

$$\nabla^2 = -k^2$$

适用于式 (5.12) 中的被积函数, 那么, 对于波包的任意个别谐波[①]总能令

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \tag{5.17}$$

一方面, 式 (5.17) 是特殊的, 它局限于对时间为正弦式的过程; 然而, 另一方面, 由于未曾假定特殊的色散定律, 因此它又是普遍的. 它也是叠加原理的一种表达式, 但仅限于相同频率的波态.

特殊情形. 设介质没有色散: 对于波包中所有的波, $v = U = c$. 于是

$$c = \frac{\omega}{k} = 常数 \tag{5.17'}$$

对于波包中所有的波都适用.

对于波包中每一种波, 由公式 (5.12) 得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2 = -c^2 k^2. \tag{5.18}$$

这样, 代入式 (5.17), 得到波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5.18'}$$

由波运动学叠加原理的普遍表达式 (5.12), 以十分特殊的色散定律式 (5.17′) 作基础, 我们已推导出一个微分方程. 在这种特殊情形下 (并仅在这种情形下), 式 (5.12) 和式 (5.18) 是等效的. 叠加原理式 (5.12) 的线性反映在微分方程式 (5.18′) 的线性中.

一维情形. 作为式 (5.18′) 适用的特殊情形, 我们考虑单个位置坐标 x, 则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{5.18''}$$

按照式 (5.12), 其解是

$$\begin{aligned} 2u &= \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx - c|k|t)}\mathrm{d}k + 复数共轭 \\ &= \int_0^{\infty} a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)}\mathrm{d}k + \int_0^{\infty} a(-k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x+ct)}\mathrm{d}k + 复数共轭 \end{aligned}$$

由于 $a(-k)$ 与 $a(k)$ 完全无关, 因此

$$2u = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{5.19}$$

即为最普遍解. 对于这种情形, 不用傅里叶积分而直接求解波动方程式 (5.18′), 也能导出式 (5.19).

① 从德文原版译出, 英译版中无 "谐" 字. —— 中译者注

同样, 得到各向同性无色散介质中的球面波

$$ru = f(r - ct) + g(r + ct). \tag{5.19'}$$

要证明这点, 只需把 $v = ru$ 代入波动方程式 (5.18'), 从而得到有关 v 的式 (5.18'') (将 x 换成 r). 若要 $r = 0$ 处没有奇点, 那么必须要求

$$ru = f(r - ct) - f(-r - ct).$$

§6. 折射, 反射, 干涉

现在我们把 §5 里讨论的普遍波动理论应用到光学中. 为了使这成为可能, 必须证明在第一章中讨论的光线理论包含在波动理论中, 或者至少是后者的某种极限情形. 现在将对折射和反射基本定律证明是这样.

设分别用 k,ω 和 k',ω' 表征的区域的界面 F 已给定. 我们考虑在各向同性介质中的一个平面波.

我们要求位相在界面上是连续的. 这要求

$$\omega = \omega'. \tag{6.1}$$

此外, 对于在 F 上的 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}', \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'$. 这样, 对于在 F 上的 $\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x} = 0$. 所以, $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ 必须平行于 (界) 面法线 $\boldsymbol{N}$. 然而, 这就是折射定律:

$$(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \times \boldsymbol{N} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{N} - \boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{N} = 0,$$

即

$$k \sin\theta = k' \sin\theta'. \tag{6.1'}$$

与式 (1.1) 比较, 看出

$$n/n' = k/k' = \lambda'/\lambda. \tag{6.2}$$

我们已注意到, 就各向同性的情形来说, 相速是 $v = \omega/k$. 代入式 (6.2), 再用式 (6.1), 得到

$$\frac{n}{n'} = \frac{v'}{v}. \tag{6.3}$$

真空中不存在色散是一个实验事实; 因此, 在我们的理论中必须假定真空中的光有一个普适速度 c. 此外, 按定义, 真空中 $n = 1$, 所以, 对于折射率为 n (相对于真空) 的任意介质, 得到

$$v = \frac{c}{n}. \tag{6.3'}$$

这是用直接实验能验证的折射率与相速的关系. c 的数值必须由实验确定, 它并非从理论预言.

对反射光线也要求波场在界面 F 是连续的. 正如前面那样, 得到 $\omega=\omega'$ 和对于在 F 上的 $\boldsymbol{x}$, $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot\boldsymbol{x}=0$. 然而, 从上面我们有 $n=n'$ (相同的介质), 所以, $|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{k}'|$. 这样, $(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')$ 垂直于 F, 或者 $(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}')$ 垂直于 F, 其中 $|\boldsymbol{t}|=1$. 这是反射定律.

为了更普遍地证明光线理论包含在波动理论中, 或者至少代表前者的一种极限情形, 现在, 假定一种非均匀各向同性介质. 考虑对时间为谐和的过程, 那么对于这样一种介质, 下式成立:

$$\nabla^2 u+k^2u=0, \tag{5.17}$$

其中 k 是位置的函数. 按照式 (6.2) 引进折射率, 我们得到

$$\nabla^2 u+k_0^2n^2u=0, \tag{6.4}$$

其中 k_0 是 k 在真空中的值. 对于 u, 我们假定

$$u=\operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0S-\omega t)}, \tag{6.5}$$

其中 $S=S(\boldsymbol{x})$ 是复数. 此外, $u_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0S}$ 必须是式 (6.4) 的解. 我们有

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\mathrm{i}k_0\frac{\partial S}{\partial x}u_1,$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=\left\{\left(\mathrm{i}k_0\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\mathrm{i}k_0\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}u_1.$$

代入式 (6.4) 并简化, 得到 S 的方程

$$-(\nabla S)^2+\mathrm{i}\frac{1}{k_0}\nabla^2S+n^2=0. \tag{6.6}$$

几何光学中, 有类似的方程, 即

$$-(\nabla S_0)^2+n^2=0$$

(参看式 (2.2)). 此外, 几何光学中也有关系式

$$\nabla S_0=\boldsymbol{p}=n\boldsymbol{t},\quad \nabla^2S_0=\operatorname{div}\boldsymbol{p}.$$

为了使式 (6.6) 过渡到几何光学方程, 我们必须要求

$$\frac{1}{k_0}(\operatorname{div}\boldsymbol{p})\ll p^2. \tag{6.7}$$

一维情形中, 这是

$$\frac{1}{k_0}\left|\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right| \ll p^2, \quad \left|\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\right| \ll k_0 n^2,$$
$$\left|\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}\right| \ll n. \tag{6.8}$$

这样, n 在一个波长的距离内的变化必须是很小的.——在那种情况下, 波动理论和光线理论给出同样的结果. 如果波长很小, 条件式 (6.8) 一定能满足. 这样, 我们可以把 S 按 λ 或 $1/k$ 的幂展开, 直接得到

$$S = S_0 + \frac{1}{k_0}S_1 + \cdots + \frac{1}{k_0^n}S_n + \cdots,$$

其中 S_0 是几何光学方程的解 (展开式的第一级近似, 如果把全部 $1/k$ 和较高幂项都略去的话).

由此, 可以看出, 如果假定 $\lambda \to 0$, 那么, 对于各向同性介质情形, 波动理论描述现象的方式与几何光学相同. 现在产生了这样的问题, 是否在 λ 的有限性具有实验意义的情况下, 波动理论比光线理论是对自然界的较好近似.

干涉现象表明, 用光的波动图像是正确的途径. 我们设在 §4 中引进的光强度 (例如, 光照度) 正比于波函数的平方. 那么, 与几何光学不同, 在我们新的理论中, 强度失去相加性; 的确, 这是被观察到的情况. 例如, 令两个 (谐和的) 波在给定点叠加. 如果

$$u_1 = \mathrm{Re}\, a_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$
$$u_2 = \mathrm{Re}\, a_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

是两个波的个别激励, 那么

$$u_1 + u_2 = \mathrm{Re}\,(a_1 + a_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

是考察点的总激励. 这样, 得到

$$I_1 \propto |a_1|^2, \quad I_2 \propto |a_2|^2,$$
$$I \propto |a_1 + a_2|^2 = (a_1 + a_2)(a_1^* + a_2^*),$$

所以

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta, \tag{6.9}$$

其中 δ 表示 a_1 和 a_2 的幅角差. 如果这个位相差是很确定的, 那么我们说的是相干波列. 在这种情况下, 强度不可加性是显然的. 然而, 如果我们对全部可能的 δ 求时间平均, 即从分离的光源发的光, 那么再次得到 $I = I_1 + I_2$.

相干光能用菲涅耳镜实验产生. 在图 6.1 中, L 是光源, 分别由镜子 S_1 和 S_2 反射而产生虚光源 L_1' 和 L_2'. 我们计算 P 点的强度:

$$r_1 = PL_1' = PS_1L, \quad r_1^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}d - p\right)^2,$$

$$r_2 = PL_2' = PS_2L, \quad r_2^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}d + p\right)^2,$$

$$r_2^2 - r_1^2 = 2dp,$$

$$r_1 + r_2 \simeq 2a, \quad \text{所以} \quad r_1 - r_2 \simeq \frac{dp}{a}.$$

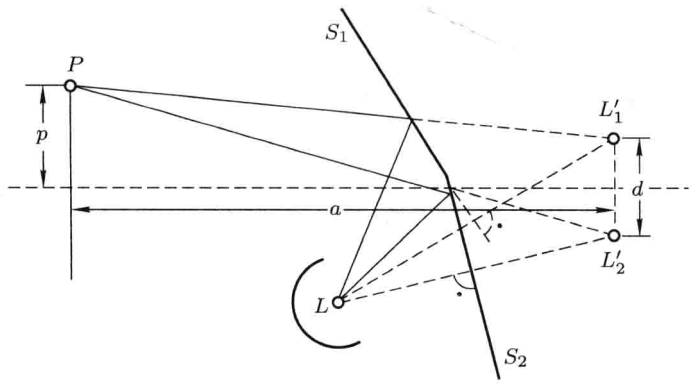


图 6.1

这样, 得到

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dp}{a},$$

与式 (6.9) 一起, 得

$$I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}.$$

由此, 我们推知, 在 $\delta = 2\pi n$ (n 是整数) 时, 就是说, 在 $p = an\lambda/d$ 处, 得到强度极大. 其间, 在 $p = [\lambda a/(2d)](2n+1)$ 处, 强度为零.

产生干涉现象的另一个实验是将经平行面反射后的等倾光线汇合 (图 6.2). 由计算得出下列结果:
条件,

$$2d\cos\chi = m\lambda'$$

意味着下方 (透射) 为极大, 上方 (反射) 为极小, 而对于

$$2d\cos\chi = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda',$$

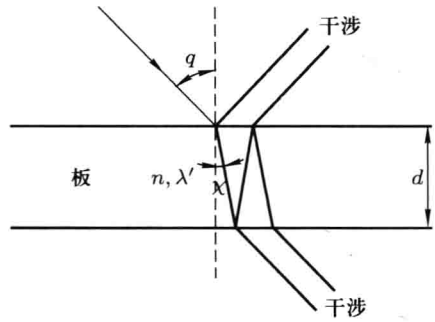


图 6.2

则得到下方为极小和上方为极大.

牛顿环是另一干涉现象. 这个实验显示光的颜色自红变紫时, 波长变小.

§7. 衍射理论

a. 基尔霍夫的普遍解

按照几何光学, 小孔应该总是投射出轮廓明显的影子. 然而, 实际上却观察到叫做衍射的熟悉现象. 因此, 我们尝试在这里阐明的波动概念的基础上解释这些现象.

为了不必用普遍公式 (5.12) 计算, 我们假定整个波场是对时间为谐和的, 具有时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$. 当然 (由于连续性) 很清楚, 如果我们假定波场某一点处是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 形式的时间上无界的激发, 那么我们在其他所有点也都必须这样做, 而且用相同的 ω. 这样能在数学上得到正确的表达; 然而, 在自然界中, 这种理想化只能近似地被满足, 因为实际上人们总是必须处理 (具有有限持续时间的) 波包.

在这种假设和各向同性介质的要求下, 式 (5.17) 成立:

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0.$$

在衍射现象中, 屏幕具有 u 和 $\partial u/\partial n$ 的边界条件的意义. 方程式 (5.17) 应对这些边界条件求解. 开始就应提出, 这个数学问题只有在很特殊的情况下才是严格地可解的. 其余的, 我们必须限于近似解. 这里我们将处理基尔霍夫近似.

我们有对闭合曲面适用的格林定理:

$$\int_{V_Q} (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)\mathrm{d}V = \oint_{F_Q} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}f.$$

把式 (5.17) 的解作为 u 代入上面的公式中, 并设

$$v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}}.$$

(光源 L 在曲面 F 外.)P 点是任意场点, 并且 Q 是遍及积分域变化的点. 这样

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0,$$

所以对于 $Q \neq P$,

$$u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = 0.$$

如果 P 是在积分域内部, 那么必须用一小球把它剔除:

$$\oint_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}f = 0 \text{ 如果 } P \text{ 在 } V \text{ 外},$$

$$\oint_{F+\text{球}} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}f = 0 \text{ 如果 } P \text{ 在 } V \text{ 内}.$$

计算小球的贡献时, 我们注意在球面上 $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$. 当 $r \to 0$, 只有

$$-\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial r} = \left[\frac{\mathrm{i}k}{r} - \frac{1}{r^2} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}$$

这项是重要的. 在球面上, $\mathrm{d}f = r^2 \mathrm{d}\Omega$, 得到

$$\oint_{\text{球}} \mathrm{d}f \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) = -\oint \mathrm{d}\Omega u_P = -4\pi u_P.$$

这样

$$\oint_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) \mathrm{d}f = \begin{cases} 4\pi u_P & \text{如果 } P \text{ 在曲面内}, \\ 0 & \text{如果 } P \text{ 在曲面外}. \end{cases} \tag{7.1}$$

现在, 我们令闭合曲面的一部分趋向无限远. 此外, 在无限远处, 要求式 (5.17) 的解渐近地如

$$u \sim \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r},$$

并且 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}$ 形式的部分没有贡献. 这是无限远处的边界条件: 辐射条件. 这样, 物理上, 仅容许外传波. 然而, 用这条件, 被积表达式[①]应有

$$\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) r^2 \mathrm{d}\Omega \to 0, \quad \text{当 } r \to \infty.$$

① 德文原版和英译版中都是被积函数.——中译者注

这样, 我们只需积分曲面的有限部分. 于是得

$$\int_F \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) \mathrm{d}f = \begin{cases} 4\pi u_P & \text{如果 } P \text{ 和 } L \text{ 在 } F \text{ 的异侧,} \\ 0 & \text{如果 } P \text{ 和 } L \text{ 在 } F \text{ 的同侧.} \end{cases} \tag{7.2}$$

这里, L 表示光源. 如果人们早已有此问题的解, 则公式 (7.2) 是精确的. 然而, 实际上, 在这样的曲面上的 u 和 $\partial u/\partial n$, 人们通常都不知道; 并且这些量事先不可能给出.

基尔霍夫解法. 把曲面分为屏和孔: $F = S + A$. 然后, 基尔霍夫假设

在 A 内: $u = u^0, \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u^0}{\partial n}$ (未受扰的传播);

在 S 上: $u = 0, \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ (光激励消失).

u^0 被理解为未受扰的光传播所应有的 u:

$$u^0(Q) \equiv u_Q^0 = \text{常数}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{LQ}}}{r_{LQ}},$$

其中 L 表示光源.

如果把基尔霍夫假说代入式 (7.2), 那么得到

$$\begin{aligned} u_P &= \frac{1}{4\pi}\int_A \left(v\frac{\partial u^0}{\partial n} - u^0\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f \\ &= u^0(P) - \frac{1}{4\pi}\int_S \left(v\frac{\partial u_Q^0}{\partial n} - u_Q^0\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{7.3}$$

这是波动方程的基尔霍夫解. 已经提到过, 这个解不是精确的, 因为假说无疑地是不正确的. 如果由式 (7.3) 计算 u_Q^0 和 $\partial u_Q^0/\partial n$, 那么结果完全不是代进去的那样. 并且, 正确的边界条件完全不是所假设的那些, 因为屏上只能指定 u 或 $\partial u/\partial n$ 中的一个 (不能两者), 而在孔处两者都不能给出. 在这个假说下, 基尔霍夫相信他已找到了完全 "黑" 的屏的解了, 可是这样的屏甚至是不能定义的.

当孔比波长大, 而且衍射角不太大时, 基尔霍夫的解是有用的.

如果把孔和屏互换, 那么由基尔霍夫解得出巴比涅定理:

$$u_1(P) + u_2(P) = u^0(P). \tag{7.4}$$

(这里, u_1 是在 S 处屏的解, u_2 是在 S 处孔的解.) 例如, 假设光源 L 由透镜理想地成像于物镜屏上 (在这样的屏上, 除清晰像点 L' 外, 到处 $u_0 = 0$), 不管是

插入给定的孔阑, 还是插入另一个在前者开孔处为屏而有屏处却为开孔的光阑, 光分布 ($\propto u^2$) 都是相同的.

基尔霍夫解的改进. 可以稍为不同地选取函数 v. 我们假定衍射面 E 是平面, 并且引进 P' 点, 它是在 E 中 P 点的像. 然后, 设

$$v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{P'Q}}}{r_{P'Q}}$$

(其中 Q 是积分所遍及的变动点). 在 E 上, 新的 v 有如下性质:

$$\left.\begin{aligned} v &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 2\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}} \end{aligned}\right\}.$$

新的解 $\overline{u}_P$ 是

$$4\pi\overline{u}_P = 4\pi u_P^0 - \int_S (-u^0)\cdot 2\frac{\partial}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}f \tag{7.5}$$

与旧解的关系是

$$\overline{u} = u(P) - u(P') + u^0(P').$$

另一种可能性是设

$$v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{PQ}}}{r_{PQ}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_{P'Q}}}{r_{P'Q}},$$

由此, 在 E 上得到

$$\left.\begin{aligned} v &= 2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial n} &= 0 \end{aligned}\right\},$$

$$4\pi\overline{\overline{u}}_P = 4\pi u_P^0 - 2\int \frac{\partial u^0}{\partial n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}f. \tag{7.5'}$$

并且, 相应地,

$$\overline{\overline{u}}_P = u(P) + u(P') - u^0(P').$$

然而, 这种方法并未得到任何基本的东西. 这些解的优点是, 只需指定一个边界条件, 而不像以前要指定两个.

基尔霍夫解的推论 (图 7.1). 我们现在代入下列函数 u_Q^0 和 v_Q:

$$\begin{aligned} v_Q &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_0}/r_0, \\ u_Q^0 &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}/r_1, \\ u^0(P) &= A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}/r. \end{aligned}$$

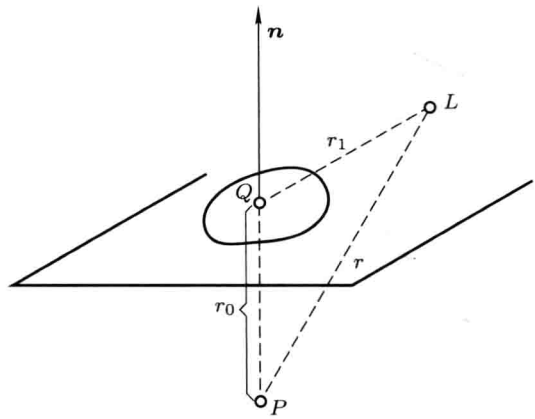


图 7.1

然而,

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r})\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr}\right).$$

这样, 由式 (7.3) 得到

$$u_P=\frac{A}{4\pi}\int_A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+r_1)}}{r_0r_1}\mathrm{i}k\times \left[\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_1)\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr_1}\right)-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)\left(1-\frac{1}{\mathrm{i}kr_0}\right)\right]\mathrm{d}f \tag{7.6}$$

作为点光源引起的效应的公式.

现在作下列简化:

$$kr_0\gg 1,\quad kr_1\gg 1\quad(\lambda\text{ 比 }r\text{ 小得多}).$$

此外, 我们仅考察小衍射角, 之所以这样做是考虑到这样的实验事实, 即在离开几何影边界很短距离的地方, 光的分布是几何光学所给出的那样. 现在, 由于 λ 很小, 因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+r_1)}$ 是一个振荡非常迅速的函数, 而其余的因子, $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_1)-\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}_0)$ 却变化缓慢 (已取 $1/(\mathrm{i}kr)\sim 0$). 这样, 我们可以假定后者是常数并用 $-2\cos\delta$ 代替, 其中 δ 是一个适当地选择的平均角度. 那么, 由式 (7.6) 得到

$$\begin{aligned}u_P&=-A\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\cos\delta\int_A\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_0+r_1)}}{r_0r_1}\mathrm{d}f\\&=u^0+A\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\cos\delta\int_S\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r+r_1)}}{rr_1}\mathrm{d}f.\end{aligned}\tag{7.7}$$

如果我们假定光 (阑) 孔开在平面上, 那么, 可以把式 (7.7) 在零光线邻近展开. 令 M 是孔中的一点, $(\xi,\eta,0)$ 是积分点 Q 的笛卡儿坐标 (我们已取 M 作为坐标系的原点, 以光 (阑) 孔的平面取作 $x-y$ 平面, 如图 7.2 所示). 于是得到

$$r_i^2=(x_i-\xi)^2+(y_i-\eta)^2+z_i^2,\quad i=0,1,$$
$$R_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2.$$

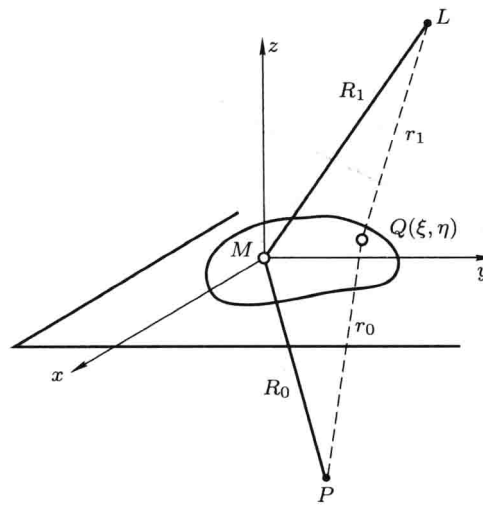


图 7.2

即

$$r_i^2=R_i^2-2(x_i\xi+y_i\eta)+\xi^2+\eta^2.$$

然而, 我们知道

$$\sqrt{1+\varepsilon^2}=1+\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^4}{8}+\cdots,$$

所以

$$r_i=R_i-\frac{x_i\xi+y_i\eta}{R_i}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2R_i}-\frac{(x_i\xi+y_i\eta)^2}{2R_i^3}+\cdots.$$

把它代入式 (7.7), 得出

$$u_P=-A\frac{\mathrm{i}k}{2\pi}\cos\delta\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+R_1)}}{R_0R_1}\iint\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi(\xi,\eta)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\tag{7.8}$$

其中

$$\Phi(\xi,\eta)=-\frac{x_0\xi+y_0\eta}{R_0}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2R_0}-\frac{(x_0\xi+y_0\eta)^2}{2R_0^3}+\cdots-$$
$$\frac{x_1\xi+y_1\eta}{R_1}+\frac{\xi^2+\eta^2}{2R_1}-\frac{(x_1\xi+y_1\eta)^2}{2R_1^3}+\cdots.$$

用公式 (7.8), 通过直接计算 (在假设基尔霍夫解是正确的范围内) 能确定衍射现象的光分布. 式 (7.8) 中 Φ 函数展开式的项数考虑得越多, 进行计算就越困难. 如果仅考虑 Φ 的线性项, 那么, 物理上意味着光源和场点都是无限地远离衍射孔的. $x_i/R_i = \alpha_i$ 和 $y_i/R_i = \beta_i (i = 0, 1)$ 变为方向余弦, 并且式 (7.8) 变为

$$u_P = \text{常数} \cdot \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[\xi(\alpha_0+\alpha_1)+\eta(\beta_0+\beta_1)]} \cdot \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta. \tag{7.8'}$$

实际上, 人们当然不会假定 L 和 P 是非常远的; 而是假定用透镜得到了平行光线. 这种情况叫做夫琅禾费衍射.

如果还考虑二次项, 那么我们得到菲涅耳衍射. 我们将处理两种衍射类型的一些情形.

b. 夫琅禾费衍射

1. 狭缝衍射. 对于夫琅禾费情形式 (7.8) 成立. 如果狭缝 (宽度 a) 是无限长的, 那么是平面问题 (参看图 7.3).

$$\begin{aligned} \beta_0 + \beta_1 &= 0, \\ \alpha_0 = \sin\psi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right), \\ \alpha_1 = -\sin\varphi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right), \\ \mu = k(\alpha_0 + \alpha_1) &= k(\sin\psi - \sin\varphi). \end{aligned}$$

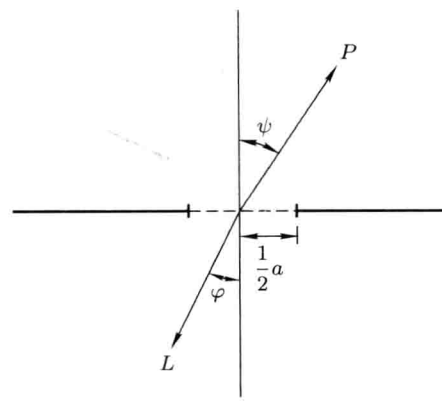


图 7.3

用这些关系, 对于狭缝式 (7.8) 给出

$$u_P = \text{常数} \cdot \int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{\text{常数}}{\mu}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu a/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu a/2}\}.$$

于是, 强度是

$$|u|^2 = \text{常数} \left(\frac{\sin \mu a/2}{\mu}\right)^2.$$

如果直射光线的强度叫做 I_0, 那么 (参看图 7.4),

$$|u|^2 = I_0 \left(\frac{\sin \mu a/2}{\mu a/2}\right)^2. \tag{7.9}$$

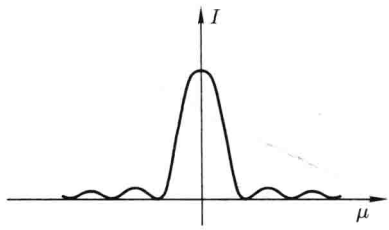


图 7.4

因此,

$$\frac{a}{2}\mu = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots,$$

或

$$a(\sin\psi - \sin\varphi) = n\lambda$$

时, 有极小值.

2. 圆孔衍射 (图 7.5). 圆置于 $\xi - \eta$ 平面内. 那么, 式 (7.8′) 变为

$$u = \text{常数} \int_{\text{圆}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[\xi(\alpha_0+\alpha_1)+\eta(\beta_0+\beta_1)]}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

我们现在假定光垂直入射到光阑上, 所以 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ 并且 z 轴变成全部现象的对称轴. 此外, 引进衍射角 θ, 并且在对称的基础上, 我们看出 u 是与方位角无关的, 我们设 $\beta_0 = 0$, 所以 $\alpha_0 = \sin\theta$. 于是

$$u = \text{常数} \int_{\text{圆}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi\sin\theta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

这里, 我们必须遍及 $-\overline{\xi} < \xi < \overline{\xi}$ 范围积分 ξ, 遍及 $-a < \eta < a$ 范围积分 η. 进行第一个积分, 得

$$u = \text{常数} \int \frac{1}{\sin\theta}\sin(k\overline{\xi}\sin\theta)\mathrm{d}\eta.$$

然而, 现在能用圆的半径和极角来表示 $\overline{\xi}$:

$$\overline{\xi} = a\cos\beta,$$

$$\eta = a\sin\beta.$$

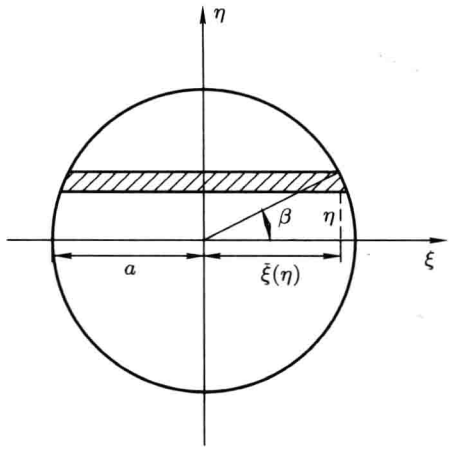


图 7.5

代换后, 得

$$u = \frac{\text{常数}}{\sin\theta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin(ka\sin\theta\cos\beta)\cos\beta \mathrm{d}\beta.$$

然而, 我们知道一阶贝塞尔函数由下式定义:

$$J_1(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin(z\cos\beta)\cos\beta \mathrm{d}\beta.$$

这样, 得到

$$u = \text{常数}\ \frac{J_1(ka\sin\theta)}{\sin\theta},$$

强度

$$I \propto |u|^2 = \text{常数}\ \frac{J_1^2(ka\sin\theta)}{\sin^2\theta}.$$

对于很小的 $z, J_1(z)/z \sim 1$. 用 I_0 表示未衍射光的强度, 便有

$$I = I_0\left(\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2. \tag{7.10}$$

$J_1(z)$ 的第一个为零的点在 $z = 1.\ 22\pi$ 处, 因此, 第一个暗环发生在衍射角 θ_1 处, 其中

$$\sin\theta_1 = \frac{1.22\pi}{ka} = 0.61\frac{\lambda}{a}. \tag{7.10'}$$

$J_1(z)$ 的第 N 个为零的点渐近地在 $z_N \sim \pi\left(N + \frac{1}{4}\right)$, 所以, 对于第 N 个极小, 得到

$$\sin\theta_N \sim \left(N + \frac{1}{4}\right)\frac{\lambda}{2a}.$$

3. 光栅衍射. 我们把一个 m 条 (无限狭长的) 等距 (d, 叫做光栅常数)[①]而毗连的狭缝组叫做光栅. 这样, 式 (7.8′) 中的积分过渡到以下的和:

$$u = 常数 \sum_{p=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}pdk(\alpha_0+\alpha_1)},$$

或者, 如果我们再设

$$\mu = k(\alpha_0 + \alpha_1) = k(\sin\psi - \sin\varphi)$$

(参看图 7.3),

$$u = 常数 \sum_{p=0}^{m-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\mu d} = 常数 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\mu d} - 1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu d} - 1}.$$

这样,

$$\begin{aligned} I \propto |u|^2 &= 常数 \frac{1 - \cos m\mu d}{1 - \cos \mu d} \\ &= 常数 \left(\frac{\sin m\mu d/2}{\sin \mu d/2} \right)^2. \end{aligned} \tag{7.11}$$

当分子和分母都为零时, 发生 N 级主极大:

$$\frac{\mu d}{2} = N\pi, \quad (\alpha_1 + \alpha_2)\frac{d}{\lambda} = N. \tag{7.11′}$$

在主极大处, $I \sim m^2$. 在

$$\frac{m\mu d}{2} = N\pi \quad 和 \quad \sin\frac{\mu d}{2} \neq 0$$

处强度为零. 由此, 我们得出结论, 衍射图样如图 7.6 所示. 如果考虑到光栅中狭缝的宽度, 那么我们得到狭缝的和光栅的公式的乘积. 光栅是光谱分析最重要的仪器. 用它可以测量波长.

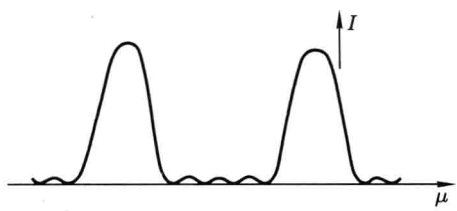


图 7.6

① 括号内的解释是中译者加的.——中译者注

技术上, 如果一个波长的主极大恰好落在另一个波长的第一极小上, 那么认为两个相邻的波长 "被分辨了".

按照式 (7.11′), $(\sin\varphi - \sin\psi)(d/\lambda) = N$, 使得垂直入射时, 第 N 级主极大发生于衍射角

$$\sin\psi = \frac{\lambda N}{d},$$

因此, 其后的第一个零点和它有角间距

$$\Delta(\sin\psi) = \frac{\lambda}{dm}.$$

另一方面, 如果改变波长, 那么主极大的中心移动

$$\Delta'(\sin\psi) = \frac{\Delta\lambda}{d}N.$$

如果我们要 $\Delta'(\sin\psi) = \Delta(\sin\psi)$①, 那么, 分辨率 A 为②

$$A \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm.$$

因此, 分辨率 $A \equiv \lambda/\Delta\lambda$ 等于级数与光栅中刻线数的乘积.

4. 显微镜的分辨率. 夫琅禾费理论指出怎样才能定义分辨率的概念. 我们考虑显微镜的例子 (图 7.7).

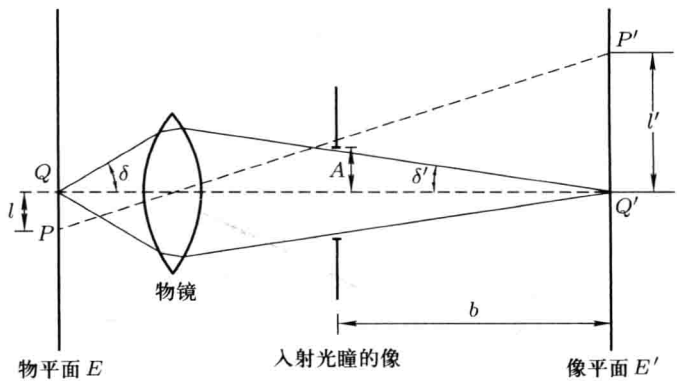


图 7.7

发光物. 如果 P 点如此靠近于 Q 点, 以致 P' 落在 Q 的衍射图样的第一主极大之内, 那么便不再能区别 P 点和 Q 点了.

如果物平面 E 精确地成像在像平面 E' 处, 那么必须满足正弦条件

$$ln\sin\delta = l'n'\sin\delta' \simeq l'n'\delta'$$

① 德文原版、英译版中都简作 $\Delta' = \Delta$. —— 中译者注

② 这句是中译者加的. —— 中译者注

为了能区别 P 和 Q, 用入射光瞳的像作为衍射孔, 人们必定有 (A 为入射光瞳的像的大小.)[①]

$$\frac{l'}{b} > \varphi' = 0.61\frac{\lambda'}{A}, \quad \text{但} \quad \frac{A}{b} = \delta',$$

所以

$$l' \geqslant 0.61\frac{\lambda_0}{n'\delta'}.$$

用上面讲的正弦条件, 得到

$$l \simeq \frac{l'n'\delta'}{n\sin\delta} > 0.61\frac{\lambda_0}{n\sin\delta}.$$

受照物. 假定光栅常数为 d 的光栅作为 "标准物". 对于想要得到的像, 必定包含由光栅产生的衍射图样的许多级, 否则无 (相似于物的) 像可得.[②]令 φ 是第一主极大角, 这样在焦平面内 C 和 C_1 处形成两个相干光源 (图 7.8), 并且这些光源在像平面 E' 处 (参看菲涅耳实验, 图 6.1) 产生间距[③]$d' = \lambda b/A$ 的线系. 所以, 至少包含光栅的一个衍射极大时, 我们才得到一个其结构与物相似的像.

$$\varphi < \frac{1}{2}\,(\text{孔角}) = \delta,$$

$$\sin\varphi = \frac{\lambda_0}{nd} < \sin\delta,$$

$$d > \frac{\lambda_0}{n\sin\delta},$$

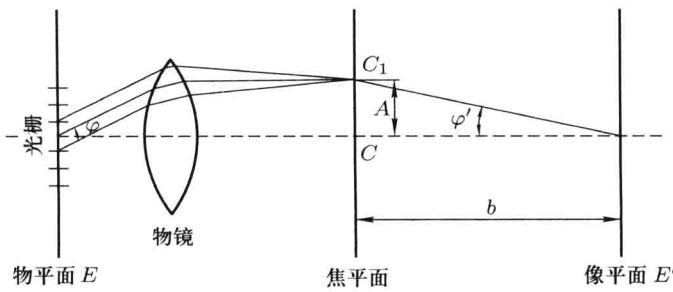


图 7.8

其中 $n\sin\delta$ 叫做数值孔径. 当系统使直射光线投射到透镜的边缘时, 就得到了 1/2 的因子. 如果我们满足于仅指示质点的存在而不想要知道它的形状的话, 那么确定质点应多么小就只是光强的问题了.

① 为了避免与上分节分辨率混淆, 中译者加上此处括号中的注释.——中译者注
② 这后半句是从德文原版中译出, 英译本没有这半句.——中译者注
③ "间距" 二字是中译者加的.——中译者注

分辨率的概念也能应用到其他光学仪器中. 这样, 对阶梯光栅 (迈克耳孙透射阶梯光栅, 图 7.9) 的计算给出 [A–4]

$$A = md\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right),$$

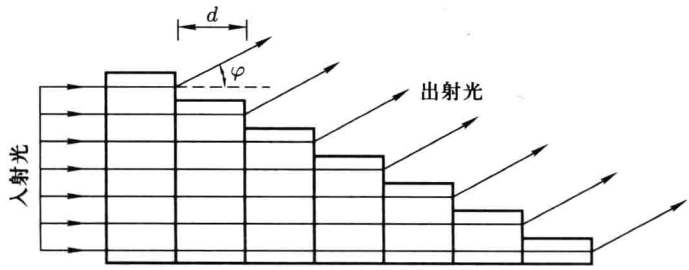


图 7.9

其中 m 是层数. (其他的例子, 参看补充书目.)

c. 菲涅耳衍射

我们现在假定, 从衍射孔到光源 L 和场点 P 都是有限距离. 于是, 在式 (7.8) 中至少要考虑到二次项. 同时, 我们把坐标系的原点安放在连线 PL 与衍射孔平面的交点处 (在 L 固定时, 对每个 P 点都有不同的坐标系). 这样, 我们获得在式 (7.8) 的 Φ 中去掉线性项的结果. 如果再令 $y_1 = y_0 = 0$, 那么 $\alpha = \alpha_0 = \sin\delta$, 而结果是

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right)(\xi^2\cos^2\delta + \eta^2) \\ u(P) &= -\frac{\mathrm{i}k\cos\delta}{2\pi R_0 R_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+R_1)}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\Phi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned}\right\}. \tag{7.12}$$

我们作下列变数变换:

$$\left.\begin{aligned} k\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\xi^2\cos^2\delta &= \pi u^2 \\ k\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_0}\right)\eta^2 &= \pi v^2 \end{aligned}\right\}, \tag{7.13}$$

所以,

$$k\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}\right)\cos\delta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \pi\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

由此式 (7.2) 变为

$$u(P) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+R_1)}}{R_0+R_1}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)v^2}\mathrm{d}v. \tag{7.14}$$

容易变换式 (7.14) 的积分限. 如果原来的积分限是 $\pm\infty$ (狭缝的情况), 那么, 在变换后的积分中, 它们还是 $\pm\infty$, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)v^2}\mathrm{d}v = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/4)} = 1+\mathrm{i}.$$

有限积分限间的同一积分

$$\int_{s-D}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u, \tag{7.15}$$

叫做菲涅耳积分, 并且被列成了表.

例 半无限平面边缘的衍射.

式 (7.14) 的第二个积分限显然是 $\pm\infty$, 而第一个积分的积分限被取为从有限到无限. 为了讨论积分式 (7.15), 我们考虑如下定义的曲线:

$$X = \int_0^s \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u, \quad Y = \int_0^s \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)\mathrm{d}u. \tag{7.16}$$

由于 $\left(\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1$, 那么 s 是弧长. 如果我们设 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}s} = \cos\tau, \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = \sin\tau$, 那么 τ 是切线与 X 轴的交角. 然而, 曲率半径是 $\rho = \mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau$, 并由式 (7.16) 得到

$$\rho = \frac{1}{\pi s}. \tag{7.17}$$

由式 (7.16) 定义的曲线是熟悉的考纽螺线. 例如, 由式 (7.17) 能近似地把它画出来 (参看图 7.10).

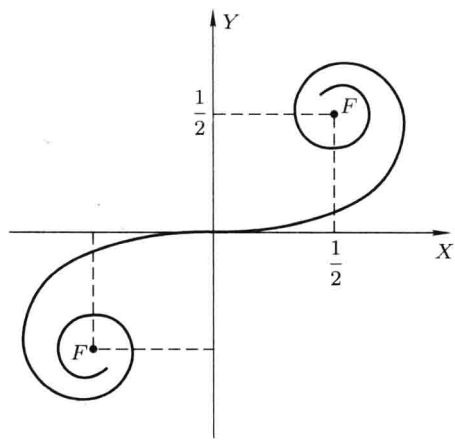


图 7.10

如果我们考察式 (7.15) 的积分, 那么我们看到

$$\left.\begin{aligned}\left|\int_0^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u\right|^2 &= X^2+Y^2\\ \left|\int_{s'}^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/2)u^2}\mathrm{d}u\right|^2 &= (X-X')^2+(Y-Y')^2\end{aligned}\right\}. \tag{7.18}$$

在图 7.11 中, 坐标系是这样选取的, 使得 LP 在屏上的投影落在 x 轴上, 后者是垂直于屏边缘的. 这样我们看到 ξ 的限是 $-\infty$ 和 x, 所以按照式 (7.13), u 的限是 $-\infty$ 和 $x\cos\delta\{k(R_0+R)/(\pi R_0R_1)\}^{\frac{1}{2}}$. 由式 (7.18), 我们认出沿考纽螺线从原点走过距离 s (用正确的正负号) 得到 $u(P)=u(s)$ 的强度比 $2I/I_0$[其中 I_0 对应于未受扰的光传播, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_0+R_1)}/(R_0+R_1)$], 并取值为由这样得到的点到螺线终点 F 的距离的平方. $s<0$ 的情况对应于几何影, 而 $s>0$ 对应于几何地被照明的一侧. 特别是, 对于

$$\begin{aligned}&s=+\infty, \quad I/I_0=1;\\ &s=0, \quad I/I_0=\frac{1}{4}\ \text{(影边界)};\\ &s=-\infty, \quad I/I_0=0.\end{aligned}$$

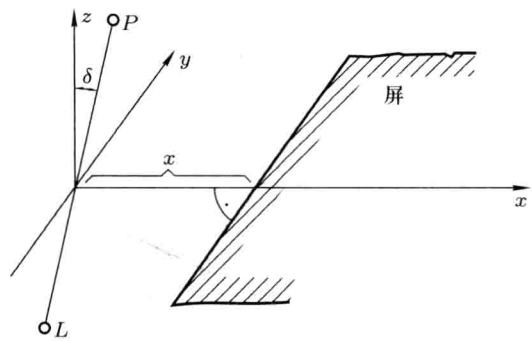


图 7.11

结果如图 7.12 所示. 在影侧, 强度单调地减小; 然而, 在亮侧, 强度振荡.

如果不是半无限平面而是宽度为 d 的狭缝, 那么除了现在第二个积分的限是 $s-D$ 和 s 外, 一切计算和前面相同, 其中

$$s=x\cos\delta\{k(R_0+R_1)/\pi R_0R_1\}^{\frac{1}{2}}$$

同前面一样,

$$D=d\cos\delta\{k(R_0+R_1)/\pi R_0R_1\}^{\frac{1}{2}}.$$

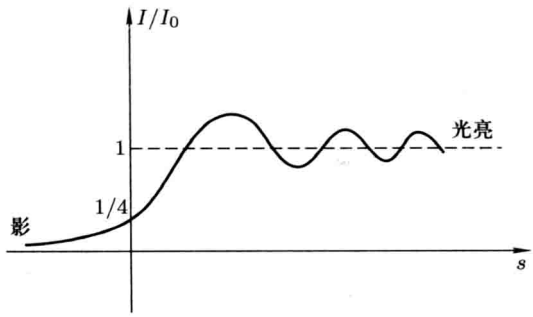


图 7.12

第三章

麦克斯韦理论

§8. 理论基础

后来发现, 前章所阐明的标量波动光学与某些实验事实不符. 就是说, 人们可以演示某些只有在横向矢量波概念的基础上才能解释的光学现象 (例如, 双折射及反射引起的偏振)[①]. 当能够指定与光传播相联系的矢量方向时, 就说这光束偏振化了. 实验上发现:

1. 偏振相同的光束的干涉同非偏振光一样.

2. 彼此垂直偏振的两光束不能干涉 (由此可以推断, 光没有纵向分量). 此外, 如果一光束中原来为互相垂直偏振的两个分量, 即使被重偏振而使偏振方向重合, 也不能干涉.

3. 如果匀偏振光重偏振多次, 那么仅当最后光再成为匀偏振时才能干涉.

(实验上确定的) 光波的纯横向性和 (实验上确定的) 它们的传播速度使人们猜测, 假说中的振动光矢量应和磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 或电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 等同. 正如在电动力学[②]中所证明的, 这些场也满足波动方程. 对于无电荷区域, 并且是随时间[③]变化的过程, 麦克斯韦方程组 (对于 $\mu = 1$) 成立:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} &= \operatorname{curl}\boldsymbol{H}, \quad & \operatorname{div}\boldsymbol{E} &= 0 \\ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} &= -\operatorname{curl}\boldsymbol{E}, & \operatorname{div}\boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{8.1}$$

从熟悉的矢量恒等式

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{A},$$

① 这两句从德文原版译出较好, 故从德文原版译出.——中译者注

② W. 泡利, 物理学讲义: 电动力学 (M.I.T. 印刷所, 1972).

③ 英译版中删去 "周期的" 一词.——中译者注

得到

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0\\ \nabla^2\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\},\tag{8.2}$$

从而看出相速是

$$v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}.\tag{8.3}$$

把 "光矢量" 和 $\boldsymbol{E}$ 等同而得到的成功结果证明上述假说是对的. 后来发现, 以前标记为 "光矢量" 的矢量对应于 $\boldsymbol{H}$. 在这种选择中, 应该把 "偏振面" 理解为包含 $\boldsymbol{H}$ 和波法线的平面 [A–2]. 然而, 光的大量效应该被认为是 $\boldsymbol{E}$ 的效应, 因为按照电磁力的普遍定律, $\boldsymbol{E}$ 对静止的以及运动的电荷都施以力, 而 $\boldsymbol{H}$ 却仅作用于运动电荷. 所以, 我们将总是运用 $\boldsymbol{E}$. 为了保持和先前的结果一致, 按照式 (8.3), 我们必须令

$$n=\sqrt{\varepsilon}.$$

在电磁波中, $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是互相垂直的, 而且垂直于光线的方向.

我们现在考虑一平面波, 它满足式 (8.2) 并且沿 x 方向传播. 这样, 场的全部分量仅与变量 $(x-vt)$ 有关, 所以

$$\partial/\partial y=\partial/\partial z=0\quad \partial/\partial t=-c\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\partial/\partial x.$$

由此, 立即看出, 用这假说便得到式 (8.1) 和式 (8.2) 的两个单独的解:

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ E_z,H_y\neq 0,\\&\quad \text{其余场强分量皆为零}\\&(2)\ E_y,H_z\neq 0,\\&\quad \text{其余场强分量皆为零}\end{aligned}\right\}.\tag{8.4}$$

在这些情形中, 麦克斯韦方程组 (8.1) 分别给出

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ H_y=-\sqrt{\varepsilon}E_z\\&(2)\ H_z=+\sqrt{\varepsilon}E_y\end{aligned}\right\}.\tag{8.5}$$

这两个解对应于平面波偏振的两种类型; 它们可以线性地叠加, 并且这样得到的形式仍然是麦克斯韦方程组的解.

众所周知, 由麦克斯韦方程组也得到能量守恒定律:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S}+\frac{\partial W}{\partial t}=0,\tag{8.6}$$

其中 $\boldsymbol{S}=(c/4\pi)(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}),W=(1/8\pi)(\varepsilon\boldsymbol{E}^2+\mu\boldsymbol{H}^2)$.

麦克斯韦方程组 (8.1) 也能写成积分形式. 式 (8.1) 中包含旋度的公式和下列的积分形式

$$\left.\begin{aligned}\oint H_s \mathrm{d}s &= \frac{1}{c}\int \varepsilon \dot{E}_n \mathrm{d}f \\ \oint E_s \mathrm{d}s &= -\frac{1}{c}\int \dot{H}_n \mathrm{d}f\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

等效. 当 ε (例如, 在界面处) 变为不连续时, 式 (8.1) 失效, 但用式 (8.7) 却是很方便的. 在这种情况中, 如图 8.1 所示, 在界面 F 处 ε 是有限不连续的, 并且遍及长度 δ (δ 很小) 的两部分积分是与 δ 相同数量级的. 然而, 式 (8.7) 的第一个式右边的项也是 δ 数量级, 因为 $\dot{E}_{//}$ 无疑地保持有限. 这样, 得到

$$\int_1^2 E_s \mathrm{d}s - \int_{1'}^{2'} E_s \mathrm{d}s = O(\delta),$$

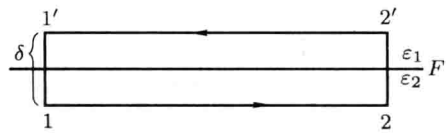


图 8.1

并由极限 $\delta \to 0$, 我们得出结论, 越过 ε 不连续地变化的面, $\boldsymbol{E}$ (和 $\boldsymbol{H}$) 的平行分量保持连续: 越过 ε 不连续地变化的面, $\boldsymbol{E}_{//}$, $\boldsymbol{H}_{//}$ 是连续的. (8.8)

至此, 我们在处理中是将 ε 当作物质常数, 虽然情况并不是这样. 只要假定时间相关性是周期性的 $\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 就可以将这点考虑进去. 这时, $\partial/\partial t \sim -\mathrm{i}\omega$, 并由式 (8.1) 得到

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\varepsilon \mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{E} &= \operatorname{curl}\boldsymbol{H} \\ \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{H} &= \operatorname{curl}\boldsymbol{E}\end{aligned}\right\}. \tag{8.9}$$

其次可以把它变换成与时间无关的波动方程 (类似于第二章的 $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ 方程式):

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} &= 0 \\ \nabla^2\boldsymbol{H} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\boldsymbol{H} &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{8.10}$$

对具体情况, 是方程组 (8.9) 还是方程组 (8.1) 更为合适, 必须在实验事实的基础上判定.

§9. 非吸收介质 (菲涅耳公式)

如果令

$$k^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2},$$

则方程组 (8.10) 具有形式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{9.1}$$

的解 (和类似的 $\boldsymbol{H}$ 的解). 因此, 相速是 $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, 并且, 像先前提示过那样, $n = \sqrt{\varepsilon}$ (各向同性介质).

我们考虑越过平面时 ε 不连续变化的情况. 由于式 (8.10) 有式 (9.1) 形式的解, 我们这样选取普遍光波场的初始条件, 使得它们对应于在 $x-z$ 平面内的入射平面波, 与 z 轴成 α 角. (参看图 9.1) 由式 (8.4), 我们已看到麦克斯韦方程组 (在假定平面波作为解的情况中[①]) 有两组完全不同的解. 这样, 这里也必须分别地处理这两种情形:

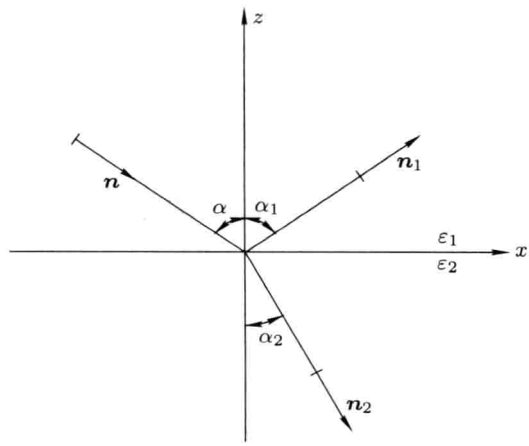


图 9.1

第一种情形: $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面.

第二种情形: $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面.

然而, 首先我们可以确信, 如 §6 中表明那样, 位相在界面处的连续性导致一种介质中的 ω 与另一种介质中的 ω 相同, 此外, $\alpha = \alpha_1$ 和 $\sqrt{\varepsilon_1}\sin\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon_2}\sin\alpha_2$ 或者 $\sin\alpha = n\sin\alpha_2$, 其中 $n = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2}$. 这样, 入射波、反射波和折

① 由于选取的初始条件, 这是会料想到的.

射波的单位矢量 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$, 分别变为

$$\boldsymbol{n}=\{\sin\alpha,0,-\cos\alpha\},\quad \boldsymbol{n}_1=\{\sin\alpha,0,\cos\alpha\},$$
$$\boldsymbol{n}_2=\{\sin\alpha_2,0,-\cos\alpha_2\}.$$

第一种情形, $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面

解的形式: $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 遍乘全部场量. 此外, $\boldsymbol{k}_i=k\boldsymbol{n}_i, \boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{x}=s_i$. 那么, 很清楚

$$\left.\begin{aligned}E_y&=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s}\\ H_x&=\sqrt{\varepsilon_1}A\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s}\\ H_z&=\sqrt{\varepsilon_1}A\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s}\end{aligned}\right\},\quad \text{入射波;}$$

$$\left.\begin{aligned}E_y&=B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1}\\ H_x&=-\sqrt{\varepsilon_1}B\cos\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1}\\ H_z&=\sqrt{\varepsilon_1}B\sin\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1}\end{aligned}\right\},\quad \text{反射波;}$$

$$\left.\begin{aligned}E_y&=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2}\\ H_x&=\sqrt{\varepsilon_2}C\cos\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2}\\ H_z&=\sqrt{\varepsilon_2}C\sin\alpha_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2}\end{aligned}\right\},\quad \text{折射波.}$$

$|\boldsymbol{E}|$ 和 $|\boldsymbol{H}|$ 间的关系, 见式 (8.5). 在式 (8.8) 原理的基础上, 由于在 $z=0$ 处, $k_1 s=k_1 s_1=k_2 s_2$,

- 由 E_y 的连续性得到:

$$A+B=C,$$

- 由 H_x 的连续性得到:

$$(A-B)\cos\alpha=Cn\cos\alpha_2,$$

所以

$$\left.\begin{aligned}\frac{B}{A}&=-\frac{\sin(\alpha-\alpha_2)}{\sin(\alpha+\alpha_2)}\\ \frac{C}{A}&=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha_2}{\sin(\alpha+\alpha_2)}\end{aligned}\right\}.\tag{9.2}$$

第二种情形. E 平行于入射面.

令 $\boldsymbol{H}$ 在 $-y$ 方向, 则 $\boldsymbol{E}$ 现在充当第一种情形中 $\boldsymbol{H}$ 的角色.

解的形式:($|\boldsymbol{E}|$ 和 $|\boldsymbol{H}|$ 的关系, 见式 (8.5).)

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s} \\ E_x &= \varepsilon_1^{-1/2} A\cos\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s} \\ E_z &= \varepsilon_1^{-1/2} A\sin\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s} \end{aligned}\right\}, \quad \text{入射波;}$$

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1} \\ E_x &= -\varepsilon_1^{-1/2} B\cos\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1} \\ E_z &= \varepsilon_1^{-1/2} B\sin\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 s_1} \end{aligned}\right\}, \quad \text{反射波;}$$

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2} \\ E_x &= \varepsilon_2^{-1/2} C\cos\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2} \\ E_z &= \varepsilon_2^{-1/2} C\sin\alpha_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 s_2} \end{aligned}\right\}, \quad \text{折射波.}$$

平行分量的连续性导致

$$\begin{aligned} A + B &= C, \\ (A-B)\cos\alpha &= \frac{C}{n}\cos\alpha_2, \end{aligned}$$

由此

$$\left.\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{\tan(\alpha-\alpha_2)}{\tan(\alpha+\alpha_2)} \\ \frac{C}{A} &= \frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha_2} \end{aligned}\right\}. \tag{9.3}$$

讨论 由电动力学[①]得知, 电磁波的强度 I 正比于坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{I} = |\boldsymbol{S}|.$$

对于平面波 (这里是这种情况) 也知道, $\boldsymbol{E}$ 垂直于 $\boldsymbol{H}$. 因此, 对于我们的情形, 由式 (8.5), 得到

$$I \propto |\boldsymbol{E}||\boldsymbol{H}| = |\boldsymbol{H}|^2/n = n|\boldsymbol{E}|^2. \tag{9.4}$$

这样, 只要不发生全反射, 从而指数因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ks-\omega t)}$ 的量值为 1[②], 对于第一种情形, 由式 (9.2), 反射强度和折射强度与入射强度之比, 分别为

$$I_{反} : I_{入} = |B/A|^2, \quad I_{折} : I_{入} = n|C/A|^2, \tag{9.5}$$

而对于第二种情形, 由式 (9.3)

$$I_{反} : I_{入} = |B/A|^2, \quad I_{折} : I_{入} = |C/A|^2/n \tag{9.6}$$

① W. 泡利, 电动力学.

② 这里量值指模数: $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ks-\omega t)}| = [\mathrm{e}^{\mathrm{i}(ks-\omega t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ks-\omega t)}]^{1/2} = 1$. ——中译者注

当然, 垂直入射时, 两组公式变成一样了:

$$I_{反} : I_{入} = \{(n-1)/(n+1)\}^2, \quad I_{折} : I_{入} = 4n/(n+1)^2. \tag{9.7}$$

掠入射时, $\alpha = \pi/2$, 两种情形中都得到 $I_{反} : I_{入} = 1$. 此外, 对于第二种情形, 由式 (9.3) 看出, 存在一个角度 α_ρ 使得 $I_{反} : I_{入}$ 等于零. 当

$$\alpha_\rho + \alpha_2 = \pi/2 \tag{9.8}$$

时就是这样情况 (因 $\tan \pi/2 = \infty$); 即如果折射线和 (不存在的) 反射线互相垂直, 就是这样情况. 这就是布儒斯特定律. 用式 (9.8) 确定的角 α_ρ 入射到反射面上的非偏振光, 只有一个分量被反射. 因此, 反射光是线偏振的.

由于 $\boldsymbol{E}$ 矢量的垂直和平行于入射面而振动的分量发生不同的变化, 那么斜线偏振光经折射和反射后仍然是线偏振的, 虽然一般说来它的偏振面已旋转了.

关于全反射的情形, 得到稍微不同的关系. 由于公式 (9.2) 和式 (9.3) 是麦克斯韦方程组的纯粹形式的解, 那么它们当然也仍适用于这种情形. 相反地, 强度公式 (9.5) 和式 (9.6) 不再适用了, 因为指数因子的量值不再必须为 1 了.

为了发生全反射, 按照第一章, 我们必须假定 $n < 1$ 并且 α 足够大, 以致

$$\sin \alpha = n \sin \alpha_2$$

不再有 α_2 的实数解, 这样,

$$\alpha > \alpha_l, \quad \text{其中} \quad \sin \alpha_l = n. \tag{9.9}$$

这样定义的角 α_l 叫做全反射的极限角.

容易证明, 若要 $\sin \alpha_2$ 是实数并且大于 $1, \alpha_2$ 就必须是

$$\alpha_2 = \pi/2 - \mathrm{i}\beta \tag{9.10}$$

的形式, 其中 β 是实数 (只是由于习惯, β 前的符号写成负的). 用这个代换式 (9.10), 如果完整地写出场强分量的表达式 (包括指数因子), 我们得到

$$\left.\begin{matrix} E_y \\ -H_y \end{matrix}\right\} = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_1 s_1)} = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_1 x \sin \alpha - k_1 z \cos \alpha)} \quad \text{反射波}, \tag{9.11}$$

和

$$\left.\begin{matrix} E_y \\ -H_y \end{matrix}\right\} = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - k_2 s_2)} = C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}k_2 x \cos \mathrm{h}\beta} \mathrm{e}^{k_2 z \sin \mathrm{h}\beta} \quad \text{折射波}. \tag{9.12}$$

这表示一种所谓表面波, 因为仅在 x 方向有周期性, 而在 z 方向却是指数衰减的. 根据计算, 可以看出坡印亭矢量是平行于折射平面的. 两种偏振情况都得到 $I_{反}:I_{入}=1$, 所以全部光线都反射了. 相反地, 要注意在反射中, 两种情况的场强分量有不同的复数因子; 就是说, 倾斜于入射面的线偏振光反射后变成椭圆偏振光. 用式 (9.10) 代换时, 复数因子恰好是式 (9.2) 和式 (9.3) 给出的 B/A 值.

用菲涅耳公式, 已得到几何光线理论的修正: 甚至在全反射的情况下, 按照式 (9.12) 也必须假定在第二种介质中有一个波. 实验上可以证明 (像理论要求那样), 即使按照几何理论应该发生全反射时, 光却总是透过 $n<1$ 的有限厚度层的.

§10. 吸收介质 (金属光学)

我们再次从麦克斯韦方程组出发, 但假定所考虑的介质具有导电性. 那么, 对于具有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 周期性的过程, 麦克斯韦方程组变为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{H}&=\left(-\frac{\varepsilon}{c}\mathrm{i}\omega+\frac{4\pi\sigma}{c}\right)\boldsymbol{E}\\ \operatorname{curl}\boldsymbol{E}&=\frac{1}{c}\mathrm{i}\omega\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\}\tag{10.1}$$

(因 $\partial/\partial t\sim-\mathrm{i}\omega$). 我们可以重写这些方程式中的第一个:

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\left(-\frac{\varepsilon}{c}\mathrm{i}\omega+\frac{4\pi\sigma}{c}\right)\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}n'^2\boldsymbol{E},$$

其中, 我们已定义

$$n'^2=\varepsilon'=\varepsilon+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}.\tag{10.2}$$

此外, 我们令

$$n'=n(1+\mathrm{i}\varkappa)\quad(n、\varkappa\text{ 为实数}),\tag{10.3}$$

和式 (10.2) 比较, 于是得到

$$\left.\begin{aligned}n^2(1-\varkappa^2)&=\varepsilon\\ n^2\varkappa&=2\pi\sigma/\omega\end{aligned}\right\}.\tag{10.4}$$

这样, 麦克斯韦方程组 (10.1) 变为

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{H}&=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\varepsilon'\boldsymbol{E}\\ \operatorname{curl}\boldsymbol{E}&=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{H}\end{aligned}\right\}.\tag{10.5}$$

除到处用 ε' 代换 ε 外, 式 (10.5) 与周期过程的式 (8.1) 完全一样. 这样, 只要用 ε' (复数) 代换 ε, n' (复数)[①]代换 n, 那么, 先前形成的全部麦克斯韦方程组的解在这里也适用.

例如, 在式 (9.1) 中, 我们找到麦克斯韦方程组的解, 过渡到现在的情形来, 就变成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}, \text{ 且有 } \boldsymbol{x} = \{x, 0, 0\}. \tag{10.6}$$

其中 (在现在的情形下)

$$k^2 = \frac{\varepsilon'\omega^2}{c^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}n' = \frac{\omega}{c}(1 + \mathrm{i}\varkappa)n.$$

这样, 由式 (10.6) 我们得到 (作为式 (8.4) 的特殊情形)

$$E_z = E_0 \mathrm{e}^{-(\varkappa n\omega/c)x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}((n\omega/c)x-\omega t)}. \tag{10.7}$$

由式 (8.5), 对应的磁场强度是

$$H_y = H_0 \mathrm{e}^{-(\varkappa n\omega/c)x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}((n\omega/c)x-\omega t)},$$

其中

$$H_0 = -n'E_0. \tag{10.8}$$

式 (10.7) 表示其阻尼常数正比于 $\varkappa$ 的一个阻尼平面波. 这里, n (不带撇的) 也可以解释为折射率, 因为 c/n 是相速. 应该注意的是, 按照式 (10.8), $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 不再是同位相的了, 因为 n' 是复数.

如果在上面方程中我们再设 $\sigma = 0$, 那么, 得到 $\varkappa = 0$ 和 $n = n'$ 是实的. 然而对金属的情形, $\sigma \neq 0$. 的确, σ 如此之大, 以致 $n^2\varkappa \gg \varepsilon$; 就是说, $\varkappa \sim 1$ 和 n 是很大的.

我们现在考虑入射到金属表面 (平面) 的线偏振平面波的情形, 其入射角为 α, 折射角为 α_2.[②] (参看图 9.1) 按照上面所提及的, 如果用 ε' 代换 ε, n' 代换 n, 两种偏振情况的菲涅耳公式 (9.2) 和式 (9.3)[③]仍然成立. 由于对金属的假设, 得到 $\cos\alpha_2 \sim 1$.

第一种情形. $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面.

$$\frac{C}{A} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha_2}{\sin(\alpha+\alpha_2)} \simeq \frac{2\cos\alpha}{n'}. \tag{10.9}$$

① "复数" 两字是中译者加的——中译者注
② 德文原版中为 "$\cdots\alpha_2$ 线偏振".——中译者注
③ 英译版中误为式 (9.1) 和式 (9.2).——中译者注

这样, 对于折射波,

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \frac{2A\cos\alpha}{n'}\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t] + nk_1\varkappa z\} \\ H_x &= \sqrt{\varepsilon_1}2A\cos\alpha\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t] + n\varkappa k_1 z\} \\ H_z &= \sqrt{\varepsilon_1}\frac{2A}{n'}\cos\alpha\sin\alpha\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t] + n\varkappa k_1 z\} \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

对于完美金属[①] $n' \to \infty$, 仅 H_x 保持有限 (甚至对于 $z = 0$).

第二种情形. $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面

$$\frac{C}{A} = \frac{2\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \sin 2\alpha_2} \simeq 2. \tag{10.11}$$

这样, 对于折射波

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -2A\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t] + n\varkappa k_1 z\} \\ E_x &= \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\frac{2A}{n'}\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t] + n\varkappa k_1 z\} \\ E_z &= \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}\sin\alpha\frac{2A}{n'^2}\exp\{\mathrm{i}[k_1(x\sin\alpha - nz) - \omega t + n\varkappa k_1 z\} \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

因此, 在完美金属 ($n' \to \infty$) 的极限情况下, 电场强度趋近于零 (对于 $z = 0$ 也一样). 然而, 很清楚, 必然是这样的, 因为电流正比于 $\boldsymbol{E}$, 并且我们已假定电导率 σ 是无限大的.

垂直入射, 由式 (9.7), 得到

$$\frac{I_{\text{反}}}{I_{\text{入}}} = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{n'-1}{n'+1}\right|^2 = \frac{(n-1)^2 + n^2\varkappa^2}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2}.$$

由此得到金属的重要公式

$$1 - \frac{I_{\text{反}}}{I_{\text{入}}} = \frac{4n}{(n+1)^2 + n^2\varkappa^2} \simeq \frac{4n}{2n^2} = \frac{2}{n} \sim 2\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}.$$

按照式 (10.4), 对于 $\varkappa \to 1$ 得到

$$1 - \frac{I_{\text{反}}}{I_{\text{入}}} = 2\sqrt{\frac{c}{\lambda\sigma}}. \tag{10.13}$$

反射光的椭圆性. 我们假设场振幅为 $A_\perp$ 和 $A_{/\!/}$ 的线偏振光入射到金属表面上. 那么, 由式 (9.2) 和式 (9.3) 得到

$$\left(\frac{B}{A}\right)_\perp = -\frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin(\alpha + \alpha_2)}, \quad \left(\frac{B}{A}\right)_{/\!/} = \frac{\tan(\alpha - \alpha_2)}{\tan(\alpha + \alpha_2)}.$$

① "完美金属" 这几个字是中译者加的.——中译者注

这样,

$$\frac{B_\perp}{B_{//}} = -\frac{A_\perp}{A_{//}}\frac{\cos(\alpha-\alpha_2)}{\cos(\alpha+\alpha_2)}. \tag{10.14}$$

因为式 (10.14) 中余弦的商一般不是实数, 所以反射光是椭圆偏振的. 我们考察 $A_\perp/A_{//}=1$ 的特殊情况; 就是说, 入射面和偏振面成 45° 角. 此外, 令

$$\frac{B_\perp}{B_{//}} = \rho e^{i\Delta} \tag{10.15}$$

我们计算

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}} = -\frac{\sin\alpha\sin\alpha_2}{\cos\alpha\cos\alpha_2}.$$

然而,

$$\begin{aligned}\sin\alpha_2 &= \frac{1}{n'}\sin\alpha,\\ \cos\alpha_2 &= \frac{\sqrt{n'^2-\sin^2\alpha}}{n'},\end{aligned} \tag{10.16}$$

代入前式得到

$$\frac{1+\rho e^{i\Delta}}{1-\rho e^{i\Delta}} = -\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}(n'^2-\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10.17}$$

由此我们看到, 对于

$$\begin{aligned}&\alpha=0: \quad \rho e^{i\Delta}=-1, \quad \Delta=\pi, \quad \rho=1,\\ &\alpha=\pi/2: \quad \rho e^{i\Delta}=+1, \quad \Delta=0, \quad \rho=1;\end{aligned}$$

没有椭圆性.

$\Delta=\dfrac{\pi}{2}$, 因而 $e^{i\Delta}=i$ 时的入射角 $\alpha_\pm$ 叫做主入射角. 对于这种情况, 如果和 n'^2 相比, 我们略去 $\sin^2\alpha_\pm$, 由式 (10.17) 得到

$$\frac{1+i\rho_\pm}{1-i\rho_\pm} = -\frac{\sin^2\alpha_\pm}{\cos\alpha_\pm}\frac{1}{n'}. \tag{10.18}$$

$\rho_\pm$ 和 $\alpha_\pm$ 是用实验测出, 所以由式 (10.18) 即得光学常数:

$$\left.\begin{aligned} n' = n(1+i\varkappa) &= -\frac{\sin^2\alpha_\pm}{\cos\alpha_\pm}\left(\frac{1-i\rho_\pm}{1+i\rho_\pm}\right),\\ n &= -\frac{\sin^2\alpha_\pm}{\cos\alpha_\pm}\left(\frac{1-\rho_\pm^2}{1+\rho_\pm^2}\right)\\ \varkappa &= -\frac{2\rho_\pm}{1-\rho_\pm^2} = \tan 2\psi, \quad \rho_\pm = -\tan\psi \end{aligned}\right\}. \tag{10.19}$$

后来发现,"常数" 是和频率有关的. 如果 ω 变得足够小, 它们全都趋近静态值.

§11. 驻波

我们考虑入射到完美镜 ($z=0$ 处, $E_{/\!/}$ 等于零) 上的平面波. 对两种偏振情形, 我们得到下列结果:

a. $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面: $\boldsymbol{B/A=-1}$

叠加入射波和反射波, 得到

$$\left.\begin{aligned} E_y &= A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k(x\sin\alpha-z\cos\alpha)}-A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}k(x\sin\alpha+z\cos\alpha)} \\ &= -2\mathrm{i}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\sin(kz\cos\alpha) \\ H_x &= \sqrt{\varepsilon_1}2A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\cos\alpha\cos(kz\cos\alpha) \\ H_z &= -\sqrt{\varepsilon_1}2\mathrm{i}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\sin\alpha\sin(kz\cos\alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{11.1}$$

b. $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面: $\boldsymbol{B/A=1}$

$$\left.\begin{aligned} H_y &= -2A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\cos(kz\cos\alpha) \\ E_x &= -\varepsilon_1^{-1/2}2\mathrm{i}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\cos\alpha\sin(kz\cos\alpha) \\ E_z &= \varepsilon_1^{-1/2}2A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}kx\sin\alpha}\sin\alpha\cos(kz\cos\alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{11.2}$$

垂直入射. 两种情形都是一样的:

$$\left.\begin{aligned} E_y &= -2|A|\sin(\omega t+\delta)\sin kz \\ H_x &= \sqrt{\varepsilon_1}2|A|\cos(\omega t+\delta)\cos kz \end{aligned}\right\}. \tag{11.3}$$

这样,

1. 在 $kz=\pi N, z=N\lambda/2$ 处, $\boldsymbol{E}$ 有波节.(第一个波节是在镜面上.)
2. 在 $kz=\pi\left(N+\dfrac{1}{2}\right), z=\dfrac{1}{2}\left(N+\dfrac{1}{2}\right)\lambda$ 处, $\boldsymbol{H}$ 有波节.

如果把这样的状态拍照下来, 会发现第一个波节是在镜面上. 这样, 在光度学上人们测量的是 $|\boldsymbol{E}|^2$. 这是可以在电子论的基础上理解的.

任意入射. 在情形 a 中, 由式 (11.1) 得到波节出现在 $kz\cos\alpha=\pi N$ 或 $z=(1/2)N\lambda\cos\alpha$ 处. 在情形 b 中, 由式 (11.2) 得到, 对 $\alpha\neq 0$ 和 $\alpha\neq\pi/2$, $|\boldsymbol{E}|^2=|E_x|^2+|E_y|^2\neq 0$, 因此不存在波节. 由此能确定先前叫做 "偏振面" 的平面是平行于磁矢量 $\boldsymbol{H}$, 因此是垂直于矢量 $\boldsymbol{E}$ 的.

第四章

晶 体 光 学

§12. 波法线的关系

在讨论麦克斯韦理论时, 我们曾假设介质是各向同性的. 然而, 现在我们要假设 $\boldsymbol{E}$ 不再平行于 $\boldsymbol{D}$. 因此, 我们必须把麦克斯韦方程组写成最普遍的形式, 然而其中再次假设磁导率 $\mu = 1$. 当然, 后来发现, 在适用于光的高频率情形, $\mu(\omega)$ 接近于 1. 因此,[①]

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl}\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 0 \\ \operatorname{curl}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{12.1}$$

由式 (12.1), 得到

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{D}}, \tag{12.2}$$

其中 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}$ 不再等于零. 对于 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系, 我们必须假设

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\cdot\boldsymbol{E} \quad \text{或} \quad D_i = \sum_k \varepsilon_{ik}E_k, \tag{12.3}$$

其中 ϵ 是电介质张量. 坡印亭矢量变为

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}).$$

并且由能量守恒定律, 得到 (参较式 (8.6))

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{S} = -\frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{H}),$$

① 德文原版中多了一句 "对于周期过程".——中译者注

其中 W 是场能密度. 由此, 用式 (12.1),

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}^2+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{12.4}$$

当然, 这必须是全微分, 所以我们必须假设

$$\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{D}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{12.5}$$

因为此时

$$\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}=\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}).$$

把式 (12.3) 代入式 (12.5), 得到

$$\sum_{ik}\varepsilon_{ik}E_i\dot{E}_k=\sum_{lm}\varepsilon_{lm}E_m\dot{E}_l,$$

或

$$\sum_{ik}(\varepsilon_{ik}-\varepsilon_{ki})E_i\dot{E}_k=0,$$

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}. \tag{12.6}$$

因此, 能量守恒定律要求张量 ε 是对称的. 然而, 总是能够把这样的张量变换到主轴上的. 本征值的特征方程是

$$\begin{vmatrix}\varepsilon_{11}-\lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\lambda & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\lambda\end{vmatrix}=0. \tag{12.7}$$

此外, 我们知道, 对应于特征方程两个不同根的主轴方向是互相垂直的. 如果两个根是相等的, 那么主轴的对应方向在平面中是不确定的. 所以, 可以把它们选取为正交的. 对于 (实的) 对称张量, 一切本征值都是实的.

下文中, 我们假定在晶体每点都已变换到主轴了, 所以张量 ε 是对角的而且可以写成如下形式:

$$(\varepsilon_{ik})=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}. \tag{12.8}$$

因此, ε_i 叫做主介电常数. 我们现在考虑麦克斯韦方程组的那些能用平面波表

示的解. 这样, 一切场强都以平面波方式传播:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\cdot x-\omega t)},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\\
&\boldsymbol{k}=\boldsymbol{n}\frac{\omega}{v}=\boldsymbol{p}\frac{\omega}{c},\\
&\boldsymbol{n}\text{ 为在传播方向上的单位矢量}\\
&v\text{ 为相速}\\
&\boldsymbol{p}^2=\frac{c^2}{v^2}=n^2,n\text{ 为折射率}
\end{aligned}\right\}. \tag{12.9}$$

矢量 $\boldsymbol{n}$ 也叫做波法线 (因为它垂直于恒相面). 我们有

$$\boldsymbol{p}=n\boldsymbol{n}.$$

现在把式 (12.9) 的形式代入麦克斯韦方程组 (12.1). 得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\sim-\mathrm{i}\omega,\quad \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\sim\mathrm{i}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{p}, \tag{12.10}$$

$$\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}, \tag{12.11}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{D}=\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})\\
&\frac{1}{n^2}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})
\end{aligned}\right\}. \tag{12.12}$$

由式 (12.11) 我们得出结论, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 垂直于 $\boldsymbol{p}$; 并且 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 在一个平面内.

式 (12.12) 与式 (12.3) 一起给出

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_i}\right)D_i+n_i\left(\sum_k\frac{D_k}{\varepsilon_k}n_k\right)=0. \tag{12.13}$$

如果令

$$\lambda=\sum_k\frac{n_k}{\varepsilon_k}D_k, \tag{12.14}$$

那么式 (12.13) 变为

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_i}\right)D_i+\lambda n_i=0. \tag{12.15}$$

如果我们规定 λ 满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0$ 和式 (12.10) 得到的条件

$$\sum_k D_kn_k=0, \tag{12.15a}$$

那么, 式 (12.15) 和式 (12.13) 等价 (用 n_i 乘式 (12.15) 然后求和, 便能直接得到这个条件). 这样, 我们能用方程组 (12.15) 和式 (12.15a) 代替式 (12.13).

解方程 (12.15), 得 D_i,

$$D_i = -\frac{\lambda n_i}{1/n^2 - 1/\varepsilon_i} = -\frac{\lambda n p_i}{1 - p^2/\varepsilon_i}, \tag{12.16}$$

再取与 $\boldsymbol{p}$ 的标积, 得到

$$2G = \sum_i \frac{n_i^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_i} = \sum_i \frac{p_i^2}{1 - p^2/\varepsilon_i} = 0. \tag{12.17}$$

换一种写法,

$$\begin{aligned} 2G &= \sum_i \frac{p_i^2 - p^2 p_i^2/\varepsilon_i + p^2 p_i^2/\varepsilon_i}{1 - p^2/\varepsilon_i} = \sum_i \left(p_i^2 + p^2 \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{1 - p^2/\varepsilon_i} \right) \\ &= p^2 + p^2 \sum_i \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{1 - p^2/\varepsilon_i} = 0. \end{aligned}$$

即

$$\sum_i \frac{p_i^2/\varepsilon_i}{p^2/\varepsilon_i - 1} = \sum_i \frac{p_i^2}{p^2 - \varepsilon_i} = 1. \tag{12.18}$$

如果去掉式 (12.17) 的分母, 那么

$$\begin{aligned} n_1^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) + n_2^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) + \\ n_3^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = 0. \end{aligned} \tag{12.19}$$

得出一个关于 $1/n^2$ 的二次方程. 这样, 一般说来, 我们得到折射率的两个不同的根, 每一个波法线对应着两个不同的相速.

特殊情形: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$

由前面的讨论 (参看对式 (12.7) 的讨论), 这种情形暗示光学旋转对称, 式 (12.19) 分为两个因子:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) \left\{ n_1^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + (n_2^2 + n_3^2) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \right\} = 0. \tag{12.20}$$

第一种情形, 第一个因子为零: $1/n^2 = 1/\varepsilon_2$.

对应的折射率是与波方向 $\boldsymbol{n}$ 无关的. 这叫做寻常光线. 如果我们把通过轴 2 和轴 3 的平面标称为主截面, 那么我们可以说对应于寻常光线的 $\boldsymbol{D}$ 必定在主截面内, 并且垂直于 $\boldsymbol{n}$. 这是正确的, 因为在式 (12.15) 中, λ 必须为零 (我们设 $i = 2$); 但对于 $i = 1, (1/n^2 - 1/\varepsilon_1) \neq 0$, 所以 $D_1 = 0$. 这样, 对于寻常光线,

$\boldsymbol{E}$ 是平行于 $\boldsymbol{D}$ 的 (因为后者是在主截面内). 由式 (12.11), 寻常光线的磁矢量于是变为

$$\boldsymbol{H} = n(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{D}. \tag{12.21}$$

如果 $\boldsymbol{n}$ 垂直于主截面 (就是, 平行于轴 1), 那么, 在主平面内 $\boldsymbol{D}$ 的方向 (因而寻常光线的方向) 完全没有被表明.

第二种情形. 式 (12.20) 中第二个因子为零:

$$n_1^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + (n_2^2 + n_3^2) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) = 0.$$

由此 (因为 $\boldsymbol{n}^2 = 1$), 得到

$$\frac{1}{n^2} = \frac{n_1^2}{\varepsilon_2} + \frac{n_2^2 + n_3^2}{\varepsilon_1}. \tag{12.22}$$

如果我们用 φ 代表 $\boldsymbol{n}$ 与轴 1 的交角, 那么由式 (12.22) 得到

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\varepsilon_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\varepsilon_1} = \frac{1}{n^2}. \tag{12.23}$$

这里, 折射率与法线方向有关. 这是非常光线.

我们考虑在 1–2 平面内 (适当地选取轴 2 和轴 3) 的非常光线, 故 $n_3 = 0$. 那么, 由式 (12.15) 得到

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) D_3 = 0 \quad \text{所以} \quad D_3 = 0.$$

这样, $\boldsymbol{D}$ 矢量在 1–2 平面内, 并且垂直于 $\boldsymbol{n}$. 如果我们考察类似的寻常光线, 那么我们知道它的 $\boldsymbol{D}$ 矢量是在主截面内并且垂直于 $\boldsymbol{n}$, 这样, 我们得出结论: 寻常光线和非寻常光线是互相垂直地偏振的. 利用式 (12.21), 这也可以表达为寻常光线的 $\boldsymbol{H}$ 和非常光线的 $\boldsymbol{D}$ 是同向的.

如果在式 (12.23) 中, 我们设 $\varphi = 0$, 那么就不再能区别寻常光线和非常光线了. 这样, 在我们的特殊情形中, 有一个 (而且只有一个) 方向是对应于式 (12.19) 中 $1/n^2$ 的重根. 所以, 这类晶体叫做光单轴的, 并且有重根的方向是光轴.

普遍情形的几何解释.

令

$$\boldsymbol{x} = \text{常数} \times \boldsymbol{D}. \tag{12.24}$$

由式 (12.16), 因此

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{12.25}$$

如果我们取椭球

$$\sum_i \frac{x_i^2}{\varepsilon_i} = 1, \tag{12.26}$$

并且使它和波平面 (式 (12.25)) 相截, 那么交截成的椭圆主轴正比于折射率 n_1 和 n_2 的平方, 这些折射率是属于波法线为 $\boldsymbol{n}$ 的平面波的那些偏振的, 其 $\boldsymbol{D}$ 矢量沿着考虑中的主轴. 这种陈述是和下面说法一样, 即在辅助条件式 (12.25) 和式 (12.26) 下, 折射率 n_1 和 n_2 的平方正比于二次型

$$\sum_i x_i^2 = \text{极值} \tag{12.27}$$

的极值. 用适当地定义的常数, 拉格朗日乘子法给出

$$\frac{x_i}{\varepsilon_i} - \mu x_i + \gamma n_i = 0. \tag{12.28}$$

如果我们取它和 x_i 的标积, 那么, 用式 (12.25) 和式 (12.26) 得到式 (12.27) 的极值,

$$\left(\sum_i x_i^2\right)_{\text{极值}} = \frac{1}{\mu}. \tag{12.29}$$

另一方面, $\boldsymbol{D}$ 满足式 (12.15) 并且由式 (12.24) 给出. 把后者作为几何事实代入前者, 给出椭球

$$\frac{x_i}{n^2} - \frac{x_i}{\varepsilon_i} + \lambda n_i = 0, \tag{12.30}$$

仅当 $\mu = 1/n^2$, 它才能和式 (12.28) 共存, 所以

$$\left(\sum_i x_i^2\right)_{\text{极值}} = \text{常数} \times n^2. \qquad \text{[证毕]}$$

§13. 光线变量

a. 光线指数

我们也能够引进光线变量代替先前用的波变量. 为定义它们, 我们如下进行. 式 (12.11) 是 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 间的关系. 对于坡印亭矢量, 我们有

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}, \quad W = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + |\boldsymbol{H}|^2). \tag{13.1}$$

我们现在定义光线速度 $\boldsymbol{U}$ 为

$$\boldsymbol{U} = \frac{\boldsymbol{S}}{W} = \frac{c}{s}\boldsymbol{t}. \tag{13.2}$$

式 (13.2) 的第二部分同时定义光线指数 s 和光线矢量 $\boldsymbol{t}$ (我们已假定 $|\boldsymbol{t}|^2=1$). 对于各向同性介质, 光线指数 s 等于折射率 n, 并且光线矢量 $\boldsymbol{t}$ 等于波法线矢量 $\boldsymbol{n}$. 然而, 对于晶体, 情况不再是这样了. 求出光线指数和折射率的关系如下:

$$\frac{c}{s}\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{S}}{W}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\frac{1}{2}\{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+|\boldsymbol{H}|^2\}}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{|\boldsymbol{H}|^2},$$

因为对于平面波, 电能密度等于磁能密度. 的确, 由式 (12.11) 得到

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}=|\boldsymbol{H}|^2.$$

这样, 由式 (12.11) 和式 (13.2) 得到

$$\frac{c}{s}\boldsymbol{t}=\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E})}=-\frac{c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{E})}=\frac{c\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}},$$

因此, $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}=s$, 或者

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=\frac{s}{n}. \tag{13.3}$$

b. 对偶性

如果除上列变量外, 再引进变量

$$\boldsymbol{q}'=\frac{1}{s}\boldsymbol{t}, \tag{13.4}$$

那么我们可以确信, 如果用下列第二行代换第一行, 本章所有方程式都仍然正确:

$$\begin{array}{cccccc}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{p} & n & \varepsilon_k & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{q}' & 1/s & 1/\varepsilon_k & \boldsymbol{t} & \boldsymbol{H}.\end{array} \tag{13.5}$$

每一纵列中的两个对应变量叫做互为对偶.

倘若原方程式是正确的, 那么从每个方程式代换式 (13.5) 后得出一个正确的方程式来. 这样, 我们必须证明式 (12.11) 允许这种变换:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{S}&=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}\times(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}|\boldsymbol{H}|^2-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})\\&=cW\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

类似地, $\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{S}=-cW\boldsymbol{H}$. 然而, 用 $\boldsymbol{S}=cW\boldsymbol{q}'$,

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{q}'\times\boldsymbol{D}, \tag{13.6}$$

它们完全对应于式 (12.11). 然而, 其他一切关系也由此得出: 通过代换 $n\to 1/s, \boldsymbol{n}\to\boldsymbol{t}$, 我们由 $\boldsymbol{p}$ 得到 $\boldsymbol{q}'$; 并且通过代换 $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{D}$ 和 $\varepsilon_k\to 1/\varepsilon_k$, (对主轴的) 方程式 $D_k=\varepsilon_k E_k$ 仍然正确. [证毕]

我们知道, 坡印亭矢量的方向, 因而 (以及) $\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 的方向是能量输运的方向. 这样, $\boldsymbol{q}'$ 是波包传播的方向, 而且 $\boldsymbol{n}$ 是位相传播的方向. 这样, 借助于式 (13.5), 可以把 §12 中的一切解释直接地移到光线变量来.

c. 波法线和光线方向的关系

我们有式 (12.11) 和它们的对偶:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{q}'. \tag{13.7}$$

由此, 我们得到

$$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{q}'=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{q}'=(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{H}, \tag{13.8}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{p}=-(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}')\cdot\boldsymbol{H}, \tag{13.9}$$

所以

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{D}. \tag{13.10}$$

另一方面, 我们有式 (12.12),

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{p}^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}) \tag{13.11}$$

和它的对偶

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{q}'^2\boldsymbol{D}-\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{D}). \tag{13.12}$$

用分量形式 (对于主轴),

$$p_i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})=p^2E_i-\varepsilon_iE_i, \tag{13.11$'$}$$

$$-q'_i(\boldsymbol{q}'\cdot\boldsymbol{D})=E_i-q'^2\varepsilon_iE_i. \tag{13.12$'$}$$

用式 (13.11′) 除以式 (13.12′), 并用式 (13.10) 得出

$$\frac{q'_i}{1-\varepsilon_iq'^2}=\frac{p_i}{p^2-\varepsilon_i}. \tag{13.13}$$

此外, 我们有式 (12.17)

$$\sum_i\frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i}=0,$$

它的对偶是

$$\sum_i\frac{q_i'^2}{1-\varepsilon_iq'^2}=0, \tag{13.14}$$

而式 (13.3) 能够变换成

$$\sum_i p_iq'_i=1. \tag{13.15}$$

由式 (13.13) 得到 [我们要计算 $q_i' = q_i'(p)$]

$$\begin{aligned} q_i' &= \left(q'^2 - \frac{1}{\varepsilon_i}\right) \frac{p_i}{1 - p^2/\varepsilon_i} \\ &= \frac{1}{p^2}\left[(p^2 q'^2 - 1) + \left(1 - \frac{p^2}{\varepsilon_i}\right)\right] \frac{p_i}{1 - p^2/\varepsilon_i}, \end{aligned}$$

所以

$$p^2 q_i' = p_i + (p^2 q'^2 - 1)\frac{p_i}{1 - p^2/\varepsilon_i}, \tag{13.16}$$

或

$$p^2 q_i' - p_i = (p^2 q'^2 - 1)\frac{p_i}{1 - p^2/\varepsilon_i}.$$

取矢量平方 (就是说, 把第 i 个分量平方然后加起来) 并且用式 (13.15), 得到

$$(p^2)^2 q'^2 - 2p^2 + p^2 = (p^2 q'^2 - 1)^2 \sum_i \frac{p_i^2}{(1 - p^2/\varepsilon_i)^2}.$$

这样,

$$p^2 = (p^2 q'^2 - 1) \sum_i \frac{p_i^2}{(1 - p^2/\varepsilon_i)^2}. \tag{13.17}$$

令

$$K \equiv \sum_i \frac{p_i^2}{(1 - p^2/\varepsilon_i)^2} = K(p), \tag{13.18}$$

那么由式 (13.17) 得到

$$p^2 q'^2 - 1 = p^2/K,$$

代入式 (13.16), 则

$$p^2 q_i' = p_i + \frac{p^2}{K}\frac{p_i}{(1 - p^2/\varepsilon_i)},$$

所以

$$q_i' = p_i \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{K}\frac{1}{(1 - p^2/\varepsilon_i)}\right]. \tag{13.19}$$

我们当然无须计算便可以写出相应的对偶方程 (用代换式 (13.5)):

$$p_i = q_i' \left[\frac{1}{q'^2} + \frac{1}{K'}\frac{1}{(1 - q'^2\varepsilon_i)}\right], \tag{13.20}$$

其中

$$K' \equiv \sum_i \left(\frac{q_i'}{1 - q'^2\varepsilon_i}\right)^2.$$

同时, 我们看出

$$K'/q'^2 = K/p^2. \tag{13.21}$$

这样, 解出了式 (13.13) 的 q'_i 和 p_i.

所有这些还能通过明显引入式 (12.17) 的函数 G 用另一种方法表示:

$$G = \frac{1}{2}\sum_i \frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i} = 0. \tag{13.22}$$

然后微分, 得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i} + p_i \sum_k \frac{(1/\varepsilon_k)p_k^2}{(1-p^2/\varepsilon_k)^2}.$$

其中第二项是 (参看式 (13.18))

$$\begin{aligned}\sum_k \frac{p_k^2/\varepsilon_k}{(1-p^2/\varepsilon_k)^2} &= \sum_k \frac{\{(1/\varepsilon_k - 1/p^2) + 1/p^2\}p_k^2}{(1-p^2/\varepsilon_k)^2} \\ &= \frac{1}{p^2}(-2G + K) = K/p^2.\end{aligned}$$

因此, 得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{p_i}{1-p^2/\varepsilon_i} + \frac{1}{p^2}Kp_i, \tag{13.23}$$

与式 (13.19) 比较, 得到

$$\frac{\partial G}{\partial p_i} = Kq'_i, \tag{13.24}$$

$$K = \sum_i p_i \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{13.25}$$

(按照式 (13.13)). 按照式 (13.5), 对应的对偶方程组是

$$F(q') = \frac{1}{2}\sum_i \frac{q_i'^2}{1-\varepsilon_i q'^2} = 0, \tag{13.26}$$

$$\frac{\partial F}{\partial q'_i} = K'p_i, \tag{13.27}$$

$$K' = \sum_i q'_i \frac{\partial F}{\partial q'_i}. \tag{13.28}$$

d. 几何诠释.

1. 在 §12 中, 我们已看到, 对应于一给定波法线的折射率可以由一个平面和一个椭球相截得到. 按照式 (13.5), 这样也能够得到光线指数: 如果椭球和平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{t} = 0$ 相截, 那么由截成的椭圆的主轴, 正比于对应着光线方向 $\boldsymbol{t}$ 的两个光线指数的倒数 $1/s_1$ 和 $1/s_2$.

2. 式 (13.22)~ 式 (13.25) 以及它们的对偶、式 (13.26)~ 式 (13.28), 也可有几何注释. 这里, 对应于波法线 $\boldsymbol{p}$ 的光线方向, 可以从原点作一垂线, 到通过波法线 $\boldsymbol{p}$ 和叫做波面 $G(p)=0$ 的交点的切平面上而得到. 确实是这样, 因为式 (13.24) 说, 矢量 $\boldsymbol{q}'$ 垂直于这个切平面. 垂线长度 R 是 (参看式 (13.15))

$$R=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{t}=s(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}')=s. \tag{13.29}$$

这样, 长度恰好等于光线指数. 所以, 波面 $G=0$ 的垂足面 (即, 由垂线与波面切平面的交点的轨迹组成的曲面) 是沿一切可能的光线方向, 从原点量出对应于光线指数的距离 s 而得到的曲面 (图 13.1). 反过来, 曲面 $G=0$ 当作下列平面的包络, 这些平面作成垂直于长度为 s (等于对应的光线指数) 的向径并通过其端点的平面. 对偶结构当然也适用: 对应于给定光线方向的波法线, 可以从原点作一垂线, 到通过光线矢量 $\boldsymbol{q}'$ 和叫做光线面 $F(q')=0$ 的交点的切平面上而得到. 这垂线的长度 Q 是 $1/n$, 就是说, 恰好等于折射率的倒数. 因而, 光线面 $F=0$ 的垂足面 (即, 垂线和光线面的切平面的交点轨迹) 是这样的曲面, 它是由沿一切可能的波法线方向从原点量出一段距离 $1/n$ (对应的折射率的倒数) 而得到. 反过来, 作为平面的包络得到曲面 $F=0$, 这些平面是垂直于长度为 $1/n$ ($n=$ 对应的折射率) 的向径的平面.

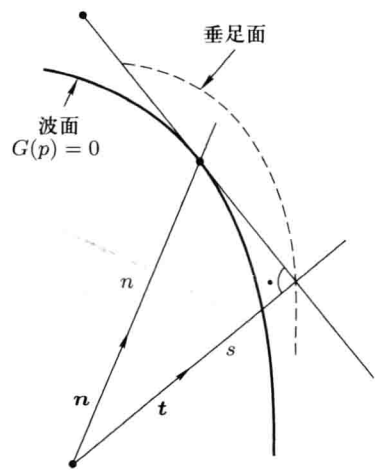


图 13.1

3. 矢量 $\boldsymbol{q}'$ 和波运动学定义的群速之间存在一个关系:

$$\boldsymbol{U}=c\boldsymbol{q}'. \tag{13.30}$$

[证明]: 作为证明, 必须证明 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{q}'$ 满足同样的方程式. 由先前的讨论,

我们有

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{c}n\boldsymbol{n}=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{p}=k_0\boldsymbol{p},\quad \text{其中 } k_0\equiv\frac{\omega}{c},$$

所以 $p_i=\dfrac{k_i}{k_0}$. 群速 $\boldsymbol{U}$ 定义为

$$\boldsymbol{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}},\quad \omega=\omega(k_1,k_2,k_3).$$

由上面两式得到

$$\boldsymbol{U}=c\frac{\partial k_0}{\partial\boldsymbol{k}}.$$

为了证明, 我们引进变量 k_0,k_1,k_2 和 k_3 (齐次坐标) 代替函数 G 中的 p_i,

$$G=\frac{1}{2}\sum_i\frac{p_i^2}{1-p^2/\varepsilon_i}=\frac{1}{2}\sum_i\frac{k_i^2}{k_0^2-\boldsymbol{k}^2/\varepsilon_i}(=0). \tag{13.31}$$

因为式 (13.31) 定义了一个 k_0,k_1,k_2,k_3 的零齐次函数, 那么欧拉关系成立:

$$k_0\frac{\partial G}{\partial k_0}+\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{k}}=0. \tag{13.32}$$

现在, k_0 必须是这样的 k_i 的函数, 使得对于 k_i 的变化 (过渡到相邻的波法线), 形式 G 必须仍旧为零. 这就导致条件

$$\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}+\left(\frac{\partial G}{\partial k_i}\right)_{k_0}=0,\quad \text{或}\quad \frac{1}{k_0}\frac{\partial G}{\partial p_i}=-\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}.$$

由此, 用欧拉关系式 (13.32), 进一步得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial p_i}&=-k_0\frac{\partial G}{\partial k_0}\frac{\partial k_0}{\partial k_i}=\left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}=\left(\frac{\boldsymbol{k}}{k_0}\cdot\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{p}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}\\&=\left(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial G}{\partial\boldsymbol{p}}\right)\frac{\partial k_0}{\partial k_i}.\end{aligned}$$

与式 (13.24) 比较, 得到

$$q_i'=\frac{\partial k_0}{\partial k_i},$$

或

$$q_i'=\frac{1}{c}\frac{\partial\omega}{\partial k_i}=\frac{1}{c}U_i. \tag{证毕}$$

结束这几分节时, 我们可以指出, 这里 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}'$ 和 G 起着几何光学里 (参看 §3b) 用同样符号标记的量的类似作用.

§14. 奇异性

存在着奇异方向, 在这些方向中没有唯一的光线方向和已给定的一个波法线相对应 (当然, 对于对偶量也如此). 这是确定折射率的式 (12.17) 或式 (13.31) 有重根时的情况. 在这种情况下 (在主轴系统中), 有

$$2G = \sum_i \frac{n_i^2}{1/n^2 - 1/\varepsilon_i} = 0.$$

用缩写, 令

$$N = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right),$$

则

$$2NG = n_1^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) + n_2^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) + n_3^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = 0.$$

如果 $NG = 0$ 有重根, 那么也必须 $(NG)' = 0$, 其中撇表示对 $(1/n^2)$ 微分, 这给出

$$\left.\begin{aligned} NG &= 0 \\ (NG)' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(重根的定义)}.$$

所以,

$$NG' = 0.^{①}$$

容易证明, G' 不能为零. 所以, 在 $1/n^2$ 上有重根时,

$$N = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) = 0.$$

例如, $n^2 = \varepsilon_2$ 时就是这种情况. 此外, 所有 ε_i 都应是不同的. 因此得到

$$2NG = n_2^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) = 0,$$

所以

$$n_2 = 0.$$

代入 NG 的普遍公式中, 那么得到

$$2NG = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left\{n_1^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_3}\right) + n_3^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\right\}.$$

① 德文原版中为 $(NG)' = N'G + NG' = 0$. 但 $G = 0$, 所以 $NG' = 0$. ——中译者注

对于重根, 花括号内的量必须也等于零:

$$n_1^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_3}\right)+n_3^2\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=0.$$

只有这两个圆括号项反号时, 这个方程才能满足. 因此,

$$\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3 \quad (\text{或反过来也是一样}), \tag{14.1}$$

并且对于发生重根的方向得到

$$\left.\begin{aligned} b_1&=\pm\sqrt{\frac{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_2}{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_3}}=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}}\\ b_2&=0\\ b_3&=\pm\sqrt{\frac{1/\varepsilon_2-1/\varepsilon_3}{1/\varepsilon_1-1/\varepsilon_3}}=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}} \end{aligned}\right\}. \tag{14.2}$$

这样, 存在两个这样内禀地不同的方向, 它们叫做双法线或[①] (法线) 光轴[②]. 按照普遍图解, 椭球 $\sum\limits_i x_i^2/\varepsilon_i=1$ 被平面 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 截得对应于给定波法线的折射率. 如果 $\boldsymbol{n}$ 是沿双法线方向, 那么交线是圆并且双法线通过它的中心和前面说过的椭球[③]的脐点[④]. 因为圆没有主轴, 所以, $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是不确定的. 仅要求 $\boldsymbol{D}$ 必须垂直于双法线. 现在, 由式 (12.11) 以及它们的对偶, 我们知道 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{D},\boldsymbol{t}$ 和 $\boldsymbol{n}$ (在我们的情况中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}$) 同在一平面内.(参看图 14.1) 然而, $\boldsymbol{D}$ 能够有垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的任意方向, 所以整个图对绕 $\boldsymbol{b}$ 旋转来说是不确定的. 这样, 我们看到 $\boldsymbol{t}$ 是在一个锥面上. 应该注意, 角是和方位角有关的, 所以一般说来, $\boldsymbol{t}$ 不是在一个圆锥面上. 这样, 我们已证明了在本节开始处所断言的假设: 如果折射率是式 (12.7) 的重根, 那么, 没有唯一的光线方向和已给定的一个波法线相对应.

我们现在要推导出这个锥面方程. 在主轴系中 (它在垂直于 $\boldsymbol{b}$ 的平面内是任意的), $\boldsymbol{D}$ 有下列分量:

$$\boldsymbol{D}=\{-\lambda b_3,\mu,\lambda b_1\}, \tag{14.3}$$

因为这时它和 $\boldsymbol{b}$ 的标积等于零, 这样, $\boldsymbol{E}$ 变成

$$\boldsymbol{E}=\left\{-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3,\frac{\mu}{\varepsilon_2},\frac{\lambda}{\varepsilon_3}b_1\right\}. \tag{14.4}$$

① binormals or optic axes 这里译为 (重根) 双法线或 (双) 法线光轴较为确切.——中译本编注

② "光轴" 一词是英译者加的.——中译者注

③ 德文版原文中是椭球, 英译版中误为椭圆.——中译者注

④ 如果我们考察一族平行平面, 每个与二次曲面相截成圆. 那么, 这些平面与曲面相切的点叫做二次曲面的脐点.——英译者注

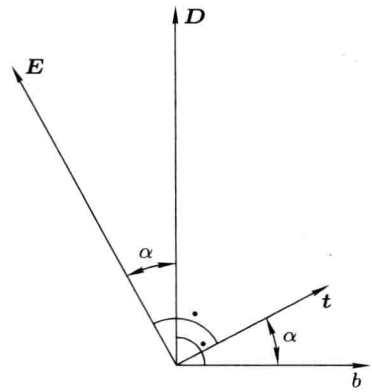


图 14.1

欲求的锥面的母线具有 $\boldsymbol{t}$ 的方向, 因而, 是垂直于 $\boldsymbol{E}$ 并且在包含 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的平面内. 这导致要求

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{x})=0, \quad \text{和} \quad \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}=0,$$

其中我们用 $\boldsymbol{x}=\{\Xi,H,Z\}$ 表示在主轴系中锥面上任一点的坐标. 写成分量形式, 则

$$b_1(E_2Z-E_3H)+b_3(E_1H-E_2\Xi)=0,$$

和

$$E_1\Xi+E_2H+E_3Z=0.$$

把式 (14.4) 代入这些方程式中有

$$b_1\left(\frac{\mu}{\varepsilon_2}Z-\lambda\frac{b_1}{\varepsilon_3}H\right)+b_3\left(-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3H-\frac{\mu}{\varepsilon_2}\Xi\right)=0,$$

和

$$-\frac{\lambda}{\varepsilon_1}b_3\Xi+\frac{\mu}{\varepsilon_2}H+\frac{\lambda}{\varepsilon_3}b_1Z=0.$$

由此, 我们消去 λ/μ, 得

$$(b_1Z-b_3\Xi)\frac{\mu}{\varepsilon_2}=\lambda H\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_2^2}{\varepsilon_1}\right),$$
$$H\frac{\mu}{\varepsilon_2}=\lambda\left(\frac{b_3}{\varepsilon_1}\Xi-\frac{b_1}{\varepsilon_3}Z\right),$$

并且, 相除得

$$(b,Z-b_3\Xi)\left(\frac{b_3}{\varepsilon_1}\Xi-\frac{b_1}{\varepsilon_3}Z\right)=H^2\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right). \tag{14.5}$$

很清楚, 式 (14.5) 是一个椭圆锥方程. 用式 (14.2) 代换 b_i, 得到

$$0=\Xi^2(\varepsilon_3-\varepsilon_2)+H^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+$$
$$Z^2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-\Xi Z\sqrt{\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_3-\varepsilon_2)}{\varepsilon_3\varepsilon_1}}(\varepsilon_3+\varepsilon_1).$$

可以把式 (14.5) 进一步变换如下, 使得锥的几何形状变得更清楚. 由式 (14.5), 得到

$$H^2\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)+Z^2\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\Xi Zb_1b_3\left(-\frac{1}{\varepsilon_3}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)+\Xi^2\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}=0,$$
$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)(\Xi^2+H^2+Z^2)-\left(Z^2\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}+\Xi^2\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}\right)+$$
$$\Xi Zb_1b_3\left(-\frac{1}{\varepsilon_3}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)=0,$$
$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)(\Xi^2+H^2+Z^2)-(Zb_3+\Xi b_1)\left(Z\frac{b_3}{\varepsilon_1}+\Xi\frac{b_1}{\varepsilon_3}\right)=0. \tag{14.6}$$

由式 (14.6) 我们看出, 那里定义的锥与平面

$$\Xi b_1+Zb_3=C \tag{14.7}$$

(即波平面) 的交线和球面

$$\left(\frac{b_1^2}{\varepsilon_3}+\frac{b_3^2}{\varepsilon_1}\right)(\Xi^2+H^2+Z^2)-C\left(Z\frac{b_3}{\varepsilon_1}+\Xi\frac{b_1}{\varepsilon_3}\right)=0$$

与波平面式 (14.7) 的交线是一样的. 这样, 我们得到重要的定理: 垂直于双法线的平面截对应光线锥成圆. 此外, 我们知道光线锥表面应包含矢量 $\boldsymbol{b}$ (我们只需选取 $\boldsymbol{D}$ 平行于 2-方向), 并且整个几何相对于 1-3 平面毕竟[①]是对称的. $\boldsymbol{b}$ 和在 1-3 (对称) 平面中的其他母线间的夹角 α' 是锥开口的量度 (很明显, 对于椭圆锥的情况我们不能谈开口角), 它也是在 1-3 平面内 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 的夹角. 然而, 后者的角度是很容易计算的:

$$\begin{aligned}\tan\alpha' &= \tan[(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D})(\text{在主平面内})]\\ &= \pm\tan[(\boldsymbol{E},\boldsymbol{1})-(\boldsymbol{D},\boldsymbol{1})]\\ &= [\tan(\boldsymbol{E},\boldsymbol{1})-\tan(\boldsymbol{D},\boldsymbol{1})]/[1+\tan(\boldsymbol{E},\boldsymbol{1})\tan(\boldsymbol{D},\boldsymbol{1})],\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$

$$\tan(\boldsymbol{D},\boldsymbol{1})=D_3/D_1=-b_1/b_3,$$
$$\tan(\boldsymbol{E},\boldsymbol{1})=\boldsymbol{E}_3/\boldsymbol{E}_1=D_3\varepsilon_1/(D_1\varepsilon_3)=-b_1\varepsilon_1/(b_3\varepsilon_3),$$

① 英译版中未译出 "毕竟" 此词.——中译者注

所以

$$\pm\tan\alpha' \equiv \pm\tan(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D}) = \frac{-\varepsilon_1 b_1 b_3 + \varepsilon_3 b_1 b_3}{\varepsilon_3 b_3^2 + \varepsilon_1 b_1^2}.$$

如果把从式 (14.2) 得到的 b_1 和 b_3 代入, 并整理各项, 则得到

$$\tan\alpha' = \sqrt{\frac{(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_3}}. \tag{14.8}$$

对偶量的全部讨论可以完全类似地作出. 最重要的定理于是如下.

存在奇异方向, 在这些方向中没有唯一的法线方向和已给定的一个光线方向相对应. 这是确定光线折射率的方程有重根时的情形. 这种光线方向叫做双光线或光线光轴, 它们的方向余弦是

$$r_1 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_3-\varepsilon_1}}, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2}{\varepsilon_3-\varepsilon_1}}.$$

对应的波法线是在和垂直于双光线的平面截成圆的锥上. 与上面讨论的角 α' 对应的角 β' (波锥开口的量度) 由下式给出

$$\tan\beta' = \sqrt{\frac{(\varepsilon_3-\varepsilon_2)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2^2}}. \tag{14.8'}$$

从式 (13.5) 和双法线的对应公式, 无须计算也能得到这些结果.

§15. 光进入和离开晶体

考虑图 15.1 所示的情况, 这里也有折射定律:

$$\left.\begin{aligned} n_1\sin\alpha_1 &= n_2\sin\alpha_2 \\ n_2 &= n_2(\alpha_2) \end{aligned}\right\}. \tag{15.1}$$

解析地求解方程组 (15.1) 是很复杂的. 然而, 惠更斯指出了从而能容易看出各种关系的全貌的一种图解. 令 A_1B_1[①]是平面波等相面入射到晶体上的一部分侧视图 (等相面垂直于图 15.2[②] 的平面). 作图如下: 由 B_1 到 B_2 的光程等于由 A_1 到 A_2 的光程; 就是说, 曲面 Σ 是这样定义, 使得由 B_1 画到 Σ 的每条线的长度等于与这条线方向对应的折射率的倒数. 容易看出, 通过 A_2 且垂直于图平面并与面 Σ 相切的平面是等相面 (不管在 A_1B_1 上什么地方选取 C_1 点,

① 德文原版的图中字母 A_1, B_1 在英译版中分别对应于 B_1, A_1; 在德文原版中本句为 "令 B_1B_2 (按中译本图) 为入射到晶体上的一平面光波束的一部分的截面 (等相面垂直于图面)".——中译者注

② 图 15.2 是按英译版中的图译出.——中译者注

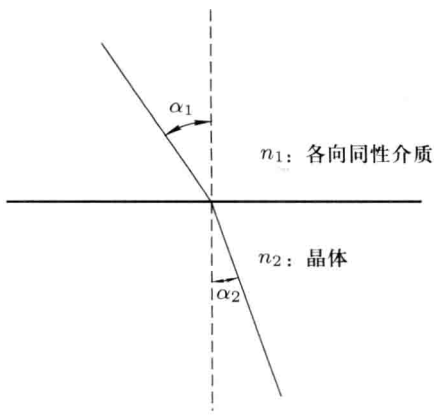


图 15.1

C_1 到 C_2 的光程总是相同的). 当然, 接触点不必要在图的平面内 (如同这里为简单起见画的那样). 由于波法线总是垂直于等相面, 作垂线 B_1B_2' 到上述切平面便得到波法线. 于是用先前的作图能够找到对应的光线方向. 应该注意, 面 Σ 由两叶组成; 这样, 对于入射到晶体上的一个平面波, 在晶体内存在两个波法线和两个光线方向. 一平面波分裂为二, 一条光线也分成两条.①②

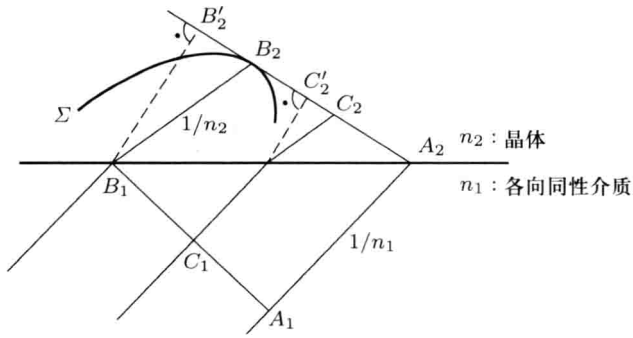


图 15.2

如果法线方向 (B_1B_2') 对应于晶体内的一双法线, 便发生奇异性, 即产生内锥形折射. 折射光线于是形成一锥面 (参看 §14). 如果光线以发生内锥形折射的角度通过平行平面晶体片, 那么, 光线射出宛如一个椭圆筒.

对应的对偶现象是外锥形折射. 如果在晶体内平行于双光线方向的光线从晶体射出, 那么, 出射波法线是在由晶体内不确定波法线的折射所产生的锥

① 这种现象称为双折射.——英译者注

② 这句是按德文原版译出, 英译版中为 "平面波分裂为二, 像光线那样".——中译者注

面上, 而这些不确定的波法线是和双光线对应并且在一个锥面上的. 适当地选择入射到一晶片[①]的会聚光束, 在这种情况下[②], 会在晶体内形成单一的光线并且从另一侧射出发射光束来. [A–5]

① 英译版中译为 “一个晶体平面”.——中译者注
② 英译版中译为 “… 作为这个现象的结果, …”.——中译者注

第五章

分 子 光 学

§16. 无阻尼振子的色散

我们现在对在其中发生光学现象的介质作某些特殊假设, 从而来尝试解释光学常数.

我们假设带电粒子遍布整个被考虑的介质. 通常用连续分布代替不连续分布就足够了. 如果

$$\sum_k e_k = 0, \tag{16.1}$$

其中 $\sum_k$ 是遍及单位体积内全部质点之和, e_k 是第 k 个质点的电荷, 那么我们用

$$\boldsymbol{P} = \sum_k e_k \boldsymbol{x}_k \tag{16.2}$$

代表单位体积中的电偶极矩. 电流密度是

$$\boldsymbol{i} = \dot{\boldsymbol{P}} = \sum_k e_k \boldsymbol{v}_k. \tag{16.3}$$

为了许多目的, 可以假设正和负电的质点是同一类型的, 所以我们能够写

$$\boldsymbol{P} = N_+ e_+ \boldsymbol{x}_+ + N_- e_- \boldsymbol{x}_-, \tag{16.4}$$

其中 $N_\pm, e_\pm, \boldsymbol{x}_\pm$ 分别代表两类质点的单位体积中的质点数、电荷和电荷中心位置.

这类介质的麦克斯韦方程组是

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \\ \operatorname{curl} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{16.5}$$

此外, 必须加上 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}. \tag{16.6}$$

像以前一样, 这里我们已假定 $\mu = 1$ (无磁化). 对于有时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 的周期性波场, 我们已看到 $\boldsymbol{D} = n^2\boldsymbol{E}$, 所以用式 (16.6), 得到

$$4\pi\boldsymbol{P} = (n^2 - 1)\boldsymbol{E}. \tag{16.7}$$

于是, 麦克斯韦方程组有相速为 c/n 波形式的解.

此外, 我们将假设介质的带电质点在外部作用下表现为准弹性振子. 那么, 作用在质点上的回复力是

$$\boldsymbol{K} = -f\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 是自平衡位置的位移. 没有外力时, 质点的运动微分方程是

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + f\boldsymbol{x} = 0, \quad m\omega_0^2 = f. \tag{16.8}$$

这种假设是和锐谱线的出现一致的.

现在, 假定电场作用于介质. 这导致一个附加力

$$\boldsymbol{K}_A = e\boldsymbol{E} \tag{16.9}$$

作用在质点上, 所以

$$m(\ddot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2\boldsymbol{x}) = e\boldsymbol{E}. \tag{16.10}$$

如果电场是周期性的, 就是说, 如果

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{16.11}$$

那么式 (16.10) 容许有以下形式

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{16.12}$$

的解. 将式 (16.12) 代入式 (16.10), 得出

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2)\boldsymbol{x}_0 = e\boldsymbol{E}_0, \tag{16.12$'$}$$

所以

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E}_0 \tag{16.13}$$

和

$$\boldsymbol{x}=\frac{e}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}\boldsymbol{E}. \tag{16.14}$$

由此, 即得出电极化强度和折射率的公式. 如果 N_0 是单位体积中自由振动频率为 ω_0 的质点数, 那么,(如果电场 $\boldsymbol{E}$ 不存在时, 不存在电极化强度的话)

$$\boldsymbol{P}=N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}\boldsymbol{E}, \tag{16.15}$$

并且由式 (16.7)

$$n^2-1=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{16.16}$$

如果有几种类型的振子, 例如单位体积中频率为 ω_k 的质点数 N_k, 那么得到

$$n^2-1=4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)}. \tag{16.16'}$$

当然, 这里已作根本的假设: 在边长为一个波长的立方体内的质点数是很大的. 对于 X 光的情形, 这就不再正确了.

式 (16.16′) 只是有条件地正确的, 因为场强 $\boldsymbol{E}$ 不等于产生极化的场强 $\boldsymbol{E}'$. 式 (16.10) 中的场强应理解为激发场, 而式 (16.7) 中的场强应理解为平均场. 在电动力学中对克劳修斯–莫索提方程的推导已确定了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 的关系:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'-\varphi\boldsymbol{P}, \tag{16.17}$$

其中对于各向同性体

$$\varphi=4\pi/3. \tag{16.17'}$$

经这种改正, 得到

或
$$\left.\begin{aligned}&4\pi\boldsymbol{P}=(n^2-1)\boldsymbol{E}'-\frac{4\pi}{3}(n^2-1)\boldsymbol{P}\\&\frac{4\pi}{3}(n^2+2)\boldsymbol{P}=(n^2-1)\boldsymbol{E}'\end{aligned}\right\}. \tag{16.18}$$

这是现在必须 (把它) 代到式 (16.15) 中的方程式. 于是, 得到

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2}=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}, \tag{16.19}$$

或者, 如果我们再次容许几类质点, 则

$$3\frac{n^2-1}{n^2+2}=4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)}. \tag{16.19'}$$

当然, 甚至连这个方程式也是不正确的, 因为式 (16.19) 右端在 $\omega=\omega_k$ 处有一个极点. 因此, 以后我们将不得不假定阻尼力. 目前, 我们要稍进一步探索从这个准弹性的带电质点模型得出的结果.

a. 分子折射度①

1. 设运动的质点是电子, M 是被考察物质的相对分子质量, ρ 是密度. 我们定义 "分子折射度" R 为

$$R = \frac{n^2-1}{n^2+2}\frac{M}{\rho}. \tag{16.20}$$

于是, 由式 (16.19′), 得到

$$R = \frac{4\pi}{3}A\sum_k \frac{e_k^2}{m_k}\frac{f_k}{(\omega_k^2-\omega^2)}. \tag{16.21}$$

这里, A 是阿伏伽德罗常量, f 是每个真实的分子的振子数. 按照我们的模型, 可以企望 f_k 是整数 (因为它们被认为是振动的质点). 实际上, 甚至连氢原子 (单电子) 都有很多这样的 "振子", 并且只有振子的所有这些 "数目" 之和等于分子中的电子数 Z:

$$\sum_k f_k = Z. \tag{16.22}$$

这样, f_k 叫做对应于频率 ω_k 的振子强度 [A–6].

对于极限情况 $\omega \gg \omega_k$ (对于所有 k), 由式 (16.21) 和式 (16.22) 得到

$$R \sim \frac{4\pi}{3}A\frac{e^2}{m\omega^2}Z.$$

(这里, e 和 m 是电子的常数.) 在这种极限情形中, 电子被认为是自由的.

2. 设运动的质点是原子核. 对于双原子分子的振动, 我们有 $f = 1$ 和 $1/m = 1/M_1 + 1/M_2$, 其中 M_1 和 M_2 是原子核的质量. 因为振子强度是一个整数, 这个振动质点模型不像 1 中那样分成细项.

b. 能量守恒

我们再忽略 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的差别. 坡印亭矢量是

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},$$

所以,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{H}).$$

然而, 由于我们有熟悉的能量方程

$$\operatorname{div}\boldsymbol{S} + \dot{W} = 0,$$

如果我们仍旧用麦克斯韦方程组 (16.5) 和 (16.6), 则得

$$\dot{W} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}) + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{P}}.$$

① 这里从德文 Molekular Refraktion 译出.——中译本编注

然而, 单位体积中, 我们有

$$\boldsymbol{P}=\sum_k N_k e_k \boldsymbol{x}_k$$

而且

$$\ddot{\boldsymbol{x}}_k+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k=\frac{e_k}{m_k}\boldsymbol{E},$$

所以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{P}}&=\sum_k N_k m_k\dot{\boldsymbol{x}}_k\cdot(\ddot{\boldsymbol{x}}_k+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\sum_k N_k\frac{m_k}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}_k^2+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k^2)\right\}.\end{aligned}$$

因此, 积分后,

$$W=\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{H}^2+\boldsymbol{E}^2)+\sum_k N_k\frac{m_k}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}_k^2+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k^2),$$

$$W_{\text{总}}=W_{\text{电磁}}+W_{\text{物质振子}},$$

这是能量守恒定律.

这里, 我们也能够再次证明

$$\frac{\boldsymbol{S}}{W}=\boldsymbol{U}=\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}$$

是群速.

[证明] 为了看清这一点, 我们首先计算物质振子的能量密度. 我们刚证明, 它是

$$W_{\text{物质}}=\sum_k N_k\frac{m_k}{2}(\dot{\boldsymbol{x}}_k^2+\omega_k^2\boldsymbol{x}_k^2).$$

然而, 现在我们有式 (16.14), 所以

$$\boldsymbol{x}_k=\frac{(e/m)_k}{\omega_k^2-\omega^2}\boldsymbol{E}=\frac{(e/m)_k}{\omega_k^2-\omega^2}\operatorname{Re}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\delta}. \tag{16.14$'$}$$

因为我们处理二次式, 我们必须首先取复量的实部. 当把式 (16.14′) 代入 $W_{\text{物质}}$ 时, 得到

$$\begin{aligned}W_{\text{物质}}&=\sum_k N_k\frac{m_k}{2}\frac{(e/m)_k^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\times\\&\quad\{(\operatorname{Re}(-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\delta}))^2+\omega_k^2(\operatorname{Re}\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\delta})^2\}\\&=\sum_k N_k\frac{m_k}{2}\frac{(e/m)_k^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\times\{\omega^2E_0^2\sin^2(\omega t+\delta)+\omega_k^2E_0^2\cos^2(\omega t+\delta)\}.\end{aligned}$$

对时间平均我们有熟悉的结果

$$\overline{|\boldsymbol{E}|^2} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{E}_0|^2,$$

因此得到

$$\overline{W}_{\text{物质}} = \frac{1}{2}\sum_k N_k \left(\frac{e^2}{m}\right)_k \frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\overline{|\boldsymbol{E}|^2}.$$

这样, 如果我们记起 $|\boldsymbol{H}|^2 = n^2|\boldsymbol{E}|^2$, 那得到总的能密度

$$W_{\text{总}} = \frac{1}{8\pi}\overline{|\boldsymbol{E}|^2}\left\{1+n^2+4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\right\}.$$

根据式 (16.16′),

$$n^2-1 = 4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2)}, \tag{16.16′}$$

所以在最后的表达式中的和变为

$$\begin{aligned}4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{\omega_k^2+\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2} &= n^2-1+4\pi\sum_k N_k\frac{e_k^2}{m_k}\frac{2\omega^2}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\\ &= n^2-1+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2-1),\end{aligned}$$

代入 $\overline{W}$ 的关系式时, 得出

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi}\overline{|\boldsymbol{E}|^2}\left\{2n^2+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2)\right\}.$$

坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$ 是

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}],$$

所以

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{c}{4\pi}n|\boldsymbol{E}|^2,$$

此外,

$$\frac{c\overline{W}}{|\boldsymbol{S}|} = \frac{1}{2n}\left\{2n^2+\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n^2)\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n\omega).$$

另一方面, 我们有群速 $\boldsymbol{U} = \partial\omega/\partial\boldsymbol{k}$. 在各向同性介质中, $U = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$, 其中 $\omega = ck/n$. 这样,

$$\frac{c}{U} = c\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n\omega),$$

由此

$$U = |\boldsymbol{S}|/\overline{W} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k. \qquad \text{[证毕]}$$

§17. 阻尼振子的色散

我们从色散定律的原形出发

$$n^2-1=4\pi N_0\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)}. \tag{16.16}$$

在 $\omega=\omega_0$ 处这个式子有一个奇点. 因为这当然不能是物理上发生的情况, 我们必须引进阻尼力; 因而微分方程式 (16.10) 现在被写成

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}+f\boldsymbol{x}+g\dot{\boldsymbol{x}}=e\boldsymbol{E}, \tag{17.1}$$

用

$$f=m\omega_0^2 \quad 和 \quad g=m\gamma,$$

它变为

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\omega_0^2\boldsymbol{x}+\gamma\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}. \tag{17.2}$$

作和式 (16.11) 以及式 (16.12) 相同的指数假设, 因此得到

$$\boldsymbol{x}(\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\gamma)=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}. \tag{17.3}$$

然而, 这和式 (16.12′) 完全相同, 只是把 ω^2 换为 $\omega^2+\mathrm{i}\omega\gamma$. 这样, 如果到处作这种代换, 那么以前所有的结论都依然一样. 因此, 例如式 (16.21) 改为

$$R=\frac{4\pi}{3}A\sum_k\frac{e_k^2}{m_k}f_k\frac{1}{(\omega_k^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\gamma)}, \tag{17.4}$$

这样, 在 $\omega=\omega_k$ 处不再存在极点了. 如果用式 (17.4) 由式 (16.20) 计算折射率, 那么可以看出, 折射率是复数. 然而, 按照先前的讨论, 这表示吸收. 由式 (17.4) 可以看出, 当分母变为极小时, R^2 有一极值 (对每个振子):

$$|\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{i}\omega\gamma|^2=(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2$$

当 $\omega=\omega_m$ 时, 是极小. 因此,

$$-2(\omega_0^2-\omega_m^2)2\omega_m+2\omega_m\gamma^2=0,$$

所以

$$\omega_m^2=\omega_0^2-\gamma^2/2. \tag{17.5}$$

如果没有外场作用在振子上, 那么它将作自由但阻尼的振动. 为了描述这些振动, 设

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t-\mu t+\mathrm{i}\delta}. \tag{17.6}$$

把式 (17.6) 代入 $\boldsymbol{E}=0$ 的微分方程式 (17.2) 中, 得到

$$(-\mathrm{i}\omega'-\mu)^2+\omega_0^2+\gamma(-\mathrm{i}\omega'-\mu)=0.$$

把它分为实部和虚部. 虚部是

$$2\mathrm{i}\omega'\mu-\mathrm{i}\omega'\gamma=0,$$

所以

$$\mu=\gamma/2. \tag{17.7}$$

实部 (用式 (17.7) 代入) 是

$$-\omega'^2+\gamma^2/4+\omega_0^2-\gamma^2/2=0,$$

由此

$$\omega'^2=\omega_0^2-\gamma^2/4. \tag{17.8}$$

这样, 自由阻尼振动频率相对于振子本征频率 ω_0 稍有移动.

根据线性微分方程理论, 把特殊解 (17.3) 式和齐次方程的通解 (17.6) 式叠加, 我们得到式 (17.2) 的最普遍解. 因而阻尼有这样的后果: 即共振时, 振动不变为无限大.

考虑振动的能量, 我们就得到常数 γ 的物理意义. 如所周知, 振子的能量 E 是

$$E=\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{f}{2}x^2=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2).$$

这能量的时间导数是

$$\dot{\boldsymbol{E}}=m\dot{\boldsymbol{x}}(\ddot{x}+\omega_0^2x).$$

假定为自由振动, 那么由式 (17.2), 得到

$$\dot{E}=-\gamma m\dot{x}^2.$$

然而, 对时间平均 (遍及一周期) 我们有

$$\overline{\dot{E}}=\overline{m\dot{x}^2},$$

所以

$$\overline{\dot{E}}=-\gamma\overline{E}, \tag{17.9}$$

它给出 γ 的意义.

在金属光学中的应用

我们使用电子在刚性离子点阵中自由地运动的金属模型. 这样, 在基本微分方程式 (17.1) 中, 我们必须令 $f=0, g\neq 0$; 于是它变为

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}+g\dot{\boldsymbol{x}}=e\boldsymbol{E}. \tag{17.10}$$

$$\ddot{\boldsymbol{x}}+\gamma\dot{\boldsymbol{x}}=\frac{e}{m}\boldsymbol{E}. \tag{17.10'}$$

在电动力学中, 人们考虑在时间上 $\boldsymbol{E}$ 是常量的情况. 作为稳定解 ($\ddot{\boldsymbol{x}}=0$), 人们得到

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}&=\frac{e}{m\gamma}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{i}=Ne\boldsymbol{v}&=\sigma_0\boldsymbol{E}\\ \sigma_0&=\frac{Ne^2}{m\gamma}\end{aligned}\right\}. \tag{17.11}$$

在光学中, 当然也必须考虑 $\ddot{\boldsymbol{x}}$. 用下面的方法得到式 (17.10') 的解. 在先前的所有方程式中, 令 $\omega_0=0$, 并且忽略 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{E}'$ 间的修正. 那么, 如果仍按照本节的普遍方案, 用 $\omega^2+\mathrm{i}\omega\gamma$ 代换 ω^2, 由式 (16.16') 得到

$$n'^2-1=4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{(-\omega^2-\mathrm{i}\omega\gamma)}. \tag{17.12}$$

像金属光学要求那样, 折射率 n' 是复数. 于是对于金属, 光学常数被定义如下 (参看式 (10.2)):

$$n'^2=\varepsilon+\mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega}.$$

和式 (17.12) 比较, 得到

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=1-4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{(\omega^2+\gamma^2)}\\ \sigma&=N\frac{e^2}{m}\frac{\gamma}{(\omega^2+\gamma^2)}\\ &=\sigma_0\frac{\gamma}{(\omega^2+\gamma^2)}\end{aligned}\right\}. \tag{17.13}$$

γ 可能和频率有关. 理论上只能用量子力学模型确定它.

对于自由电子, 阻尼部分地由于和固定离子碰撞产生; 这阻尼随密度减小而减小. 然而, 甚至对于理想气体都存在所谓辐射阻尼, 它直接和振子辐射能量这一事实有关①.

① 参看 W. 泡利, 物理学讲义, 电动力学.

§18. 光的散射

a. 由电动力学得来的基础①

我们从麦克斯韦方程组 (16.5) 和极化 (矢) 的附加关系式 (16.6) 出发. 我们设想所有的项都以时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ (就是说, $\partial/\partial t \sim -\mathrm{i}\omega$) 振动. 从而, 得到 (对于真空)

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H} \\ &\operatorname{curl}\boldsymbol{H} + \mathrm{i}\omega\frac{1}{c}\boldsymbol{E} = -\frac{4\pi\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{P} \end{aligned}\right\}. \tag{18.1}$$

用标势和矢势表示, 我们有

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\Phi \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\Phi = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{18.2}$$

由此, 得到二阶微分方程.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi = 4\pi\operatorname{div}\boldsymbol{P} \\ &\nabla^2\boldsymbol{A} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A} = 4\pi\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{P} \end{aligned}\right\}. \tag{18.3}$$

如果用 c/n 代换 c, 并用 $\boldsymbol{H}/n$ 代换 $\boldsymbol{H}$ (这样麦克斯韦方程组仍然正确), 便得到折射率为 n 的介质的对应公式. 那么, 由式 (18.1) 有

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{H} \\ &\operatorname{curl}\boldsymbol{H} + \frac{\mathrm{i}\omega}{c}n^2\boldsymbol{E} = -\frac{4\pi}{c}\mathrm{i}\omega n^2\boldsymbol{P} \end{aligned}\right\} \tag{18.1′}$$

在介质中, 矢势 $\boldsymbol{A}$ 应该是 $\boldsymbol{A}/n$, 就是说, 我们要求 $\boldsymbol{H} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}$ 在介质中也成立. 然而, 这是任意的; 人们可以有不同做法. 如此, 由式 (18.2),

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\Phi \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \frac{\mathrm{i}\omega}{c}n^2\Phi = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{18.2′}$$

如果我们引进缩写 $k = \omega n/c$, 那么也能把式 (18.2′) 写成

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \operatorname{curl}\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = \mathrm{i}\frac{k}{n}\boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\Phi \\ &\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \mathrm{i}kn\Phi = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{18.2″}$$

① 参看泡利: 电动力学.

此外, 式 (18.3) 变为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\Phi+k^2\Phi=4\pi\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\\&\nabla^2\boldsymbol{A}+k^2\boldsymbol{A}=4\pi\mathrm{i}kn\boldsymbol{P}=4\pi\frac{\mathrm{i}k}{n}\boldsymbol{P}_1\end{aligned}\right\},\tag{18.3′}$$

其中我们已设

$$\boldsymbol{P}_1=n^2\boldsymbol{P}.\tag{18.4}$$

如果引进赫兹矢量 $\boldsymbol{Z}$, 那么, 我们有

$$\boldsymbol{A}=-\mathrm{i}kn\boldsymbol{Z},\quad \Phi=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{Z}.\tag{18.5}$$

此外,

$$\rho_P=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}\tag{18.6}$$

(极化电荷密度), 和

$$\nabla^2\boldsymbol{Z}+k^2\boldsymbol{Z}=-4\pi\boldsymbol{P}.\tag{18.7}$$

用 $\boldsymbol{Z}$ 表示的场强是

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}=-\mathrm{i}kn\mathrm{curl}\,\boldsymbol{Z}\\&\boldsymbol{E}=k^2\boldsymbol{Z}+\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{Z}\end{aligned}\right\}.\tag{18.8}$$

微分方程式 (18.7) 的解是

$$\boldsymbol{Z}_P=\int\boldsymbol{P}_Q\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V_Q.\tag{18.9}$$

在波长 λ 与 $\boldsymbol{P}$ 基本上不为零的区域的线度相比小很多的特殊情况下, 得到熟悉的赫兹振子[①]

$$\left.\begin{aligned}&R\sim|\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_Q|\\&\boldsymbol{\Pi}=\int\boldsymbol{P}_QdV_Q,\quad \boldsymbol{\Pi}_1=n^2\boldsymbol{\Pi}^{②}\\&\boldsymbol{Z}_P=\boldsymbol{\Pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\end{aligned}\right\},\tag{18.10}$$

其中 P 是场点, Q 是源点, $\mathrm{d}V$ 是体积元. 用

$$\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{x}_P-\boldsymbol{x}_O)}{R},$$

其中 O 是在源区域中适当地选取的点, 我们有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{H}=n\left(k^2+\frac{\mathrm{i}k}{R}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\Pi}),\\&\boldsymbol{E}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}\left\{\boldsymbol{\Pi}\left(k^2+\frac{\mathrm{i}k}{R}-\frac{1}{R^2}\right)+\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\Pi})\left(-k^2-\frac{3\mathrm{i}k}{R}+\frac{3}{R^2}\right)\right\}\end{aligned}\right\}.\tag{18.11}$$

① 参看泡利: 电动力学.

② 德文原版中没有 "$\boldsymbol{\Pi}_1=n^2\boldsymbol{\Pi}$" 这个式子.——中译者注

赫兹振子的能量辐射率是

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2}{3}cnk^4|\boldsymbol{\Pi}|^2=\frac{2}{3}cn\left(\frac{\omega}{c}\right)^4|\boldsymbol{\Pi}_1|^2. \tag{18.12}$$

b. 洛伦兹理论

在洛伦兹散射理论中, 他考虑的是均匀介质. 按照统计力学, 发生密度涨落时引起散射. 把整个介质分成体积元, 这些体积元比边长为一个波长的立方体小, 然而却包含介质的许多分子. 由于这个假设, 这理论对于 X 光是无效的.

如果 N_V 是体积元 V 内的分子数, λ 是波长, 那么

$$N_V\gg 1 \quad 和 \quad V\ll\lambda^3.$$

统计平均时, 有

$$\overline{\Delta N_V\Delta N_{V'}}=0 \quad 对于 \quad V\neq V'.$$

因而, 来源于不同体积元的光强度可以相加.

如果我们用 $\bar{n}$ 表示平均折射率, 那么当考虑到涨落时, 式 (18.1′) 变为

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{H}=\{\bar{n}^2+\Delta(n^2)\}\left(-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\boldsymbol{E}\right), \tag{18.13}$$

其中我们已假定, 平均说来, 介质是不极化的. 然而, 起源于 $\Delta(n^2)$ 那部分 $\boldsymbol{E}$ 能写作极化强度; 的确, 和式 (18.1′) 比较, 这是

$$\boldsymbol{P}=\frac{1}{4\pi}\frac{\Delta(n^2)}{\bar{n}^2}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{P}_1=\frac{1}{4\pi}\Delta(n^2)\boldsymbol{E}. \tag{18.14}$$

然而, 按照公式 (18.12), 体积 V 辐射能量:

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{2cn}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\frac{1}{16\pi^2}V^2|\boldsymbol{E}|^2\overline{[\Delta(n^2)]^2}.$$

这是因为 $\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{P}V$. 把强度表达式

$$I=\frac{c}{4\pi}n|\boldsymbol{E}|^2,$$

引进最后的公式中, 于是得到

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4V^2}{c^4}I\overline{(\Delta n^2)^2}. \tag{18.15}$$

我们假定散射介质的折射率和 1 只相差很小; 这时, 我们能够忽略 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 间的改正, 并且可以使用式 (16.16). 我们把非涨落项归并到常数 α 中, 那么我们有

$$\bar{n}^2-1=\alpha N_V/V, \tag{18.16}$$

$$\Delta(n^2)=\alpha\frac{\Delta N_V}{V},$$

$$\overline{(\Delta(n^2))^2}=\frac{\alpha^2}{V^2}\overline{(\Delta N_V)^2}, \tag{18.17}$$

代入式 (18.15), 得到

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=I\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^4}\alpha^2\overline{(\Delta N_V)^2}. \tag{18.18}$$

式 (18.18) 给出单位时间从体积 V 被散射的能量. 考虑一条光线, 其强度在间隔 $\mathrm{d}x$ 中的损失, 无疑地必须正比于在那间隔中被散射的能量. 所以, 容易看出

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}V, \tag{18.18$'$}$$

由此, 从式 (18.18), 得

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{6\pi}\frac{\omega^4}{c^4}\alpha^2\frac{I}{V}\overline{(\Delta N_V)^2}. \tag{18.19}$$

习惯上引进散射系数 s 并且把式 (18.16) 给出的 α 表达式代入式 (18.19) 中, 由此得到

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=sI, \tag{18.20}$$

其中

$$s=\frac{8\pi^3}{3}(\overline{n}^2-1)^2\frac{1}{\overline{N}^2}\frac{1}{\lambda_0^4}\frac{\overline{(\Delta N_V)^2}}{V},$$

其中已用了缩写 $\overline{N}\equiv N_V/V$.

从统计力学 (涨落理论) 得到公式[①]

$$\overline{(\Delta N_V)^2}=\frac{kT}{(-\partial p/\partial V)_{N_V,T}(V/N_V)^2}, \tag{18.21}$$

或者

$$\frac{\overline{(\Delta N_V)^2}}{N_V}=\frac{\overline{N}kT}{-V(\partial p/\partial V)_{N_V,T}}.$$

代入散射系数的方程, 得到

$$s=\frac{8\pi^3}{3}\frac{(\overline{n}^2-1)^2}{\lambda_0^4}\left(\frac{kT}{-V(\partial p/\partial V)_{N_V,T}}\right). \tag{18.22}$$

对于理想气体

$$-V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{N_V,T}=\overline{N}kT,$$

所以对于这些气体, 散射系数是

$$s=\frac{8\pi^3}{3}\frac{(\overline{n}^2-1)^2}{\overline{N}\lambda_0^4}. \tag{18.23}$$

公式 (18.23) 可用于确定阿伏伽德罗常量. 此外, 我们看到短波较长波更强烈地被散射; 天空的蓝色便是这事实的结果.

① 参看泡利, 物理学讲义: 统计力学.

c. X 光的散射

我们假定波长比原子的尺度小. 那么, 从电子上就得到不相干散射. 令 S 是单位时间, 单位体积中被散射的能量. 那么我们有 (运动电荷的辐射[①])

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2 NZ, \tag{18.24}$$

其中 N 代表单位体积中的原子数, Z 是每个原子中的电子数, $\boldsymbol{v}$ 是电子的速度.

现在, 光的频率比原子中电子的本征频率大得多. 这样, 我们设 ω_0 (和 ω_k) 等于零. 这是假定电子 (几乎) 是自由的结果. 对于这样的电子,

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{E}. \tag{18.25}$$

把式 (18.25) 和入射强度的关系, $I = (c/4\pi)\boldsymbol{E}^2$, 代入式 (18.24):

$$S = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4} INZ. \tag{18.26}$$

散射系数为 $s = S/I$ (由式 (18.20) 中的定义连同式 (18.18′) 直接得到这结果). 所以,

$$s = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 NZ. \tag{18.27}$$

现在, N 可以用密度 ρ、相对分子质量 M 和阿伏伽德罗常量 A 表示:

$$N = \rho A/M.$$

代入式 (18.27), 然后除以密度, 那么, 得到质量吸收系数 σ:

$$\sigma \equiv \frac{s}{\rho} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{A}{M}Z = 0.4\frac{Z}{M}. \tag{18.28}$$

式 (18.28) 是汤姆孙确立的. 用它可以确定一个原子中的电子数 Z.

在式 (16.16) 中设 ω_0 等于零, 得到 X 光的色散公式:

$$n^2 - 1 = -4\pi NZ\frac{e^2}{m\omega^2}.$$

这表明 X 光全反射的可能性.

精化. 我们考虑一个其 $\boldsymbol{E}$ 矢量平行于 Z 轴的偏振波射到一个原子上. 像前面那样, 电子被认为是 "几乎自由的"; 然而, 我们现在要考虑这样的事实, 即不是原子中全部 Z 个散射辐射的电子都处在 O 点 (原子核的位置). 按照式

① 参看泡利, 电动力学.

(18.25), 入射波的效应是产生电子的周期性的加速度. 然而, 当周期性地加速时, 电子产生外传 (散射) 波, 在电磁理论中, 计算得在 (离电子) r 处的场强 $\boldsymbol{E}_P$ 是

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \dot{\boldsymbol{v}}_\perp. \tag{18.29}$$

记号 $\perp$ 应理解为表示垂直于传播方向 (r 方向) 的加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 的分量. 因此, 在 P 点 (离电子 r, 与 x 轴成 θ 角) 的场强 $\boldsymbol{E}_P$ 的量值是

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{x}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \cos\theta.$$

这里, $E_e(\boldsymbol{x})$ 是在 $\boldsymbol{x}$ 点处入射强度的量值; $\boldsymbol{E}_P$ 垂直于散射方向, 并且是在这个散射方向和电子振动方向所构成的平面内. 如果我们假定 $r \gg |\boldsymbol{x}|$, 那么, 距离 $R = |\boldsymbol{PO}|$ 变成

$$R = r + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{x}) + \cdots,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示散射方向的单位矢量. 所以, 我们有 (作为近似)

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{x}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \cos\theta.$$

如果我们把入射波的波矢写成

$$\boldsymbol{k}_e = k\boldsymbol{n}_e,$$

那么, 在我们的近似中,

$$\boldsymbol{E}_e(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_e^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}_e\cdot\boldsymbol{x}},$$

其中 $\boldsymbol{E}_e^0$ 表示入射波在原点的场强. 由此得到

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e^2}{mc^2} \cdot \boldsymbol{E}_e^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e - \boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}\cos\theta}{R}. \tag{18.30}$$

如果我们假定一个原子中存在几个电子, 那么我们必须写成

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{e^2}{mc^2} \boldsymbol{E}_e^0 \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e - \boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R} \cos\theta, \tag{18.30'}$$

其中求和遍及 Z 个电子. 当然, $\boldsymbol{E}_e^0$ 是以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 在时间上成周期性的:

$$\boldsymbol{E}_e^0 = F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t + \delta)}.$$

因此, 入射波强度是

$$I_e = \frac{c}{4\pi} \cdot F^2.$$

从原子散射进立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 的强度是

$$\mathrm{d}I = I_e \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2\theta |K|^2 \mathrm{d}\Omega. \tag{18.31}$$

因子

$$K = \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e - \boldsymbol{k})\cdot \boldsymbol{x}_n} \tag{18.32}$$

叫做结构因子.

如果入射光的偏振与入射方向和散射方向所定义的平面成一个角度, 那么我们必须把它的电场强度矢量分解为平行于和垂直于这个平面的分量. 平行于平面的分量按照式 (18.31) 和式 (18.32) 被散射; 垂直于平面分量的散射按照相同的公式在 $\theta = 0$ 时计算. 由此我们看到, 除在式 (18.29) 中 $\dot{\boldsymbol{v}}_\perp$ 与 $\dot{\boldsymbol{v}}$ 相等, 就是说, 用 1 代替 $\cos\theta$ 之外, 这分量的全部计算仍旧和前面一样.

能够计算结构因子量值的平方:

$$\begin{aligned} |K|^2 = K^* K &= \sum_{n,m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e - \boldsymbol{k})\cdot \boldsymbol{x}_n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e - \boldsymbol{k})\cdot \boldsymbol{x}_m} \\ &= Z + 2\sum_{n<m} \cos[k(\boldsymbol{n}_e - \boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m)], \end{aligned} \tag{18.33}$$

其中 Z 代表原子中电子的个数.

现在, 如果

$$k(\boldsymbol{n}_e - \boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m) \gg 1,$$

或

$$(\boldsymbol{n}_e - \boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_m) \gg \frac{\lambda}{2\pi}, \tag{18.34}$$

那么所有可能的位相作为余弦的宗量出现, 因而, 其和是很小的. 这样,

$$|K|^2 \sim Z. \tag{18.35}$$

如果入射光是非偏振的, 那么 $\boldsymbol{E}_e^0$ 的所有方向都是同样可能的, 并且入射光强度被等分在两种偏振态中. 这样, 便能积分式 (18.31) 了. 得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} I_e \left[\int \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cos^2\theta Z \mathrm{d}\Omega + \int \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 Z \mathrm{d}\Omega\right] \\ &= \frac{1}{2} I_e Z \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left[\int \cos^2\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta + \int \sin\theta \mathrm{d}\theta\right] \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

所以

$$I = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 Z I_e,$$

这是先前的式 (18.27). 不等式 (18.34) 在一定的锥内总是不能满足, 但该锥随 λ 减小而变小.

注记 按照经典理论以及量子理论, 原子中的电子都不是固定的, 而是在给定位置处有一定概率. 对于一特定电子组态, 令此概率是

$$W(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_Z)\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_Z,$$

且有

$$\int\cdots\int W\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_Z=1.$$

因此, 结构因子应取作统计平均:

$$\overline{|K|^2}=\int\cdots\int W\left|\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n}\right|^2\mathrm{d}V_1\cdots\mathrm{d}V_z. \tag{18.36}$$

如果 W 可能分解为乘积

且有

$$\left.\begin{aligned}W(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_z)&=w_1(\boldsymbol{x}_1)w_2(\boldsymbol{x}_2)\cdots w_z(\boldsymbol{x}_z)\\ \int w_i(\boldsymbol{x}_i)\mathrm{d}V_i&=1\end{aligned}\right\} \tag{18.37}$$

时, 式 (18.36) 能够简化. 如果我们定义缩写

$$F_n=\int w_n(\boldsymbol{x}_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}_n}\mathrm{d}V_n, \tag{18.38}$$

那么

$$\overline{|K|^2}=\sum_{\substack{n\\ n\neq m}}\sum_m F_nF_m^*+Z=Z+\sum_{n<m}(F_nF_m^*+F_n^*F_m). \tag{18.39}$$

此外, 如果 w_n 仅和 r_n 有关,

$$w_n(\boldsymbol{x}_n)=w_n(r_n),$$

就是说, 如果 w_n 是球对称的, 那么能进一步计算式 (18.38). 用 θ 表示散射角,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k}|&=2k\sin\theta/2,\\ \alpha&=\measuredangle\{(\boldsymbol{k}_e-\boldsymbol{k}),\boldsymbol{x}\},\\ \cos\alpha&=u,\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{d}V=r^2\mathrm{d}r\cdot 2\pi\mathrm{d}u,$$

$$F_n = \int w_n(r_n)\frac{\sin(2kr\sin\theta/2)}{kr\sin\theta/2}2\pi r^2\mathrm{d}r. \tag{18.38'}$$

这样, 对于球对称分布, F_n 仅是 $(4\pi/\lambda)\sin\theta/2$ 的函数:

$$F_n = F_n\left(\frac{4\pi}{\lambda}\sin\theta/2\right). \tag{18.38''}$$

这里, 如果 λ 再次趋于零 (更精确地, $(\sin\theta/2)/\lambda \to \infty$), 那么 F_n 趋于零, 因而 $\overline{|K|^2}$ 趋于 Z, 这是同前面一样的结果.

在上面考虑中, 我们忽略了 (按照经典理论) 散射时发生的多普勒效应. 这种效应使得散射辐射的频率相对于入射辐射的频率稍有移动.

§19. 旋光性

a. 唯象理论

物质的旋光性是在偏振光通过物质时, 它的振动面发生旋转的特性. 这种效应可以描述为: 相反方向的圆偏振波的折射率是不同的 (两个等振幅、等频率的反向圆偏振波的叠加显然构成一个线偏振波). 振动面转过的角度 χ 显然是

$$\chi = \frac{\omega}{c}\frac{(n_+ - n_-)}{2}l, \tag{19.1}$$

其中 l 是在旋光性物质中通过的路程, n_+ 和 n_- 是右圆偏振光和左圆偏振光的折射率.

为了发生旋光性, 当然必须是光学方程对于反射 (变换) 不再是不变式. 这是下列的事实所造成的: 某些分子是非镜面对称的 (例如, 糖溶液、电气石晶体), 因而右圆偏振光和左圆偏振光的本征频率是不同的.

普通矢量 (极矢) 是反射 (变换) 下的不变量, 反之, 轴矢, 像普通矢量的矢积和磁场强度矢量之类, 却不是. 在电动力学[①]中已表明, 这些矢量实质上是反射 (变换) 时变号的反对称张量.

我们从电动力学取出下列 (麦克斯韦) 方程组:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{B}}\\ \operatorname{curl}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{I}_M\end{aligned}\right\}, \tag{19.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}\\ I_M &= \dot{\boldsymbol{P}} + c\operatorname{curl}\boldsymbol{M}\end{aligned}\right\}. \tag{19.3}$$

① W. 泡利: 电动力学.

此外, 我们假设

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P} &= \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\boldsymbol{E} - \alpha_1 \operatorname{curl}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{M} &= -\alpha_2 \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}} \\ \alpha_1 &+ \alpha_2 = \alpha \end{aligned}\right\}. \tag{19.4}$$

然后得到

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{I}_M &= \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\dot{\boldsymbol{E}} - \alpha \operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{E}} \\ \boldsymbol{D} &= \varepsilon\boldsymbol{E} - 4\pi\alpha \operatorname{curl}\dot{\boldsymbol{E}} \end{aligned}\right\}, \tag{19.5}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 满足关系

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}. \tag{19.6}$$

用这些方程, 对于平面波 ($\boldsymbol{\nabla} \sim \mathrm{i}\boldsymbol{k}, \partial/\partial t \sim -\mathrm{i}\omega$) 得到:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)},$$

其中

$$k = \frac{\omega}{c} n\boldsymbol{n}.$$

用缩写

$$-4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n = f, \tag{19.7}$$

得到

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \mathrm{i}f\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{19.8}$$

现在, 如所周知, 麦克斯韦方程组导致

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2}\ddot{\boldsymbol{D}}$$

因而, 对于平面波 (其中 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} = 0$), 得到

$$-n^2\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) = -n^2[(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{E}] = \boldsymbol{D},$$

所以用式 (19.8),

$$n^2\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} + \mathrm{i}f\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}. \tag{19.9}$$

设把 $\boldsymbol{n}$ 沿 z 轴安放 ($\boldsymbol{n} = \{0,0,1\}$) 并且 $\boldsymbol{E}$ 垂直于它 ($\boldsymbol{E} = \{E_x, E_y, 0\}$), 则式 (19.9) 变为

$$\left.\begin{aligned} n^2E_x &= \varepsilon E_x - \mathrm{i}fE_y \\ n^2E_y &= \varepsilon E_y + \mathrm{i}fE_x \end{aligned}\right\}. \tag{19.10}$$

通常我们引进 E_{I} 和 E_{II} 代替 E_x 和 E_y:

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathrm{I}} &= E_x + \mathrm{i}E_y \\ E_{\mathrm{II}} &= E_x - \mathrm{i}E_y \end{aligned}\right\}. \tag{19.11}$$

于是,

$$\left.\begin{aligned} \{n^2 - \varepsilon + f\}E_{\mathrm{I}} &= 0 \\ \{n^2 - \varepsilon - f\}E_{\mathrm{II}} &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{19.10′}$$

或者, 明确地写成 (再代入 f[①]),

$$\left.\begin{aligned} \left(n^2 - \varepsilon - 4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n\right)E_{\mathrm{I}} &= 0 \\ \left(n^2 - \varepsilon + 4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n\right)E_{\mathrm{II}} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{19.10″}$$

这新系统有两组解:

$$\begin{aligned} &(1)\quad E_{\mathrm{II}} = 0; E_x = \mathrm{i}E_y, n = n_{\mathrm{I}}, \\ &\quad n_{\mathrm{I}}^2 - \varepsilon - 4\pi\alpha\frac{\omega}{c}n = 0, \end{aligned} \tag{19.12}$$

所以 (α 足够地小)

$$n_{\mathrm{I}} \simeq \sqrt{\varepsilon} + 2\pi\alpha\frac{\omega}{c}. \tag{19.12′}$$

这产生左圆偏振波 (按照式 (19.12)). 式 (19.12′) 给出对应的折射率.

(2) $E_{\mathrm{I}} = 0; E_x = -\mathrm{i}E_y, n = n_{\mathrm{II}}$.

从类似于前一个计算, 得到

$$n_{\mathrm{II}} \simeq \sqrt{\varepsilon} - 2\pi\alpha\frac{\omega}{c}.$$

因此, 由式 (19.1), 振动面的旋转变为

$$\chi = -2\pi\alpha\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 l. \tag{19.1′}$$

在我们的理论中, 如果我们作下列假设:

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E} \times \left(\boldsymbol{B} + \frac{2\pi}{c}\alpha\dot{\boldsymbol{E}}\right),$$

$$W = \frac{1}{8\pi}\{\varepsilon\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2 - 4\pi\alpha\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\},$$

便正确地得到能量守恒定律. 这个理论的重要特征是, 在基本假设式 (19.4) 中, 我们建立普通矢量和有矢积变换特性的矢量间的关系.

① 德文原版中是 "再代入 f." ——中译者注

在旋光晶体的情况下, 必须使 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的关系更为普遍:

$$D_i = \sum_k \eta_{ik} E_k. \tag{19.8a}$$

能量守恒要求张量 η_{ik} 是厄米的,

$$\eta_{ki} = \eta_{ik}^*,$$

所以可以把它分解成下面的样式:

$$\eta_{ik} = \varepsilon_{ik} + \mathrm{i}\rho_{ik},$$

并且 $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, $\rho_{ik} = -\rho_{ki}$,

因此, 我们能进一步写成

$$\rho_{ik} = \sum_l f_{ik,l} n_l, \tag{19.8b}$$

并且

$$f_{ki,l} = -f_{ik,l}.$$

也可以用矢积表示式 (19.8a). 令 ρ 是和反对称张量 ρ_{ik} 相对应的矢量. 就是说, 令

$$\rho_i = \sum_{k<l} \varepsilon_{ikl} \rho_{kl},$$

其中 ε_{ikl} 表示熟悉的排列张量:

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{cases} +1, & \text{如果 } i,k,l \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶次排列;} \\ -1, & \text{如果 } i,k,l \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇次排列;} \\ 0, & \text{如果任何两个指标相等.} \end{cases}$$

因此 (19.8a) 式变为

$$D_j = \sum_k \varepsilon_{jk} E_k - \mathrm{i}(\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{E})_j$$

并且对应于 (19.8b) 式的公式成为

$$\rho_i = \sum_k f_{ik} n_k.$$

如令

$$f_{ik} = f\delta_{ik}, \quad f_{ik,l} = f\varepsilon_{ikl}, \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}.$$

由这两公式重新得到各向同性介质的方程组.

b. 库恩 (Kuhn) 模型 [A–7]

我们取两个耦合振子作为旋光分子模型, 下面要把这些振子安排成非反射不变的样式 (参看图 19.1). 为了简化计算, 我们假定两个振子的质量相等. 那么, 考虑到耦合, 系统的势能 $E_{势}$ 变为

$$E_{势} = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 y_2^2 + k x_1 y_2).$$

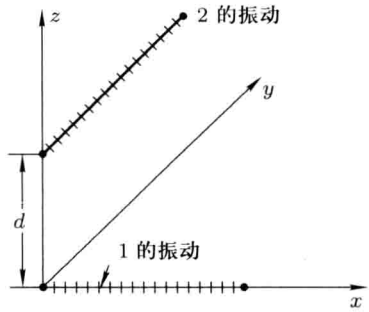


图 19.1

对于自由振动 (不存在电磁场) 我们得到

$$\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 - k y_2 = -(1/m)\partial E_{势}/\partial x_1^{①},$$
$$\ddot{y}_2 = -k x_1 - \omega_2^2 y_2 = -(1/m)\partial E_{势}/\partial y_2.$$

用假设

$$x_1 = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}, \quad y_2 = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t},$$

得到

$$\left.\begin{aligned} x_1(-\omega_0^2 + \omega_1^2) + y_2 k = 0 \\ x_1 k + y_2(-\omega_0^2 + \omega_2^2) = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{19.13}$$

如果 x_1 和 y_2 存在非零解, 它导致行列式条件:

$$(-\omega_0^2 + \omega_1^2)(-\omega_0^2 + \omega_2^2) - k^2 = 0. \tag{19.13′}$$

根 ω' 和 ω'' 将在各个非耦合振子的本征频率 ω_1 和 ω_2 的近邻. 这样, 我们有展形式:

$$\left.\begin{aligned} \omega'^2 &\simeq \omega_1^2 - \frac{k^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ \omega''^2 &\simeq \omega_2^2 + \frac{k^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

① 此处德文原版、英译版中均有误; 中译本中已改正.——中译者注

对于系统的两个本征振动, 由式 (19.13) 得到

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \frac{-k}{\omega_2^2-\omega_1^2}x_1 \\ x_1 &= \frac{+k}{\omega_2^2-\omega_1^2}y_2 \end{aligned}\right\}. \tag{19.15}$$

如果我们现在假定光平行于 z 轴入射, 那么我们有强迫振动. 用和前面相同的假设, 代替式 (19.13), 我们现在得到

$$\left.\begin{aligned} (-\omega^2+\omega_1^2)x_1 + ky_2 &= \frac{e}{m}E_{1x} \\ kx_1 + (-\omega^2+\omega_2^2)y_2 &= \frac{e}{m}E_{2y} \end{aligned}\right\}, \tag{19.16}$$

其中 ω 是光的频率并且一切量都以这频率作周期性变化. 于是

$$\left.\begin{aligned} [(-\omega^2+\omega_1^2)(-\omega^2+\omega_2^2)-k^2]x_1 &= \frac{e}{m}[(-\omega^2+\omega_2^2)E_{1x}-kE_{2y}] \\ [(-\omega^2+\omega_1^2)(-\omega^2+\omega_2^2)-k^2]y_2 &= \frac{e}{m}[(-\omega^2+\omega_1^2)E_{2y}-kE_{1x}] \end{aligned}\right\} \tag{19.16'}$$

基于式 (19.13′), 可以把式 (19.16′) 中第一个方括号写成

$$(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2).$$

因此, 得到电偶极矩

$$\left.\begin{aligned} P_x &\equiv \sum_k ex_k = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \times [(-\omega^2+\omega_2^2)E_{1x}-kE_{2y}] \\ P_y &\equiv \sum_k ey_k = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \times [(-\omega^2+\omega_1^2)E_{2y}-kE_{1x}] \\ P_z &\equiv \sum_k ez_k = \text{常数} \end{aligned}\right\}. \tag{19.17}$$

令 $\boldsymbol{E}$ 为间隔 d 的中央处入射波的电场强度, 那么可以展开, 并且得到

$$E_{1x} = E_x - \frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z} - \cdots,$$

$$E_{2y} = E_y + \frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z} + \cdots,$$

从而

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)} \\ &\left[(-\omega^2+\omega_2^2)E_x - kE_y - k\frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z} - (-\omega^2+\omega_2^2)\frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right] \\ P_y &= \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\left[-kE_x + \right. \\ &\left.(-\omega^2+\omega_1^2)E_y + (-\omega^2+\omega_1^2)\frac{d}{2}\frac{\partial E_y}{\partial z} + k\frac{d}{2}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{19.17'}$$

对于各向异性介质, 不能再进一步简化. 然而, 对各向同性介质, 我们能对分子的位置求平均并算出 $\boldsymbol{P}$ 的平均值. 求原先位置和转过 90° 后 $\boldsymbol{P}$ 的算术平均, 便得到平行于 $x-y$ 平面的振子全部可能取向的 $\boldsymbol{P}$ 的平均值 (用 $\boldsymbol{P}'$ 表示).

$$\boldsymbol{P}' = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\left[\left(-\omega^2+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)\boldsymbol{E} - \frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2}\frac{d}{2}\frac{\partial E}{\partial z}+k\frac{d}{2}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\right].$$

振子轴 (和图中 z 轴一致) 的可能位置的平均值 (用 $\overline{\boldsymbol{P}}$ 表示) 是作为坐标轴的两个反向位置的 $\boldsymbol{P}'$ 的算术平均而求得的. 通过计算 $\boldsymbol{P}'$, 并且作代换 $x\to -x, y\to -y, z\to -z$ 后再计算 $\boldsymbol{P}'$, 然后相加, 取其和之半, 得到

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\times\left[\left(-\omega^2+\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}\right)\boldsymbol{E}+\frac{kd}{2}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}\right]. \tag{19.18}$$

用完全类似的方法, 我们现在计算磁偶极矩

$$\boldsymbol{M}\equiv\frac{e}{2c}\sum_k \boldsymbol{x}_k\times\dot{\boldsymbol{x}}_k.$$

磁矩必须和电矩是对同一点的, 就是说, 是对间隔 d 的中心的. 因此, 得到

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{e}{2c}\frac{d}{2}\dot{y}_2\\ M_y &= -\frac{e}{2c}\frac{d}{2}\dot{x}_1\\ M_z &= 0\end{aligned}\right\}. \tag{19.19}$$

再在间隔 d 的中心附近展开 $\boldsymbol{E}$, 并且代入式 (19.19).(参看上面式 (19.17)). 为此, 我们仅需进行到泰勒展开式的常数项, 因为式 (19.19) 已对 d 是线性的并且我们一贯略去高阶项. 于是, 得到

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -\frac{e}{2c}\frac{d}{c}\dot{y}_2 = -\frac{d}{4c}\dot{P}_y\\ &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\times[(-\omega^2+\omega_1^2)\dot{E}_y-k\dot{E}_x]\\ M_y &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\times[(-\omega^2+\omega_2^2)\dot{E}_x-k\dot{E}_y]\end{aligned}\right\}. \tag{19.20}$$

类似于前面的计算, 我们必须首先遍及平行于 $x-y$ 平面的振子位置求平均:

$$\left.\begin{aligned} M_x' &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\times\left[-k\dot{E}_x+\frac{1}{2}(\omega_1^2-\omega_2^2)\dot{E}_y\right]\\ M_y' &= -\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}\times\left[-\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\dot{E}_x-k\dot{E}_y\right]\end{aligned}\right\}, \tag{19.20'}$$

然后遍及轴的方向求平均:

$$\overline{\boldsymbol{M}}=\frac{d}{4c}\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\dot{\boldsymbol{E}}. \tag{19.21}$$

这样, 我们看到库恩模型解释了唯象的量 α_1 和 α_2. 与式 (19.4) 比较, 得到 (对各向同性体)

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{2}\\ \alpha_2&=-\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{4}\\ \alpha&=\frac{e^2/m}{(\omega^2-\omega'^2)(\omega^2-\omega''^2)}k\frac{d}{4}\end{aligned}\right\}. \tag{19.22}$$

概括起来, 我们需要强调, 在库恩模型中, 振子的耦合和入射波场强的位置依赖性是基本的. 把效应分解为来自 $\boldsymbol{P}$ 部分和 $\boldsymbol{M}$ 部分不是基本的; 引进推迟电矩的概念能够把它们结合起来①, 没有考虑两振子间的力的有限传播速度也不是主要的. 因为可以证明, 如果原子中的力是电性质的, 这种效应是 d^2 数量级的了. 因而是可以忽略的. 我们曾只用两个耦合振子这个事实也不是主要的. 关于普遍情况, 参看 M.Born, 光学 (补充书目).

§20. 磁光学

a. 塞曼效应

下面我们将研究在静磁场 $\boldsymbol{H}$ 中质点的振动②. 采用洛伦兹力, 则得基本方程:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}^2+\omega_0^2\boldsymbol{x}=\frac{e}{mc}\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{H}. \tag{20.1}$$

取 z 轴平行于磁场 $\boldsymbol{H}$, 即 $\boldsymbol{H}=\{0,0,H\}$, 那么得到

1. 对于 z 分量:

$$\ddot{z}+\omega_0^2z=0,$$
$$z=C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0t}.$$

这是用未改变的频率 ω_0 平行于磁场的振动.

2. 对于 x 和 y 分量:

$$\ddot{x}+\omega_0^2x=\frac{eH}{mc}\dot{y},$$
$$\ddot{y}+\omega_0^2y=-\frac{eH}{mc}\dot{x}.$$

① 参看 Krooy, 学位论文, 莱顿 (1936).

② 德文原版中为本征振动.——中译者注

经代换

$$\xi_{\mathrm{I}} = x + \mathrm{i}y,$$
$$\xi_{\mathrm{II}} = \xi_{\mathrm{I}}^{*} = x - \mathrm{i}y,$$

得到

$$\ddot{\xi}_{\mathrm{I}} + \omega_0^2 \xi_{\mathrm{I}} = -\frac{eH}{mc}\mathrm{i}\dot{\xi}_{\mathrm{I}},$$
$$\ddot{\xi}_{\mathrm{II}} + \omega_0^2 \xi_{\mathrm{II}} = +\frac{eH}{mc}\mathrm{i}\dot{\xi}_{\mathrm{II}}.$$

设

$$\xi_{\mathrm{I}} = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' t},$$
$$\xi_{\mathrm{II}} = B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega'' t},$$

代入后, 有

$$-\omega'^2 + \omega_0^2 + \frac{eH}{mc}\omega' = 0,$$
$$-\omega''^2 + \omega_0^2 - \frac{eH}{mc}\omega'' = 0.$$

最后一组方程是严格地可解的, 但这里只需把根 ω' 和 ω'' 展开就足够了:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega_0 + \frac{eH}{2mc} \\ \omega'' &= \omega_0 - \frac{eH}{2mc} \end{aligned}\right\}. \tag{20.2}$$

$eH/(2mc)$ 叫做拉莫尔频率.

所以, 在施加磁场后, 频率 ω_0 的本征振动分裂为

(1) 具有原先频率 ω_0、平行于 $\boldsymbol{H}$ 的一个振动 (叫做 π 振动).

(2) 频率对 ω_0 对称地移动了 $eH/(2mc)$ 的一个右圆偏振和一个左圆偏振, 两者都垂直于 $\boldsymbol{H}$ (叫做 σ 振动), 较高频率的振动 (对应于 e 的正值) 是左圆偏振 [A–2].

对于发射光的电子, 这种振动的分裂导致光谱线的分裂. 如果垂直于磁场观察, 那么, π 振动表现为平行于 $\boldsymbol{H}$ 的线偏振, 而 σ 振动表现为垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的线偏振 (偏振方向, 在这里意指电矢量方向). 如果沿磁场方向观察, 那么完全看不见 π 振动, 而 σ 振动表现为圆偏振, 且较高频率的振动是左圆偏振. 然而, 由此得出放射辐射的电荷必须是具有负号的, 因为, 否则, 如果观察方向反过来, 较高频率振动会和左圆[①]偏振相关联 [A–2].

① 德文原版中为 "右"! ——中译者注

由塞曼效应能确定 e/m (包括符号); 这样得到的值与电子的值相同.

上面考虑的简单塞曼分裂不是最普遍的情况. 许多谱线表现出几个 π 和 σ 振动的更复杂的分裂; 这叫做反常塞曼效应. 这种效应起因于电子自旋. 然而, 相应的理论只能用量子力学处理.

b. 法拉第效应

这种效应是在磁场 $\boldsymbol{H}$ 中介质内光的振动面的旋转①. 左和右圆偏振光的折射率是不同的.

1. 平行于 $\boldsymbol{H}$ 的光线. 基本方程变为

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2 \boldsymbol{x} = \frac{e}{mc} \dot{\boldsymbol{x}} \times \boldsymbol{H} + \frac{e}{m} \boldsymbol{E}. \tag{20.3}$$

现在,

$$\boldsymbol{P} = Ne\boldsymbol{x},$$

其中 N 是单位体积中的质点数. 我们选取 $\boldsymbol{H}$ 平行于 z 轴. 设入射波具有角频率 ω, 则进行强迫振动的 $\boldsymbol{x}$ 也具有这个频率. 我们作下面的代换:

$$E_x \pm \mathrm{i} E_y = E_{\mathrm{I,II}},$$
$$P_x \pm \mathrm{i} P_y = P_{\mathrm{I,II}},$$

由此得到

$$\left(-\omega^2 + \omega_0^2 \pm \frac{eH}{mc} \omega \right) P_{\mathrm{I,II}} = N \frac{e^2}{m} E_{\mathrm{I,II}}.$$

忽略 $\boldsymbol{E}'$ 和 $\boldsymbol{E}$ 间的改正, 我们有式 (16.7):

$$4\pi \boldsymbol{P} = (n^2 - 1) \boldsymbol{E}.$$

这样,

$$n_{\mathrm{I}}^2 - 1 = \frac{4\pi (e^2/m) N}{\omega_0^2 - \omega^2 + (eH/mc)\omega},$$
$$n_{\mathrm{II}}^2 - 1 = \frac{4\pi (e^2/m) N}{\omega_0^2 - \omega^2 - (eH/mc)\omega},$$

所以

$$n_{\mathrm{I}}^2 - n_{\mathrm{II}}^2 = 4\pi \frac{e^2}{m} N \left\{ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + (eH/mc)\omega} - \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - (eH/mc)\omega} \right\}.$$

① 后半句从德文原版中译出.——中译者注

用 ω 不靠近本征频率 ω_0 的假定, 可以把它简化 (平均值定理):

$$\left.\begin{aligned} n_{\mathrm{I}}^2 - n_{\mathrm{II}}^2 &= -4\pi\frac{e^2}{m}N\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\cdot 2\frac{eH}{mc}\omega \\ n_{\mathrm{II}} - n_{\mathrm{I}} &= 4\pi\frac{e^2}{m}N\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\frac{\omega}{n}\frac{eH}{mc} \end{aligned}\right\}. \tag{20.4}$$

然而, 现在根据假设, n_{I} 和 n_{II} 恰好是线偏振入射波的两个圆分量的折射率. 这样, 按照式 (19.1), 振动面旋转的角度 χ 变为

$$\chi = vlH,$$

并且

$$v = \frac{4\pi(e^2/m)N}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}\frac{e}{mc^2}\frac{\omega^2}{2n}. \tag{20.5}$$

v 叫做韦尔代 (Verdet) 常数. 对于一个分子内有几个质点的情况, 当然, 人们必须用下面的和作为 v

$$v = \sum_k \frac{4\pi(e_k^2/m_k)N_k}{(\omega_k^2-\omega^2)^2}\frac{e_k\omega^2}{m_kc^2}\frac{1}{2n}. \tag{20.6}$$

2. 横入射. 在这种情况下, 会观察到双折射: 一个平行于 $\boldsymbol{H}$ 的振动和一个垂直于 $\boldsymbol{H}$ 的振动.

从技术观点, 检测法拉第效应比塞曼效应容易得多, 虽然从理论观点, 塞曼效应比较简单. 塞曼效应仅当作在静磁场的影响下的电子自由振动, 然而, 法拉第效应却是在其他条件相同下发生的强迫振动.

补 充 书 目

M. BORN, *Optik* (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965).

M. BORN and E. WOLF, *Principles of Optics* (Pergamon Press, New York, 1965).

R. DITCHBURN, *Light* (Interscience, New York, 1963).

A. C. HARDY and F. H. PERRIN, *The Principles of Optics* (McGraw-Hill, New York, 1932).

F. A. JENKINS and H. E. WHITE, *Fundamentals of Optics* (McGraw-Hill, New York, 1957).

B. B. ROSSI, *Optics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1957).

附录　英译本主编评注

[A–1] (§3)　这是用 $\mathrm{d}S = \boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}^0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}^0$ 由 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^0$ 到 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{p}^0$ 的勒让德变换. 而这里的 $\mathrm{d}S$ 是式 (3.12) 的一个特殊情形.

[A–2] (§5, §8, §20)　$a = 0$ 的情况给出顺时针旋转, 按习惯称为右圆偏振;$b = 0$ 的情况给出逆时针旋转称为左圆偏振. 习惯上是按对着光传播方向看所见到的那样来规定旋转指向的. 习惯上也规定偏振面是由磁场矢量和波矢量所产生的平面. 参看 M. Born, *Optik*, p. 24 (补充书目).

[A–3] (§5)　随着高功率激光器 (相干光源) 的出现, 非线性光学已变成惊心动魄的现实 (谐波激发, 光–光散射, 等). 参看, 例如 N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* (Benjamin, New York, 1965).

[A–4] (§7)　由 $\alpha_1 = \beta_0 = \beta_1 = 0, \alpha_0 = \sin\varphi$ 的式 (7.8)、式 (7.8′) 得到

$$u = \text{常数}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(R_{0p}+R_{1p})}}{R_{0p}R_{1p}}\int_{(p-1)a}^{pa}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\xi\sin\varphi}\mathrm{d}\xi,$$

其中 a 是台阶的高度, $R_{1p} = R_1 + npd, R_{0p} = R_0 - pd\cos\varphi$, 所以, 对于很小的 $\varphi, R_{1p} + R_{0p} \simeq R_1 + R_0 + pd(n-1)$ (分母可近似地作为 R_0R_1). 积分并求和得出

$$u = \text{常数}\,\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka\sin\varphi}}{\sin\varphi}\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}km[d(n-1)-a\sin\varphi]}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[d(n-1)-a\sin\varphi]}}.$$

当 $(a/\lambda)\sin\varphi = \pm 1$ 时, 第一个因子等于零, 若 $a \gg \lambda = 2\pi/k$, 折射角 φ 就被限制为很小值. 第二个因子的分子和分母同时为零给出主极大,

$$m[d(n-1) - a\sin\varphi] = N_0\lambda, \quad N_0 \text{ 为整数};$$
$$d(n-1) - a\sin\varphi = N\lambda, \quad N \text{ 为整数}.$$

在 $|(a/\lambda)\sin\varphi| < 1$ 区间内, 只有一个极大 $N \simeq (d/\lambda)(n-1)$. 它旁边的零点位移了 $\Delta\varphi$, 由

$$-a\Delta\varphi = \left(\frac{N_0 \pm 1}{m} - N\right)\lambda = \frac{\lambda}{m}$$

给出. 另一方面对应于位移 $\delta\varphi$ 的波长改变由

$$d\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda - a\delta\varphi = N\delta\lambda \cong \frac{d}{\lambda}(n-1)\delta\lambda$$

给出. 由条件 $\Delta\varphi = \delta\varphi$ 确定分辨率为

$$A \equiv \frac{\lambda}{\delta\lambda} = md\left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right).$$

[A–5] (§15)　情况如图 A.1 所示. 参看 M. Born, *Optik*, p. 238 (补充书目).

[A–6] (§16)　这是托马斯和库恩的 f 数求和定则 (参看 M. Born, *Optik*, p. 468, 525, 补充书目). 在量子力学中, f 数求和定则是坐标 x_k 和速度分量 $\dot{x}_l$ 的对易关系 $x_k\dot{x}_l - \dot{x}_l x_k = \mathrm{i}\omega_0\delta_{kl}$ 的结果.

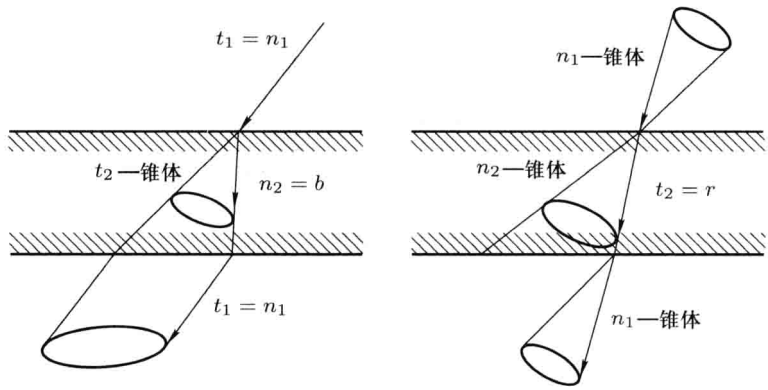


图 A.1

[A–7] (§19)　库恩 (W. Kuhn), 物理化学期刊 (*Z. physik. Chemie*) **B4**, 14(1929). 参看 M. Born, *Optik* p. 527 (补充书目).

索引

(汉－英)

二　　画

力学问题　Mechanical problem, §3
入射波　Incident wave, §9
入射面　Plane of incidence, §1, §9, §10, §11.
入射强度　incident intensity, §9, §18.

三　　画

干涉　Interference, §5, §6, §8.
马吕斯　Malus's law, §2

四　　画

介电常数张量　Dielectric constant tensor, §12
反对称张量　Skew-symmetric tensor, §19.
反射光线　Reflected ray, §1, §9.
反射定律　Law of reflection, §1, §6.
反射波　Reflected wave, §9, §11.
反射强度　Reflected intensity, §9, §10.
双折射　Double refraction, §15, §20
双光线　Biradials, §14
双法线　Binormals, §14
比光强　Specific light intensity, §4
韦尔代常数　Verdet's constant, §20
无色散介质　Dispersion-free media, §5
夫琅禾费衍射　Fraunhofer diffraction, §7

开普勒定律 Law of Kepler, §3
牛顿环 Newton's rings, §6
孔径 Aperture, §7
贝塞尔不等式 Bessel's inequality, §5
贝塞尔函数 Bessel function, §7
巴比涅定理 Babinet's theorem, §7
分辨率 Resolving power, §7, [A–4]
分子折射度 Molar refractivity, §16

五　　画

主入射角 Principal angle of incidence, §10
主介电常数 Principal dielectric constants, §12
主极大 Principal maxima, §7, [A–4]
主轴 Principal axes, §12
主截面 Principal section, §12
平行光线 Parallel ray, §7
平面波 Plane wave, §5, §8, §9, §10, §12, §15, §19
平面波的偏振 Polarization for plane waves, §8, §10
正则方程 Canonical equations, §3
正则方程的非齐次形式 Inhomogeneous form of canonical equations, §3
正则形式中的致极原理 Extremal principle in canonical form, §3
正弦条件 Sine condition, §2, §7
电子 Electrons, §16, §17, §18, §20
电子自旋 Spin of electron, §20
电导率 Electrical conductivity. §10
电偶极矩 Electric dipole moment, §16
电流密度 Current density, §16
电极化 (矢) Electric polarization, §16, §18
电磁波 Electromagnetic wave, §8, §9
电磁波的能量守恒 Conservation of energy for electromagnetic waves, §8, §12, §16
电磁场能量密度 Energy density of electromagnetic fiedl, §12
对偶方程 Dual equations, §13
对偶变量 Dual variables, §13
矢势 Vector potentials, §18
矢量振动 Vectorial oscillation, §5
发光物 Luminous object, §7
发射 Emission, §4

布隆斯定律 Bruns's law, §2
布儒斯特定律 Brewster's law, §9
边界条件 Boundary conditions, §7
出射波 Outgoing wave, §7

六 画

迈克耳孙透射阶梯光栅 Michelson's transmission echelon, §7
光矢量 Light vector, §8
光－光散射 Light-light scattering, [A–3]
光的微粒说 Corpuscular theory of light, §5
光的比强度 Specific intensity of light, §4
光波的横向性 Transversality of light waves, §5, §8
光轴 Optical axes, §12, §14
光线方向 Ray direction, §3, §13, §14, §15
光线方程 Ray equation, §2, §3
光线轴 Ray axes, §14
光线指数 Ray index, §12, §13
光线锥 Ray cone, §14
光线面 Ray surface, §13
光线矢 (量) Ray vector, §13
光线速 (度) Ray velocity, §13
光线变量 Ray variables, §13
光线微分方程 Differential equations for light rays, §2, §3
光程 Optical path, §1, §15
光度亮度 Photometric brightness, §4
光单轴晶体 Optically uniaxial crystals, §12
光学仪器 Optical instruments, §7
光栅 Grating, §7
光栅衍射 Diffraction from grating, §7
光阑 Diaphragm, §7
光谱线的分裂 Splitting of spectral lines, §20
阶梯光栅 Step-grating, §7
全反射 Total reflection, §9
全反射极限角 Limiting angle of total reflection, §9
各向同性介质 Isotropic media, §1, §5, §6, §7, §9, §16, §19
各向同性辐射体 Isotropic radiator, §4
各向异性介质 Anisotropic media, §19
机械波 Mechanical waves, §5

机械动量	Mechanical momentum, §3
吸收	Absorption, §3, §17
吸收介质	Absorbing media, §10, §11, §17
吸收介质的菲涅耳公式	Fresnel's formulae for absorbing media, §10, §11
寻常光线	Ordinary ray, §12
色散定律	Dispersion law, §5, §17
考纽螺线	Cornu spiral, §7
导电性	Electrical conductivity, §10
汤姆孙	J. J. Thomson, §18
托马斯－库恩 f 数求和定则	f-sum rule of Thomas and Kuhn, [A–6]
多普勒效应	Doppler effect, §18

七　画

折射定律	Law of Refraction, §1, §6
折射波	Refracted wave, §9, §10
折射率	Index of refraction, §1, §5, §6, §10, §12, §17, §19, §20
折射光线	Refracted ray, §1, §9
折射强度	Refracted intensity, §9
阻尼力	Damping force, §17
阻尼波	Damped wave, §10
阻尼振荡	Damped oscillations, §17
阻尼常数	Damping constant, §10
位相的连续性	Continuity of phase, §6, §9
位相 (的) 传播	Propagation of phase, §13
杨	T. Young, §5
麦克斯韦方程	Maxwell equations, §8, §16, §19
克劳修斯－莫索提方程	Clausius-Mosotti equation, §16
库恩模型	Kuhn's model, §19
均匀介质	Homogeneous media, §1, §18
完备 (性) 关系	Completeness relation, §5
完美镜	Perfect mirror, §11
时间平均的强度	Time-averaged intensity, §5
(与) 时间无关的波动方程	Time-independent wave equation, §8
极矢	Polar vector, §19

八　画

波长	Wavelength, §6, §7, §18, [A–4]

波色	Wave packet, §5, §7, §13
波面	Wave surface, §3, §13
波运动学	Wave kinematics, §5
波法线	Wave normal, §3, §5
波动概念	Wave concept, §5
波动方程	Wave equation, §5
波动方程的普遍解	General solution of wave equation, §5
波动方程的基尔霍夫解	Kirchhoff's solution of wave equation, §7
波锥	Wave cone, §14
非均匀介质	Inhomogeneous media, §6
非吸收介质	Nonabsorbing media, §9
非吸收介质的菲涅耳公式	Fresnel formulae for nonabsorbing media, §9
非常光线	Extraordinary ray, §12
非线性光学	Nonlinear optics, [A–3]
非偏振光	Unpolarized light, §8, §9, §18
非镜面对称分子	Not mirror-symmetric, molecules, §18
法拉第效应	Faraday effect, §20
法拉第效应中的折射率	Index of refraction in Faraday effect, §20
法拉第效应中振动面的旋转	Rotation of plane of oscillation in Faraday effect, §20
拉莫尔频率	Larmor frequency, §20
拉格朗日乘子法	Method of Lagrangian multipliers, §1, §3, §12
表面波	Surface wave, §9
表面处 E 的不连续性	Discontinuity of E at surface, §8
金属的光学常数	Optical constant for metals, §10, §17
金属的 (复) 折射率	Index of refraction of metals (complex), §10, §17
线性叠加原理	Linear superposition principle, §5
线偏振光	Linearly polarized light, §5
驻波	Standing wave, §11
垂足面	Pedal surface, §13
奇异方向	Singular directions, §14
坡印亭矢	Poynting vector, §9, §12, §13, §16
物空间	Object space, §11
物质振子的能量密度	Energy density of material oscillators, §16
受照物	Illuminated object, §7
周期过程的麦克斯韦方程	Maxwell equation for periodic processes, §8, §10, §12, §18
质量吸收系数	Mass absorption coefficient, §18
变分原理	Variational principle, §2, §3

变折射率 Variable index of refraction, §1, §5
单轴晶体 Uniaxial, crystals, §12
欧拉 L. Euler, §5
欧拉齐次 (性) 关系 Euler's homogenity relation, §3, §13
帕塞瓦尔公式 Parseval's formula, §5

九　画

复振幅 Complex amplitude, §5
复介电常数 Complex dielectric constant, §10
相干光源 Coherent light sources, §7, [A–3]
相干波列 Coherent wave trains, §6
相速 Phase velocity, §5, §6, §8, §9, §12, §16
衍射花样 Diffraction pattern, §7
衍射角 Diffraction angle, §7
狭缝 Slit, §7
狭缝衍射 Diffraction by slit, §7
统计力学 Statistical mechanics, §18
统计平均 Statistical average, §18
哈密顿 W. R. Hamilton, §2
哈密顿理论的齐次形式 Homogeneous form of Hamilton's theory, §3
哈密顿理论的非齐次形式 Inhomogeneous form of Hamilton's theory, §3
费马原理 Fermat's principle, §1, §3
标波 Scalar wave, §8
标势 Scalar potentials, §18
洛伦兹力 Lorentz force, §20
洛伦兹散射理论 Lorentz's theory of scattering, §18
带电粒子 Charged particles, §16
结构因子 Structure factor, §18
总能 (量) 密度 Total energy density, §16
施照度 Illuminance, §4, §6
恒相面 Surface, of constant phase, §12, §15
显微镜 Microscope, §7
轴矢 Axial vector, §19
屏 Screens, §7

十　画

准弹性振子 Quasi-elastic oscillator, §16

被散射的能量 Scattered energy, §18
被散射 X 射线的强度 Intensity of scattered X rays, §18
振子强度 Oscillator strength, §16
振动面旋转的角度 Angle of rotation of plane of oscillation, §19, §20
能量守恒 Energy conservation, §3
能量辐射 Energy Radiation, §18
能量输运的方向 Direction of energy transport, §13
圆孔衍射 Diffraction from circular aperture, §7
圆偏振 Circular polarization, §19, §20, [A–2]
圆偏振光 Circularly polarized light, §19, §20
圆频率 Circular frequency, §5
透镜 Lenses, §2, §7
致极曲线 Extremal curve, §1
致极性质 Extremal property, §1
格林定理 Green's theorem, §7
朗伯定律 Law of Lambert, §4
涨落理论 Theory of fluctuations, §18

十 一 画

旋光性 Optical activity, §19
旋光性分子 Optically active molecule, §19
旋光性中的折射率 Index of refraction in optical activity, §19
旋光性中振动面的旋转 Rotation of plane of oscillation in optical activity, §19
旋光 (性) 晶体 Optically active crystals, §19
旋光晶体的电偶极矩 Electric dipole moment of optically active crystals, §19
旋光晶体的磁偶极矩 Magnetic dipole moment of optically active crystals, §19
菲涅耳 A. J. Fresnel, §5
菲涅耳积分 Fresnel integral, §7
菲涅耳衍射 Fresnel diffraction, §7
菲涅耳镜 Fresnel mirror, §6
菲涅耳镜实验 Fresnel mirror-experiment, §6
谐波 Harmonic wave, §6
谐振动 Harmonic oscillation, §5
偏振 Polarization, §8, §9, §10
偏振光 Polarized light, §8
偏振面 Plane of polarization, §8, §9, §10, §11, [A–2]
基尔霍夫－克劳修斯定律 Kirchhoff-Clausius law, §2
基尔霍夫解 Solution of Kirchhoff, §7

勒让德变换 Legendre transformation, [A–1]
密度涨落 Density fluctuation, §18
排列张量 Permutation tensor, §19
球面波 Spherical wave, §5

十 二 画

量子力学 (波力学) Quantum (wave) mechanics, §20, [A–6]
量子力学模型 Quantum-mechanical model, §17, §18
量子论中的结构因子 Structure factor in quantum theory, §18
散射角 Scattering angle, §18
散射系数 Scattering coefficient, §18
晶体 Crystals, §3
晶体光学 Crystal optics, §3, §12, §13, §14, §15
晶体光学中的麦克斯韦方程 Maxwell equations in crystal optics, §12
晶体的 (双根) 折射率 Index of refraction of crystals (double root), §12, §14
强度 Intensity, §5, §6, §7, §9, §18
强度比 Intensity ratio, §7
强度极大 Intensity maxima, §6
惠更斯 C. Huygens, §15
惠更斯原理 Huygens's principle, §2, §3
像 (平) 面 Image plane, §7
像空间 Image space, §2
焦平面 Focal plane, §7
傅里叶定理 Fourier's theorem, §5
傅里叶逆变换公式 Fourier inversion formula, §5
程函方程 Eikonal equation, §2
斯涅耳定律 Snell's law, §1
椭圆偏振光 Elliptically polarized light, §9, §10

十 三 画

辐射阻尼 Radiation damping, §17
辐射条件 Radiation condition, §7
数值孔径 Numerical aperture, §7
群速 Group velocity, §5, §13, §16
塞曼效应 Zeeman effect, §20
照度 Intensity of illumination, §4

十 四 画

赫兹矢 (量) Hertz vector, §18
赫兹振子 Hertz oscillator, §18
赫兹振子的能量辐射 Energy radiation of Hertz oscillator, §18
静磁场 Magnetic field (static), §20

十 五 画

影边界 Shadow boundary, §7
横向条件 Transversality condition, §3
横矢波 Transverse vector wave, §8

十 六 画

激光器 Lasers, [A–3]

f- 数求和定则 f-sum rule, [A–5]
X 射线 X rays, §16, §18
X 射线 (的) 散射 Scattering of X rays, §18
π (平行于 H 的) 振动 π (parallel to H) oscillation, §20
σ (垂直于 H 的) 振动 σ (perpendicular to H) oscillation §20

第三卷

热力学和气体分子运动论

苑之方　译

留润州　校

英译本主编序言

这是关于唯象热力学的传统课程。如泡利在导言中所说，除时间的方向外，在热力学结构中，时间并不表现为变量。因此，课题被局限于平衡理论 (静态)，而不讨论不可逆热力学。泡利用归纳法 (正像在这套讲义的电动力学分册中所用的) 处理这一传统课题，并强调这一理论的历史发展和逻辑结构. 正是由于这一原因，泡利详尽地论述了卡诺循环和范霍夫反应匣。公理的表述只是作为例证而给出。

泡利甚至在他讲授像本课程这种已确立的课题时也偶尔地发挥了他的批判精神。因而，在他临终的一年，他仔细地考虑关于化学反应的较好的表述，并如附录中所述，在他讲课期间完成了一篇论文，这篇论文已包容在作为英译本蓝本的 1958 年德文第二版中。这个版本是他的学生 E. Jucker 所作的笔记 (1952 年出版) 的修订本。

自从泡利在苏黎世联邦工业大学 (ETH) 讲授这一课程以后，平衡态热力学再次成为一个活跃的研究领域。确实，当今已用显示热力学量的典型奇点的定标法则 (scaling laws) 来描述相变. 在 H. E. Stanley 所著的一本很新的书，《相变和临界现象导论》(Introduction to phase Transition and critical phenomena, Oxford University Press, New York, 1971) 中对这一引人入胜的新领域作了优美的描述。此外，像拉曼散射这类新技术已被应用于研究热力学系统，并且像液晶这类新型物质已变得重要了。因此，坚实的热力学基础，如在本讲义中所给出的，当今比泡利时代更为重要。

最后一章，关于气体分子运动论，与这一课程的其余部分在逻辑上没有联系。它实际上属于这一套讲义的统计力学分册的第一章。泡利讲义在此处的分割是与学期的划分相适应的。

纵然本课程的编辑工作并未提出独特的问题，但译者们的工作还是值得特别感谢的。

查理 P. 安兹

日内瓦, 1971 年, 11 月 18 日

第一章

基本概念和热力学第一定律

经典热力学摒弃了详尽的图像,因而,对热传递的能量理论只作出一般性的叙述. 它局限于平衡态和十分缓慢地发生的过程. 在热力学中不出现具有时间量纲的量; 时间至多是通过 "以前" 和 "以后" 的概念而潜入的. 所以, 在迅速发生的过程中, 只谈到始态和终态. 在热力学中不作有关热的本性的考虑. 只在气体分子运动论中才首次论述这一问题.

§1. 热力学变量

定义: 热力学变量是表征系统的可测 (量) 的宏观量.

例: 压强 p, 体积 V, 表面张力 σ, 表面积 A, 应力张量 S_{ik}, 应变张量 l_{ik}, 磁化强度 M, 磁场强度 H, 浓度 c, 物质的量 n.

§2. 温度的概念

必须首先定义系统的温度 t. 实验表明, 若系统是闭合的, 则在系统内部发生热交换, 直至达到热稳定态; 这样的态称为热平衡①. 通过导热性连接物的热交换, 能在两系统间建立热平衡. 因此, 我们可以说, 若两系统 (彼此) 处于热平衡, 则它们具有相同的温度.

一个处于热平衡的系统少一个自由度 [A–1].②存在一个如下的关系 [A–2]

$$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n) = \text{常数}.$$

式中 x_i 和 y_i 为表征系统的热力学变量. 在单相系的最简单的情况中, 上述关

① 此处按德文原版译出. 英译本为 thermodynamic equilibrium, 不妥. —— 中译者注

② 评注 [A–1] —— [A–13] 见附录.

系为

$$f(p,V)=\text{常数}.$$

若上关系式中的一个变量保持固定, 则另一变量是温度的一个任意量度. 例如, 这种量度之一是一定量的物质在定压时的体积. 由于体积随温度的变化对不同物质来说是不同的, 所以不能用定压时的体积绝对地定义温度. 只有根据热力学第二定律才能给出温标的严格的热力学定义. 然而, 我们的初步定义总能确定一个温度比另一温度高还是低: 正常物质因升高温度而膨胀. 也存在反常物质 (例如 0°C 至 4°C 间的水), 但利用下述实验能识别它们. 使一种物质的具有不同温度的两个样品 A 和 B 作热接触. 在其后的热交换中样品分别经受体积变化 ΔV_A 和 ΔV_B. 对于正常物质,我们总有 $\Delta V_A\Delta V_B<0$, 但对于反常物质, 能够这样来选择初始条件, 以使 $\Delta V_A\Delta V_B>0$. 稳态热传导 (参考 § 3) 提供了断定两个温度哪一个较高的另一可能性. 用这种方法我们获得一个单调的温标; 即, 若 $t_1>t_2$, 并通过一个单调的变换 $t'=f(t)$ 引入一个新温标, 则对于此新温标也有 $t'_1>t'_2$ [A–3].

§3. 热量

我们从实验中发现, 一种物质的两相间存在着平衡:

$$\text{液态}\rightleftharpoons\text{气态},$$
$$\text{液态}\rightleftharpoons\text{固态},$$
$$\text{固态}\rightleftharpoons\text{气态}.$$

为了改变两相间的平衡, 必须加入或取出热量; 这种热称为转变热 (例如, 汽化热或熔解热). 在此变化中温度和压强保持恒定. 我们能够用转变热来定义热量 (在恒温时).

定义: n 克某种物质相变所需要的热量是 1 克该种物质相变所需热量的 n 倍 (转变热正比于物质的量).

由于转变热是在恒温下加入或释放的, 所以这一定义与温标的确定无关.

为了在不同的温度下比较热量, 我们利用如下形式的稳态热传导过程: 用导热体将温度为 t_1 和 $t_2(t_1>t_2)$ 的两个热库连接起来.

定义: 热库 1 释放的热量 Q_1 等于热库 2 吸收的热量 Q_2.

量 Q_1 和 Q_2 也可以是转变热, 如此, 则许可与恒温下定义的热量直接比较. 温标的单调变换并不改变这一定义.

从历史上看, 热量是用混合法定义的. 我们将质量分别为 m_1 和 m_2、温度为 t_1 和 $t_2(t_1<t_2)$ 的同一种物质的两份混合, 而得到质量为 m_1+m_2、温度

为 t_3 的混合物. 使吸收的热量等于释放的热量, 我们得到

$$Q = cm_1(t_3 - t_1) = cm_2(t_2 - t_3),$$

式中 c 为该物质的比热. 由此得出

$$t_3 = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

这个公式在温标的允许变换下不是不变的. 同理, t_3 的值也取决于混合时 p 或 V 哪个量保持恒定. 上述公式只对足够小的温差才是正确的. 我们若令 $t_3 = t_1 + \mathrm{d}t$ 和 $t_2 = t_1 + \mathrm{d}t_1$, 则得到

$$c(m_1 + m_2)\mathrm{d}t = cm_2\mathrm{d}t_1$$

或

$$\mathrm{d}t = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{d}t_1.$$

由于 c 一般与温度 t 相关, 所以热量的精确定义应为

$$Q = m\int_0^t c(t)\mathrm{d}t = m\int_0^{t'} c'(t')\mathrm{d}t'.$$

然而, 热量的这一定义是很不方便的. 由于我们已经定义了热量, 从而我们能够以下述方式将 c 定义为比热:

$$\delta Q = mc\mathrm{d}t = mc'\mathrm{d}t'.$$

当然, 比热 c 取决于温标的定义.

§4. 热力学第一定律

热力学第一定律给出热量与其他形式的能量之间的关系. 我们将机械功定义为系统所作的功. 总能够将它归结为重物的升、降.例:

(a) 若一单相系用变量 p 和 V (压强和体积) 表征, 则该系统在态变化时所作的功为

$$\delta W = p\mathrm{d}V.$$

(b) 对于用表面张力 σ 和表面积 A 表征的系统, 该系统在态变化时所作的功为

$$\delta W = -\sigma\mathrm{d}A.$$

(c) 类似地, 若一系统用磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 和磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 表征, 则该系统在态变化时所作的功为

$$\delta W = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{H}.$$

若系统在态有正变化 (即热力学变量的正变化) 时作功, 则认为机械功是正的. 量 p, σ 和 $\boldsymbol{M}$ 称为强度量 (y_i), 因为它们在机械功的表达式中以因数的形式出现. 量 V, A 和 $\boldsymbol{H}$ 称为广延量 (x_i), 因为它们以微分的形式出现. 一般地, 机械功能够表示为 [A–2]

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n-1} y_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_k$$

或

$$\delta W = \sum_{k=1}^{n} y_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_k, \quad y_n = 0.$$

在反抗外力而不发生机械位移时, 系统可能吸收或释放热量. 若系统吸热, 则我们认为 δQ 为正.

热和功的差异并不总是能够唯一地确定. 人们假设存在着热和功两者能彼此严格区别的、包含理想过程的一些情况. ①

热力学第一定律: 若使一个系统从状态 1 到达状态 2, 则加给系统的热量和对系统所作的功之和与从态 1 至态 2 的路径无关, 即

$$J \sum_{(1\to 2)} \delta Q - \sum_{(1\to 2)} \delta W = f(1,2),$$

式中 J 为热功当量, 它取决于单位制 (在 cm · g · s 单位制中, $J = 4.186 \times 10^7 \mathrm{erg/cal}$). ②此后, 将总是用机械功的单位来量度热量, ③ 所以 J 可以略去. 于是, 我们可以写成

$$\sum_{(1\to 2)} \delta Q - \sum_{(1\to 2)} \delta W = f(1,2).$$

选取一个任意态 o 作为始态, 我们能够定义态 n 的内能 E_n 为

$$\sum_{(o\to n)} \delta Q - \sum_{(o\to n)} \delta W = E_n.$$

① 德文原版为: 人们假设存在着热和功两者能严格区别的一些情况. 它们称为理想过程, 在这些过程中, 一切都可归结为机械功和热量.——中译者注

② 英译者注: 在德文原版中, 此值误为 4.136×10^7 erg/cal.

③ 英译本为 "热能".——中译者注

因为始态是任意选取的, 所以确定内能时有一任意相加常数.

于是热力学第一定律现在可以写成如下形式:

$$E_2 - E_1 = \sum_{(1\to 2)} \delta Q - \sum_{(1\to 2)} \delta W.$$

利用内能 E_n, 我们能将热力学第一定律更扼要地表述为: E_n 是态函数 (即, 它是与路径无关的). 对于循环过程 (相同的始态和终态), 我们有

$$\sum_{(1\to 1)} \delta Q - \sum_{(1\to 1)} \delta W = 0.$$

这一方程表明, 在循环过程中热量只能转变为功, 反之亦然. 这等效于如下的论断: 不存在凭空产生热量或作功的循环机, 而这是建造第一类永动机不可能性的一种表述.

§5. 热力学的态变化

人们一方面区分了 (态的) 准静的 (缓慢发生的) 态变化与迅速发生的态变化, 另一方面区分了 (态的) 等温的、等能的和绝热的态变化.

a. 准静态变化

不仅态变化的结果是可逆的, 而且每一个别阶段亦然.

例: 如图 5.1、图 5.2 所示, 体积 V_1 的气体被无限缓慢地压缩到体积 V_0. 气体和容器都放在一无限大的热库中, 使得其温度保持恒定 (等温的态变化). 除对系统作功外, 没有发生其他变化. 这一过程同样能够反向地发生, 即气体由 V_0 无限缓慢地膨胀至 V_1.

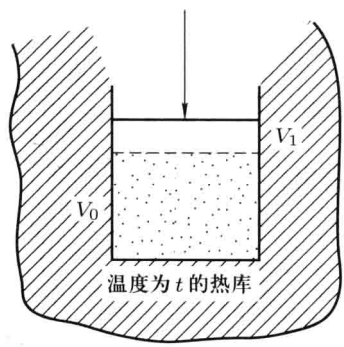


图 5.1

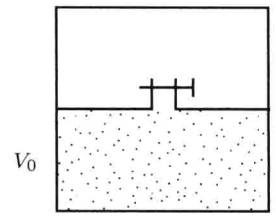


图 5.2

b. 迅速发生的态变化

只当系统相对其周围是闭合的, 这些态变化才是可控制的.

例: 让容纳在容积 V_0 中的气体流入一抽空的容积 V_1, 以使 V_0 与 V_1 两容积内都充满气体. 这一过程非常迅速地发生, 并且是不可逆的.

1. 等温的态变化: 在态变化的过程中, 温度 t 是恒量 $(\mathrm{d}t = 0)$.

2. 等能的态变化: 在态变化的过程中, 内能 E 保持恒定, 即完全闭合系的态变化是等能的 $(\mathrm{d}E = 0)$.

3. 绝热的态变化: 在态变化的过程中, 未加入或取出热量, 即以绝热壁 (不导热的壁) 将系统隔离 $(\delta Q = 0)$.

应该注意, $\mathrm{d}E = \delta Q - \delta W$ 和 $\delta W = \sum_k y_k \mathrm{d}x_k$ 两式只对缓慢的态变化才是完全确切的.

§6. 热力学第一定律的数学表述

为了使表达式 $\sum_k y_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_k$ 是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的恰当微分 $\mathrm{d}f$, 下列条件必须成立

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

这些条件是从下列关系式导出的:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = y_k \quad 和 \quad \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}.$$

另一方面, 斯托克斯定理表明

$$\int \sum_{i>k} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} - \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}x_i \times \mathrm{d}x_k = \oint \sum_k y_k \mathrm{d}x_k.$$

若满足上面所要求的条件, 则

$$\oint \sum_k y_k \mathrm{d}x_k = 0.$$

这意味着积分 $\int_1^2 \sum_k y_k \mathrm{d}x_k$ 与路径无关. 所以存在一个任意相加常数的函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 而且其恰当微分为表达式

$$\mathrm{d}f = \sum_k y_k x \mathrm{d}_k.$$

所要求的条件也是充分的.

普法夫 (Pfaff) 曾证明: 微分形式 $\sum_k y_k \mathrm{d}x_k$ 总能变换为范式 $\sum_{\nu=1}^{m} X_{2\nu} \mathrm{d}X_{2\nu-1} + k\mathrm{d}X_{2m+1}$, 其中 $2m \leqslant n$ (n 为偶数) 或 $2m+1 \leqslant n$ (n 为奇数). 若变量的数目 n 为偶数, 则 $\mathrm{d}X_{2m+1}$ 项消失 ($k=0$). 若 $2m < n$ (n 为偶数) 或若 $2m+1 < n$ (n 为奇数), 则系统是简并的. 若我们有只具两个变量的微分形式 $\delta h = y_1 \mathrm{d}x_1 + y_2 \mathrm{d}x_2$, 并且

(a) 若 δh 为一恰当微分, 则其范式为

$$\delta h = \mathrm{d}X;$$

(b) 若 δh 不是恰当微分, 则我们得到

$$\delta h = y_1 \mathrm{d}x_1 + y_2 \mathrm{d}x_2 = X_2 \mathrm{d}X_1 \quad 或 \quad \frac{\delta h}{X_2} = \frac{y_1 \mathrm{d}x_1 + y_2 \mathrm{d}x_2}{X_2} = \mathrm{d}X_1.$$

于是, $\delta h / X_2 = \mathrm{d}X_1$ 为一恰当微分, 这意味着 $1/X_2$ 为一积分因数. 所以, 对于只有两个变量的微分形式, 总存在一个积分因数.

一般地, δQ 和 δW 不是恰当微分. 另一方面, 根据热力学第一定律, $\delta Q - \delta W = \mathrm{d}E$ (内能的微分) 为一恰当微分. 也就是说, E_n 为一态函数. 根据热力学第一定律, 能将对热力学系统的所有作用归结为升、降重物以及加入和取出热量.

§7. 热力学第一定律的应用

a. 理想气体的定义

理想气体由以下三个性质来定义:

1. 内能 $E(V,t)$ 是与体积 V 无关的, 即,

$$E(V,t) = E(t) \quad 或 \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_t = 0.$$

2. 等温线为

$$pV = 常数 \text{ (玻意耳–马略特定律)}. \tag{7.1}$$

3. 采用适当的温标, 则有

$$V_t = V_0(1 + \alpha t), \tag{7.2}$$

式中 α 对所有理想气体都是相同的. 所以, 借助于理想气体, 能够引入一个新温标. 然而它只被确定到不超过一个线性变换的范围内. 下文我们将假定, 已经引入这样一种气体温标, 例如摄氏温标 ($\alpha = 1/273°$). 将 2 和 3 两种性质结合起来, 我们得到 [A–4]:

3′. $pV = p_0V_0f(t)$, 式中 $f(t)$ 对所有气体都是相同的函数: $f(t) = 1 + \alpha t$. 若我们令 $1/\alpha + t = T$ (称为 "绝对温度"), 则式 (7.2) 简化为 $V_t = V_0\alpha T$, 并且我们得到

$$p_tV_t = p_0V_0\alpha T. \tag{7.3}$$

引入下列各量是有用的:

$$\text{密度}: \rho = \frac{\text{质量}}{\text{体积}},$$

$$\text{物质的量}: n = \frac{\text{质量}}{1\text{ 摩尔质量}},$$

$$\text{摩尔体积}: v = \frac{1\text{ 摩尔质量}}{\text{密度}}.$$

因为 $p_0V_0\alpha$ 与温度、压强和体积都无关, 而只与物质的量有关, 所以我们可令 $p_0V_0\alpha = Rn$; 并因 $V_t = nv$, 于是我们得到

$$p_tV_t = p_tnv = p_0V_0\alpha T = RnT, \tag{7.4}$$

或

$$pv = RT \text{ (每摩尔)}. \tag{7.5}$$

R 与理想气体的本性无关, 在 cm · g · s 单位中, $R = 8.31 \times 10^7\text{erg/K}$. 上面的公式等效于阿伏伽德罗定律, 该定律说: 在相同的压强和温度时, 所有气体的摩尔体积相等. 在历史上, 这一定律导致原子和分子间的区别.

我们不能说一种气体必须稀化到什么程度才算理想气体. 然而, 利用焦耳的自由膨胀实验, 我们能够确定该气体是否是理想气体. 让气体流入真空, 并测定该过程始末的温度. 为了避免与周围有能量交换, 整个系统必须完全隔离: $E = E_0$. 若 $T_1 = T_0$, 则必定有 $(\partial E/\partial V)_T = 0$; 即该气体为理想气体 (图 7.1).

b. 比热①

1. 任意单相系. 按照 §3, 比热由下式计算 [A–5]

$$c = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t}.$$

① 本节中所谓 "比热" 实为热容, 并参阅英译本主编评注 [A–5]. —— 中译者注

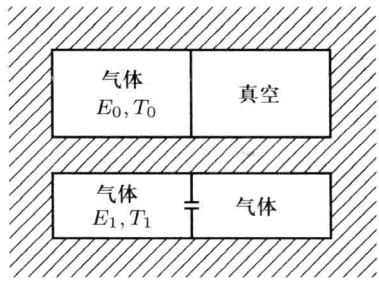


图 7.1

根据 p 或 V 何者保持恒定, 我们来区分 c_p 和 c_V, 即, 分别为定压比热和定体比热. 由热力学第一定律得出

$$c_V = \frac{(\delta Q)_V}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \tag{7.6}$$

和

$$c_p = \frac{(\delta Q)_p}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{7.7}$$

若将表达式

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

代入式 (7.7), 我们得到

$$c_p - c_V = \left[p + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

借助于热力学第二定律能将这一公式简化. 若已给定 $E(p,T)$ 和 $V(p,T)$ 则

$$\mathrm{d}E = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T,$$
$$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T,$$

和

$$\begin{aligned}\delta Q &= \mathrm{d}E + p\mathrm{d}V \\ &= \left[\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]\mathrm{d}p + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]\mathrm{d}T,\end{aligned}$$

最后一式给出如下公式

$$\delta Q = c_p \mathrm{d}T + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]\mathrm{d}p. \tag{7.8}$$

2. 理想气体. 因为对于理想气体有 $(\partial E/\partial V)_T = 0$, 由此得出

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = c_V,$$

并且因为 $pV = RnT$, 于是得到

$$c_p - c_V = p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = p\frac{Rn}{p} = nR.$$

对于每摩尔, 则有[①]

$$c_p - c_V = R.$$

而 c_p 能由实验很好地测定, 并且根据声速则能确定 $\varkappa = c_p/c_V$[②]. 从这些数值我们求得

$$R = 1.985\ \mathrm{cal/K} \sim 2\ \mathrm{cal/K},$$

将这一结果与上文给出的 R 结合起来, 定出热功当量为

$$J = 4.19 \times 10^7\ \mathrm{erg/cal}[③].$$

因为理想气体等温的态变化 $(\mathrm{d}T = 0)$ 也是等能的 $(\mathrm{d}E = 0)$, 于是我们有

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \int_1^2 p\mathrm{d}V = \int_1^2 RT\frac{\mathrm{d}V}{V} = RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

关于理想气体绝热的态变化 $(\delta Q = 0)$, 我们有

$$\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V = c_V\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = 0 \text{ 或 } \mathrm{d}T = -\frac{p\mathrm{d}V}{c_V}.$$

由 $pV = RT$ 导出

$$p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = R\mathrm{d}T = -\frac{R}{c_V}p\mathrm{d}V$$

或

$$p\mathrm{d}V\left(1 + \frac{R}{c_V}\right) + V\mathrm{d}p = 0,$$

也可写成

$$\varkappa\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{\mathrm{d}p}{p}. \tag{7.9}$$

该微分方程的解为

$$pV^{\varkappa} = \text{常数}$$

① 下式中的 c_p 和 c_V 分别为定压摩尔热容和定体摩尔热容.——中译者注

② 参见 261 页.

③ 英译者注: 在德文原版中, 此值误为 4.15×10^7erg/cal.

(理想气体的绝热状态方程).

因为声音在气体中的传播是由气体的绝热压缩和绝热膨胀所形成, 所以在声速中出现 $\varkappa$. 声速的表达式为

$$u^2 = \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\text{绝热}} = -\frac{v^2}{M}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}\right)_{\text{绝热}}.$$

从上式和绝热状态方程, 我们得到

$$u^2 = \frac{p}{\rho}\varkappa = \varkappa\frac{R}{M}T,$$

(M= 摩尔重量[①], u= 声速).

从 $pV^{\varkappa}$= 常数能导出下列公式:

$$p^{\frac{c_V}{R}}V^{\frac{c_p}{R}} = \text{常数}, \quad \frac{1}{p}T^{\frac{c_p}{R}} = \text{常数}, \quad T^{\frac{c_V}{R}}V = \text{常数},$$

以及

$$\varkappa p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\text{绝热}} + V = 0,$$

最后一式也可从式 (7.9) 导出.

c. 两相平衡

缩写: g = 气态, l = 液态.

我们由实验知道, 沿平衡曲线 $p = p(T)$, 两相能以任意相对量共存. 平衡时, $p = p_g = p_l$ 及 $T = T_g = T_l$.

根据热力学第一定律, 转变热 (汽化热) 之值由下式给出

$$\lambda = \Delta Q = (E_g - E_l) + p(V_g - V_l),$$

式中第一项为气、液两相的能量差, 而第二项为汽化时所作的功.

转变热沿汽化曲线[②] $p(T)$ 的改变量 $\mathrm{d}\lambda$ 为

$$\mathrm{d}\lambda = (\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V)_g - (\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V)_l + (V_g - V_l)\mathrm{d}p.$$

另一方面, 我们可将沿汽化曲线加入的热量写成[③]

$$\delta Q = \bar{c}\mathrm{d}T.$$

① molar weight. —— 中译者注

② 德文原版中为蒸气压曲线 (以下同此). —— 中译者注

③ 以下各式中的 $\bar{c}$ 为两相平衡热容. —— 中译者注

若将此式代入式 (7.8), 则得到

$$\bar{c} = c_p + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}$$

以及

$$\mathrm{d}\lambda = (\bar{c}_g - \bar{c}_l)\mathrm{d}T + (V_g - V_l)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\mathrm{d}T$$

或

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T} = (\bar{c}_g - \bar{c}_l) + (V_g - V_l)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

在熔化的情况中, 我们得到形式上相同的关系.

第二章

热力学第二定律

热力学第二定律区别了热量和其他形式的能量. 它指出了时间的方向, 并显示了热量是无序形式的能量.

§8. 热力学第二定律的表述

a. 克劳修斯表述

不存在这样的装置, 当它完成一个循环时, 能使热量从具有某一温度的热库传递至较高温度的热库, 而无补偿变化 (即, 除非同时对它作了机械功, 或以某种方法从周围供给它能量).

克劳修斯表述中所考虑的过程的逆过程则是可能的. 导热连接的存在证明了这一点. 克劳修斯说: 热传导是一种不可逆过程.

"不可逆" 一词能用上面的表述或如下的陈述来定义: 若不作功或不发生其他变化 (即无补偿) 就不能从终态达到始态, 则这样的过程称为不可逆的.

准静 (态) 过程总是可逆的.

b. 汤姆孙表述

不存在这样的装置, 当它完成一个循环时, 能从一个物体取出热量, 并转换为功, 除非发生其他变化 (至少在其他物体中).

如内摩擦所表明的, 这一过程的逆过程却是可能的. 汤姆孙说: 内摩擦是一种不可逆过程. 这一表述表明: 不存在能将热转换为功而无补偿变化的装置, 即不存在第二类永动机.

§9. 热力学第二定律的定量预示

a. 卡诺循环

卡诺循环是一种准静的 (无限缓慢的) 过程. 它由两个绝热过程 ($\delta Q = 0$) 和两个等温过程 ($\mathrm{d}t = 0$) 所构成. 因为准静 (态) 过程是可逆的, 所以卡诺循环也是可逆的 (图 9.1).

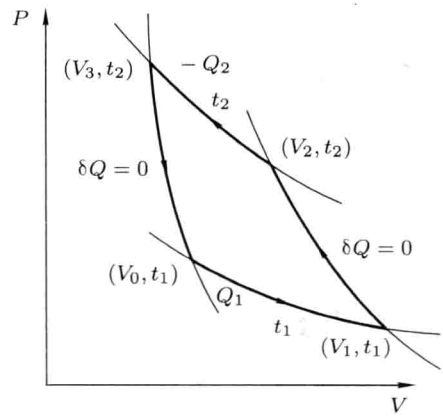


图 9.1

等温线是这样的一些曲线, 沿着这些曲线温度是恒定的. 它们是从等温的态变化得到的. 绝热线是从绝热的态变化得到的. 沿着绝热线既不加入热量也不取出热量; 所以, $\delta Q = 0$.

卡诺循环进行如下: 我们通过等温的态变化 (即, 沿等温线 t_1) 使给定的物质从态 (V_0, t_1) 到达态 (V_1, t_1), 在这个过程中加入了热量 Q_1. 然后通过绝热的态变化 (沿绝热曲线) 使物质到达态 (V_2, t_2). 接着, 沿等温线 t_2 进行直至到达态 (V_3, t_2), 在此过程中取出热量 Q_2. 再从这个态通过绝热的态变化而回到始态 (V_0, t_1). 在所有这四个状态变化过程中都作了功. 根据热力学第一定律, 应有

$$Q_1 - Q_2 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = W.$$

我们区别下述两种情况:

1. $Q_1 > Q_2$: 加入的热量大于取出的热量, 系统借此作功. 在循环中, 热量因之转换为功, 在此过程中热量 Q_2 从 t_1 降至 t_2[①], 即, 热量从高温热库传递至

① 原文如此.——中译者注

低温热库①.

2. $Q_1 < Q_2$: 取出的热量大于加入的热量, 这是由于外界对系统作功所致. 在循环中, 功因之转换为热量, 在此过程中, 热量 Q_1 从 t_1 升至 t_2, 即, 热量从低温热库传递至高温热库. (见图.)②

我们能作出如下的论断:

$$Q_1/Q_2 = f(t_1, t_2);$$

即, Q_1/Q_2 与物质的本性无关. 若此论断不成立, 那么我们就能利用两个卡诺循环构成一个第二类永动机 (图 9.2). 我们用物质 I 进行一个卡诺循环, 并用物质 I' 以相反方向进行另一相同的卡诺循环, 因而 $Q_1 = Q_1'$; 即, 并未从温度 t_1 的热库中取出热量, 因为 I' 送还了 I 所取出的热量. 若 $Q_2 < Q_2'$, 则 I' 从温度为 t_2 的热库中取出的热量大于 I 送还给热库的热量.

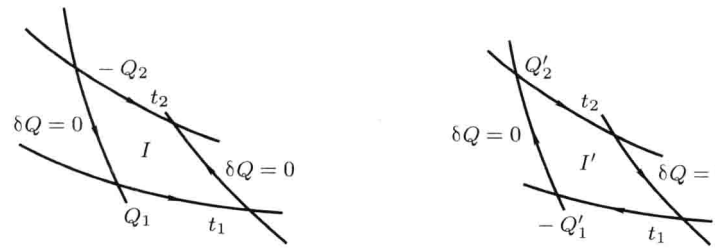
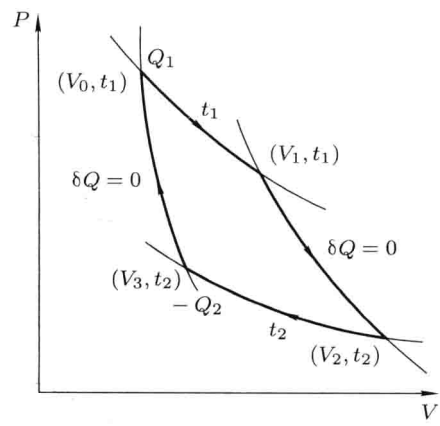


图 9.2

根据热力学第一定律, 此热量差将被转换为功. 所以, 将从温度为 t_2 的热库取得热量, 并转换为功而无补偿变化, 这正是热力学第二定律所禁戒的. 如

① $Q_1 > Q_2$ 的情况可参见下图.——中译者注



② 对图 9.1 而言.——中译者注

果 $Q_2 > Q_2'$, 那么, 我们使两个过程都反转, 则得到与上面相同的情况. 因此, 由于热力学第二定律, 必有

$$Q_2 = Q_2'$$

或

$$\frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{Q_1}{Q_2} = f(t_1, t_2). \tag{9.1}$$

若热力学第二定律不成立, 即, 若热传导是可逆的, 则能够由热量获得功而无补偿变化. 因为只能无补偿变化地使功转换为热量, 而且热量只能无补偿变化地从高温传导至低温, 所以这是实际过程发生的从优方向. 我们现在也能确定 t_1 和 t_2 两个温度哪一个较高, 即较高的温度是: 热量可由该温度流向另一温度而无补偿变化 [A–3]. 因为, 根据 §4, 加入的热量被取为正值, 从而得到

$$Q_1 < Q_2, \quad t_1 < t_2.$$

因为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{Q_1}{Q_0}\frac{Q_0}{Q_2} = \frac{Q_1/Q_0}{Q_2/Q_0} = \frac{f(t_1, t_0)}{f(t_2, t_0)} = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)},$$

从而式 (9.1) 给出的关系能被引伸为

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}. \tag{9.2}$$

现在我们定义

$$\varphi(t) = \text{常数} \times T$$

为热力学温标, 因而能将式 (9.2) 写成

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

或

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \tag{9.3}$$

通过这一方程, 温度被定义到不超过一个常数因数; 现在已规定了零点. 热力学第二定律还表明: 温度 T 取正值 [A–6]. 我们也定义了一个温度是另一温度的两倍的意义.

b. 任意准静 (态) 过程

一任意准静 (态) 循环过程能借助于辅助的卡诺循环 (在极限情况下为无限多个) 归结为单一热库的变化. 首先, 我们只分解为有限个温度为 T_k 的个

别过程, 在这些过程中加入了热量 $\delta Q_k(k=1,2,\cdots,Z)$. 借助于卡诺循环, 从温度 T_0 的单一热库取出热量 δQ_{0k}. 对于所有的 k, 我们有

$$\frac{\delta Q_k}{T_k}=\frac{\delta Q_{0k}}{T_0}.$$

于是, 对于这一循环我们得到

$$\sum_k \frac{\delta Q_k}{T_k}=\sum_k \frac{\delta Q_{0k}}{T_0}=\frac{1}{T_0}\sum_k \delta Q_{0k}=\frac{Q_0}{T_0}.$$

因为我们已完成一个循环, 并且没有引起变化, 所以既不可能曾对温度 T_0 的热库加入热量, 也不可能曾从它取出热量. 因此, 必定有 $Q_0=0$ [A–7], 或

$$\sum_k \frac{\delta Q_k}{T_k}=0,$$

而在极限情况下则有

$$\lim_{Z\to\infty}\sum_{k=1}^{Z}\frac{\delta Q_k}{T_k}=\oint\frac{\delta Q}{T}=0.$$

因此, $\int_1^2 \delta Q/T$ 为一状态函数 (与路径无关). 若引入一参考态 o, 则我们能够将熵定义为

$$S_n=\int_o^n \frac{\delta Q}{T}. \tag{9.4}$$

对于准静态变化, 我们有

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}=S_2-S_1;$$

而对于循环过程, 我们有

$$\Delta S=\oint\frac{\delta Q}{T}=0.$$

c. 迅速发生的过程

我们尚需研究在迅速发生的 (不可逆的) 过程中熵是如何变化的. 为此, 我们考虑一个在闭合匣中的过程 (图 9.3), 匣中内能保持恒定. 热力学要求, 沿准静 (态) 路径是能够从终态回到始态的. 沿这一准静 (态) 路径熵的变化为

$$S_1-S_2=\int_2^1\frac{\delta Q}{T}=\frac{Q_0}{T_0}.$$

式中 Q_0 为从温度为 T_0 的热库取出的热量, 所以必有 $Q_0<0$. 若 $Q_0>0$, 则热

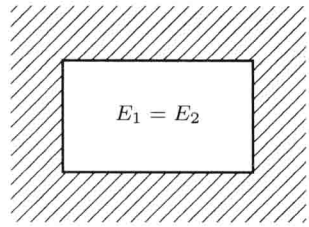


图 9.3

量已被转换为功而无补偿变化, 这与热力学第二定律相悖. 因此 $S_1 < S_2$, 即熵增加了.

关于热力学第二定律, 应该注意如下的问题: 不引用作为克劳修斯和汤姆孙表述的基础的不可逆过程也能确定热力学态函数. 只要对有关准静 (态) 过程的一些问题加以说明, 而稍许削弱不可能性原则, 即可做到这一点. 在准静 (态) 循环过程中:

1. 热量不能转换为功, 除非同时有相应的热量从高温热库转移至低温热库;

2. 热量不能从低温热库转移至高温热库, 除非同时有相应的功转变为热量;

3. 功不能转变为热, 除非同时有相应的热量从低温热库转移至高温热库;

4. 热量不能从高温热库转移至低温热库, 除非同时有相应的热量转变为功.

若我们假设上述四条关于准静 (态) 变化的公理成立, 则存在一个熵函数. 若我们要求, 只有公理 1 和 2 对迅速发生的过程是正确的, 则仍然存在一个熵函数. 在闭合系中, 熵只能按一个方向变化; 它或许增加, 或许减少. 然而, 两种可能性绝不会同时成立 [A–8].

另外应注意的, 是关于由卡诺过程所定义的温度是否必须是正值的问题 [A–6]. [在喀拉西奥多里 (Carathéodory) 热力学表述 (§11) 中, 关于积分因数的符号也存在同样的问题.] 按照公理体系的观点, 埃伦菲斯特–阿法纳谢娃 (T. Ehrenfest–Afanasjewa) 证明了这并非是从多余的假设中自然产生的 [Z. Physik **33**, 933 (1925) 和 Z. Physik **34**, 638 (1925) 中的勘误]. 然而, 为了使这一问题不停留在纯形式的问题上, 在此必须应用构成下一组讲义的论题的统计方法 (正则系综). 按照这一广义观点, 拉姆齐 (Ramsey) 证明了在某些情况下, 特殊的系统能由负温度来表征 [Phys. Rev. **103**, 20 (1956)].

§10. 热力学第二定律的数学表述

热力学第二定律的数学表述是: $\delta Q/T = \mathrm{d}S$ 为一恰当微分.

这一表述不再局限于准静 (态) 过程. 它以十分普遍的方式定义了熵. 我们有

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}E + \delta W}{T} = \frac{\mathrm{d}E + \sum_{k=1}^{n+1} y_k \mathrm{d}x_k}{T},$$

式中 [A–2] $E = E(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$ 和 $y_{n+1} = 0$. 若引入函数

$$w_k = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial x_k} + y_k\right), \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

和

$$w_{n+1} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right),$$

于是我们可写出

$$\mathrm{d}S = \sum_{k=1}^{n+1} w_k \mathrm{d}x_k \qquad \text{(普法夫微分形式)}.$$

因为 $\mathrm{d}S$ 为一恰当微分, 故必须有 [A–2]

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_k} = \frac{\partial w_k}{\partial x_i}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, \cdots, n+1).$$

例: 对于单相系, 我们有 $\mathrm{d}S = (\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V)/T$. 若选定 E, V 为自变量, 即 $T = T(E, V)$ 和 $p = p(E, V)$, 则

$$\left[\frac{\partial(1/T)}{\partial V}\right]_E = \left[\frac{\partial(p/T)}{\partial E}\right]_V.$$

然而, 这一表示法是很不恰当的. 所以下文将要引入具有更为恰当的自变量的其他函数.

§11. 喀拉西奥多里的热力学公理基础[①]

a. 普法夫线性微分形式

设已给定函数 $X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 为了使表达式 (普法夫形式)

$$\delta Q = \sum_{k=1}^{n} X_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}x_k$$

是函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的恰当微分 $\mathrm{d}f$, 则由于

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = X_k \quad \text{和} \quad \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k},$$

① §11 的参考文献: C. Caratheodory, *Math. Ann.* **67**, 355 (1909) 和 *Sitzber. preuss. Akad. Wiss., physik–math. Kl.*, Jahrband 1925, p. 39.

对于所有的 i 和 k, 必须满足条件

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}=0.$$

若 δQ 不是恰当微分, 而能引入一函数 $\tau(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ (其倒数称为积分因数) 使得

$$\frac{\delta Q}{\tau}=\sum_k\frac{X_k}{\tau}\mathrm{d}x_k=\mathrm{d}f$$

为一恰当微分, 这种情况则是热力学中所特别关心的. 存在这样一个积分因数 $1/\tau$ 的条件由下式给出

$$\frac{\partial(X_i/\tau)}{\partial x_k}-\frac{\partial(X_k/\tau)}{\partial x_i}=0,\quad (i,k=1,2,\cdots,n).$$

我们由表达式

$$(ikl)=\tau X_l\left[\frac{\partial(X_i/\tau)}{\partial x_k}-\frac{\partial(X_k/\tau)}{\partial x_i}\right]=0$$

构成和式

$$(ikl)+(kli)+(lik)=0,$$

即能消去函数 τ. 于是, 我们得到

$$X_l\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k}-\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right)+X_i\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l}-\frac{\partial X_l}{\partial x_k}\right)+X_k\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_l}\right)=0.$$

这个条件必须对 (i,k,l) 三个数的所有可能的组合都满足, 能够证明这些条件对于积分因数 $1/\tau$ 的存在也是充分的. 对于两个变量, 这个条件是不能应用的. 现在, 我们要考虑通过一个固定点的那些曲线 $\delta Q=\sum\limits_k x_k\mathrm{d}x_k$. 必须区分两种情况:

1. 若存在一个积分因数 $(\tau\neq 0)$, 则由 $\delta Q=\tau\mathrm{d}f$ 得出: 当 $\delta Q=0$ 时, 则也有 $\mathrm{d}f=0$; 这表明 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$ 常数. 因此, 所有的曲线 $\delta Q=0$ 都在通过该固定点的一个 $(n-1)$ 维超平面上. 于是, 在该固定点的邻域内存在一些任意邻近的点, 但它们不在该超平面上, 所以, 从该固定点出发沿曲线 $\delta Q=0$ 不能到达这些点. 因为该固定点可任意选取, 所以下面的论述成立: 若存在积分因数 $(\tau\neq 0)$, 则对于 n 维空间中的每一点 x, 存在任意邻近 x 的一些点, 沿曲线 $\delta Q=0$ 不能达到这些点.

2. 若不存在积分因数, 则能沿曲线 $\delta Q=0$ 达到所有的邻点.

为了证明这一论述, 我们利用普法夫线性微分形式可变换为范式的事实: 若变量的数目为奇数 $(2n+1)$, 则

$$\delta Q=x_2\mathrm{d}x_1+x_4\mathrm{d}x_3+x_6\mathrm{d}x_5+\cdots+x_{2n}\mathrm{d}x_{2n-1}+k\mathrm{d}x_{2n+1},$$

若变量的数目为偶数 $(2n)$ (即, 此处 k 为零), 则有

$$\delta Q = x_2 \mathrm{d}x_1 + x_4 \mathrm{d}x_3 + x_6 \mathrm{d}x_5 + \cdots + x_{2n} \mathrm{d}x_{2n-1}.$$

我们将对 $(2n+1)$ 个变量的情况进行证明.

令 $P^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{2n+1}^0)$ 为固定点, 而 $P'(x_1', x_2', \cdots, x_{2n+1}')$ 为沿曲线 $\delta Q = 0$ 要到达的点. 令流动坐标为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n+1}$. 首先令 $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n+1}$ 恒定, 即, $x_1 = x_1^0, x_3 = x_3^0, x_5 = x_5^0, \cdots, x_{2n+1} = x_{2n+1}^0$ (所以 $\delta Q = 0$), 并从 P^0 点到达 $\overline{P}(x_1^0, \xi_2, x_3^0, \xi_4, \cdots, x_{2n}, \xi_{2n+1}^0)$ 点, 后者的坐标 $\xi_2, \xi_4, \xi_6, \cdots, \xi_{2n}$ 满足下列条件

$$\xi_2(x_1' - x_1^0) + \xi_4(x_3' - x_3^0) + \cdots + \xi_{2n}(x_{2n-1}' - x_{2n-1}^0) + k(x_{2n+1}' - x_{2n+1}^0) = 0$$

现在, 令 $x_2, x_4, \cdots, x_{2n}$ 恒定, 即 $x_2 = \xi_2, x_4 = \xi_4, x_6 = \xi_6, \cdots, x_{2n} = \xi_{2n}$, 并沿由方程

$$\begin{aligned} \xi_2 \ (x_1 - x_1^0) + \xi_4(x_3 - x_3^0) + \cdots + \xi_{2n}(x_{2n-1} - x_{2n-1}^0) + \\ k(x_{2n+1} - x_{2n+1}^0) = 0 \end{aligned}$$

所定义的曲面从 $\overline{P}$ 点到达 $P^*(x_1', \xi_2, x_3', \xi_4, \cdots, \xi_{2n}, x_{2n+1}')$ 点, 在此情况中又有 $\delta Q = 0$. 最后, 我们再次令 $x_1, x_3, x_5, \cdots, x_{2n+1}$ 恒定, 即 $x_1 = x_1', x_3 = x_3', x_5 = x_5', \cdots, x_{2n+1} = x_{2n+1}'$, 并从 P^* 点到达 $P'(x_1', x_2', x_3', \cdots, x_{2n+1}')$ 点, 在此情况中也有 $\delta Q = 0$. 因此, 能从 P^0 点沿曲线 $\delta Q = 0$ 到达 P' 点.

若在上述证明中的每一处略去 x_{2n+1}, 并令 k 等于零, 我们就得到对 $2n$ 个变量的类似证明.

b. 对热力学的应用

我们需要下述的一些概念.

1. 绝热壁: 态变化只有通过机械方法才是可能的. 绝热壁不导热.

2. 导热壁: 所有非绝热壁都是导热的.

3. 准静态变化: 这些态变化是十分缓慢的, 在极限情况下是无限缓慢的. 因此, 各中间态形成一连续序列的平衡态.

4. 非平衡态变化: 所有非准静态变化都是非平衡的 (迅速发生的).

在绝热壁内的闭合系的准静态变化, 即绝热准静 (态) 过程, 导致绝热曲线的存在, 沿该曲线 $\delta Q = 0$. 对于导热壁内的准静态变化, 即对于包含热传导的过程, 在壁内与壁外之间存在热平衡. 若两物质用导热壁隔开 (图 11.1), 则存在下列关系 [A–2]

$$F(p, V, \overline{p}, \overline{V}) = 0.$$

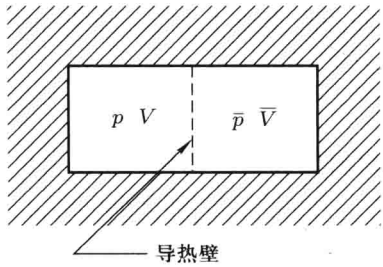


图 11.1

这一关系必定具有 $t(p,V)=\overline{t}(\overline{p},\overline{V})$ 的形式, 其理由如下: 若 (p_1,V_1) 和 (p_2,V_2) 是一种物质的两个不同的态, 且若 $(\overline{p}_1,\overline{V}_1)$ 和 $(\overline{p}_2,\overline{V}_2)$ 是另一种物质的两个不同的态, 则实验表明, 从三个条件

$$\left.\begin{aligned}&F(p_1,V_1,\overline{p}_1,\overline{V}_1)=0\\&F(p_2,V_2,\overline{p}_1,\overline{V}_1)=0\\&F(p_1,V_1,\overline{p}_2,\overline{V}_2)=0\end{aligned}\right\}\text{导出}\quad F(p_2,V_2,\overline{p}_2,\overline{V}_2)=0.$$

然而, 只有当关系式 $F=0$ 具有 $t(p,V)-\overline{t}(\overline{p},\overline{V})=0$ 的形式时, 这才是可能的.

为了表述热力学第一定律, 我们现在能局限于绝热的, 但并非必须是准静的态变化. 对于这样的过程, 我们定义

$$E_2-E_1=-\int_1^2\delta W.$$

这里应该注意, 总存在一个从态 1 到态 2 或从态 2 到态 1 的绝热 [A–9] 路径. 对于绝热的 [A–9] 态变化, 我们有

$$\delta W=\sum_k y_k\mathrm{d}x_k\quad\text{和}\quad \mathrm{d}E+\delta W=0,$$

对于单相系, $\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V=0$. 所以单相系的绝热变化方程为

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)+p\right]\mathrm{d}V=0,$$

式中温度函数 $t(p,V)$ 仍然是完全任意的, 而且不须是单调的. 对于用导热壁隔开的, 即处于热平衡的两个单相系 (图 11.2), 绝热变化方程为

$$\left[\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial\overline{E}}{\partial\overline{V}}\right)+\overline{p}\right]\mathrm{d}\overline{V}+\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)+p\right]\mathrm{d}V=0.$$

对于态的非绝热变化, 即包含热传导的变化, 我们定义

$$\int_1^2\delta Q=E_2-E_1+\int_1^2\delta W.$$

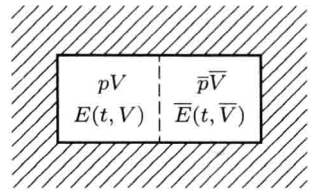


图 11.2

这一定义决定热量的单位. 若温度保持不变, $t(p,V)=$ 常数, 则我们得到等温线方程. 非绝热的态变化总能够归结为热传导.

关于热力学第二定律, 喀拉西奥多里用下述要求 (首先应该只对准静态变化成立) 来代替克劳修斯和汤姆孙的表述: 对于任意始态, 存在一些从始态出发通过准静–绝热的态变化 ($\delta Q=0$) 所不能达到的邻态. 我们也可以说, 必定存在一些由初态沿绝热曲线所不能达到的邻态. 因此, 按照喀拉西奥多里的说法, 不能绝热地达到的一些态的存在就意味着积分因数的存在. 对于单一的单相系, 绝热变化方程为

$$\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)+p\right]\mathrm{d}V=0.$$

因为总能利用一个积分因数而写成两个变量的线性微分形式, 所以得到

$$\tau\mathrm{d}\sigma=\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)+p\right]\mathrm{d}V=0,$$

式中 $\tau=\tau(t,V)$ 和 $\sigma=\sigma(t,V)$.

对处于热平衡的两个单相系的复合系, 如上面所给出的, 其绝热变化方程为

$$\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right)+p_1\right]\mathrm{d}V_1+\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial V_2}\right)+p_2\right]\mathrm{d}V_2=0.$$

因为对每一个别系都存在积分因数, 所以我们有

$$\tau_1(t,V_1)\mathrm{d}\sigma_1(t,V_1)=\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right)+p_1\right]\mathrm{d}V_1,$$

$$\tau_2(t,V_2)\mathrm{d}\sigma_2(t,V_2)=\left(\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial V_2}\right)+p_2\right]\mathrm{d}V_2.$$

然而, 根据喀拉西奥多里的说法, 对于复合系也必定存在积分因数, 即

$$\begin{aligned}&\tau(t,V_1,V_2)\mathrm{d}\sigma(t,V_1,V_2)\\&=\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial E_2}{\partial t}\right)\right]\mathrm{d}t+\left[\left(\frac{\partial E_1}{\partial V_1}\right)+p_1\right]\mathrm{d}V_1+\left[\left(\frac{\partial E_2}{\partial V_2}\right)+p_2\right]\mathrm{d}V_2,\end{aligned}$$

由此得到

$$\tau \mathrm{d}\sigma = \tau_1 \mathrm{d}\sigma_1 + \tau_2 \mathrm{d}\sigma_2. \tag{11.1}$$

引入新变量 t, σ_1 和 σ_2 来代替变量 t, V_1 和 V_2, 我们得到

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1} = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_2} = \frac{\tau_2}{\tau}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0.$$

由此我们看到, σ 与 t 无关, 而且 τ_1/τ 和 τ_2/τ 同样地与 t 无关. 因此, 我们能写出

$$\begin{aligned} \tau_1 &= f(t)\Sigma_1(\sigma_1), \\ \tau_2 &= f(t)\Sigma_2(\sigma_2), \\ \tau &= f(t)\Sigma(\sigma_1, \sigma_2). \end{aligned} \tag{11.2}$$

此外, 还要证明 $\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \Sigma(\sigma)$. 我们若将表达式 (11.2) 代入式 (11.1), 则得到 $\Sigma \mathrm{d}\sigma = \Sigma_1 \mathrm{d}\sigma_1 + \Sigma_2 \mathrm{d}\sigma_2$, 由此给出

$$(\partial\sigma/\partial\sigma_1)\Sigma = \Sigma_1 \quad \text{和} \quad (\partial\sigma/\partial\sigma_2)\Sigma = \Sigma_2$$

现在我们若分别对 σ_2 和 σ_1 求导, 则得到

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_2}\Sigma = 0 = \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \sigma_2 \partial \sigma_1}\Sigma$$

或

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \Sigma}{\partial \sigma_1} = 0.$$

这个量正是雅可比行列式, 而且它等于零的事实意味着

$$\Sigma(\sigma_1, \sigma_2) = \Sigma(\sigma).$$

现在我们将积分因数的倒数定义为热力学温度 (除一常数乘子外 [A–6]):

$$f(t) = T.$$

此外, 我们作出如下的其他定义:

$$\mathrm{d}S = \Sigma(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \quad \mathrm{d}S_1 = \Sigma_1(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_1, \quad \mathrm{d}S_2 = \Sigma_2(\sigma_2)\mathrm{d}\sigma_2,$$

或

$$\begin{aligned} S &= \int \Sigma(\sigma)\mathrm{d}\sigma + \text{常数}, \\ S_1 &= \int \Sigma_1(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_1 + \text{常数}, \\ S_2 &= \int \Sigma_2(\sigma_2)\mathrm{d}\sigma_2 + \text{常数}. \end{aligned}$$

于是我们有

$$S = S_1 + S_2 \quad 和 \quad \delta Q = T\mathrm{d}S = T\mathrm{d}S_1 + T\mathrm{d}S_2.$$

这两个表达式完全等效于热力学第二定律. 因此我们能够说: 若两个系统处于热力学平衡, 则热力学第二定律要求存在一个积分因数.

若对迅速发生的绝热态变化也要求存在不能绝热地达到的态, 则如下的说法成立: 对于在一闭合系中的所有可能的态变化 [迅速的和准静 (态) 的], 熵只能增加或减少; 两种可能性绝不会同时成立 [A–8]. 令始态用 (V_1^0, V_2^0, S^0) 标识, 终态用 (V_1, V_2, S) 标识. 我们引入一能准静 (态) 地达到的中间态 (V_1, V_2, S^0) (因为 $\Delta S = 0$). 我们进行一个不改变体积 V_1 和 V_2 的迅速发生的过程 (搅动或摩擦), 即 $(V_1, V_2, S^0) \to (V_1, V_2, S)$. 作为迅变过程的结果, 若熵既能增加, 也能减少, 则所有的态都将是能通过迅变过程而到达的. 然而, 必须有一个限制. 唯一的可能是对熵的变化只允许一种代数符号; 这意味着, 熵只能增加, 或只能减少, 而不是两者都可以. 习惯的规定是: 在一闭合系中熵只能增加 [A–8].

§12. 自由能

a. 定义

我们定义自由能 F 为

$$F = E - TS \tag{12.1}$$

从这一定义得出

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}E - T\mathrm{d}S - S\mathrm{d}T,$$

若引入热力学第二定律, 则又得到 [A–2]

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - \delta W = -S\mathrm{d}T - \sum_{k=1}^{n+1} y_k \mathrm{d}x_k, \quad y_{n+1} = 0. \tag{12.2}$$

所以, $F = F(x_1, x_2, \cdots, x_n, T)$. 另外, 我们有关系式

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)_T = -y_k \quad 和 \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x = -S.$$

若将这些关系式代入式 (12.1), 则得到

$$F = E + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x$$

或

$$E = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_x = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right)_x. \tag{12.3}$$

当温度 T 作为自变量时要用到函数 F, 而当内能 E 作为自变量时则用熵 S.

b. 对单相系的应用

设 $n=1, x=V, y=p, F=F(V,T)$, 则

$$\mathrm{d}F=-p\mathrm{d}V-S\mathrm{d}T, \tag{12.4}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T=-p, \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=-S.$$

因为 F 为态函数, 所以我们有

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)=-\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=-\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T. \tag{12.5}$$

这个恒等式对于单相系是非常重要的. 根据式 (12.3) 和式 (12.5), 我们有 [A–5]

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)=-p+T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T. \tag{12.6}$$

定体比热 c_V 为 [A–5]

$$c_V=\frac{(\delta Q)_V}{\mathrm{d}T}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V,$$

而定压比热 c_p 为

$$c_p=\frac{(\delta Q)_p}{\mathrm{d}T}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=T\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right\};$$

由这两个式子我们得到

$$c_p-c_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{12.7}$$

必须注意, 所有这些关系式只对单相系成立.

由热力学第一定律我们得到

$$c_p-c_V=\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

若将这个公式与式 (12.6) 结合起来, 则正好得到式 (12.7). 此外, 我们从热力学第二定律导出

$$\left(\frac{\partial c_V}{\partial V}\right)_T=T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V,$$

我们还可对式 (12.7) 作数学变换. 由于态方程的存在, 我们可假设 $V(p,T)$ 已给定. 于是,

$$\mathrm{d}V=\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\mathrm{d}p+\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\mathrm{d}T.$$

在体积恒定时, 我们有 $(\partial V/\partial T)_V = 0$. 所以

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$$

或

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{(\partial V/\partial T)_p}{(\partial V/\partial p)_T}.$$

所以, 式 (12.7) 可写成

$$c_p - c_V = -\frac{T[(\partial V/\partial T)_p]^2}{(\partial V/\partial p)_T}.$$

§13. 吉布斯函数

a. 定义

自由能 F 的自变量为 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, T$. 另一方面, 吉布斯函数 Φ 应该是自变量 $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, T$ 的热力学函数. 所以, 我们对 F 应用如下的勒让德变换:

$$\begin{aligned}\Phi &= F - \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right)_T \\ &= F + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = E - TS + \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \end{aligned} \tag{13.1}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi &= \mathrm{d}F + \delta W + \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{d}y_k \\ &= -S\mathrm{d}T + \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{d}y_k = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{x_k} \mathrm{d}T + \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{d}y_k. \end{aligned} \tag{13.2}$$

包含 $\mathrm{d}x_k$ 的项已消去, 因此, 我们有 $\Phi = \Phi(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n, T)$. 此外还有

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{y_k} = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{x_k} = -S \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\right)_T = x_k. \tag{13.3}$$

b. 对单相系的应用

我们有

$$\Phi = F + pV \quad \text{和} \quad \mathrm{d}\Phi = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p.$$

所以, $\Phi = \Phi(p, T)$. 对恒压 p 和恒温 T 时的准静态变化 (等温等压过程), 吉布斯函数 Φ 为常数. 此外,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = -S \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = V.$$

在 §12 中我们已求得定体比热 [A–5] 为

$$c_V = -T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_V \quad 和 \quad \left(\frac{\partial c_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V.$$

类似地, 我们求得定压比热为

$$c_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = -T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_p \quad 和 \quad \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p.$$

c. 对理想气体的应用

借助于热力学第二定律, 理想气体的三个公认的性质能够归结为两个性质, 同时能验证热力学温标与气体温标的一致性.

1. 因为 $(\partial E/\partial V)_T = 0$, 由此得到 $T(\partial p/\partial T)_V = p$ 或 $p = f(V)T$. 所以 p 为 T 的线性函数.

2. 等温线为 $pV =$ 常数.

由 1 和 2 得到 $pV =$(常数)$\times T$, 或对于每摩尔有 $pv = RT$ (v 为摩尔体积). 式中出现的常数值为 R 这一事实并不是由热力学导出的. 用热力学温标与用气体温标得到相同的气态方程. 因此, 热力学温标与绝对温标一致.

理想气体的熵为

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}(\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V) = c_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\frac{\mathrm{d}V}{V},$$
$$S = \int c_V\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\ln V + 常数.$$

对理想气体有 $c_V(T) =$ 常数 (对任意物质并不成立). 所以, 对于每摩尔有

$$S = c_V \ln T + R\ln v + 常数.$$

只要系统中物质的量保持恒定 (即, 只要不发生化学变化), 我们就能将下面的表述看作是任意物质的熵 S 的部分定义: 若密度恒定, 则系统的熵依系统的大小成正比地增加. 所以, 我们有下述的齐性:

$$S(n, V, T) = nS(1, v, T) = nS\left(\frac{V}{n}, T\right)$$

(v 为摩尔体积, $n = V/v$ 为物质的量). 对于理想气体, 则有

$$S = n\left(c_V \ln T + R\ln\frac{V}{n} + a\right).$$

我们以后将熵常数 a 标准化.

因为 $S=-(\partial F/\partial T)_V$, 对于理想气体我们有

$$F=n\left(c_VT-c_VT\ln T-RT\ln\frac{V}{n}-aT+E_0\right),$$

因为能量是与体积无关的, 所以式中 E_0 为外推至 $T=0$ 时的摩尔内能. 因为 $F=E-TS$, 所以我们有

$$E=n(c_VT+E_0),$$

在此结果中, 我们已假定 $\partial c_V/\partial T=0$. 用不恰当的变量写出吉布斯函数为

$$\Phi=F+pV=n\left(c_VT-c_VT\ln T-RT\ln\frac{V}{n}-aT+E_0+RT\right).$$

因为 $c_V+R=c_p$ 和 $V/n=RT/p$, 所以我们有

$$-RT\ln\frac{V}{n}=-RT(\ln T+\ln R-\ln p)$$

和

$$\begin{aligned}\Phi&=n[RT\ln p+(c_V+R)T-(c_V+R)T\ln T-aT-RT\ln R+E_0]\\&=n[RT\ln p-c_pT\ln T-iRT+E_0],\end{aligned}$$

式中

$$i=\frac{a-c_p}{R}+\ln R=\gamma+\ln R;$$

γ 称为化学常数.

所以, 对于理想气体, 我们有下列诸关系:

1. 内能:

$$E=n(c_VT+E_0);$$

2. 熵:

$$S=n\left(c_V\ln T+R\ln\frac{V}{n}+a\right);$$

3. 自由能:

$$F=n\left(c_VT-c_VT\ln T-RT\ln\frac{V}{n}-aT+E_0\right);$$

4. 吉布斯函数:

$$\Phi=n(RT\ln p-c_pT\ln T-iRT+E_0).$$

常数 a 是不能确定的, 而待以后才加以标准化 (参见能斯特热定理).

d. 焦耳–汤姆孙实验

气体从容器 1 流入另一容器 2. 整个系统与外界热绝缘. 然而, 节流塞与流动气体间的热交换则是可能的 (见图 13.1). 所作的功为

$$W = p_2V_2 - p_1V_1.$$

根据热力学第一定律, 我们有

$$p_2V_2 - p_1V_1 = E_1 - E_2,$$

或

$$E_1 + p_1V_1 = E_2 + p_2V_2 = 常数.$$

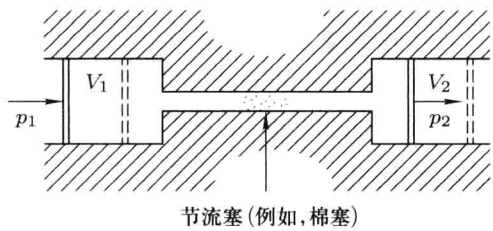


图 13.1

(当然, 对理想气体我们有 $E_1 = E_2$ 和 $T_1 = T_2$). 根据式 (13.1) 和式 (13.3), 有

$$E + pV = \Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = 常数,$$

对上式微分, 我们得到

$$-T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_p \Delta T + \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T - T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial T}\right)\right]\Delta p = 0.$$

所以,

$$nc_p\Delta T = \left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right]\Delta p = T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{V}{T}\right)_p \Delta p.$$

通常 Δp 由经验给出, 对于理想气体, 因为 $V/T = nR/p$, 我们有 $(\partial/\partial T)(V/T)_p = 0$. 一般地, $(\partial/\partial T)(V/T)_p$ 既可能为正, 也可能为负, 此表达式等于零时的温度称为转换点. 上述公式在林德 (Linde) 空气液化过程中获得了实际应用.

e. A, B 两相间的平衡

因为在熔化和汽化过程中压强和温度都是恒定的, 所以将用到吉布斯函数 Φ. 我们有 $p_A = p_B$ 和 $T_A = T_B$, 由此得到 $\Phi_A = \Phi_B$. 如已证明过的[①],

$$\lambda = (E_B - E_A) + p(V_B - V_A).$$

因为这一过程是等温的, 所以, 根据热力学第二定律我们有

$$T(S_B - S_A) = (E_B - E_A) + p(V_B - V_A) = \lambda. \tag{13.4}$$

沿汽压曲线 $p(T)$ 的导数由下式给出

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

因为 $\Phi_A = \Phi_B$, 我们有

$$\left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \left(\frac{\partial \Phi_B}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial \Phi_B}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T},$$

从而

$$(S_B - S_A) = (V_B - V_A)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

将此式与式 (13.4) 结合起来, 我们得到克劳修斯–克拉珀龙方程:

$$\frac{\lambda}{T} = S_B - S_A = (V_B - V_A)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

也能利用循环过程来导出这一方程. 我们进行一个卡诺循环. (参见图 13.2). 我们有 $\lambda/T = W/\mathrm{d}T$. 的确, 功 W 对应于面积 A. 由于对微小的 $\mathrm{d}T$ 来说, 面积 A 和 A' 彼此只相差高阶量, 所以, 在 $\mathrm{d}T \to 0$ 的极限情况中, 我们有 $W = \mathrm{d}p(V_B - V_A)$. 于是, 我们得到上文已求得的相同结果.

此外, 我们若求

$$\lambda = -T\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_B - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_A\right] = \left[\Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)\right]_B - \left[\Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)\right]_A$$

对 T 的导数, 则有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T} = -T\left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_B - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2}\right)_A\right] +$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\left\{\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) - T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial p}\right)\right]_B - \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) - T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial p}\right)\right]_A\right\},$$

① 参见 §7c.

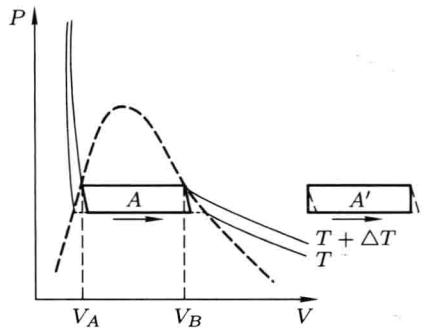


图 13.2

或

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}=(c_p)_B-(c_p)_A+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\left\{\left[V-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]_B-\left[V-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]_A\right\}.$$

根据热力学第一定律, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T}=&\ (c_p)_B-(c_p)_A+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\left[\left\{\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right\}_B-\right.\\&\left.\left\{\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right\}_A\right]+(V_B-V_A)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.\end{aligned}$$

由于关系式

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T=-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

的有效性, 所以由热力学第二定律所得的结果与由热力学第一定律所得的结果一致. 上式是根据

$$\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V,$$

并借助于

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=-\frac{(\partial V/\partial T)_p}{(\partial V/\partial p)_T}$$

而求出的. 最后两个关系式已在 §12 中导出. 若我们已知物质的液态或气态的热力学函数. 则我们能计算该物质的平衡曲线 (汽压曲线).

f. 非稳态

在图 13.3 中, 实线和虚线都是等温线. 虚弧线代表相对于任意微小的态变化是不稳定的那些态 (例如, 过热液态或过冷汽态). 若我们沿这些等温线实现一循环过程, 则我们得到

$$W=0=\oint p\mathrm{d}V\quad(\text{即}, A=A')$$

和

$$\underbrace{\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V}_{\text{非稳态曲线}} = \underbrace{\int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V}_{\text{稳态曲线}} = p(V_2 - V_1).$$

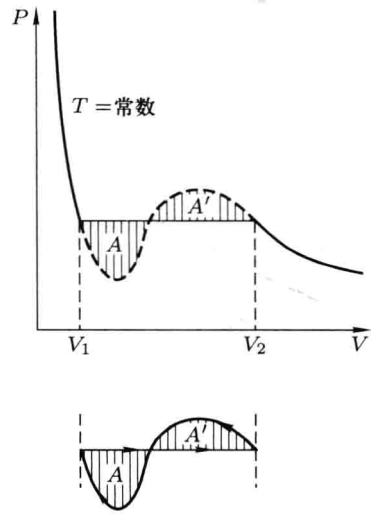


图 13.3

这一公式确定汽压 p. 如果不特别说非稳态, 我们也可以说我们了解热力学函数 [A–10]. 并不是对所有温度 T 等温线都具有已示明的形式. 存在临界温度 T_c, 在此温度时, 等温线上的两个极点重合, 即等温线具有鞍点①. 它由下式定义

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0 \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0.$$

该点的临界数据称为临界温度 T_c、临界压强 p_c 和临界体积 V_c.

§14. 理想气体混合物的熵

对于理想气体的混合物, 我们有如下的一些经验定律:

1. 混合物的内能等于个别气体内能之和:

$$E = \sum_k E_k = \sum_k n_k(c_{V_k}T + E_{0k}).$$

2. 混合物中气体 k 的分压等于它单独充满混合物所占据的容积时所显示的压强. 混合物的压强 p 等于个别气体的分压 p_k 之和:

$$p = \sum_k p_k = \frac{RT}{V}\sum_k n_k, \quad \text{[道尔顿定律]}$$

① 原文如此. 实际为拐点, 而并非鞍点. ——中译者注

式中 n_k 为混合物中气体 k 的物质的量.

3. 若在被半透膜 (例如, 对气体 I 是可透过的, 而对气体 II 是不可透过的) 隔开的两个容积 V 和 V' 中盛有两种气体, 则将出现 $p = p'$ 的平衡状态, 见图 14.1. V 中气体 I 的压强为 p, 而 p' 为 V' 中气体 I 的分压. 所以有足量的气体 I 从 V 进入 V', 直至达到这种平衡为止.

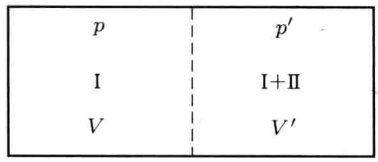


图 14.1

借助于这三个经验定律, 我们能计算理想气体混合物的熵. 两种气体可以如下方式可逆地被混合. 令 V 和 V' 为两个相等的容积, 并将 V 插入 V' (参见图 14.2). 半透壁 A 只对气体 I 是可透过的; 而壁 B 只对气体 II 是可透过的. 令 V 等温地和无限缓慢地移动. 在 V 和 V' 重叠的部分中两种气体共存. 在 V 和 V' 的两其余部分中分别有气体 I 和气体 II. 若容积 V 完全插入体积 V' 中, 则我们有体积为 $V = V'$ 的混合气. 若将两容器拉开, 则两种气体被完全分离, 这样, 混合过程是可逆的. 若我们假定 V 移动得如此缓慢, 以至总保持平衡, 根据 2 和 3, 则在每一瞬间我们有 $p = p'_1 + p'_2$. 若 V 移动 $\mathrm{d}V$, 则所作之功为

$$\delta W = p'_1 \mathrm{d}V + p'_2 \mathrm{d}V - p\mathrm{d}V = [p'_1 - (p - p'_2)]\mathrm{d}V = 0.$$

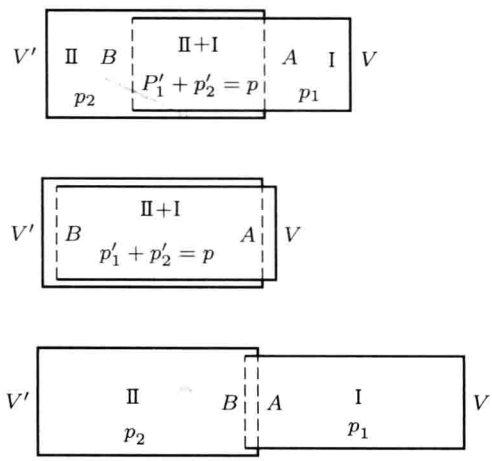


图 14.2

即, 不论气体混合时还是气体分离时都不作功. 类似地, 由于混合和分离过程

都是等温地进行的, 所以内能也无变化. 因此, 根据热力学第一定律, 既未加入热量, 也未取出热量:$(\delta Q = 0) \to (\mathrm{d}S = \delta Q/T = 0)$. 所以熵未曾变化. 于是我们有下述定律: 温度 T 时容积 V 中的混合气体的熵等于温度 T 时分别盛于容积 V 中的各个气体的熵之和. 因为 n_k 摩尔气体 k 的熵为

$$S_k = n_k \left(c_{V_k} \ln T + R \ln \frac{V}{n_k} + a_k \right),$$

于是, 混合气的熵为

$$S = \sum_k S_k = \sum_k n_k \left(c_{V_k} \ln T + R \ln \frac{V}{n_k} + a_k \right).$$

因此, 理想气体混合物的熵为

$$S = \sum_{k=1}^{m} S_k(n_k, V, T) = S(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m, V, T).$$

§15. 吉布斯佯谬

在由壁隔开的两个容积 V_1 和 V_2 中盛有两种气体 (图 15.1), 它们的熵总共为 S. 若除去隔壁, 则熵将改变; 令 $\overline{S}$ 为混合气的熵. 于是我们有

$$\begin{aligned}
S &= n_1 \left(c_{V_1} \ln T + R \ln \frac{V_1}{n_1} \right) + n_2 \left(c_{V_2} \ln T + R \ln \frac{V_2}{n_2} \right), \\
\overline{S} &= n_1 \left(c_{V_1} \ln T + R \ln \frac{V}{n_1} \right) + n_2 \left(c_{V_2} \ln T + R \ln \frac{V}{n_2} \right), \\
\overline{S} - S &= R \left[n_1 \left(\ln \frac{V}{n_1} - \ln \frac{V_1}{n_1} \right) + n_2 \left(\ln \frac{V}{n_2} - \ln \frac{V_2}{n_2} \right) \right] \\
&= R \left[n_1 \ln \frac{V}{V_1} + n_2 \ln \frac{V}{V_2} \right] > 0.
\end{aligned}$$

熵的增加 $\overline{S} - S$ 与两种气体的本性无关. 唯独它们必须是不同的气体. 若两种气体是相同的, 则熵的改变量为零; 即

$$\overline{S} - S = 0.$$

因此我们看到, 在两种气体间不存在连续的过渡. 即使两种气体只有无限小的差别, 熵的增加也总是有限的. 然而, 若两种气体是相同的, 则熵的改变量为零. 所以, 让两种气体间的差别逐渐消失是不容许的 (这在量子理论中是重要的).

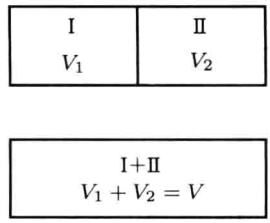


图 15.1

§16. 关于混合定律的记注

为了导出混合气体定律, 利用半透壁并非是绝对必要的. 这一定律也能借助于力场而导出. 我们想借助于重力场来进行这一推导 [参见 E. Schrödinger, Z. Physik 5, 163 (1921)].

若给定与 z 轴方向反向的重力场, 则

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\rho g=\frac{M}{v}g=\frac{M}{RT}gp.$$

在 $T(z)=$ 常数的假定下, 这一微分方程具有如下的解

$$p=p_0\mathrm{e}^{-\frac{M}{RT}gz}\quad (\text{气压计公式}),$$

或

$$\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{M}{RT}gz}.$$

这一效应能用来分离两种具有不同物质的量的气体. 设有物质的量为 M、密度为 ρ 的重气体和物质的量为 M'、密度为 ρ' 的轻气体. 我们假定下列不等式成立

$$(M-M')gz\gg RT. \tag{16.1}$$

若在容积 V_0 内有两种气体的混合物, 用一吸升管将该容积与一位于较高处的容积 V_1 相连接, 则轻气体上升至 V_1 而重气体停留在下面的 V_0 内 (见图 16.1). 假定 V_0 和 V_1 是这样选取的, 使得

$$\mathrm{e}^{\frac{M}{RT}gz}\gg\frac{V_1}{V_0}\gg\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz}. \tag{16.2}$$

要注意, 因为式 (16.1) 意味着

$$\mathrm{e}^{\frac{M}{RT}gz}\gg\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz},$$

所以 V_0 和 V_1 确实能够这样选取, 使得满足式 (16.2). 因为 $\rho_0/\rho=\mathrm{e}^{Mgz/RT}$ 和 $\rho_0'/\rho'=\mathrm{e}^{M'gz/RT}$, 因此我们也有

$$\frac{\rho_0}{\rho}\gg\frac{V_1}{V_0}\gg\frac{\rho_0'}{\rho'}\quad\text{或}\quad\frac{\rho_0V_0}{\rho V_1}\gg1\gg\frac{\rho_0'V_0}{\rho'V_1}.$$

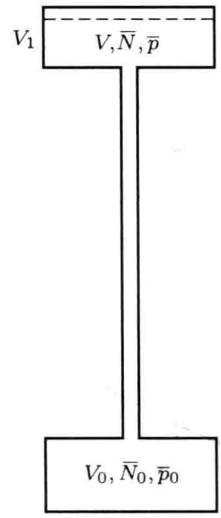


图 16.1

即, 重气体停留在底部而轻气体上升. 现在让我们计算在两种气体的分离过程中所作的功. 在每一中间状态中, 设轻气体在上部区域充满体积 V, 并具有分压 $\overline{p}$; 而在下部区域它具有分压 $\overline{p_0}$. 同样地, 设在上部区域有 $\overline{N}$ 摩尔的轻气体, 而在下部区域有 $\overline{N}_0$ 摩尔的轻气体. 于是, 我们有 $\overline{N}+\overline{N}_0=N_0'$=常数, $\overline{p}=RT\overline{N}/V$ 和 $\overline{p}_0=RT\overline{N}_0/V_0$; 由此得到

$$\overline{p}V+\overline{p}_0V_0=RT(\overline{N}+\overline{N}_0)=RTN_0'.$$

在始态中 $V=0$, $\overline{p}_0=p_0'$ 和 $\overline{p}V+\overline{p}_0V_0=p_0'V_0$, 式中 p_0' 为 V_0 内混合气体中轻气体的分压. 在每一中间态中有

$$\overline{p}=\overline{p}_0\mathrm{e}^{-\frac{M'}{RT}gz},$$

和

$$\overline{p}V+\overline{p}_0V_0=\overline{p}(V+V_0\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz})=p_0'V_0;$$

由此计算出 $\overline{p}$ 为

$$\overline{p}=p_0'V_0/(V+V_0\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz}).$$

当达到终态 $V=V_1$ 和 $\overline{p}_0=0$ 时, 已作的功为

$$W=\int_0^{V_1}\overline{p}\mathrm{d}V=p_0'V_0\int_0^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V+V_0\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz}}=p_0'V_0\ln\frac{V_1+V_0\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz}}{V_0\mathrm{e}^{\frac{M'}{RT}gz}}.$$

因为轻气体上升, 所以我们有

$$\frac{\rho_0' V_0}{\rho' V_1} = \frac{V_0}{V_1} \mathrm{e}^{\frac{M'}{RT} gz} \ll 1.$$

因此, 所作的功能够很近似地写成

$$W = p_0' V_0 \left(\ln \frac{V_1}{V_0} - \frac{M'}{RT} gz \right).$$

若把容积 V_1 降至与 V_0 同样的高度, 则我们由此所获得的功为

$$W_{z \to 0} = N' M' gz = p_0' V_0 \frac{M'}{RT} gz.$$

现将轻气体的体积等温地变化至 V_0; 在此过程中气体所作的功为

$$W_{V_1 \to V_0} = p_0' V_0 \ln \frac{V_0}{V_1} = -p_0' V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

因此, 所作的总功为零. 加入的热量也为零; 所以, 在整个分离过程中熵的变化为零. 在容积 V_0 中混合气体的熵等于个别气体在容积 V_0 中所具有的熵之和.

也可用对两种气体作用不同的其他力场来代替重力场.

第三章

平　　衡

§17. 范霍夫反应匣

若一化学过程能在两个方向进行, 则一般地即已达到平衡态. 例如,

$$2Cl_2 + 2H_2O \rightleftharpoons 4HCl + O_2. \tag{17.1}$$

令 $N_{Cl_2}, N_{H_2O}, N_{HCl}$ 和 N_{O_2} 分别为 Cl_2, H_2O, HCl 和 O_2 的分子数, 并令 A_{Cl}, A_H 和 A_O 分别为 Cl,H 和 O 的原子数. 在反应的每一瞬间, 下列诸方程式成立:

$$\left.\begin{aligned} 2N_{Cl_2} + N_{HCl} &= A_{Cl} \\ 2N_{H_2O} + N_{HCl} &= A_H \\ 2N_{O_2} + N_{H_2O} &= A_O \end{aligned}\right\} \text{反应过程中不变的固定数.}$$

反应过程中不变的原子和分子组分, 如上例中的 Cl, H 和 O 原子, 称为阻基①. 若 Z_r 为阻基数, Z_m 为分子类型数, 而 Z_R 为反应数, 则我们总有

$$Z_r = Z_m - Z_R.$$

在上例中, $Z_r = 3, Z_m = 4$ 和 $Z_R = 1$. 借助于两个范霍夫反应匣, 我们能将反应式 (17.1) 转化为一个等温可逆过程.

在范霍夫反应匣的四个容积 V_A, V_B, V_C 和 V_D 中盛有气体 (或许蒸气) Cl_2, H_2O, HCl 和 O_2, 用半透膜将它们与主匣隔开. 膜 A, B, C 和 D 分别只对 Cl_2, H_2O, HCl 和 O_2 是可透过的. 令各个容积中的压强分别为 $p_{Cl_2}, p_{H_2O}, p_{HCl}$ 和 p_{O_2} (图 17.1). 平衡时, 主匣内的压强为

$$p = p_{Cl_2} + p_{H_2O} + p_{HCl} + p_{O_2}.$$

① resistant groups. ——中译者注

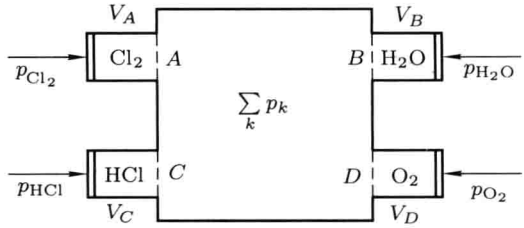


图 17.1

将整个反应匣置于温度为 T 的无限大热库中, 以便在态变化的过程中温度保持恒定.

1. 若使 2ε 摩尔的 Cl_2 尽可能缓慢地进入容积 V_A, 2ε 摩尔的 H_2O 进入容积 V_B, 而同时, 使 4ε 摩尔的 HCl 尽可能缓慢地离开容积 V_C, ε 摩尔的 O_2 离开容积 V_D, 则, 由于在匣中的分子数保持恒定, 匣中无任何变化. 所作的功为

$$\begin{aligned} W_1 &= \varepsilon(-2p_{Cl_2}V_{Cl_2} - 2p_{H_2O}V_{H_2O} + 4p_{HCl}V_{HCl} + p_{O_2}V_{O_2}) \\ &= \varepsilon RT, \end{aligned}$$

式中 V_{Cl_2} 为 1 mol Cl_2 在压强 p_{Cl_2} 时的体积, 等等.

2. 现在我们利用第二个反应匣, 在其中进行与情况 1 相反的反应, 但它是在压强 $p'_{Cl_2}, p'_{H_2O}, p'_{HCl}$ 和 p'_{O_2} 下进行的. 使从第一个反应匣中取出的两种分离的气体 HCl 和 O_2 通过等温的态变化达到新压强 p'_{HCl} 和 p'_{O_2}. 在此过程中所作的功计为

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_k \int_{V_k}^{V'_k} n_k p_k \mathrm{d}V_k = -RT \sum_k \int_{p_k}^{p'_k} n_k \frac{\mathrm{d}p_k}{p_k} \\ &= \varepsilon RT \left(4 \ln \frac{p_{HCl}}{p'_{HCl}} + \ln \frac{p_{O_2}}{p'_{O_2}} \right). \end{aligned}$$

3. 然后我们缓慢地向 V_C 中添入 4ε 摩尔的 HCl, 向 V_D 中添入 ε 摩尔的 O_2, 并从 V_A 中取出 2ε 摩尔的 Cl_2, 从 V_B 中取出 2ε 摩尔的 H_2O. 在此过程中所作的功计为

$$W_3 = -\varepsilon RT \quad \text{(过程 1 的逆过程)}.$$

4. 使从第二个反应匣中取出的两种分离的气体 Cl_2 和 H_2O 通过等温的态变化回到它们原有的压强. 所作的功计为

$$W_4 = -RT \sum_k \int_{p'_k}^{p_k} n_k \frac{\mathrm{d}p_k}{p_k} = \varepsilon RT \left(2 \ln \frac{p'_{Cl_2}}{p_{Cl_2}} + 2 \ln \frac{p'_{H_2O}}{p_{H_2O}} \right).$$

现在我们又回到了始态. 因为在两个反应匣中无变化, 所以, 根据热力学第二定律, 在此循环中所作的总功必定为零:

$$\begin{aligned} 0 &= W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \\ &= \varepsilon RT \left(4 \ln \frac{p_{\mathrm{HCl}}}{p'_{\mathrm{HCl}}} + \ln \frac{p_{\mathrm{O_2}}}{p'_{\mathrm{O_2}}} - 2 \ln \frac{p_{\mathrm{Cl_2}}}{p'_{\mathrm{Cl_2}}} - 2 \ln \frac{p_{\mathrm{H_2O}}}{p'_{\mathrm{H_2O}}} \right). \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} &4 \ln p_{\mathrm{HCl}} + \ln p_{\mathrm{O_2}} - 2 \ln p_{\mathrm{Cl_2}} - 2 \ln p_{\mathrm{H_2O}} \\ &= 4 \ln p'_{\mathrm{HCl}} + \ln p'_{\mathrm{O_2}} - 2 \ln p'_{\mathrm{Cl_2}} - 2 \ln p'_{\mathrm{H_2O}} = \text{常数}. \end{aligned}$$

因为我们是在恒温下完成这一循环过程的, 所以上式中的常数仍然可能是温度的函数. 因此, 我们能够定义: 常数 $= \ln K(T)$.

一般地, 若 M_k 为气体 k 的化学符号, 并且有 ν_k 摩尔的气体 k 参与化学反应 (若 ν_k 对应于生成分子的物质的量, 则应取负值), 则反应方程为

$$\sum_{k=1}^{N} \nu_k M_k = 0,$$

式中 $N =$ 参与反应的气体种类数. (在上例中: $\nu_1 = 2, \nu_2 = 2, \nu_3 = -4, \nu_4 = -1; M_1 = \mathrm{Cl_2}, M_2 = \mathrm{H_2O}, M_3 = \mathrm{HCl}, M_4 = \mathrm{O_2}$.)

平衡条件为

$$\sum_{k} \nu_k \ln p_k = \ln K(T)$$

或

$$\prod_{k=1}^{N} p_k^{\nu_k} = K(T).$$

因为在整个反应过程中, 范霍夫反应匣内的温度 T 和压强 p_k 保持恒定, 所以我们可以用吉布斯函数

$$\Phi = E + pV - TS,$$

而且, 因为 p 和 T 为恒量, 故有

$$\Delta \Phi = \Delta E + p \Delta V - T \Delta S = 0,$$

式中 $T \Delta S = \Delta Q = \Delta E + p \Delta V$. 若物质的量 n_k 改变, 则由于范霍夫反应匣中的平衡并不受到它的干扰, 所以上面的关系式仍然成立. 令 Φ_k 为每摩尔气体 k 的吉布斯函数. 由于化学反应, 物质的量 n_k 的改变为 $\Delta n_k = \varepsilon \nu_k$; 并因

$\Phi=\sum_k n_k\Phi_k$, 于是我们有

$$\Delta\Phi=\sum_k \Delta n_k\Phi_k=\varepsilon\sum_k \nu_k\Phi_k=0.$$

由此, 我们得到下列平衡条件:

$$\sum_k \nu_k\Phi_k=0.$$

对于理想气体, 由于

$$\Phi_k=-c_{pk}T\ln T+RT\ln p_k-i_kRT+E_{0k},$$

我们得到

$$-\left(\sum_k c_{pk}\nu_k\right)T\ln T+RT\left(\sum_k \nu_k\ln p_k-\sum_k \nu_k i_k\right)+\sum_k \nu_k E_{0k}=0$$

或

$$\ln K(T)=\frac{1}{R}\ln T\sum_k c_{pk}\nu_k+\sum_k \nu_k i_k-\frac{1}{RT}\sum_k \nu_k E_{0k}.$$

定压反应热 Q_p 被定义为

$$Q_p=T\sum_k \nu_k S_k=-T\sum_k \nu_k\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial T}\right)_{p_k}=-T^2\sum_k \nu_k\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Phi_k}{T}\right).$$

取平衡条件 $\sum_k \nu_k\Phi_k=0$ 对 T 的全导数, 并应用下列公式

$$\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial p_k}\right)_T\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}T}=\frac{\partial}{\partial p_k}(RT\ln p_k)\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}T}=RT\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}(\ln p_k),$$

我们得到

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\sum_k \nu_k\Phi_k=\sum_k \nu_k\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial T}\right)_{p_k}+\sum_k \nu_k\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial p_k}\right)_T\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}T},$$

或

$$\frac{Q_p}{RT^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}[\ln K(T)].$$

我们也能以如下方式验证[①]这一公式. 由关系式

$$\ln K(T)=\frac{1}{R}\ln T\sum_k \nu_k c_{pk}+\sum_k \nu_k i_k-\frac{1}{RT}\sum_k \nu_k E_{0k},$$

① 英译版中误为 “导出”.——中译者注

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}[\ln K(T)] = \frac{1}{RT}\sum_k \nu_k c_{pk} + \frac{1}{RT^2}\sum_k \nu_k E_{0k}.$$

由关系式

$$Q_p = -T^2\sum_k \nu_k \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Phi_k}{T}\right) = -T^2\sum_k \nu_k\left[-\frac{c_{pk}}{T} - \frac{E_{0k}}{T^2}\right],$$

我们得到

$$\frac{Q_p}{RT^2} = \frac{1}{RT}\sum_k \nu_k c_{pk} + \frac{1}{RT^2}\sum_k \nu_k E_{0k}. \qquad \text{证完.}$$

利用卡诺循环, 我们得到相同的结果. 我们假定, 压强为 p'_k 的第二个反应匣具有与第一个反应匣不同的温度 $T' = T + \Delta T$. 对于理想气体我们有

$$S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p = c_p \ln T - R\ln p + \text{常数}.$$

由此得出绝热的态方程 $S =$ 常数为

$$c_p \Delta T - RT\ln\frac{p+\Delta p}{p} = 0.$$

为简便起见, 下面我们将略去比 ΔT 更高阶的量. 并且, 我们仍然用与第一个实验中相同的标记.

1. 我们给温度为 T 的反应匣添入 2ε 摩尔的 Cl_2 和 2ε 摩尔的 H_2O, 并取出 4ε 摩尔的 HCl 和 ε 摩尔的 O_2. 在此过程中所作的功为

$$W_1 = RT\varepsilon\sum_k \nu_k = \varepsilon RT.$$

2. 然后使气体 HCl 和 O_2 先后绝热地和等温地从态 (p_k, T) 到达态 (p'_k, T').

① 绝热地从态 (p_k, T) 到达态 (p''_k, T'):

$$W_a = -\Delta E = -\varepsilon(4c_V^{\mathrm{HCl}} + c_V^{\mathrm{O_2}})\Delta T.$$

对于每一个别气体, 我们有

$$R\ln\frac{p''_k}{p_k} = c_p^k \ln\frac{T'}{T} \propto c_p^k\frac{\Delta T}{T}.$$

② 等温地从态 (p''_k, T') 到达 (p'_k, T'):

$$W_b = -RT'\sum_k \int_{p''_k}^{p'_k} n_k \frac{\mathrm{d}p_k}{p_k} = -\varepsilon RT'\left(4\ln\frac{p'_{\mathrm{HCl}}}{p''_{\mathrm{HCl}}} + \ln\frac{p'_{\mathrm{O_2}}}{p''_{\mathrm{O_2}}}\right)$$

$$= -\varepsilon RT'\left(4\ln\frac{p'_{\mathrm{HCl}}}{p_{\mathrm{HCl}}} + \ln\frac{p'_{\mathrm{O_2}}}{p_{\mathrm{O_2}}}\right) + \varepsilon RT'\left(4\ln\frac{p''_{\mathrm{HCl}}}{p_{\mathrm{HCl}}} + \ln\frac{P''_{\mathrm{O_2}}}{p_{\mathrm{O_2}}}\right),$$

式中最后一项近似地等于

$$\varepsilon(4c_p^{\mathrm{HCl}}+c_p^{\mathrm{O_2}})\Delta T.$$

从而我们求得 W_2 为

$$\begin{aligned}W_2&=W_a+W_b\\&=-\varepsilon RT'\left(4\ln\frac{p'_{\mathrm{HCl}}}{p_{\mathrm{HCl}}}+\ln\frac{p'_{\mathrm{O_2}}}{p_{\mathrm{O_2}}}\right)+\varepsilon[4(c_p^{\mathrm{HCl}}-c_V^{\mathrm{HCl}})+\\&\quad(c_p^{\mathrm{O_2}}-c_V^{\mathrm{O_2}})]\Delta T.\end{aligned}$$

3. 我们给温度为 T' 的反应匣添入 4ε 摩尔的 HCl 和 ε 摩尔的 O_2, 并取出 2ε 摩尔的 Cl_2 和 2ε 摩尔的 H_2O. 我们有 $W_3=-\varepsilon RT'$ (过程 1 的逆过程, 以 T' 代替 T).

4. 我们使气体 Cl_2 和 H_2O 先后等温地和绝热地从态 (p'_k,T') 返回到态 (p_k,T).

① 等温地从态 (p'_k,T') 到达态 (p''_k,T'), 其中 p''_k 是这样选取的, 使得从态 (p_k,T) 出发的绝热线通过态 (p''_k,T'). 于是有

$$W_a=-RT'\sum_k\int_{p'_k}^{p''_k}n_k\frac{\mathrm{d}p_k}{p_k}=-\varepsilon RT'\left(-2\ln\frac{p'_{\mathrm{Cl_2}}}{p''_{\mathrm{Cl_2}}}-2\ln\frac{p'_{\mathrm{H_2O}}}{p''_{\mathrm{H_2O}}}\right).$$

② 绝热地从态 (p''_k,T') 到达态 (p_k,T), 则有

$$W_b=-\Delta E=-\varepsilon(2c_V^{\mathrm{Cl_2}}+2c_V^{\mathrm{H_2O}})(-\Delta T).$$

对于每一个别气体我们再次有

$$R\ln\frac{p''_k}{p_k}\sim C_p^k\frac{\Delta T}{T}.$$

从而, 我们求得 W_4 为

$$\begin{aligned}W_4=&-\varepsilon RT'\left(-2\ln\frac{p'_{\mathrm{Cl_2}}}{p_{\mathrm{Cl_2}}}-2\ln\frac{p'_{\mathrm{H_2O}}}{p_{\mathrm{H_2O}}}\right)-\\&\varepsilon[2(c_p^{\mathrm{Cl_2}}-c_V^{\mathrm{Cl_2}})+2(c_p^{\mathrm{H_2O}}-c_V^{\mathrm{H_2O}})]\Delta T.\end{aligned}$$

于是, 所作的总功为[①]

$$\begin{aligned}W&=W_1+W_2+W_3+W_4\\&=\varepsilon RT'\left(2\ln\frac{p'_{\mathrm{Cl_2}}}{p_{\mathrm{Cl_2}}}+2\ln\frac{p'_{\mathrm{H_2O}}}{p_{\mathrm{H_2O}}}-4\ln\frac{p'_{\mathrm{HCl}}}{p_{\mathrm{HCl}}}-\ln\frac{p'_{\mathrm{O_2}}}{p_{\mathrm{O_2}}}\right),\\&=\varepsilon RT'\sum_k\nu_k\ln\frac{p'_k}{p_k}=\varepsilon RT'[\ln K(T')-\ln K(T)].\end{aligned}$$

① 考虑到 W_2 的最后一项中的方括号 $=5R$; W_4 的最后一项中的方括号 $=4R$. —— 中译者注

因为我们已完成一个卡诺循环, 所以有

$$\frac{Q(T')}{T'} = \frac{Q(T)}{T} = \frac{W}{\Delta T}.$$

在恒压下, $Q(T')$ 归结为反应热:

$$Q(T') = \varepsilon Q_p \quad (Q_p \text{ 为每一 } \nu_k \text{ 摩尔的反应热}),$$
$$\frac{Q_p}{T'} = RT' \left[\frac{\ln K(T') - \ln K(T)}{\Delta T}\right] \sim RT' \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}[\ln K(T)]. \quad \text{证完.}$$

应用卡诺循环时, 我们不需要讨论反应匣中混合气体的热力学函数. 而只需要考虑理想气体相对于半透膜的性质和混合气体的性质.

若 c_k 为压强为 p 时混合气体中气体 k 的浓度, 则

$$p_k = c_k p, \quad \text{式中} \sum_k c_k = 1.$$

于是, 我们有

$$\ln K(T) = \sum_k \nu_k \ln p_k = \sum_k \nu_k \ln c_k + \ln p \sum_k \nu_k.$$

关于反应

$$\mathrm{Cl_2 + H_2 \rightleftharpoons 2HCl} \quad (\nu_1 = 1, \nu_2 = 1, \nu_3 = -2)$$

和

$$\mathrm{I_2 \rightleftharpoons 2I} \quad (\nu_1 = 1, \nu_2 = -2),$$

存在着复杂的情况, 这是由于在范霍夫反应匣中反应生成物分解的缘故. 在这些情况中, 常常通过加入抗催化剂以延缓反应速度来消除这一困难. 然而, 这似乎是任意的和不令人满意的 [A–11], 通过适当地应用对不同组分其作用不同的外力场, 能推广范霍夫所用的循环过程, 使得引入非稳态或抗催化剂是多余的.

例如, 让我们考察已经提到的关于碘的分解:

$$\mathrm{I_2 \rightleftharpoons 2I}.$$

在此情况中, 在右端的反应匣中引入场强为 H 的磁场是有用的, 在磁场中顺磁碘原子 I 与抗磁碘分子 $\mathrm{I_2}$ 的表现不同. 的确, 前者每摩尔具有的附加自由能为

$$F(H) - F(0) = -\frac{1}{2}\chi H^2,$$

式中 χ 一般地是与温度相关的. 若磁化强度正比于场强

$$\boldsymbol{M} = \chi(T)\boldsymbol{H},$$

则前式可由自由能的特性

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V - M\mathrm{d}H$$

导出. 这表明, 在磁场中吉布斯函数 $\Phi = F + PV$ 满足下式

$$\mathrm{d}\Phi = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p - M\mathrm{d}H.$$

记注: 若磁场源包含在所考虑的系统之内, 则所作的功由 $\delta W = +H\mathrm{d}M$ 给出, 而出现的热力学势为

$$F' = F + MH \text{ 和 } \Phi' = \Phi + MH,$$

而不是 F 和 Φ. 若仍用热力学函数 F 和 Φ, 则不需要考虑磁场源. 在下面的讨论中, 将考虑具有恒定场强 (但具有数目可变的自由碘原子) 的循环过程. 在此过程中出现的各种数量的功 $H\Delta M$ 彼此相消.

设在左端的反应匣中, (场强为零, 压强为 p, 容积为 V, 温度为 T) 总共有 N 摩尔的碘; 其中有 Nc 摩尔[①] 的 I_2 分子和 $N(1-2c)$ 摩尔的自由碘原子 $(0 \leqslant c \leqslant 1/2)$. 设在右端的反应匣中的场强为 H, 而温度 T 与左端反应匣的温度相同; 并设对应于 N, p, V 和 c 的量分别为 $\overline{N}, \overline{p}, \overline{V}$ 和 $\overline{c}$, 见图 17.2.

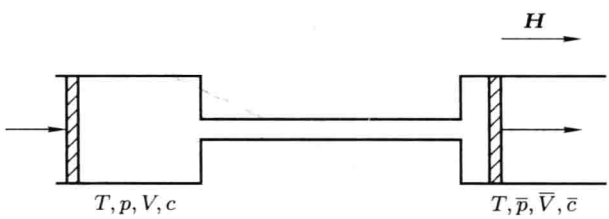


图 17.2

由理想气体定律所预见的 I 原子的分压 p_1 和 I_2 分子的分压 p_2 分别满足下列诸方程:

$$p_1 V = RTN(1-2c), \quad p_2 V = RTNc,$$

以及

$$pV = (p_1 + p_2)V = RTN(1-c);$$

① 这里及紧接着下文中的单位为中译者所加.——中译者注

而且, 同样地有

$$\overline{p}_1\overline{V} = RT\overline{N}(1-2\overline{c}), \quad \overline{p}_2\overline{V} = RT\overline{N}\overline{c},$$

以及

$$\overline{p}\overline{V} = RT\overline{N}(1-\overline{c}).$$

为了下面的讨论, 我们需要一个关于恒 T 时 $V\mathrm{d}p$ 的表达式. 首先我们有

$$V\mathrm{d}p = V(\mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}p_2) = NRT\left[(1-2c)\frac{\mathrm{d}p_1}{p_1} + c\frac{\mathrm{d}p_2}{p_2}\right].$$

引进两个辅助量

$$\mu_1 = RT\ln p_1 + f_1(T) \text{ 和 } \mu_2 = RT\ln p_2 + f_2(T), \tag{17.2}$$

式中的附加函数 (只是温度的函数) 暂时是任意的, 于是我们有

$$V\mathrm{d}p = N(1-2c)\mathrm{d}\mu_1 + Nc\mathrm{d}\mu_2 \text{ (对恒定 } T),$$

并且, 同样地有

$$\overline{V}\mathrm{d}\overline{p} = \overline{N}(1-2\overline{c})\mathrm{d}\overline{\mu}_1 + \overline{N}\overline{c}\mathrm{d}\overline{\mu}_2 \text{ (对恒定 } T).$$

现在我们必须求出混合气体的单原子和双原子组元的流体静(态)平衡条件; 在理想气体的情况中, 可认为这些组元是彼此独立的. 在连接两容器的连通管部位, 场强 H 与位置的坐标 x 有关, 因此, 有一 x 方向的力

$$\frac{N(1-2c)}{V}\chi H\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}$$

作用在原子上; 而通过分压的梯度 $-\mathrm{d}p_1/\mathrm{d}x$ 来维持平衡. 因为

$$N(1-2c)/V = p_1/(RT),$$

所以我们有

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x} - \frac{p_1}{RT}\chi H\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 0.$$

上式乘以 RT/p_1, 并对之积分, 则得到

$$RT\ln p_1 - \frac{1}{2}\chi H^2 = \text{常数},$$

或利用式 (17.2) 中引进的量 μ_1, 则有

$$\mu_1 - \frac{1}{2}\chi H^2 = \text{常数},$$

因而有

$$\mu_1 = \overline{\mu}_1 - \frac{1}{2}\chi H^2. \tag{17.3}$$

这里, 假定沿连通管的温度是恒定的.

我们略去 I_2 分子的抗磁性, 则可写出

$$p_2 = \overline{p}_2, \quad \mu_2 = \overline{\mu}_2. \tag{17.4}$$

$V\mathrm{d}p$ 和 $\overline{V}\mathrm{d}\overline{p}$ 的表达式以及流体静 (态) 平衡条件式 (17.3) 和式 (17.4) 已由吉布斯在其著作《*On the Equilibrium of Heterogeneous Substances* (论非均匀物质的平衡)》一文中广泛地推广到任意物质 (该文首次发表于 1875—1878 年间, 参见 *Collected Works of J. Willard Gibbs*, Vol. 1)①. 关于这一问题, 参阅 §18 和 §19.

在此以及下文中我们总是假定: 在化学成分不变的情况中, 化学反应的存在并不影响普遍的流体静 (态) 平衡条件.

现在我们已有充分的准备来讨论在上述两个反应匣中 I 原子和 I_2 分子间的化学平衡. 为此, 我们假定在固定的压强 p 和 $\overline{p}$ 以及固定的温度 T 时, 反应 $I_2 \rightleftharpoons 2I$ 将导致一定的浓度 c 和 $\overline{c}$, 从而有一定的分压; 并假定这些浓度和分压是这样的②, 使得流体静 (态) 平衡条件式 (17.3) 和式 (17.4) 与化学平衡是协调的.

若用一热槽来保持温度 T 恒定, 并令两容器中的活塞无限缓慢地移动, 使得两容积 V 和 $\overline{V}$ 之一减小, 而另一容积增大, 以至每一时刻都保持平衡, 则得到一个准静 (态) (从而是可逆的) 过程. 这意味着两压强 p 和 $\overline{p}$ 以及浓度 c 和 $\overline{c}$ 保持恒定, 因此总满足 (17.3) 和 (17.4) 两式. 为了方便 (虽然不是必要的), 假定始态有 $N = 1$, $\overline{N} = 0$, 而终态有 $N = 0, \overline{N} = 1$ (反过来也一样), 因而使 1 mol 的碘从左端的容器进入右端的容器 (或反过来). 对于这样的可逆过程, 上面定义的势 Φ 保持恒定, 从而热力学平衡条件为

$$\Phi(T, p, c) = \overline{\Phi}(T, \overline{p}, \overline{c}), \quad N = \overline{N} = 1. \tag{17.5}$$

此时若考虑在 H 和 T 恒定时相邻的压强, 则给出

$$V\mathrm{d}p = \overline{V}\mathrm{d}\overline{p}. \tag{17.6}$$

记注: 也能用下述的可逆等温循环过程来例示这一问题.

首先, 使 1 mol 的碘在恒压下从左端的容器进入右端的容器 (浓度的可逆变化). 则功 $= \overline{p}\overline{V} - pV$.

① 吉布斯首先用重力场作为外力场; 然后他也考虑了电场.

② 德文原版中此处尚有一短句"在连通管存在时".——中译者注

不用连通管而使右端的容器的容积变为 $\overline{V}+\mathrm{d}\overline{V}$, 则功 $=\overline{p}\mathrm{d}\overline{V}$.

此后, 使 1 mol 的碘从右端的容器再回到左端的容器中, 功 $=-(\overline{p}+\mathrm{d}\overline{p})(\overline{V}+\mathrm{d}\overline{V})+(p+\mathrm{d}p)(V+\mathrm{d}V)$.

最后, 不用连通管而使左端的容器的容积从 $V+\mathrm{d}V$ 变回 V, 则功 $=-p\mathrm{d}V$.

净功为 $V\mathrm{d}p-\overline{V}\mathrm{d}\overline{p}$, 而根据热力学第二定律, 它必定为零.

根据 $V\mathrm{d}p$ 和 $\overline{V}\mathrm{d}\overline{p}$ 的普遍表达式 (对于 $N=\overline{N}=1$), 我们有

$$(1-2c)\mathrm{d}\mu_1+c\mathrm{d}\mu_2=(1-2\overline{c})\mathrm{d}\overline{\mu}_1+\overline{c}\mathrm{d}\overline{\mu}_2;$$

而流体静 (态) 平衡条件表明

$$\mathrm{d}\overline{\mu}_1=\mathrm{d}\mu_1,\quad \mathrm{d}\overline{\mu}_2=\mathrm{d}\mu_2.$$

因此, 我们得到

$$(c-\overline{c})(2\mathrm{d}\mu_1-\mathrm{d}\mu_2)=0.$$

因为 $c\neq\overline{c}$ (由流体静平衡条件得出 $c<\overline{c}$), 所以

$$\frac{\mathrm{d}\mu_2}{\mathrm{d}\mu_1}=2$$

和

$\mu_2-2\mu_1$ 只是温度的函数.

现在我们这样来规定在 μ_1 和 μ_2 的定义中出现的函数 f_1 和 f_2, 使得

$$\mu_2-2\mu_1=0, \tag{17.7}$$

而在恒温 T 时

$$\mathrm{d}\Phi=V\mathrm{d}p=\mathrm{d}\mu_1=\frac{1}{2}\mathrm{d}\mu_2,$$

并通过要求

$$\Phi=\mu_1=\frac{1}{2}\mu_2 \tag{17.8}$$

或

$$\Phi=RT\ln p_1+f_1(T)=\frac{1}{2}[RT\ln p_2+f_2(T)] \tag{17.9}$$

而使 f_1 和 f_2 的定义成为唯一的. 利用式 (17.4), 于是我们有

$$\overline{\Phi}=\Phi=RT\ln\overline{p}_1+f_1(T)-\frac{1}{2}\chi H^2=\frac{1}{2}[RT\ln\overline{p}_2+f_2(T)].$$

平衡常数 K 由下式定义

$$\ln K=2\ln p_1-\ln p_2,\quad K=\frac{p_1^2}{p_2}. \tag{17.10}$$

利用式 (17.9), 式 (17.10) 能写成

$$\ln K = \frac{f_2 - 2f_1}{RT}, \tag{17.11}$$

它只是温度的函数, 相应地有

$$\overline{K} = \frac{\overline{p}_1^2}{\overline{p}_2} \text{ 和 } \ln \overline{K} = \ln K + 2\frac{\frac{1}{2}\chi H^2}{RT}.$$

现在我们应用普遍的热力学公式

$$E + pV = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\Phi}{T}\right) = \Phi - T\frac{\partial \Phi}{\partial T},$$

此式对 T 求导时, 压强应保持恒定. 这一公式与式 (17.11) 联合在一起, 只给出浓度 c 为 p 和 T 的隐函数; 对于分压

$$p_1 = p\frac{1-2c}{1-c} \text{ 和 } p_2 = p\frac{c}{1-c}$$

也同样如此. 然而, 若在对 T 求导之前, 我们利用 (17.9) 式, 并写出

$$\Phi = (1-2c)\left[RT\ln\left(p\frac{1-2c}{1-c}\right) + f_1(T)\right] + c\left[RT\ln\left(p\frac{c}{1-c}\right) + f_2(T)\right],$$

于是, 作为式 (17.11) 的结果, 我们形式上有

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial c}\right)_{p,T} = 0,$$

并且由此得出

$$E + pV = (1-2c)(-T^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_1}{T}\right) + c(-T^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_2}{T}\right).$$

只要上式中 $(1-2c)$ 和 c 的系数与 p 无关, 则正量

$$Q_p = T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{f_2 - 2f_1}{T} \tag{17.12}$$

便能看作使 1 mol 的 I_2 在恒压时分解为 2 mol 的 I 所需加入的热量. 相应地, 在右端的反应匣中 (场强为 H) 我们有

$$\overline{E} + \overline{p}\overline{V} = (1-2\overline{c})\left[-T^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_1}{T}\right) + T^2\frac{1}{2}H^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\chi}{T}\right)\right] + \overline{c}(-T^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_2}{T}\right);$$

因此,

$$\overline{Q}_p = Q_p + 2 \cdot \frac{1}{2} H^2 T^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\chi}{T}\right). \tag{17.13}$$

(我们可将居里定律 $\chi = C/T$ 代入上式; 于是, $\overline{Q}_p < Q_p$.)

(关于与温度无关的定压比热, 我们有

$$-T^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_1}{T}\right) = c_{p1} T + E_{01}$$

和

$$-T^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{f_2}{T}\right) = c_{p_2} T + E_{02};$$

所以,

$$f_1 = -c_{p1} T \ln T + E_{01} - i_1 RT$$

和

$$f_2 = -c_{p2} T \ln T + E_{02} - i_2 RT,$$

正如我们所已知的.)

此外, 由式 (17.11) 和式 (17.12) 两式可得下列熟知的方程

$$RT^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \ln K = Q_p \quad 和 \quad RT^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \ln \overline{K} = \overline{Q}_p. \tag{17.14}$$

因此, 这里所考虑的可逆过程和外场中的流体静 (态) 平衡条件一起, 足以确定部分离解的混合气体 (I_2 和 I) 的热力学性质 (关于对非理想气体的推广见下文).

我还要附加一些关于反应

$$H_2 + Cl_2 \rightleftharpoons 2HCl$$

的短注, 其中原子数

$$A_{Cl} = 2N_{Cl_2} + N_{HCl}$$

和

$$A_H = 2N_{H_2} + N_{HCl}$$

保持恒定. 只当不仅 p 和 T, 而且商 A_{Cl}/A_H 也已给定时, 参与反应的气体的浓度才由化学平衡唯一地确定. 所以, 要使在所考虑的反应匣中化学成分保持不变, 还必须满足另外一个条件. 然而, 孤立的气体组元 Cl_2 和 H_2 都是稳定的, 可设想对这些气体引进半透壁. 事实上, 只对这些气体之一 (例如 H_2) 用半透壁就行了.

因此, 我们首先考虑由两个分系统 a 和 b 组成的反应匣, 而 a 和 b 由对 H_2 是半可透的壁隔开. 在系统 a 中只有 H_2, 而系统 b 包含 H_2、Cl_2 和 HCl 的平衡混合气体. a, b 两系统中的每一个都设有可移动的活塞. 然而, 总应该满足流体静 (态) 平衡条件

$$\mu^a_{H_2} = \mu^b_{H_2}, \tag{17.15}$$

所以我们可以略去 μ_{H_2} 的指标 a 和 b. 考虑 T 固定以及 Cl 和 H 的总原子数 A_{Cl} 和 A_H 固定的情况. 于是, 利用式 (17.15), 我们得到整个反应匣的吉布斯函数 (a 和 b 贡献的总和) 为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Phi &= V_a \mathrm{d}p_a + V_b \mathrm{d}p_b \\ &= N_{H_2} \mathrm{d}\mu_{H_2} + N_{Cl_2} \mathrm{d}\mu_{Cl_2} + N_{HCl} \mathrm{d}\mu_{HCl}. \end{aligned}$$

式中 N_{H_2} 为 a 和 b 中 H_2 的总物质的量 (在下面的讨论中 N_{H_2} 的两部分并不分别出现).

将第二个反应匣置于外力场中 (匣中两组成部分与第一个反应匣中的类型相同). 在这些力场中, 这三种气体 H_2, Cl_2 和 HCl 的摩尔势能间存在着差别. 我们以 $E_{\mathrm{pot},k}$ 代表这些势能, 其中指标 k 能取三种值. 对于 $k = H_2$, 我们设想在反应匣的 a 和 b 两部分中 $E_{\mathrm{pot,H}}$ 的值相等.

若用连通管将左端反应匣的 b 部分与右端反应匣的 b 部分连接起来, 则流体静 (态) 平衡条件为

$$\overline{\mu}_k + E_{\mathrm{pot},k} = \mu_k, \tag{17.16}$$

式中还是以符号上方的一横来表示属于右端反应匣的量.

我们可设想, 左端反应匣的两个活塞和右端反应匣的两个活塞这样地移动 (见图 17.3), 以至在所发生的不可逆过程中两反应匣的每一部分内的所有压强和浓度都保持恒定 (利用热库保持温度恒定; $A_H + \overline{A}_H$ 与 $A_{Cl} + \overline{A}_{Cl}$ 两个和在此过程中通常都是不变的). 因此, 在此过程中左、右两反应匣的函数 Φ 与 $\overline{\Phi}$ 之和保持恒定. 在下文中我们总是用带撇的符号表示终态的量值, 而用不带撇的符号表示始态的量值. 用这种表示法, 我们有

$$\Phi + \overline{\Phi} = \Phi' + \overline{\Phi}'. \tag{17.17}$$

现在让我们考察在邻近压强 $p_a + \mathrm{d}p_a, p_b + \mathrm{d}p_b, \overline{p}_a + \mathrm{d}\overline{p}_a$ 和 $\overline{p}_b + \mathrm{d}\overline{p}_b$ 时的同一过程; 然而, 却令始态的 $A_H, A_{Cl}, \overline{A}_H$ 和 $\overline{A}_{Cl}$ 以及终态的 $A'_H, A'_{Cl}, \overline{A}'_H$ 和 $\overline{A}'_{Cl}$ 保持原值. 人们可像前文一样地设想: 也通过左、右反应匣彼此分开时的两个分过程, 将这两个具有恒定压强和浓度的过程合成一个循环过程①.

① 这段话按德文原版译出. ——中译者注

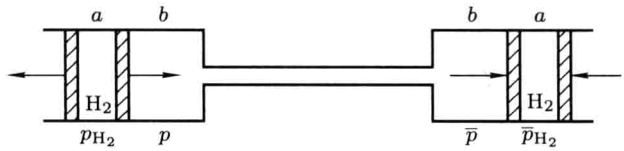


图 17.3

因为流体静 (态) 平衡条件表明 $\mathrm{d}\mu_k = \mathrm{d}\overline{\mu}_k$, 所以由式 (17.16) 和式 (17.17) 得到

$$\sum_k (N_k + \overline{N}_k)\mathrm{d}\mu_k = \sum_k (N'_k + \overline{N}'_k)\mathrm{d}\mu_k. \tag{17.18}$$

然而, 由于反应, 于是我们有 (利用一个不确定的, 但肯定不等于零的量 λ[①]

$$N'_{\mathrm{H}_2} + \overline{N}'_{\mathrm{H}_2} - (N_{\mathrm{H}_2} + \overline{N}_{\mathrm{H}_2}) = \lambda,$$
$$N'_{\mathrm{Cl}_2} + \overline{N}'_{\mathrm{Cl}_2} - (N_{\mathrm{Cl}_2} + \overline{N}_{\mathrm{Cl}_2}) = \lambda,$$

和

$$N'_{\mathrm{HCl}} + \overline{N}'_{\mathrm{HCl}} - (N_{\mathrm{HCl}} + \overline{N}_{\mathrm{HCl}}) = -2\lambda.$$

(这只不过表示, 在整个过程中 $A_{\mathrm{Cl}} + \overline{A}_{\mathrm{Cl}}$ 和 $A_{\mathrm{H}} + \overline{A}_{\mathrm{H}}$ 的守恒.)

因此, 根据式 (17.18), 我们有

$$\mathrm{d}\mu_{\mathrm{H}_2} + \mathrm{d}\mu_{\mathrm{Cl}_2} - 2\mathrm{d}\mu_{\mathrm{HCl}} = 0.$$

我们这样来选取包含在 μ_k 中的附加温度函数, 使得这些 μ_k 本身也满足这一关系:

$$\mu_{\mathrm{H}_2} + \mu_{\mathrm{Cl}_2} - 2\mu_{\mathrm{HCl}} = 0. \tag{17.19}$$

此外, 由这一条件得到, 在 $A_{\mathrm{H}}, A_{\mathrm{Cl}}$ 和 T 恒定时, 对于整个左端的反应匣有

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{2}(A_{\mathrm{H}}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{H}_2} + A_{\mathrm{Cl}}\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Cl}_2}),$$

(对于右端的反应匣也是类似的.)

于是, μ_k 中的附加温度函数由附加条件

$$\Phi = \frac{1}{2}(A_{\mathrm{H}}\mu_{\mathrm{H}_2} + A_{\mathrm{Cl}}\mu_{\mathrm{Cl}_2})$$

完全确定.

① 德文原版为 "…… 一个不定的 $\lambda \neq 0$"; 英译版为 "…… 一个一定的 $\lambda \neq 0$". ——中译者注

这里我们已这样地写出所有的关系式, 使它们对于任意物质都是正确的 (参见 §19). 只有分压 p_k 的概念和 μ_k 的特殊形式

$$\mu_k = RT \ln p_k + f_k(T)$$

是理想气体所特有的.

§18. 吉布斯变分法

吉布斯利用了闭合系虚的态变化. 他假设, 对于稳定态的邻态, 存在热力学函数. 关于熵的变化, 我们必定有

$$(\Delta S)_{E,V} = S_{\text{邻态}} - S_{\text{稳定态}} \leqslant 0.$$

若 $(\Delta S)_{E,V} \geqslant 0$, 则因熵是增长函数 (热力学第二定律), 熵的变化能自发地发生, 即, 邻态将是稳定的. 因此, 我们有下述定律: 具有一定体积和内能的闭合系, 倘若它的熵具有与给定的体积和内能对应的最大值, 则系统处于平衡.

若一系统的 T 和 V 或 T 和 p 保持恒定, 而不是 E 和 V 保持恒定, 则我们分别有如下的不等式

$$(\Delta F)_{T,V} \geqslant 0 \quad \text{或} \ (\Delta \Phi)_{T,p} \geqslant 0.$$

所以, 保持在给定温度、具有一定体积的闭合系, 倘若它的自由能具有与其体积和温度对应的最小值, 则系统处于平衡. 而且, 在定压和恒温时的闭合系处于平衡, 倘若其吉布斯函数具有与这些条件对应的最小值. 对于可逆的态变化, 平衡条件为

$$(\delta S)_{E,V} = 0, \quad (\delta F)_{V,T} = 0, \quad (\delta \Phi)_{T,p} = 0.$$

关于这些态是否稳定, 则要由二级变分来决定. 我们必定有

$$(\delta^2 S)_{E,V} < 0, \quad (\delta^2 F)_{V,T} > 0, \quad (\delta^2 \Phi)_{T,p} > 0$$

即, 二级变分必定为具有正确符号的定号二次形式.

§19. 应用 (初级变分)

a. 任意物质

设已给定某任意物质的吉布斯函数. 若该物质是由 N_k 摩尔的基元物质 k 组成的, 则有

$$\Phi = \Phi(T, p, N_1, N_2, \cdots, N_m).$$

对应于被假定为可能的反应的、在定压的恒温时的可能变分为

$$\nu_k\varepsilon = \delta N_k.$$

Φ 的初级变分为

$$\delta\Phi = \sum_k \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_k}\right)_{T,p} \delta N_k = \varepsilon \sum_k \nu_k\mu_k,$$

式中

$$\mu_k = (\partial\Phi/\partial N_k)_{T,p}$$

称为化学势. 因为由 $\Phi(T,p) = F(T,V) + pV$ 直接得到 $(\delta\Phi)_{T,p} = (\delta F)_{T,V}$, 所以, 我们也有

$$\mu_k = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_k}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_k}\right)_{T,V}.$$

利用 $\sum\limits_k \nu_k\Phi_k = 0$, 从而得到普遍的平衡条件为

$$\sum_k \nu_k\mu_k = 0.$$

b. 齐性

自由能和吉布斯函数分别为变量 V, N_k 和变量 N_k 的一次齐次函数:

$$F(T,\lambda V,\lambda N_k) = \lambda F(T,V,N_k),$$
$$\Phi(T,p,\lambda N_k) = \lambda\Phi(T,p,N_k).$$

若温度保持恒定, 则由上式导出 F 的欧拉关系:

$$F = V\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N_k} + \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial N_k}\right)_{T,V} N_k.$$

由于

$$\mathrm{d}F = -p\mathrm{d}V + \sum_k \mu_k \mathrm{d}N_k,$$

我们有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N_k} = -p \quad \text{和} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial N_k}\right)_{T,V} = \mu_k,$$

从而,

$$F = \sum_k \mu_k N_k - pV.$$

这允许我们令

$$F(T,V,N_k)=Vf(T,n_k),$$

式中 $n_k=N_k/V=\rho_k/M_k$ (M_k 为物质 k 的相对分子质量). 于是, 我们得到化学势为

$$\mu_k=\left(\frac{\partial F}{\partial N_k}\right)_{T,V}=\left(\frac{\partial f}{\partial_k}\right)_T.$$

在 T 和 p 恒定时, Φ 的欧拉关系为

$$\Phi=\sum_k N_k\left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_k}\right)_{p,T}$$

或

$$\Phi=\sum_k \mu_k N_k.$$

一方面,

$$\mathrm{d}\Phi=\mathrm{d}(F+pV)=V\mathrm{d}p+\sum_k \mu_k \mathrm{d}N_k,$$

而另一方面,

$$\mathrm{d}\Phi=\sum_k \mu_k \mathrm{d}N_k+N_k\mathrm{d}\mu_k.$$

因此, 我们得到重要关系 (吉布斯):

$$V\mathrm{d}p=\sum_k N_k\mathrm{d}\mu_k \quad (\text{对于一定的 } T).$$

c. 理想气体

令 $N=\sum_k N_k$ 为理想气体的混合气体的总物质的量. 将分压写成

$$p_k=\frac{N_k}{N}p,$$

我们求得混合气体的吉布斯函数为

$$\Phi=\sum_k N_k\left(RT\ln p\frac{N_k}{N}-c_{pk}T\ln T-i_kRT+E_{0k}\right).$$

利用关系式

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial N_k}\left[\sum_i N_i\ln\frac{N_i}{N}\right]&=\frac{\partial}{\partial N_k}\left[\sum_i N_i\ln N_i-N\ln N\right]\\&=\ln N_k-\ln N,\end{aligned}$$

我们得到化学势为

$$\mu_k = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N_k}\right) = -c_{pk}T\ln T + RT\ln p\frac{N_k}{N} - i_k RT + E_{0k}.$$

因此,

$$\mu_k = RT\ln\frac{N_k}{N}p + f_k(T);$$

或, 利用 $n_k = N_k/V \sim N_k p/N$, 从而,

$$\mu_k = RT\ln n_k + \varphi_k(T).$$

$f_k(T)$ 和 $\varphi_k(T)$ 都只是温度的函数.

d. 半透壁

考察有半透壁的情形. 令在容积 V' 中有 N_1' 摩尔的物质 1, 而在容积 V'' 中有 N_k'' 摩尔的物质 $k(k=1,2,3,\cdots,m)$, 见图 19.1. 令 V' 与 V'' 间的壁对物质 1 是可透过的. 整个系统被置于温度为 T 的无限大热库中. 因 T 和 V 是恒定的, 所以我们应用自由能 $F(T,V,N_k)$. 在体积和温度恒定时的可能变分为

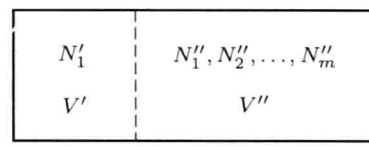


图 19.1

$$\delta F = \mu_1(n_1', 0, 0, \cdots, 0)\delta N_1' + \mu_1(n_1'', n_2'', n_3'', \cdots, n_m'')\delta N_1'' = 0.$$

因为分子离开 V' 而进入 V'', 所以必定有

$$\delta N_1' + \delta N_1'' = 0.$$

由这两个关系式, 我们得到条件

$$\mu_1(n_1', 0, 0, \cdots, 0) = \mu_1(n_1'', n_2'', n_3'', \cdots, n_m'').$$

这里不出现分压的概念, 在此例中, 可能变分为一实际反应. 对于理想气体, 我们得到

$$\ln n_1' = \ln n_1'' \text{ 或 } n_1' = n_1'';$$

即

$$N_1'/V' = N_1''/V''.$$

若我们定义 $p'_1 = RTN'_1/V'$ 和 $p''_1 = RTN''_1/V''$, 它们实际上对应于分压, 则我们得到

$$p' = p''.$$

e. 力场

现在我们考察在力场中的任意物质的混合物, 并令 $f(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m, T)$ 为单位体积的自由能. 组分物质的势能 $E_{k,\mathrm{pot}}$ 正比于物质的量 N_k. 于是, 总自由能为

$$F \int_V \left[f(n_k, T) + \sum_k n_k E_{k,\mathrm{pot}}(\boldsymbol{x}) \right] \mathrm{d}V,$$

式中 $n_k(\boldsymbol{x})$ 与位置有关. 相对于 $n_k(\boldsymbol{x})$ 的变分, F 应取极小值; 因此,

$$\delta F = \int_V \left[\left(\frac{\partial f}{\partial n_k} \right)_T + E_{k,\mathrm{pot}}(\boldsymbol{x}) \right] \delta n_k \mathrm{d}V = 0.$$

因为物质只能在力场中移动, 而无任何损失①, 所以

$$\int_V \delta n_k \mathrm{d}V = 0.$$

由上两个关系式得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n_k} \right)_T + E_{k,\mathrm{pot}}(\boldsymbol{x}) = 常数 = a_k$$

或

$$\mu_k(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_m) + E_{k,\mathrm{pot}}(\boldsymbol{x}) = a_k.$$

这是推广的气压计公式, 它最初由吉布斯对重力场的情况导出.

f. 渗压

吉布斯变分法能非常普遍地应用于溶液②. 用 1 表示溶剂, 而用 2 表示溶质. 令 V_0 中有 N_1^0 摩尔的溶剂, 而 V 中有由 N_1 摩尔的溶剂和 N_2 摩尔的溶质组成的溶液, 用只对溶剂是可渗透的半透膜将它与 V_0 隔开, 见图 19.2. 于是 V 中的浓度为

$$c = N_2/N_1 \text{ (溶质的物质的量除以溶剂的物质的量).}$$

有半透膜时, 平衡条件为

$$\mu_1(p_0, N_1^0, 0) = \mu_1(p, N_1, N_2).$$

① 意即任何物质都不会漏失.——中译者注

② f 和 g 两小节的参考文献: J. W. Gibbs, *Nature* 55, 461(1897); 以及 "Semipermeable Films and Osmotic Pressure," *Collected Works of J. Willard Gibbs*, Vol. I, p. 413.

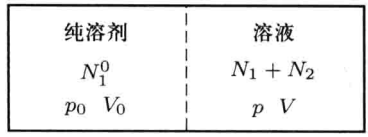


图 19.2

因为吉布斯函数是一次齐次函数, 我们可写成

$$\Phi(T,p,N_1,N_2)=N_1f(T,p,c) \text{ 和 } \Phi_1^0=N_1^0f(T,p,0).$$

所以,

$$\mu_1=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_1}\right)_{N_2}=f-c\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) \qquad \text{和 } \mu_2=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N_2}\right)_{N_1}=\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right).$$

若 π 为渗压, 则平衡条件为

$$\mu_1(p_0+\pi,c)=\mu_1(p_0,0), \quad \text{式中 } p=p_0+\pi.$$

可将这一关系式变换为

$$\mu_1(p_0,0)-\mu_1(p_0+\pi,0)=\mu_1(p_0+\pi,c)-\mu_1(p_0+\pi,0).$$

因为 $(\partial\Phi/\partial p)_T=V$ 和 $(\partial\Phi/\partial N_1)_{T,p}=\mu_1$, 从而 $(\partial\mu_1/\partial p)_T=(\partial V/\partial N_1)_{T,p}$. 对于 $c=0$, 即, 若 V 中只有溶剂, 则

$$\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial p}\right)_T=\frac{V}{N_1}.$$

因此,

$$\begin{aligned}&\mu_1(p_0+\pi,0)-\mu_1(p_0+\pi,c)\\ =&-\mu_1(p_0,0)+\mu_1(p_0+\pi,0)\\ =&\int_{p_0}^{p_0+\pi}\frac{V}{N_1}\mathrm{d}p.\end{aligned}$$

若忽略溶剂的可压缩性, 则得到

$$[\mu_1(p_0+\pi,0)-\mu_1(p_0+\pi,c)]\sim\left(\frac{V}{N_1}\right)\pi=\left(\frac{M_1}{\rho_1}\right)\pi.$$

化学势对浓度 c 的相关性不能由热力学来确定.

g. 溶液与溶质蒸气间的平衡

若溶质是挥发性的, 则溶质蒸气与溶液之间存在平衡, 若 $\overline{p}$ 为蒸气压, 则

$$\mu_2(p,c)=\mu_2(\overline{p})=\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right).$$

根据理想气体定律, 我们有

$$\mu_2(\overline{p})=RT\ln\overline{p}+f(T)\quad\text{(气体的化学势)}.$$

因此

$$\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)=RT\ln\overline{p}+f(T).$$

应用亨利经验定律

$$\overline{p}=\alpha c(1+\varkappa c+\cdots),$$

我们得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)=A_1+RT\ln c+RT\ln(1+\varkappa c+\cdots).$$

积分, 给出

$$f=A_0+A_1c+RT(c\ln c-c)+RT\left(\frac{\varkappa}{2}c^2+\cdots\right);$$

由此导出

$$\begin{aligned}\mu_1&=f-c\left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)=A_0-RTc-RT\frac{\varkappa}{2}c^2-\cdots\\&=A_0-RTc\left(1+\frac{\varkappa}{2}c+\cdots\right),\end{aligned}$$

式中 $A_0,A_1,\cdots,\varkappa$ 可能是 p 和 T 的函数. 于是, 我们有

$$\begin{aligned}&\mu_1(p_0+\pi,0)-\mu_1(p_0+\pi,c)=\frac{V}{N_1}\pi\\&=\frac{M_1}{\rho_1}\pi=RTc\left(1+\frac{\varkappa}{2}c+\cdots\right),\end{aligned}$$

或

$$\pi=\frac{RTcN_1}{V}\left(1+\frac{\varkappa}{2}c+\cdots\right).$$

式中 $RTcN_1/V=RTN_2/V$ 为 (具有与溶液相同体积、与溶质相同分子数的) 理想气体的压强.

h. 溶液与溶剂蒸气间的平衡

当然, 在溶剂蒸气与溶液间也存在平衡. 令 $\hat{p}$ 为溶剂气压. 我们有[①]

$$\mu_1(p,c)=\mu_{1v}(\hat{p}).$$

纯溶剂与其蒸气之间有如下的关系

$$\mu_1(p,0)=\mu_{1v}(p).$$

因此,

$$\begin{aligned}\mu_1(p,c)-\mu_1(p,0)&=\mu_{1v}(\hat{p})-\mu_{1v}(p)\\&=\int_p^{\hat{p}}\left(\frac{V}{N_1}\right)\mathrm{d}p=RT\ln\frac{\hat{p}}{p}.\end{aligned}$$

根据渗压的定义, 应有

$$\mu_1(p,c)=\mu_1(p-\pi,0).$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_1(p,c)-\mu_1(p,0)&=\mu_1(p-\pi,0)-\mu_1(p,0)\\&=RT\ln\frac{\hat{p}}{p}.\end{aligned}$$

忽略溶液的可压缩性, 我们有

$$\begin{aligned}\mu_1(p-\pi,0)-\mu_1(p,0)&=\int_p^{p-\pi}\left(\frac{V}{N_1}\right)\mathrm{d}p\\&=-\left(\frac{V}{N_1}\right)\pi=RT\ln\frac{\hat{p}}{p},\end{aligned}$$

或

$$\left(\frac{V}{N_1}\right)\pi=RT\ln\frac{p}{\hat{p}};$$

即

$$p>\hat{p}.$$

上述公式给出渗压与由以溶液代替纯溶剂所引起的蒸气压变化之间的关系. 根据这一公式, 沸点与凝固点的变化能够作为渗压的函数来计算.

① 符号的下标 v 代表蒸气.——中译者注

i. 球面外[①]的蒸气压

我们考察一个半径为 r 的球, 其每立方厘米包含 n 摩尔的流体. 在恒压时, 我们假定 n 为恒量. 于是,

$$A = 4\pi r^2, \quad \mathrm{d}A = 8\pi r \mathrm{d}r,$$
$$N = n\frac{4\pi}{3}r^3, \quad \mathrm{d}N = n4\pi r^2 \mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}A = \frac{2}{nr}\mathrm{d}N.$$

令 γ 为表面张力. 于是,

$$\delta W = p\mathrm{d}V - \gamma \mathrm{d}A.$$

利用 $\overline{\Phi} = \Phi + \gamma A$, 我们得到[②]

$$\mathrm{d}\overline{\Phi} = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu \mathrm{d}N + \gamma \mathrm{d}A,$$
$$(\delta\overline{\Phi}_l)_{T,p} = \mu_l(p)\delta N_l + \gamma \mathrm{d}A = \left[\mu_l(p) + \gamma\frac{2}{nr}\right]\delta N_l,$$
$$(\delta\overline{\Phi}_v)_{T,p} = \mu_v(p)\delta N_v.$$

由于 $\delta(N_l + N_v) = 0$, 我们有

$$\delta(\overline{\Phi_l} + \overline{\Phi_v})_{T,p} = \left[\mu_l(p) + \gamma\frac{2}{nr} - \mu_v(p)\right]\delta N_l = 0$$

和

$$\mu_l(p') + \gamma\frac{2}{nr} = \mu_v(p').$$

式中 p' 应代表球面外的蒸气压. 这一公式也能由下列两式导出:

$$\delta(F_l + F_v)_{T,V} = 0 \quad 和 \quad \delta(V_l + V_v) = 0.$$

取 $r \to \infty$ 的极限, 我们得到, 对于平表面 (蒸气压为 p) 有

$$\mu_l(p) = \mu_v(p).$$

因此,

$$\gamma\frac{2}{nr} = [\mu_v(p') - \mu_l(p')] - [\mu_v(p) - \mu_l(p)];$$

或用摩尔体积 v 表示, 则有

$$\gamma\frac{2}{nr} = \int_p^{p'}(v_v - v_l)\mathrm{d}p.$$

① über, above, 指球表面上靠外.——中译本编注
② 以下各式中符号的下标 l 代表流体.——中译者注

这个方程是精确的.

此外, 关于理想气体和不可压缩流体, 则有

$$\gamma\frac{2}{nr}=RT\ln\frac{p'}{p}-v_l(p'-p).$$

因此, 蒸气压 p' 与半径 r 相关. 在恒压 p 时, r 越小, p' 越大 (因为公式右端对 p' 的导数为 $RT/p'-v_l=v_v-v_l>0$).

§20. 关于二级变分的注释

设体积为 V 的单相系由一假想壁分成体积为 V_1 和 V_2 的两个固定部分, 如图 20.1 所示. 我们要来求稳定平衡条件, 我们有

$$V_1+V_2=V,\quad N_1+N_2=N,$$
$$E_1+E_2=E,\quad S_1+S_2=S.$$

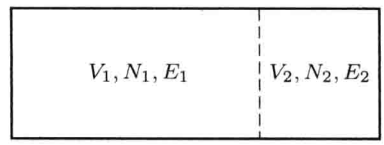


图 20.1

初级变分为

$$\delta S=\left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1}\right)\mathrm{d}E_1+\left(\frac{\partial S_2}{\partial E_2}\right)\mathrm{d}E_2+\left(\frac{\partial S_1}{\partial N_1}\right)\mathrm{d}N_1+\left(\frac{\partial S_2}{\partial N_2}\right)\mathrm{d}N_2=0,$$

其附加条件为

$$\mathrm{d}E_1+\mathrm{d}E_2=0\ \text{ 和 }\ \mathrm{d}N_1+\mathrm{d}N_2=0.$$

因此, 平衡条件为

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial E_1}\right)=\left(\frac{\partial S_2}{\partial E_2}\right)\tag{20.1}$$

和

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial N_1}\right)=\left(\frac{\partial S_2}{\partial N_2}\right).\tag{20.2}$$

由式 (20.1) 得到 $T_1=T_2$.

由于 S 具有齐性, $S(\lambda V,\lambda E,\lambda N)=\lambda S(V,E,N)$, 所以我们有

$$S=V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)+E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)+N\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)$$

或

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)=\frac{1}{N}\left[S-V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)-E\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)\right].$$

对于单相系, $\mathrm{d}S=(\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V)/T$, 即

$$\partial S/\partial V=p/T \text{ 和 } \partial S/\partial E=1/T.$$

所以,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)=\frac{1}{N}\left[S-\frac{pV}{T}-\frac{E}{T}\right]=-\frac{\Phi}{NT}.$$

因此, 由式 (20.2) 得到

$$\Phi_1/N_1T_1=\Phi_2/N_2T_2 \text{ 或 } \Phi_1/N_1=\Phi_2/N_2,$$

即

$$p_1=p_2.$$

上面这些关系对于稳定平衡是必要的, 但并非充分的. 所以, 我们还必须考察二级变分. 我们必定有

$$\delta^2S=\sum_i\delta^2S_i=2\sum_i\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2S_i}{\partial E_i^2}\right)(\mathrm{d}E_i)^2+\left(\frac{\partial^2S_i}{\partial E_i\partial N_i}\right)\mathrm{d}E_i\mathrm{d}N_i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2S_i}{\partial N_i^2}\right)(\mathrm{d}N_i)^2\right\}\leqslant 0,$$

以及附加条件

$$(\mathrm{d}E_1)^2=(\mathrm{d}E_2)^2,\ \ \mathrm{d}E_1\mathrm{d}N_1=\mathrm{d}E_2\mathrm{d}N_2 \text{ 和 } (\mathrm{d}N_1)^2=(\mathrm{d}N_2)^2.$$

由于在平衡态中量

$$N_i\frac{\partial^2S_i}{\partial E_i^2},\quad N_i\frac{\partial^2S_i}{\partial E_i\partial N_i} \text{ 和 } N_i\frac{\partial^2S_i}{\partial N_i^2}$$

与 i 无关, 所以我们能引进下列各量: 每摩尔内能 $e=E/N=E_i/N_i$; 每摩尔体积 $v=V/N=V_i/N_i$; 每摩尔熵 $S(e,v)=S/N=S_i/N_i$. 于是, 我们得到

$$\delta^2S=2N\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2s}{\partial e^2}\right)(\mathrm{d}e)^2+\left(\frac{\partial^2s}{\partial e\partial v}\right)\mathrm{d}e\mathrm{d}v+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2s}{\partial v^2}\right)(\mathrm{d}v)^2\right\}\leqslant 0.$$

在下文中, 我们仍将 s,e,v 写成 S,E 和 V; 对此, 我们必须牢记这些量是属于 1 mol 的量. 用这个新表示法, 稳定性条件则为

$$\delta^2S=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2S}{\partial E^2}\right)(\mathrm{d}E)^2+\left(\frac{\partial^2S}{\partial E\partial V}\right)\mathrm{d}E\mathrm{d}V+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2S}{\partial V^2}\right)(\mathrm{d}V)^2\right\}\leqslant 0.$$

我们希望用自由能 F 写出这个表达式:

$$S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,\quad E=F-T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V,$$
$$\mathrm{d}S=-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\mathrm{d}T-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\mathrm{d}V,$$
$$\mathrm{d}E=-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\mathrm{d}T+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\right]\mathrm{d}V.$$

由

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E=-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E-\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}$$

和

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right),$$

得到

$$(\mathrm{d}V=0),\quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V=\frac{1}{T}\quad 和\ (\mathrm{d}E=0),\quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E=-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T.$$

应用关系式

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)=\left(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2}\right)\mathrm{d}E+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial E\partial V}\right)\mathrm{d}V$$

和

$$\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)=\left(\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial E}\right)\mathrm{d}E+\left(\frac{\partial^2 S}{\partial V^2}\right)\mathrm{d}V,$$

我们能写出

$$\begin{aligned}\delta^2 S&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)\mathrm{d}E+\mathrm{d}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)\mathrm{d}V\\&=\mathrm{d}\left(\frac{1}{T}\right)\left\{-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\mathrm{d}T+\left[\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\right]\mathrm{d}V\right\}+\\&\quad\ \mathrm{d}\left[-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)\right]\mathrm{d}V\\&=\left\{\frac{\mathrm{d}T}{T}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)\mathrm{d}T-\frac{\mathrm{d}T}{T^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)-T\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\right]\mathrm{d}V\right\}+\\&\quad\ \left\{\left[\frac{\mathrm{d}T}{T^2}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)\mathrm{d}T\right]\mathrm{d}V-\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)(\mathrm{d}V)^2\right\}\\&=\frac{1}{T}\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)(\mathrm{d}T)^2-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial V^2}\right)(\mathrm{d}V)^2\right\}\\&=-\frac{1}{T}\left\{\frac{c_v}{T}(\mathrm{d}T)^2-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T(\mathrm{d}V)^2\right\}\leqslant 0.\end{aligned}$$

由此, 我们得到下列平衡条件:

$$\text{对 } V=\text{常数}, \quad c_v \geqslant 0;$$
$$\text{对 } T=\text{常数}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \leqslant 0.$$

§21. 温差电问题

由于这些效应是不可逆过程, 所以它们部分地被排除在热力学领域之外. 统计诠释是可能的; 然而它又超出了唯象热力学的范畴.

a. 汤姆孙效应

若一导线中通过电流 J, 且该导线的两端存在温度差 ΔT, 则每秒产生的热量[①]为

$$Q=\tau \Delta T J.$$

根据物质的种类, τ 可能取正值或负值. 这一过程是可逆的.

b. 佩尔捷效应

若两种金属的界面有电流 J 通过, 则每秒产生热量 $Q=\pi J$. 佩尔捷常数 π 与温度 T 相关.

c. 温差电动势

在两种金属的焊接处, 产生一电动势

$$E_{12}(T)=E_2-E_1,$$

设有两条不同的导线, 将它们的两端 A 和 B 彼此焊接起来. 令焊接点 A 的温度为 $T+\mathrm{d}T$, 而另一焊接点 B 的温度为 T, 如图 21.1 所示. 在 A 处产生

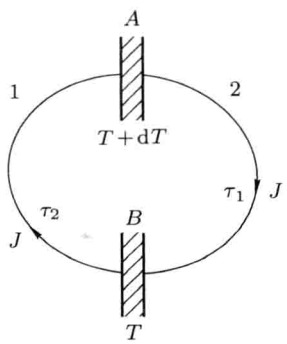


图 21.1

① 德文原版此处尚有一短句: (附加于焦耳热).——中译者注

一电动势 $E_{12}+\mathrm{d}E_{12}$, 而在 B 处产生一电动势 E_{21}. 在 A 处每单位电流 (强度) 每秒[①]吸收了佩尔捷热 $\pi+\mathrm{d}\pi$, 而在 B 处每单位电流 (强度) 每秒放出了佩尔捷热 π. 由于汤姆孙效应, 两导线中每单位电流 (强度) 每秒产生的热量计为 $(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}T$. 因为系统的内能不变, 所以, 根据热力学第一定律, 每单位电流 (强度) 所作的功的量值必定等于每单位电流 (强度) 所吸收的热的量值. 由于单位电流 (强度) 每秒所作的功的量值等于 A 与 B 两点间的电势差, 因此我们有

$$\mathrm{d}E=\mathrm{d}\pi+(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}T,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}=\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}T}+(\tau_2-\tau_1).$$

从 T_1 积分到 T_2, 得

$$E(T_2)-E(T_1)=\pi(T_2)-\pi(T_1)+\int_{T_1}^{T_2}(\tau_2-\tau_1)\mathrm{d}T.$$

若将整个过程看作是可逆的 (这不是严格正确的), 则我们可应用热力学第二定律; 由于

$$\oint(\delta Q)/T=0,$$

从而得到

$$\frac{\pi(T_2)}{T_2}-\frac{\pi(T_1)}{T_1}+\int_{T_1}^{T_2}(\tau_2-\tau_1)\frac{\mathrm{d}T}{T}=0.$$

由于 T_1 和 T_2 是接近相等的温度, 所以我们可求导而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\pi}{T}\right)+\frac{\tau_2-\tau_1}{T}=0.$$

同热力学第一定律的结果合在一起, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\pi}{T}\right)+\frac{1}{T}\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}-\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}T}\right]=0$$

或

$$-\left(\frac{\pi}{T^2}\right)+\frac{1}{T}\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}\right)=0.$$

此式准确地给出汤姆孙所求得的关系

$$\frac{\pi}{T}=\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T}.$$

① 原文为 "每单位电流吸收了 $\cdots$"; 下文同此.——中译者注

还有

$$(\tau_2 - \tau_1) = -T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\pi}{T}\right) = -T\left(\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}T^2}\right).$$

实际上, 这一关系的推导是错误的; 然而, (正如我们能根据统计的观点所求得的一样) 这个结果是正确的①. 仿效玻耳兹曼的方法, 我们能用热力学严格地导出②

$$\left[\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} - \frac{\pi}{T}\right]^2 \leqslant \frac{4}{T}\overline{\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)},$$

式中

$$\overline{\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)} \equiv \left[\sqrt{\frac{\lambda_1}{\sigma_1}} + \sqrt{\frac{\lambda_2}{\sigma_2}}\right]^2,$$

其中 λ 为热导率, 而 σ 为电导率.

① L. Onsager, *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931) *and Phys. Rev.* **38**, 2265 (1931). 以及 H. B. G. Casimir, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 343 (1945).

② L. Boltzmann, *Wien. Ber.* **96**, 1258 (1887).

第四章

能斯特热定理

§22. 能斯特热定理

能斯特热定理论述在接近绝对零度时热力学函数的性状. 众所周知, 热力学第二定律在确定熵时有一个任意的附加常数. 这一常数将由能斯特热定理合理地标准化.

让我们首先考虑自由能:

$$F = E + T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right), \qquad \Delta F = \Delta E + T\frac{\partial(\Delta F)}{\partial T}.$$

由此得到

$$\lim_{T\to 0}(\Delta F - \Delta E) = 0.$$

能斯特要求更严格的条件

$$\lim_{T\to 0}\frac{\Delta F - \Delta E}{T} = 0.$$

由此, 得到等效的关系

$$\lim_{T\to 0}\frac{\partial(\Delta F)}{\partial T} = 0, \qquad \lim_{T\to 0}\frac{\partial(\Delta \Phi)}{\partial T} = 0,$$

且更有

$$\lim_{T\to 0}\Delta S = 0.$$

这是能斯特热定理的较狭义表述; 它表明, 在绝对零度时所有熵的变化都为零. 由普朗克提出的能斯特热定理的推广表述为: 在关系式 $\lim\limits_{T\to 0}\Delta S = 0$ 中 Δ 可以略去; $S_0 = \lim\limits_{T\to 0} S$ 应该是有限的和普适的. 熵常数的合理的标准化由下式给出:

$$\lim_{T\to 0} S = 0;$$

即, 所有纯物质的熵在绝对零度 ($T=0$) 时具有零值. 由这一要求得出: 在绝对零度时所有物质的熵必定为零. 这是因为, 根据能斯特 (热定理), 在绝对零度时, 由某些纯物质构成一物质所引起的熵的变化 ΔS 为零.

由 $\lim\limits_{T\to 0} S=0$, 得知[①] $\lim\limits_{T\to 0}(\partial S/\partial V)_T$ 和 $\lim\limits_{T\to 0}(\partial S/\partial p)_T$ 与所有参量无关, 因而同样可令它们为零:

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=0 \quad 和 \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=0.$$

由此得出

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial T\partial V}\right)=0 \quad 和 \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V=0.$$

类似地有

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial T\partial p}\right)=0 \quad 和 \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=0.$$

由此还得到[②]

$$\lim_{T\to 0}(c_p-c_V)=0;$$

即, $T=0$ 时, 必有 $c_p=c_V$. 由

$$c_V=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \quad c_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \text{ 和 } \lim_{T\to 0} S=0$$

得

$$S=\int_0^T\frac{c_V}{T}\mathrm{d}T \quad 或 \quad S=\int_0^T\frac{c_p}{T}\mathrm{d}T.$$

能斯特热定理的广义表述: 上列两积分存在. 若 $\lim\limits_{T\to 0} c_V$ 存在, 则对于 $T=0$, 必定有 $c_p=c_V=0$. 因为

$$S=-(\partial F/\partial T)_V \quad 和 \quad S=-(\partial \Phi/\partial T)_p,$$

从而得到

$$F=-\int_0^T\mathrm{d}T'\int_0^{T'}\frac{c_V(T'',V)}{T''}\mathrm{d}T''+E_0(V)$$

和

$$\Phi=-\int_0^T\mathrm{d}T'\int_0^{T'}\frac{c_p(T'',p)}{T''}\mathrm{d}T''+E_0+pV_0.$$

① 下文英译版与德文原版有出入; 按德文原版译出.——中译者注

② 参见式 (12.7).

§23. 绝对零度的不可达到性

绝对零度不可达到性的要求包含在能斯特热定理中; 然而它不如能斯特热定理充分. 因为每一过程都能分解为绝热和等温过程, 所以, 为了证明不可达到性, 只要证明不可能通过绝热的态变化达到绝对零度就够了. 按照能斯特热定理, 不存在这样的绝热线, 沿着它能够达到绝对零度. 由于在绝对零度时绝热线 $S=0$ 与等温线 $T=0$ 相合, 所以不存在 $S=$ 常数 $\neq 0$ 的绝热线能与对应于等温线 $T=0$ 的绝热线 $S=0$ 相交. 因此, 不可能通过绝热的态变化达到绝对零度.

每摩尔理想气体的熵为

$$S = c_V \ln T + R \ln V + a = R \ln(V T^{\frac{c_V}{R}}) + a.$$

在 $T=0$ 时, 对于有限态变化, S 不通过零值. 这似乎满足能斯特热定理. 然而, 由于

$$\lim_{T\to 0}[S(T,V_2) - S(T,V_1)] = R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \neq 0,$$

这是不对的. 尽管在此情况中绝对零度是不可达到的, 然而并不满足能斯特热定理. 但人们不能因此而怀疑能斯特热定理. 相反地, 我们必须认为它是正确的, 并且同时假设, 在非常低的温度 (在绝对零度的邻近) 时, 上述关于理想气体的方程不再成立, 即, 理想气体变为简并的. 量子理论证实了这一假设.

第五章

气体分子运动论

关于物质的原子结构, 必须假设物质的最小组元原子和分子, 不是静止的而是运动着的. 当然, 这一运动是不能直接观察到的; 然而, 它的存在由布朗运动显示出来. 因此, 首先由克勒尼希, 后来由麦克斯韦和克劳修斯建立了如下的假说: 热能与分子或原子的动能等同. 所以, 人们可以说热量是无序形式的能量. 玻耳兹曼引入了 "态的概率" 的概念, 并把它同熵联系起来. 熵只能增加的定律与下面的陈述是等同的: 态变化时, 系统只能过渡到较概然的态.

将物质的各种聚集态[①]区分如下.

气态: 除碰撞外, 分子的运动是不受力的作用的 (略去外力场).

固态: 原子相对于平衡位形而振动.

液态: 因为总有大量分子相互作用, 所以匀速运动和平衡位形都不是好的近似.

与液体理论 (尚未充分奠定基础) 相反, 目前气体理论和固体结构理论都有了很大的进展.

利用理想气体, 我们可以作如下的假设:

1. 两自由分子的平均间距比分子的线度大很多.

2. 分子的平均势能比其动能小很多, 因此我们可以忽略它.

我们将假设气体由刚性小球构成. 然而, 结果表明, 大多数结果与具体模型无关.

§24. 压强的计算

我们来计算理想气体分子作用在完全弹性壁上的压强. 令

① 英译版仅称为 "态". ——中译者注

$$f(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3$$

为速度 (v_1,v_2,v_3) 在 v_1 至 $v_1+\mathrm{d}v_1$, v_2 至 $v_2+\mathrm{d}v_2$ 和 v_3 至 $v_3+\mathrm{d}v_3$ 范围内的分子所占的分数. 并令 f 按下式归一化:

$$\int f\mathrm{d}^3v=1,$$

式中

$$\mathrm{d}^3v=\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3.$$

压强由单位时间内传递给单位面积的壁上的动量给出. 速度在 v_1 至 $v_1+\mathrm{d}v_1$, v_2 至 $v_2+\mathrm{d}v_2$ 和 v_3 至 $v_3+\mathrm{d}v_3$ 范围内, 并且每秒击中 1 cm^2 的壁的分子处于容积为 v_1 的一圆柱中 (参见图 24.1). 所以, 这些分子的个数为 $nv_1f(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}^3v$, 其中 n 为每立方厘米中的分子数. 每一分子传递给壁的动量为 $2mv_1$; 所以, 在圆柱内的所有分子传递给壁的总动量为 $2mv_1^2nf(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}^3v$. 因此, 压强 p 的值为

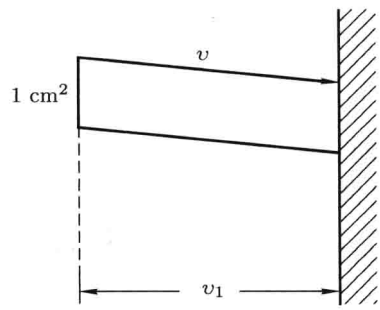


图 24.1

$$p=2mn\int_{v_1>0}v_1^2f(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}^3v.$$

若我们假设 f 为 v_1 的偶函数, 即, $f(-v_1,v_2,v_3)=f(v_1,v_2,v_3)$, 则

$$p=mn\int v_1^2f(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}^3v.$$

我们定义 v_1^2 的平均值 $\overline{v_1^2}$ 为

$$\overline{v_1^2}=\int v_1^2f(v_1,v_2,v_3)\mathrm{d}^3v.$$

按这一定义, 我们有

$$p=mn\overline{v_1^2}.$$

这一结果与壁的本性无关. 若给定一任意的壁, 那么, 通过附加一假想曲面而使它成为一闭合曲面①, 见图 24.2. 我们能定义一个动量张量为

$$T_{ik} = nm\overline{v_i v_k}.$$

于是, 每单位时间通过假想曲面 F 而被输运的动量的第 i 分量为②

$$\int_F \sum_k T_{ik} \cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x}_k) \mathrm{d}f,$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 为 $\mathrm{d}f$ 的外法线.

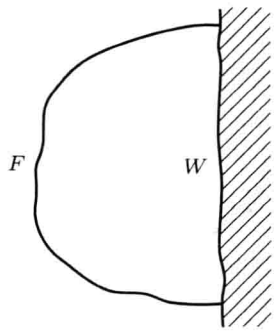


图 24.2

压强以张量 p_{ik} 表示的一个类似的表达式对壁 W 也是成立的. 考虑由 F 和 W 所包围的体积内动量的平衡, 我们得到

$$\int_F \sum_k T_{ik} \cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x}_k) \mathrm{d}f + \int_W \sum_k p_{ik} \cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x}_k) \mathrm{d}f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int nm\overline{v}_i \mathrm{d}V = 0. \tag{24.1}$$

若将 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\varphi$ ($\boldsymbol{a}$ 为恒矢) 代入高斯定理

$$\int \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int \operatorname{div} \boldsymbol{A} \mathrm{d}V,$$

则, 利用 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi$, 我们得到

$$\int \boldsymbol{a}\varphi \cdot \mathrm{d}f = \boldsymbol{a} \cdot \int \operatorname{grad} \varphi \mathrm{d}V,$$

$$\sum_k a_k \int \varphi \cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x}_k) \mathrm{d}f = \sum_k a_k \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \mathrm{d}V,$$

$$\int \varphi \cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x}_k) \mathrm{d}f = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \mathrm{d}V.$$

① 参见图 24.2.

② 英译版中下面几个式子中的余弦函数为 $\cos(\boldsymbol{N}, \widehat{x})$, 可能印刷有误.——中译者注

以 T_{ik} 代替 φ, 并令 F 代表闭合曲面, 则由式 (24.1) 我们得到

$$\int \sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \mathrm{d}V + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \rho \overline{v}_i \mathrm{d}V = 0,$$

式中

$$\rho = nm.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho \overline{v}_i) = -\sum_k \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \qquad (\text{流体动力学方程}).$$

对于稳定情况, 由此方程, 或同样地由式 (24.1), 我们得到 [A–12]

$$p_{ik} = T_{ik} \qquad (\text{与位置无关}),$$

在各向同性速度分布的情况中, 我们有

$$p_{ik} = \delta_{ik} p \quad \text{和} \quad \overline{v_i v_k} = \delta_{ik}(\overline{v^2}/3);$$

所以

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2}.$$

单个分子的动能为 $E_{\mathrm{kin}} = \dfrac{1}{2} mv^2$, 而全部分子的动能为

$$U = \frac{1}{2} mn\overline{v^2};$$

所以

$$p = 2U/3.$$

若 v 为摩尔体积, 而 L 为阿伏伽德罗常量, 则 $L = nv$, 于是我们得到

$$pv = \frac{2}{3} L\overline{E}_{\mathrm{kin}},$$

式中 $\overline{E}_{\mathrm{kin}}$ 为分子的平均动能①. 根据玻意耳定律, 有 $pv = RT$; 由此得到

$$\overline{E}_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3R}{2L} T = \frac{3}{2} kT,$$

式中 $k = R/L$ 为玻耳兹曼常量. 因此平均动能为温度的函数. 在此我们能提出下述重要的新假设: 在热力学平衡时两分子的平均动能彼此相等. 在热能完全由动能组成的假设下, 我们得到比热为

① 这句话是中译者所加.——中译者注

$$c_V = \frac{3}{2}R \sim 3 \text{ cal/mol.}^{①}$$

第二个假设并非普遍有效. 它只对单原子气体成立 (稀有气体, 金属蒸气). 对于多原子气体, $c_V > 3R/2$. 这意味着热能并非完全由动能所组成. 严格地说, 这些论述已超出了气体分子运动论的范畴. 因为有三个与平移运动相关的自由度, 而且在此情况 (单原子气体) 中的动能为 $\overline{E}_{\text{kin}} = 3kT/2$, 所以假定每个自由度的动能[②]为 $kT/2$. 在多原子气体的情况中, 除平动能外, 还必须考虑转动能.

单原子气体: $f = 3, c_V = 3R/2, \varkappa = 1.66$;

双原子气体: $f = 5, c_V = 5R/2, \varkappa = 1.40$;

三原子气体: $f = 6, c_V = 3R, \varkappa = 1.33$.

量 $\varkappa$ 由下列诸关系式来计算:

$$c_V = \frac{f}{2}R, \quad c_p - c_V = R, \quad \varkappa = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{f+2}{f}.$$

困难在于自由度数的确定 (详见本讲义第四卷《统计力学》).

一个气体分子的平均速率[③] $\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}}$ 之值具有声速 V 的数量级:

$$V = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\varkappa \frac{RT}{M}}.$$

由

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT,$$

得

$$\overline{v} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{3\frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{3}{\varkappa}}V.$$

§25. 速度分布

速度分布的严格推导是从考虑各个分子或原子的碰撞着手的. 在各向同性速度分布的情况中, 我们有

$$f(v_1, v_2, v_3)\mathrm{d}^3v = f(v^2)\mathrm{d}^3v = f(v^2)v^2\mathrm{d}v\mathrm{d}\Omega,$$

式中 $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, 而 $\mathrm{d}\Omega$ 为立体角元 (在极坐标[④]中 $\mathrm{d}^3v = v^2\mathrm{d}v\mathrm{d}\Omega$). 麦克斯韦假设, 速度的任一分量的分布与其他分量无关. 所以, 他令 $f(v^2) =$

① 此处单位从原文照抄, 而正确的应为 cal/(mol · K).——中译本编注

② 实为平均动能.——中译者注

③ 原文如此, 不妥. 应为方均根速率, 通常以 v_s 表示, 以与平均速率 $\overline{v}$ 相区别. 下文同此.——中译者注

④ 原文如此. 实为速度空间的球坐标.——中译者注

$g(v_1)g(v_2)g(v_3)$. 这样来引入函数 $\psi(v_i)$ 和 $\varphi(v^2)$, 使得

$$\ln g(v_i) = \psi(v_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

和

$$\ln f(v^2) = \varphi(v^2),$$

则我们得到函数方程

$$\varphi(v^2) = \varphi(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) + \psi(v_3).$$

只当 $\varphi(v^2)$ 和 $\psi(v_i)$ 为 v_i^2 的线性函数, 即

$$\psi(v_i^2) = -\alpha v_i^2 + \beta \text{ 或 } g(v_i) = \text{常数} \times \mathrm{e}^{-\alpha v_i^2},$$

上列函数方程才存在解. 由此得到

$$f(v^2) = \text{常数} \times \mathrm{e}^{-\alpha(v_1^2+v_2^2+v_3^2)} = \text{常数} \times \mathrm{e}^{-\alpha v^2}.$$

常数由归一化 $\int_v f\mathrm{d}v = 1$ 确定. 由

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha v_i^2}\mathrm{d}v_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

得

$$f(v^2) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha v^2}.$$

现在 α 可由方均速度 $\overline{v_1^2}$ 来确定: 按定义

$$\overline{v_1^2} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v_1^2 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1} = \frac{\dfrac{1}{2\alpha}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v_1(2\alpha v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2})\mathrm{d}v_1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1} = \frac{1}{2\alpha};$$

但因 $\overline{v_1^2} = kT/m$, 于是有

$$\alpha = \frac{m}{2kT}.$$

最后, 我们得到各向同性速度分布函数为

$$f(v^2)\mathrm{d}^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\left(\frac{m}{2kT}\right)v^2}\mathrm{d}^3v.$$

一个分子具有速率 v 的概率为

$$\begin{aligned} w(v)\mathrm{d}v &= \int_\Omega f(v^2)\mathrm{d}^3v = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha v^2} v^2 \mathrm{d}v \int_\Omega \mathrm{d}\Omega \\ &= 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \mathrm{e}^{-\alpha v^2}\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 \mathrm{e}^{-\frac{m}{2kT}v^2}\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

此式给出图 25.1 所示的速度分布. 最概然速率由关系式

$$\mathrm{d}w(v)/\mathrm{d}v = 0$$

求出:

$$1 - \alpha v_M^2 = 0$$

或

$$v_M = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

因为方均速率 $\overline{v^2} = \sum_i \overline{v_i^2} = 3/(2\alpha)$, 于是我们得到 $v_M = (2\overline{v^2}/3)^{\frac{1}{2}}$. 平均速率 $\overline{v}$ 由下式定义:

$$\overline{v} = \int_0^\infty v w(v)\mathrm{d}v = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \mathrm{e}^{-\alpha v^2}\mathrm{d}v.$$

经过两次分部积分后, 我们得到 $\overline{v} = 2(\alpha\pi)^{-\frac{1}{2}}$. 所以

$$\overline{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_M = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\overline{v^2}}.$$

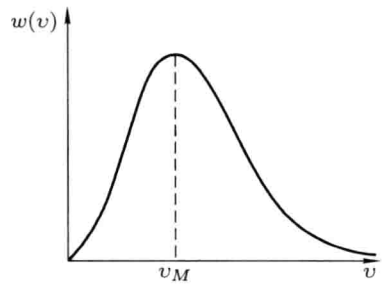


图 25.1 麦克斯韦速度分布

现在我们来计算在 x 方向通过单位表面积的分子流 J. 就一个任意各向同性的速度分布来说, 每秒通过单位面积的具有速率 v 的分子数为

$$n v_x f(v)\mathrm{d}^3 v = n v_x f(v) v^2 \mathrm{d}v\mathrm{d}\Omega,$$

式中 $\mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta$. 所以

$$J = n \int_0^{\pi/2} \cos\theta \cdot 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^\infty v^3 f(v)\mathrm{d}v = \frac{n}{4}\overline{v}.$$

麦克斯韦分布能用斯特恩实验来证明. 斯特恩在高度抽空的管子中产生一分子束, 见图 25.2. 该分子束撞击屏上的 P 点. 现在若让管子相对垂直于分子束的一个轴转动, 则分子束由于科里奥利力而偏转, 并撞击屏上的 P' 点而不再是 P 点了. 分子束的速度分布能由偏差 $\overline{PP'}$ 来确定.

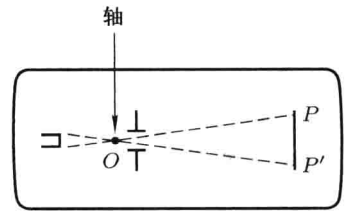


图 25.2 孔的线度小于自由程

§26. 平均自由程和碰撞

我们设想气体由刚性球组成, 见图 26.1. 当一个分子的中心进入另一分子的相互作用范围内时, 则两个分子就相互碰撞. 一个分子的相互作用范围是半径为 $\sigma = 2r$ (分子半径的两倍) 的球. 若我们取力心来代替刚性球, 则能够以同样方式定义一个量 σ; 在这种情况下该量是与速度有关的. 令 $\boldsymbol{w}$ 为具有速度 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的两个碰撞分子的相对速度; $\boldsymbol{V}$ 为该二分子组成的系统的质心速度. 则在两个分子具有相同质量的假设下, 我们有

$$w_k = v_k - v'_k, \qquad k = 1, 2, 3$$

和

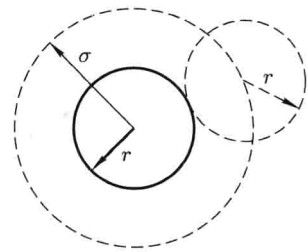


图 26.1

$$V_k = \frac{1}{2}(v_k + v'_k).$$

因为位于图 26.2 所示的圆柱内的所有分子都与一给定的分子碰撞, 所以每单位时间 (1 s) 内的碰撞数 Z 为

$$Z = \pi\sigma^2 \overline{w} n,$$

式中 $\overline{w}$ 为相对速率 w 的平均值. 分别具有速度 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的两个分子彼此碰撞的概率为

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')\mathrm{d}^3v\mathrm{d}^3v' &= f(v^2)\mathrm{d}^3v f(v'^2)\mathrm{d}^3v' \\ &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \mathrm{e}^{-\alpha(v^2+v'^2)}\mathrm{d}^3v\mathrm{d}^3v'. \end{aligned}$$

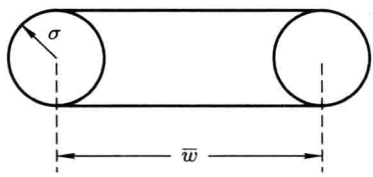


图 26.2

若我们引入速度 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 来代替 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$, 则

$$v_k = V_k + \frac{1}{2}w_k,$$
$$v^2 + v'^2 = 2V^2 + \frac{1}{2}w^2,$$
$$v'_k = V_k - \frac{1}{2}w_k.$$

因为

$$\frac{\partial(V_k, w_k)}{\partial(v_k, v'_k)} = 1,$$

所以我们有 $\mathrm{d}^3v\mathrm{d}^3v' = \mathrm{d}^3V\mathrm{d}^3w$. 从而,

$$f(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{w})\mathrm{d}^3V\mathrm{d}^3w = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \mathrm{e}^{-\alpha(2V^2+\frac{1}{2}w^2)}\mathrm{d}^3V\mathrm{d}^3w$$

和

$$f(w^2)\mathrm{d}^3w = \text{常数} \times \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}w^2}\mathrm{d}^3w.$$

于是我们得到

$$\overline{w} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty w^3\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}w^2}\mathrm{d}w}{\displaystyle\int_0^\infty w^2\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}w^2}\mathrm{d}w}.$$

由于

$$\overline{v} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty v^3\mathrm{e}^{-\alpha v^2}\mathrm{d}v}{\displaystyle\int_0^\infty v^2\mathrm{e}^{-\alpha v^2}\mathrm{d}v},$$

因此通过简单变换 $w = \sqrt{2}v$, 我们得到

$$\overline{w} = \sqrt{2}\overline{v}.$$

若平均速率为 $\overline{v}$, 则碰撞数为

$$Z = n\pi\sqrt{2}\sigma^2\overline{v}.$$

在分子质量不同的情况中, 我们引入折合质量 μ:

$$\mu=\frac{mm'}{m+m'} \quad 或 \quad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}.$$

则质心速度 $\boldsymbol{V}$ 为

$$V_k=\frac{mv_k+m'v'_k}{m+m'},$$

以及

$$w_k=v_k-v'_k.$$

于是,

$$\frac{m}{2}v^2+\frac{m'}{2}v'^2=\frac{1}{2}(m+m')V^2+\frac{\mu}{2}w^2,$$

而且也有

$$\frac{\partial(V_k,w_k)}{\partial(v_k,v'_k)}=1.$$

因此,

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{V},\boldsymbol{w})\mathrm{d}^3V\mathrm{d}^3w&=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{kT}\left(\frac{m}{2}v^2+\frac{m'}{2}v'^2\right)}\mathrm{d}^3v\mathrm{d}^3v'\\&=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3\mathrm{e}^{-\frac{1}{kT}\{(m+m')\frac{V^2}{2}+\frac{\mu}{2}w^2\}}\mathrm{d}^3V\mathrm{d}^3w,\end{aligned}$$

以及

$$f(w^2)\mathrm{d}^3w=常数\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{kT}\frac{\mu}{2}w^2}\mathrm{d}^3w=常数\times\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{m}\alpha w^2}\mathrm{d}^3w.$$

于是我们求得

$$\overline{w}=\sqrt{\frac{m}{\mu}}\overline{v}=\sqrt{\frac{m'}{\mu}}\overline{v'}.$$

我们若将一个分子未与其他分子碰撞而经过的距离定义为自由程, 则我们求得平均自由程为

$$l=\frac{距离}{每单位距离的碰撞数}=\frac{\overline{v}t}{Zt}=\frac{\overline{v}}{Z}=\frac{1}{n\sigma^2\pi\sqrt{2}}.$$

量 $n\pi\sigma^2$ 等于每立方厘米中全部分子的碰撞截面之和.

萨瑟兰 (Sutherland) 首先讨论了下列情况下分子间的力: 各分子作为力心, 大间距时力心彼此吸引, 而小间距时力心彼此相斥. 他求得一个分子的相互作用范围的有效半径为

$$\sigma_{有效}=\sigma_0\left(1+\frac{c}{T}\right),$$

式中 $c>0$ [参见 S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases* (Cambridge, 1939)].

§27. 输运现象 ($d \gg l$)

输运现象包括内摩擦、热传导和扩散. 它们被用来确定平均自由程 l. 在所有这些现象中, 某一量的梯度引起一种流. 在内摩擦的情况中, 宏观速度的梯度引起动量流. 在热传导的情况中, 热流是由温度的梯度引起的. 在扩散的情况中, 浓度的梯度产生粒子流. 所有这些现象都与一个积分方程相联系 (参见统计力学讲义).

a. 内摩擦 (简单的特殊情况)

在两平行板间有一气体, 而且使两板之一以速率 $\bar{c}$ 平行于另一板移动, 见图 27.1. 令 $c_x(z)$ 为距离下板 z 处气体的宏观速度. 唯象理论预示, $c_x(z)$ 随着 z 线性地变化. 于是,

$$c_x(z) = Az = \bar{c}\frac{z}{d};$$

即

$$A = \frac{\bar{c}}{d} = \frac{\partial c_x}{\partial z}.$$

此外, 这一理论也表明, 沿上板产生一个与该板运动反向的切应力:

$$p_{xz} = -\eta\frac{\partial c_x}{\partial z} = -\eta\frac{\bar{c}}{d}.$$

在一般情况中, 存在一应力张量①

$$p_{ik} = -\eta\left\{\frac{\partial c_i}{\partial x_k} + \frac{\partial c_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial c_\alpha}{\partial x_\alpha}\right\}, \qquad i,k = 1,2,3.$$

不难看出, 这一张量的迹为零:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} p_{\alpha\alpha} = 0.$$

虽然严格的理论是非常复杂的, 但有一个很简单的初级理论. 在此我们将只讨论最简单的特殊情况 [关于输运过程的严格理论, 参见 S. Chapman and T. G. Cowling, *Mathematical Theory of Non-uniform Gases* (Cambridge, 1939)]. 我

① 关于表达式中的数值 2/3 (这意味着不存在体黏性), 晚近曾反复地进行了实验核实和讨论. 例如, 参见:

1. S. M. Karim and L. Rosenhead, *Rev. Mod. Phys.* **24**, 108—116 (1952).
2. 在 L. Rosenhead, *Proc. Roy. Soc.* A**226**, 1—69 (1954) 中有许多参考文献.
3. M. Konler, *Z. physik* **124**, 757—771 (1948).
4. C. Truesdell, *J. Rat. Mech. Anal.* **2**, 644—741 (1953).

对于单原子气体, 最符合于 2/3 的值.

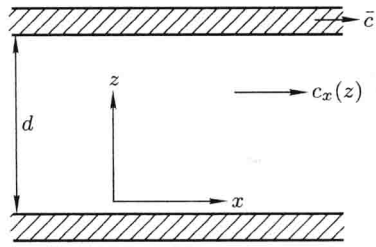


图 27.1

们将分子的运动分解为一个有序 (宏观) 运动和一个无序运动, 令 $\boldsymbol{v}$ 为分子的速度, $\boldsymbol{c}$ 为气体的宏观速度, 而 $\boldsymbol{u}$ 为分子的无序运动的速度. 于是我们有

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{c} \quad 或 \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{c} \quad 和 \quad \overline{\boldsymbol{u}} = 0$$

在我们的特殊坐标系中有

$$u_x = v_x - c_x, \quad u_y = v_y, \quad u_z = v_z.$$

令 F 为 $z = z^0$ 平面上的一个单位面积的面元. 我们要计算每秒通过 F 所输运的动量. 通过 F 所输运的分子流 J (§25) 为

$$J = \frac{n}{4}\overline{u}.$$

首先, 我们考虑沿 $+z$ 方向通过 F 的那些分子. 在我们的计算中只需假设: 这些分子全部来自距 F 为 al 的一个薄层, 而且它们已获得对应的宏观速度, 见图 27.2 (对我们来说, a 为一未定的因数, 关于它的确定, 需要对分子流中速度的畸变分布作严格的计算). 在薄层 $z = z^0 - al$ 中, 宏观速度为

$$(c_x)_{z=z^0-al} = c_x^0 - al\frac{\partial c_x}{\partial z},$$

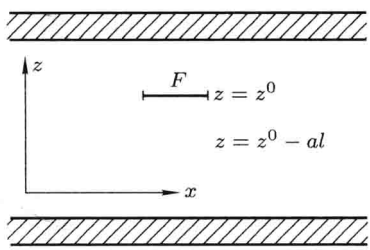


图 27.2

式中 $c_x^0 = (c_x)_{z=z^0}$. 因此, 分子流输运的动量为

$$Jm(c_x)_{z=z^0-al} = \frac{n}{4}m\overline{u}\left(c_x^0 - al\frac{\partial c_x}{\partial z}\right).$$

从类似的考虑, 我们得到沿 $-z$ 方向的分子流在 $z = z^0 + al$ 薄层中的宏观速度[①]为

$$(c_x)_{z=z^0+al} = c_x^0 + al\frac{\partial c_x}{\partial z},$$

而在 $-z$ 方向输运的动量为

$$\frac{n}{4}m\overline{u}\left(c_x^0 + al\frac{\partial c_x}{\partial z}\right).$$

因此, 沿 $+z$ 方向通过 F 的总动量为

$$-\frac{n}{2}m\overline{u}al\frac{\partial c_x}{\partial z}.$$

但它等于作用在 F 上的切应力

$$p_{xz} = -\frac{n}{2}m\overline{u}al\frac{\partial c_x}{\partial z} = -\eta\frac{\partial c_x}{\partial z};$$

由此得到

$$\eta = \frac{n}{2}m\overline{u}al.$$

因此, 气体分子运动论能阐明内摩擦现象. 诚然, 由于存在严格的理论, 上述结果只具有定性的价值. 然而它的确表明, l 能由 η 来确定. 因为自由程与 n 成反比, 所以η 与 n 无关. 若引入如下各量

$$\overline{u} = 2/(\pi\alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad l = 1/(n\sqrt{2}\pi\sigma^2) \quad 和 \quad \alpha = m/(2kT),$$

则我们得到 (M 为相对分子质量)

$$\eta = \frac{\sqrt{kmT}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sigma^2}\alpha = \frac{\sqrt{RTM}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sigma^2 L}\alpha.$$

因为 σ 与温度相关, 所以不应根据字面而认为 $\eta \sim \sqrt{T}$. 对于刚性球的情况, $a = 0.998$, 即, a 接近于 1. 然而, 这些公式都不局限于刚性球的情况.

① 此处英译版过简, 不确切. 这里有所补充.——中译者注

b. 热传导

设在温度分别为 T_1 和 T_0 的两板间有某种气体, 见图 27.3. 所产生的热流 $\boldsymbol{w}$ 正比于温度的梯度

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{T_1 - T_0}{\mathrm{d}}.$$

根据唯象理论有

$$w = -\varkappa \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z},$$

式中 $\varkappa$ 为热导率. 其他方面考虑如前. 由于 $\boldsymbol{c} = 0, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, 所以我们得到

$$w = -\frac{1}{2} n \bar{v} a' l \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} \qquad (E \text{ 为每个分子的能量})$$

若我们引入量 c_V 作为每单位质量的比热①, 则有

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}z} = m c_V \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z};$$

由此得到

$$\varkappa = \frac{1}{2} n m \bar{v} a' l c_V.$$

比较 $\varkappa$ 和 η 的表达式, 我们得到

$$\varkappa = \frac{a'}{a} c_V \eta.$$

在刚性球的情况中, $a'/a = 2.5$.

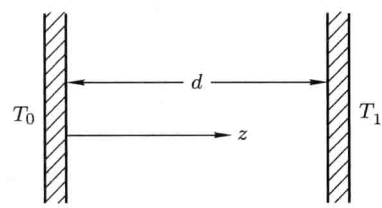


图 27.3

c. 扩散

每单位面积的粒子流由下式给出

$$i = -D \frac{\partial n}{\partial z},$$

式中 D 为扩散常数. 用与上面的考虑相似的方式, 我们得到

$$D = \frac{1}{2} a'' \bar{u} l.$$

① 原文如此. 参见 §7 中的中译者注及英译本主编评注 [A–5]. ——中译者注

对于混合气体, 有

$$D = a'' \frac{1}{n}(n_1 \overline{u}_1 l_1 + n_2 \overline{u}_2 l_2),$$

式中 $n = n_1 + n_2$.

所有这些输运现象都与密度 ρ 无关. 然而, 在密度很低时唯象理论不成立. 在以前的考虑中, 我们曾暗中假定 $d \gg l$. 然而, 在板的邻近总存在厚度数量级为 l 的薄层, 在该薄层中 $c_x(z) = \overline{c}z/d$ 不再成立. 同样地, 在此薄层中平均速度的计算也是不正确的. 速度分布则如图 27.4 所示. 于是, 速度梯度的较好的近似为

$$\frac{\partial c_x}{\partial z} = \frac{\overline{c}}{d + 2\gamma},$$

式中 $\gamma = \alpha l$, 而 α 为一数值系数. 因此 γ 正比于自由程. 在内摩擦的情况中, 切应力则为

$$p_{xz} = -\eta \frac{\overline{c}}{d + 2\alpha l}.$$

对于在一个大气压下和 15°C 时的空气, $\alpha l \sim 10^{-5}$cm. 类似地, 在热传导的情况, 我们必须写为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{T_1 - T_0}{d + 2\alpha l}.$$

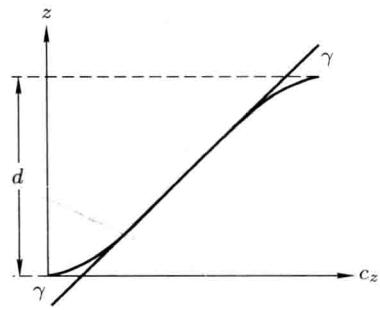


图 27.4

若 $l \gg d$, 则我们得到非常简单的结果. 这时, 实际上不需考虑粒子彼此间的碰撞; 而只有粒子对壁的碰撞. 这样的气体的表现如同辐射. 只通过粒子与壁的碰撞而发生热交换. 不再存在温度梯度. 于是,

$$w = -\frac{\varkappa}{l}(T_1 - T_0) \sim -a'' c_V \rho \overline{u}(T_1 - T_0).$$

热流正比于密度, 但与两板的间距无关. 克努森 (Knudsen) 作了这样的实验, 为此需要很高的真空度和很精细的毛细管.

§28. 输运现象 ($l \gg d$)

a. 通过孔和细孔的扩散

设一充满气体的容积用壁隔成两部分. 壁上有一线度为数量级 d 的开口, 见图 28.1. 当 $d \gg l$ 和 $p_1 = p_2$ 时, 无质量流通过开口. 然而, 若 $d \ll l$, 则在

$$(n\overline{v})_1 = (n\overline{v})_2$$

的条件下, 不存在质量流. 因为 $\overline{v} \sim \sqrt{T}$ 和 $n \sim \rho$, 这一条件能被重新写成

$$\rho_1\sqrt{T_1} = \rho_2\sqrt{T_2};$$

或者, 因为 $p \sim \rho T$, 也可将它表示成

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}} \qquad \text{(不存在质量流的条件)}.$$

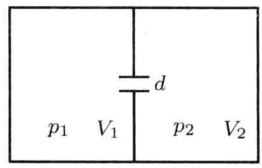


图 28.1

b. 低压时的热传导

让我们再来考虑具有不同温度 T 和 T' 的两块板的情况 (图 28.2), 但这里是两板的间距 $d \ll l$ 的情况. 在此, 我们只需考虑分子与板的碰撞, 而可忽略分子间的碰撞. 我们还必须作出关于板和碰撞分子间的能量交换的假设. 我们假设: 一分子与板碰撞后所具有的能量取决于该板的温度. 因此, 分子用以撞击板的能量是无关紧要的. 这种理想情况称为 "完全适应"(complete accommodation). 每单位时间离开板 (温度为 T) 的单位面积而具有速度分量 v_1 的分子所占的分数为

$$v_1 f(v_1)\mathrm{d}v_1 = \text{常数} \times v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1.$$

由归一化 $\int v_1 f(v_1)\mathrm{d}v_1 = 1$ 所确定的该常数值为 2α. 一分子以速度分量 v_1 离开温度为 T 的板的概率 $w(v_1)\mathrm{d}v_1$ 为

$$w(v_1)\mathrm{d}v_1 = 2\alpha v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1.$$

类似地, 一分子以速度分量 v_1 离开温度为 T' 的板的概率 $w'(v_1)\mathrm{d}v_1$ 为

$$w'(v_1)\mathrm{d}v_1 = 2\alpha' v_1 \mathrm{e}^{-\alpha' v_1^2}\mathrm{d}v_1.$$

具有速度分量 v_1 的一个分子在时间 d/v_1 内通过距离 d. 计算这一时间的平均值, 我们得到

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{d}{v_1} w(v_1)\mathrm{d}v_1 + \int_0^\infty \frac{d}{v_1} w'(v_1)\mathrm{d}v_1\right\},$$

式中 $1/\nu$ 为一个分子通过距离 d 所需的平均时间. 因此 ν 为一个分子每秒通过距离 d 的次数. 于是我们可写成

$$\frac{1}{\nu} = d\left\{\int_0^\infty \alpha \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1 + \int_0^\infty \alpha' \mathrm{e}^{-\alpha' v_1^2}\mathrm{d}v_1\right\} = \frac{d}{2}\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'})$$

或

$$\nu = \frac{2}{d\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha'})}.$$

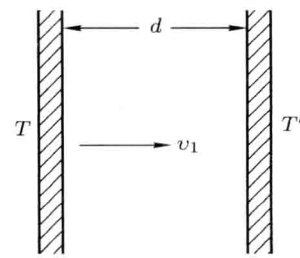


图 28.2

现在我们要计算由 (T) 向 (T') 方向发射的每一个分子的平均热输运. 各速度分量的分布函数分别为

$$2\alpha v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1, \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha v_2^2}\mathrm{d}v_2 \text{ 和 } \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\alpha v_3^2}\mathrm{d}v_3.$$

由于一个分子携带 $\dfrac{1}{2}mv^2 + \overline{E}_i$ 的能量, 其中 $\overline{E}_i$ 为平均内能 (转动能), 因此我们得到每一发射的分子的平均热输运为

$$\int_{v_1=0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + \overline{E}_i\right] \times 2\alpha v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) \mathrm{e}^{-\alpha v_2^2}\mathrm{e}^{-\alpha v_3^2}\mathrm{d}v_2\mathrm{d}v_3.$$

计算中需利用下列积分公式:

$$\int_0^\infty 2\alpha v_1^3 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1 = \int_0^\infty 2v_1 \mathrm{e}^{-\alpha v_1^2}\mathrm{d}v_1 = \frac{1}{\alpha},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_i^2 \mathrm{e}^{-\alpha v_i^2}\mathrm{d}v_i = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\alpha}.$$

这样, 我们得到每一发射的分子的热输运之值为:

$$\text{由 } (T) \text{ 向 } (T') \text{ 的方向}, \quad \frac{m}{\alpha} + \overline{E}_i;$$
$$\text{由 } (T') \text{ 向 } (T) \text{ 的方向}, \quad \frac{m}{\alpha'} + \overline{E}'_i,$$

一个分子每秒通过距离 d 平均 ν 次, 的确, $\nu/2$ 次由 (T) 向 (T'), $\nu/2$ 次由 (T') 向 (T). 所以, 一个分子每秒由 (T) 向 (T') 输运的热量为

$$\frac{\nu}{2}\left(\frac{m}{\alpha} - \frac{m}{\alpha'} + \overline{E}_i - \overline{E}'_i\right).$$

由于两板间对应于每板的单位面积有 nd 个分子, 所以每秒每单位面积输运的热量为

$$\begin{aligned}\Delta w &= dn\frac{\nu}{2}\left(\frac{m}{\alpha} - \frac{m}{\alpha'} + \overline{E}_i - \overline{E}'_i\right)\\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}\left(\frac{m}{\alpha} - \frac{m}{\alpha'} + \overline{E}_i - \overline{E}'_i\right).\end{aligned}$$

如前节末已指出的, 两板的间距已消失.

因为 $\overline{E}_{\mathrm{kin}} = m\overline{v^2}/2$ 和 $\overline{v_k^2} = 1/2\alpha \to \overline{v^2} = 3/2\alpha$, 所以

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{4}{3}\overline{E}_{\mathrm{kin}}.$$

因此, 我们可写成

$$\Delta w = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}\left\{\left[\frac{4}{3}\overline{E}_{\mathrm{kin}} + \overline{E}_i\right] - \left[\frac{4}{3}\overline{E}'_{\mathrm{kin}} + \overline{E}'_i\right]\right\}$$

或

$$\Delta w = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}\left[\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}\overline{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\overline{E}_i}{\mathrm{d}T}\right](T - T').$$

我们定义

$$c_V = \frac{1}{m}\left[\frac{\mathrm{d}\overline{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\overline{E}_i}{\mathrm{d}T}\right]$$

为每单位质量的比热①. 根据热力学, 关于摩尔热容, 我们有

$$c_p - c_V = R;$$

① 参见 §7 中的中译者注及英译本主编评注 [A–5]. —— 中译者注

所以, 关于比热则有

$$c_p - c_V = \frac{R}{M} = \frac{k}{m} = \frac{2}{3m}\frac{\mathrm{d}\overline{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}T}.$$

因此,

$$c_p + c_V = \frac{2}{m}\left[\frac{4}{3}\frac{\mathrm{d}\overline{E}_{\mathrm{kin}}}{\mathrm{d}T} + \frac{\mathrm{d}\overline{E}_i}{\mathrm{d}T}\right],$$

并有

$$\Delta w = \frac{nm}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}(c_p + c_V)(T - T').$$

由于

$$nm = \rho \quad 和 \quad \alpha = \frac{m}{2kT} = \frac{M}{2RT} = \frac{M}{2pv} = \frac{\rho}{2p},$$

我们有[①]

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{\rho}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha'}}(c_p + c_V)(T - T') \\ &\sim \frac{\rho}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(c_p + c_V)(T - T') \\ \Delta w &= \sqrt{\frac{p\rho}{8\pi}}(c_p + c_V)(T - T').\end{aligned}$$

c. 低压时通过管的流动

再令 $l \gg a$, 以便能将粒子的运动看作辐射. 面元 $\mathrm{d}\sigma$ 向 Q 辐射, 见图 28.3 [A–13]:

$$A_P \cos\theta \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$. 因此, $\mathrm{d}\sigma$ 向上辐射:

$$A_P \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\sigma = A_P \pi \mathrm{d}\sigma.$$

$\mathrm{d}\sigma$ 上单位面积的辐射为 $A_P\pi$, 它必定等于在 x 方向每单位面积的分子流, 即

$$A_P \pi = \frac{n}{4}\overline{v}.$$

因为

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}\overline{v^2}} \quad 和 \quad \overline{v^2} = \frac{3}{2\alpha} = \frac{3p}{\rho} = \frac{3p}{nm},$$

所以

$$A_P = \frac{p}{m\pi}\sqrt{\frac{3}{2\pi\overline{v^2}}}.$$

① 关于普遍情况, 参见 H. A. Lorentz, *Lectures on Theoretical Physics*, Vol. I: *Kinetical Problems* (Macmillan, London, 1927).

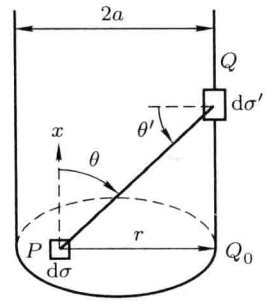


图 28.3

这里, 如在光度学中一样 [A–13],

$$A_Q \cos\theta \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\Omega = A_Q \cos\theta' \mathrm{d}\sigma' \mathrm{d}\Omega'$$

也适用于两个面元的互辐照. 然而,

$$A_Q = A_P - \overline{QQ_0}\frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x};$$

并因 $\overline{QQ_0} = \overline{PQ}\cos\theta = r\cot\theta$, 所以

$$A_Q = A_P - r\cot\theta\frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x}.$$

因此, 从 Q 向 P 的辐射为 [A–13]

$$\begin{aligned} A_Q \cos\theta \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\Omega &= A_P \cos\theta \mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\Omega - r\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\sigma \mathrm{d}\Omega \frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x} \\ &= \left\{ A_P \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi - r\cos^2\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x} \right\} \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

对 Ω 积分, 得 [A–13]

$$-\frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x}\frac{\pi}{2}\mathrm{d}\sigma \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi;$$

再对截面积分, 给出流

$$J = -\frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x}\frac{\pi}{2}\int_\sigma \mathrm{d}\sigma \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi.$$

若截面是球面对称的, 则得到

$$\int_\sigma \mathrm{d}\sigma \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\varphi = \frac{16}{3}\pi a^3,$$

从而,

$$J = -\frac{\mathrm{d}A_P}{\mathrm{d}x}\frac{8\pi^2}{3}a^3 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{8a^3}{3m}\sqrt{\frac{3\pi}{2\overline{v^2}}}.$$

关于质量流 J_m, 我们得到

$$J_m = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{8a^3}{3}\sqrt{\frac{3\pi}{2\overline{v^2}}}.$$

将这一公式与泊肃叶公式

$$J_p = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\pi}{8}\frac{a^4\rho}{\eta}$$

对比, 则得

$$\frac{J_m}{J_p} = \text{常数} \times \frac{l}{a}.$$

§29. 位力的概念

令力 $\boldsymbol{K}_i$ 作用于质量为 m_i 的粒子上. 对于任意数目的粒子, 我们定义

$$w = \sum_i \boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{K}_i$$

为位力. 若 $\sum_i \boldsymbol{K}_i = 0$, 则选取哪一点作为坐标的原点是无关紧要的①. 因为 $\boldsymbol{K}_i = m_i\ddot{\boldsymbol{x}}_i$, 以及

$$m_i\boldsymbol{x}_i \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i = m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i) - m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2$$

所以

$$w = \sum_i m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i) - \sum_i m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2.$$

因为全微分的时间平均和统计平均都等于零, 所以, 只要 $\boldsymbol{x}$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 总是有限的, 我们就有

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i)} = 0.$$

从而,

$$w = -\sum_i m_i\dot{\boldsymbol{x}}_i^2$$

或

$$w + \sum_i m_i\boldsymbol{v}_i^2 = 0 \qquad \text{(位力定理)}.$$

① 德文原版中, 这句话前面尚有一短语 "根据质心定理".——中译者注

§30. 应用

a. 理想气体

在盛于容积 V 中的理想气体情形, 见图 30.1 $\boldsymbol{x}$ 和 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 总是有限的. 对于每摩尔, 有

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2 = 2\overline{E}_{\text{kin}} = 3RT.$$

若假定力作用于分子之间, 则这一表达式仍然成立. 在立方体的情况中, 压力

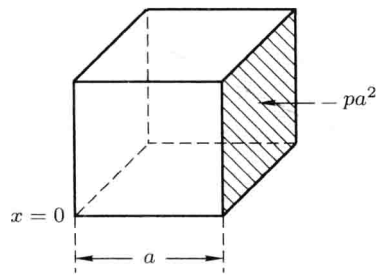


图 30.1

的位力是

$$w = -3pv.$$

这一关系式对所有形状的容积都成立. 对于立方体, 作用在一个面上的力为

$$K = -pa^2.$$

然而, 由于在其中三个面上 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{K} = aK$, 而在另外三个面上 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{K} = 0$, 所以

$$w = -3pa^3 = -3pv.$$

对于一个任意形状的容积, 可应用高斯定理来计算位力:

$$w = -p\oint_{\text{面}} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}f = -p\int_v (\mathrm{div}\boldsymbol{x})\mathrm{d}v = -3p\int_v \mathrm{d}v = -3pv.$$

若不需要考虑其他力, 则对于每摩尔有

$$-3pv + 3RT = 0 \quad \text{或} \quad pv = RT,$$

即, 我们恰好得到理想气体方程.

b. 实际气体 (对理想气体方程的修正)

设分子间存在作用力. 令这有心力的势为 $U(r)$, 并标准化成 $U(\infty)=0$. 于是, 对于 $r>\sigma$ (σ 仍为相互作用球的半径), 两分子间的力 $\boldsymbol{K}_r$ 为

$$\boldsymbol{K}_r=-\mathrm{grad}U(r)=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{x}}{r},$$

式中

$$r=|\boldsymbol{x}| \quad 和 \quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2.$$

对于 $r<\sigma$, 我们可令 $U(r)|_{r<\sigma}=\infty$. 于是, 一对分子的位力为

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{K}_r=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{x}}{r}\cdot\boldsymbol{x}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}r.$$

为了求得一分子与所有其他分子相互作用的位力, 我们必须从 σ 至 ∞ 进行积分. 体积元为 $4\pi r^2\mathrm{d}r$, 而且每立方厘米有 L/v 个分子 (L 为阿伏伽德罗常量, 而 v 为摩尔体积). 其结果为

$$-\frac{L}{v}\int_\sigma^\infty\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}r\cdot4\pi r^2\mathrm{d}r.$$

在求这个结果时, 我们曾假定分子间只成对地相互作用, 即不应存在多体力. 因每摩尔有 L 个分子, 于是, 我们得到每摩尔的位力为

$$w=-\frac{L^2}{2v}\int_\sigma^\infty\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}4\pi r^3\mathrm{d}r.$$

因数 1/2 的出现是由于我们曾对每一对分子计入了两次. 通过分部积分, 我们得到

$$w=\frac{2\pi L^2}{v}3\int_\sigma^\infty U(r)r^2\mathrm{d}r+\frac{2\pi L^2}{v}\sigma^3U(\sigma).$$

引入缩写

$$w'=\frac{2\pi L^2}{v}\sigma^3U(\sigma) \text{ 和 } a=-2\pi L^2\int_\sigma^\infty U(r)r^2\mathrm{d}r,$$

于是我们得到

$$w=w'-\frac{3a}{v}.$$

c. 碰撞力的位力

两分子每次碰撞的动量变化对位力的贡献为 $2\sigma m w_N$, 其中 $\boldsymbol{w}$ 为碰撞分子的相对速度, 见图 30.2. 因为, 对于一给定的矢量 $\boldsymbol{w}$, 每秒有 $\pi\sigma^2w_Nn$ 个分子与一给定的分子碰撞, 所以每一分子的位力为

$$2\sigma m w_N n\pi\sigma^2w_N$$

其时间平均值为

$$2\pi n\sigma^3 m\overline{w_N^2}.$$

因为 $m\overline{w_N^2}=2kT$, 所以每摩尔的位力为

$$w=\frac{L}{2}4\pi\sigma^3 nkT=2\pi\sigma^3 nRT\quad (L/2\text{ 个分子对}).$$

将 $n=L/v$ 代入这一关系式, 我们有

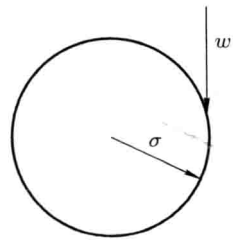


图 30.2

$$w=2\pi\sigma^3\frac{L}{v}RT=\frac{3b}{v}RT,$$

式中 $b=2\pi\sigma^3 L/3$ 等于一摩尔体积中所有相互作用范围的总体积的一半.

d. 广义气压计公式

设势 $U(r)$ 能表示为

$$U(r)=\frac{L}{v}\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}.$$

则

$$\begin{aligned}w&=-\frac{L}{2}\int_0^\infty U(r)\frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r}4\pi r^3\mathrm{d}r\\&=-\frac{2\pi L^2}{v}\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r}\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}r^3\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

实行分部积分, 我们得到

$$\begin{aligned}w&=\frac{2\pi L^2kT}{v}\int_0^\infty r^3\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}-1\right]\\&=\frac{2\pi L^2kT}{v}\left\{\left[r^3\left(\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}-1\right)\right]_{r=0}^{r=\infty}-3\int_0^\infty r^2\left[\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}-1\right]\mathrm{d}r\right\}.\end{aligned}$$

定义

$$A(T)=2\pi L^2kT\int_0^\infty r^2\left[\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}}-1\right]\mathrm{d}r,$$

则可写成

$$w = -3\frac{A(T)}{v}.$$

由此, 我们得到物态方程为

$$3RT - 3pv - 3\frac{A(T)}{v} = 0,$$

或

$$\left[p + \frac{A(T)}{v^2}\right] v = RT, \quad p = \frac{RT}{v} - \frac{A(T)}{v^2}.$$

势 $U(r)$ 具有如图 30.3 所示的形式, 并满足边界条件 $U(r)|_{r=\sigma}=\infty$ 和 $U(r)|_{r\to\infty}=0$. 这些条件意味着

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) \sim -\frac{u(r)}{kT}, \quad (r \gg \sigma),$$

和

$$\left(\mathrm{e}^{-\frac{u(r)}{kT}} - 1\right) \sim -1, \quad (r \ll \sigma).$$

我们曾定义

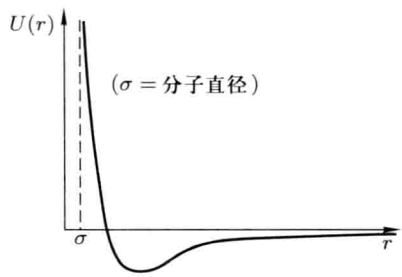


图 30.3

$$A(T) = -2\pi L^2 kT \int_0^\sigma r^2 \mathrm{d}r - 2\pi L^2 \int_\sigma^\infty r^2 u(r) \mathrm{d}r;$$

若我们再定义

$$a = -2\pi L^2 \int_\sigma^\infty r^2 u(r) \mathrm{d}r \text{ 和 } b = \frac{2\pi\sigma^3}{3} L,$$

则我们能写成 $A(T) = a - bRT$, 因此, 我们有

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v} + \frac{bRT}{v^2} = \frac{RT}{v}\left(1 + \frac{b}{v}\right),$$

它是范德瓦耳斯方程

$$p + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v - b} = \frac{RT}{v}\left[1 + \frac{b}{v} + \left(\frac{b}{v}\right)^2 + \cdots\right]$$

的一个近似. 从经验上我们知道 $a > 0$; 即, $r \gg \sigma$ 时, 有 $U(r) < 0$, 这意味着分子间相吸引. 能够从这些公式以及关于自由程的公式估计相互作用球的半径 σ.

补 充 书 目

热力学

O. SACKUR, *Lehrbuch der Thermochemie und Thermodynamik* (Berlin, 1928).

G. W. LEWIS and M. RANDALL, *Thermodynamics* (K. S. Pitzer and L. Brewer 修订) (McGraw-Hill, New York, 1961).

J. D. VAN DER WAALS, *Lehrbuch der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Gleichgewicht von Systemen mit gasförmig-flüssigen Phasen* (Rh. Kohnstamm 在阿姆斯特丹编辑的讲课笔记, 1908—1912).

W. H. SCHOTTKY, *Thermodynamik* (Berlin. 1929).

J. W. GIBBS, *The Collected Works of J. Willard Gibbs*, Vol. I: Thermodynamics (Yale University Press, New Haven, 1928).

M. PLANCK, *Vorlesungen über Thermodynamik* (Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1913).

P. S. EPSTEIN, *Textbook of Thermodynamics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1937).

R. J. E. CLAUSIUS, *The Mechanical Theory of Heat* (Macmillan and Co., London, 1879).

H. A. LORENTZ, HELMHOLTZ 和 KIRCHHOFF 关于理论物理学的讲演.

气体分子运动论

O. E. MEYER, *Die Kinetische Theorie der Gase* (Maruschke und Berendt, Breslau, 1877; second edition, 1899).

L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie* (Verlag von Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1895).

A. KRÖNIG, *Grundzüge einer Theorie der Gase* (Berlin, 1856).

R. J. E. CLAUSIUS, 多种著作.

J. C. MAXWELL, *Theory of Heat* (Longmans, Green, and Co., London, 1902).

J. JEANS, *An Introduction to the Kinetic Theory of Gases* (University Press, Cambridge, 1940).

E. H. KENNARD, *Kinetic Theory of Gases* (McGraw-Hill, New York, 1938).

H. A. LORENTZ, *Lectures on Theoretical Physics*, Vol.I: Kinetical Problems (Macmillan & Co., Ltd., London,1927).

S. CHAPMAN and T. G. COWLING, *Mathematical Theory of Nonun iform Gases* (University Press, Cambridge, 1952).

也参见 MÜLLER-POUILLET 和 HERZFELD 的著作.

附录　英译本主编评注

[A–1] (§2)　这里的意思是, 与另一具有固定温度的系统 (热库) 接触时的热力学平衡.

[A–2] (§2, §4, §10, §11, §12)　实际上, 有 n 个也可写成

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$$

的关系式 (物态方程). 此外, 这里 $t \equiv x_{n+1} =$ 常数. 在 §11 中给出 $n = 2$ 的一个例子: 从每一子系的物态方程求解 t, 得出 $F(p, V, \overline{p}, \overline{V}) \equiv t(p, V) - \overline{t}(\overline{p}, \overline{V}) = 0$.

[A–3] (§2, §9)　通过与具有不同温度 t_1 和 t_2 的两个热库的交替接触观察温度 t 的变化, 来测验 t_1 和 t_2 之间标度的单调性, 但 $t_1 - t_2$ 的符号并未确定. 实际上, 根据热力学第二定律, 这一符号规定热流的方向.

[A–4] (§7)　这里意味着式 (7.2) 是在 p_0 时获得的.

[A–5] (§7, §12, §13)　下文中应该认为是关于 1mol 物质的量, 或, 如在 §3 中, 是关于 1g 物质的量.

[A–6] (§9, §11)　热力学温标只被确定到不超过一任意符号的因数. 选取正符号是一种传统. 在此传统中, 负温度是罕见的, 尽管不是不可思议的, 如由庞德和珀塞尔 (Purcell) 的论文 (Phys. Rev. **81**, 279 (1951), 关于磁粒子数反转) 和 §9 引证的拉姆齐 (Ramsey) 的论文所表明的.

[A–7] (§9)　由于循环与温度为 T_0 的热库的耦合只是人为的 (甚至不是必要的) 设计, 所以, 实际上, $Q_0 = 0$ 是推定的.

[A–8] (§9, §11)　§9 中证明了闭合系的熵不能减少. 而这里对热力学温度的符号的任意性 (参见 [A–6]) 作了暗示.

[A–9] (§11)　这应理解为准静 (态) 绝热的. 因为只有在这种情况中, δW 中的 y_k 才是 $x_1, x_2, \cdots, x_n, t$ 的完全定义的函数. 注意, 这里和 §9 中都假设在态空间中的任意两点 1, 2 间至少存在一条准静 (态) 路径.

[A–10] (§13)　能够根据自由能来确定稳定的等温线, 而无须利用这些非稳态 [例如, 参见 K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963), 图 2.11].

[A–11] (§17)　从这里至 §17 末这部分内容是在泡利于 1958 年所写的手稿的德文第二版内增添的, 并作为泡利为纪念 J. Ackeret 而发表的论文 (Z. angew. Math. Phys. **96**, 490 (1958)) 的基础. 这篇论文由于是泡利最后发表的著作, 特别值得注意 [参见 M.Fierz 和 V. F. Weisskopf 合编的 *Theoretical Physics in the Twentieth Century, a Memorial Volume to Wolfgang Pauli* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1960) 以及 R. Kronig 和 V. F. Weisskopf 合编的 *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964) 两书中由 C. P. 安兹编纂的 "W. 泡利著作目录"]. 同时曾插入 §17, §19 的脚注.

[A–12] (§24)　实际上, 在稳定条件下, 对平行于且无限靠近于壁 W 的面 F, 由式 (24.1) 得到这一结果.

[A–13] (§28)　这里 $\mathrm{d}\Omega$ 和 $\mathrm{d}\Omega'$ 分别为面元 $\mathrm{d}\sigma'$ 和 $\mathrm{d}\sigma$ 从 P 和 Q 来看时所张的立体角元, 即 $(\overline{PQ})^2\mathrm{d}\Omega = \cos\theta'\mathrm{d}\sigma'$, $(\overline{PQ})^2\mathrm{d}\Omega' = \cos\theta\mathrm{d}\sigma$ [这与本讲义第二卷《光学和电子论》§4 (光度学) 中的情况相同]. 按定义, 从 Q 到 P 的辐射为 $A_Q\cos\theta'\mathrm{d}\sigma'\mathrm{d}\Omega'$. 在 §28c 末尾对这个量是遍及整个立体角 Ω 求积的, 而不像在 §28c 开头只对上半立体角求积. 因此, 对 $A_P\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\sigma$ 的积分为零.

索引

(汉－英)

二　画

力场中的自由能　Free energy in a force field, §19
二级变分　Second variation, §18, §20

三　画

三原子气体　Triatomic gases, §24
广义气压计公式　Generalized barometer formula, §19, §30
广延量　Extensive quantities, §4
马略特　Mariotte, §7, §24

四　画

方均速度 (率)　Mean square velocity (speed), §25
气压计公式　Barometer formula, §16
气体　Gases, §24
气体的混合物　Mixtures, gas, §14, §15, §27
气体常数　Gas constant, §7
气态　Gaseous state, §7, §13
化学反应 (平衡条件)　Chemical reaction (equilibrium condition), §17, §19
化学反应的平衡条件　Equilibrium condition for chemical reaction, §17, §19
化学平衡　Chemical equilibrium, §17
化学过程　Chemical process, §17
化学势　Chemical potential, §19
化学符号　Chemical symbol, §17
化学常数　Chemical constant, §13

分子的线度 Molecular dimensions, §24
分子束 Molecular beam, §25
分子流 Molecular current, §6, §25, §27, §28
分子类型数 Number of molecular types, §17
分子数 Number of molecules, §17
分压 Partial pressure, §7, §16, §17, §19
公理 Axioms, §9
反应方程 Reaction equation, §17
反应产物 Reaction products, §17
反应热 Heat of reaction, §17
反应数 Number of reactions, §17
反常物质 Anomalous substance, §2
不可压缩流体 Incompressible fluid, §19
不可逆过程 Irreversible process, §8, §9, §17
不稳定态 Unstable states, §13, §17, 附录
内能 Internal energy, §4
内摩擦 Internal friction, §8, §27
无序运动 Disordered motion, §27
无序运动的速度 Velocity of disordered motion, §27
毛细管 Capillary tubes, §27
双原子气体 Diatomic gases, §24
比热 Specific heat, §3, §7, §24, §27, §28

五　画

平均自由程 Mean free path, §26, §27
平均动能 Average kinetic energy, §24
平均时间 Average time, §29
平均速度 (率) Average velocity (speed), §25, §26, §27
平均热输运 Average heat transport, §28
平移运动 Translational motion, §24
平移能 Translational energy, §24
平衡条件 Equilibrium conditions, §17, §18, §20
电导性 (率) Electrical conductivity, §21
电流 Electric current, §21
半 (渗) 透膜 Semipermeable membrane, §14, §16, §17, §19
半 (渗) 透壁 Semipermeable wall, §14, §16, §19
切应力 Shearing stress, §27
由杂质引起的蒸气压改变 Vapor pressure change because of impurities, §19

可压缩性 Compressibility, §19
可逆态变化 Reversible change of state, §5
可逆过程 Reversible process, §8, §17, §21
外力场 Field, external force, §16, §17, §19
正常物质 Normal substance, §2
布朗运动 Brownian motion, §24
卡诺循环 Carnot cycle, §9, §13, §17

六　　画

齐次函数 Homogeneous function, §19
自由度 Degree of freedom, §24
自由能 Free energy, §12
自由能的齐性 Homogeneity property of F, §19
自由能的平衡条件 Equilibrium condition for free energy, §18
吉布斯 Gibbs, J. Willard, §17, §19
吉布斯关系 Gibbs's relation, §19
吉布斯函数 Gibbs, function, §13, §17
吉布斯函数的齐性 Homogeneity property of Φ, §19
吉布斯函数的平衡条件 Equilibrium condition for Gibbs function, §19
吉布斯函数的勒让德变换 Legendre transformation for the Gibbs function, §13
吉布斯佯谬 Gibbs's paradox, §15
吉布斯变分法 Gibbs's variational method, §18, §19
动量 Momentum, §24, §27
动量流 Momentum current, §27
动量转移 Momentum transfer, §27
动量张量 Momentum tensor, §24
动能 Kinetic energy, §24
压力 (压强) Pressure, §4
压力张量 Pressure tensor, §24
压力的位力 Virial for pressure forces, §30
过冷蒸气 Supercooled vapor, §13
过热液体 Superheated liquid, §13
各向同性速度分布 Isotropic velocity distribution, §24
各向同性速度分布函数 Isotropic velocity distribution function, §25
扩散 Diffusion, §27, §28
扩散常数 Diffusion constant, §27
有心力 Central forces, §30
有心力势 Potential of central forces, §30

有序运动 Ordered motion, §27
多原子气体 Polyatomic gases, §24
多原子气体的比热 Specific heat for polyatomic gases, §24
闭合系 (统) Closed system, §2, §5, §11, §18
闭合系的熵 Entropy of closed system, §9, 附录
刚性球 (气体) Hard sphere (gas), §24, §26, §27
导热壁 Heat conducting walls, §11
光度学 Photometry, §28
负温度 Negative temperature, §9, 附录
汤姆孙 (开尔文爵士) Thomson, W. (Lord Kelvin), §8, §9, §11
汤姆孙关系 Thomson relation, §21
汤姆孙效应 Thomson effect, §21

七　画

初级变分 First variation, §19, §20
克原子 Gram-atom, §17
克劳修斯 Clausius, R. J. E., §8, §9, §11, §24
克劳修斯－克拉珀龙方程 Clausius-Clapeyron equation, §13
克努森 Knudsen, M., §27
克勒尼希 Krönig, A., §24
阿伏伽德罗定律 Avogadro's law, §7
阿伏伽德罗常量 Avogadro's number, §24, §30
状态方程 Equation of state, §12, §30, 附录
状态函数 Function of state, §4, §9, §12
状态的概率 Probability of state, §24
抗催化剂 Anticatalysts, §17
抗磁性 Diamagnetism, §17
麦克斯韦 Maxwell, J. C., §24, §25
麦克斯韦 (速度) 分布 Maxwell distribution, §25
位力的定义 Definition of virial, §29
位力定理 Virial theorem, §29
体积 (容积) Volume, §4
体系所作的 (机械) 功 Work (mechanical) done (by a system), §4, §14, §16
体黏性 Bulk viscosity, §27
声的传播 Propagation of sound, §7
声速 Speed of sound, §7, §24
阻基 Resistant groups (in chemical reaction), §17
阻基数 Number of resistant groups, §17

快速发生的过程	Rapidly occurring processes, §5, §9, §11
快速发生的态变化	Rapidly occurring change of state, §5, §11
宏观速度	Macroscopic velocity, §27
亨利经验定律	Henry's empirical law, §19
补偿变化	Compensating changes, §8, §9
完全适应	Complete accommodation, §28
纯物质的熵	Entropy of pure substances, §22
折合质量	Reduced mass, §26
两相间的平衡	Equilibrium between two phases, §7, §13
应力张量	Stress tensor, §27
时间的方向	Direction of time, §8
汽化	Vaporization, §7

八　画

物质的原子结构	Atomic structure of matter, §24
物态	Matter, states of, §24
质心速度	Center of mass velocity, §26
质量流	Mass current, §28
单原子气体	Monoatomic gases, §24, §27
单相系	Homogeneous substance, §7, §10, §11, §12, §13, §20
单调变换	Monotonic transformation, §2, §3
单调温标	Monotonic temperature scale, §2, 附录
实际气体	Real gases, §30
固体	Solids, §24
定压比热	Specific heat at constant pressure, §7, §12, §13, §17
定容比热	Specific heat at constant volume, §7, §12, §13
表面积	Surface area, §4
表面张力	Surface tension, §4, §19
范霍夫匣	Van't Hoff box, §17
范霍夫匣中的平衡条件	Equilibrium condition in Van't Hoff box, §17
范霍夫匣中的 (机械) 功	Work (mechanical) done in van't Hoff box, §17
范霍夫匣中的稳定条件	Equilibrium condition in van't Hoff box, §17
范德瓦耳斯方程	Van der Waals equation, §30
佩尔捷效应	Peltier effect, §21
佩尔捷热	Peltier heat, §21
佩尔捷常数	Peltier constant, §21
庞德和珀塞尔实验	Pound and Purcell experiment, 附录
非平衡态变化	Nonequilibrium change of state, §11

非绝热态变化 Nonadiabatic change of state, §11
函数方程 Functional equation, §25
势能 Potential energy, §17, §19, §24
居里定律 Curie's law, §17
拉姆齐 Ramsey, N. F., §9, 附录
林德空气液化过程 Linde air liquefaction process, §13
泊肃叶公式 Poiseuille's formula, §28
沸点的变化 Boiling point, changes of, §19
转动能 Rotational energy, §24
转变热 Heat of transformation, §3, §7
转换点 (温度) Inversion point, §13
欧拉关系 Euler relation, §19

九　画

重力场 Gravitational field, §16, §19
绝对温标 Absolute temperature scale, §7, §13
绝对温度 Absolute temperature, §7
绝对零度的不可达到性 Unattainability of absolute zero, §23
绝热过程 Adiabatic process, §11
绝热的态变化 (过程) Adiabatic changes, of state (processes), §5, §7, §9, §11, §23
绝热路径 Adiabatic path, §11
绝热壁 Adiabatic walls, §5, §11
相 Phases, §3
相互作用范围 (球) Interaction sphere, §26
相对速度 Relative velocity, §26
相对分子质量 Molecular weight, §19
独立 (积分) 路径 Independent (integral) path, §4, §6, §9
玻耳兹曼 Boltzmann, L., §21
玻耳兹曼常量 Boltzmann's constant, §24
玻意耳－马略特定律 Boyle and Mariotte, law of , §7, §24
临界压强 Critical pressure, §13
临界体积 Critical volume, §13
临界点 Critical point, §13
临界温度 Critical temperature, §13
统计方法 Statistical methods, §9, §21
统计平均 Statistical average, §29
浓度 Concentration, §17
查普曼和柯林 Chapman. S. and Cowling, T. G., §26, §27

科里奥利力 Coriolis force, §25
恰当微分 (函数的) Exact differential (of a function), §6, §10, §11

十 画

原子数 Number of atoms, §17
埃伦费斯特－阿法纳谢娃 Ehrenfest-Afanasjewa, T., §9
热 Heat, §3, §4
热力学的喀拉西奥多里公理化基础 Carathéodory's axiomatic foundation of thermodynamics, §11
热力学平衡 Thermodynamic equilibrium, §24, 附录
热力学第一定律 First law of thermodynamics, §4, §11, §12, §13
热力学第二定律 Second law of thermodynamics, §7, §8, §9, §12,§13
热力学第二定律的克劳修斯表述 Clausius's formulation of second law of thermodynamics, §8
热力学第二定律的汤姆孙表述 Thomson's formulation of second law of thermodynamics, §8
热力学第二定律的喀拉西奥多里表述 Caratheodory's formulation of second law of thermodynamics, §11
热力学第二定律的数学表述 Mathematical formulation of second law of thermodynamics, §10
热力学函数 (势) Thermodynamic function (potential), §9, §13, §17, §18
热力学变量 Thermodynamic variables, §1, §2
热力学势 Thermodynamic potential, §17
热力学温标 Thermodynamic temperature scale, §9, §11, §13, 附录
热力学温度 Thermodynamic temperature, §11, 附录
热平衡 Thermal equilibrium, §2, §11
热功当量 Mechanical equivalent of heat, §4, §7
热电问题 Thermoelectric problems, §21
热电动势 Emf, thermal, §21
热 (传) 导 Heat conduction, §3, §8, §9, §11, §27, §28
热导率 (性) Heat conductivity, §21, §27
热库 Heat reservoir, §3, §5, §9, §17, §19
热传递 Heat transfer, §1
热流 Heat current, §27
热量 Quantity of heat, §3
高斯定律 Gauss's law, §30
高斯定理 Gauss's theorem, §24
能斯特热定理 Nernst's heat theorem, §22, §23

能斯特热定理的普朗克推广	Planck's generalization of Nernst's theorem, §22
能量	Energy, §4
能量的无序形式	Disordered form of energy, §8
流体动力学方程	Hydrodynamic equation, §24
流体动力学平衡条件	Hydrodynamic equilibrium condition, §17
流体静力学平衡条件	Hydrostatic equilibrium condition, §17
通过孔和细孔的扩散	Diffusion through holes and pores, §28
通过距离 d 所需的平均时间	Average time for traversing distance d, §28
积分方程	Integral equation, §27
积分因数	Integrating factor, §6, §11
积分因数存在的条件	Conditions for existence of integrating factor, §11
准静 (慢) 过程	Quasi-static (slow) process, §8, §9, §11
准静态变化 (过程)	Quasi-static changes of state (processes), §5, §8, §9, §11, §13
准静路径	Quasi-static path, §9
准静循环过程	Quasi-static cyclic processes, §9
速度的概率分布	Probability distribution of velocity, §25, §28
速度梯度	Velocity gradient, §27

十 一 画

球面外的蒸气压	Vapor pressure above spherical surface, §19
理想气体	Ideal gas, §7, §13, §17, §19
理想气体的比热	Specific heat for ideal gas, §7
理想气体的内能	Internal energy for ideal gas, §13
理想气体的化学势	Chemical potential for ideal gases, §19
理想气体的压强	Pressure of ideal gases, §24
理想气体的自由能	Free energy for ideal gas, §13
理想气体的吉布斯函数	Gibbs function for ideal gas, §13
理想气体的定义	Definition of ideal gas, §7
理想气体的位力	Virial of ideal gas, §30
理想气体的熵	Entropy of ideal gas, §13, §23
理想气体的绝热状态方程	Adiabatic equation of state of ideal gas, §3, §17
理想气体温标	Temperature scale of ideal gas, §7, §13
理想气体混合物	Ideal gas mixtures, §14, §15, §17, §19
混合过程	Mixing process, §3, §14
混合物的吉布斯函数	Gibbs function of mixture (of ideal gases), §19

混合物的熵 Entropy of mixtures, §14, §15
虚状态变化 Virtual change of state, §18
密度 Density, §7, §16, §27
粒子流 Particle current, §27
液体 Liquids, §24
液态 Liquid state, §7, §13
渗透压 Osmotic pressure, §19
辅助条件 Subsidiary conditions, §20
第一类永动机 Perpetual motion machine of the first kind, §4
第二类永动机 Perpetual motion machine of the second kind, §8, §9
萨瑟兰 Sutherland, §26

十 二 画

强度量 Intensive quantities, §4
等压过程 Isobaric process, §13
等能的态变化 Isoenergetic changes of state, §5, §7
等能系 Isoenergetic system, §5
等温的态变化 Isothermal changes of state, §5, §7, §9, §17
等温过程 Isothermal process, §9, §13, §17
等温线 Isotherms, §7, §9, §13, §23, 附录
温度 Temperature, §2,§3
温度的绝对零度 Absolute zero of temperature, §22, §23
温度梯度 Temperature gradient, §27
循环过程 Cyclic process, §4, §9, §13, §17
量子理论 Quantum theory, §15, §23
焦耳自由膨胀实验 Joule's free-expansion experiment, §7
焦耳－汤姆孙实验 Joule-Thomson experiment, §13
普法夫 Pfaff, J. F., §6
普法夫的线性微分形式 Pfaff's linear differential form, §10, §11
斯托克斯定理 Stokes' theorem, §6
斯特恩实验 Stern's experiment, §25
道尔顿定律 Dalton's law, §14
喀拉西奥多里 Carathéodory, C., §9, §11

十 三 画

蒸发 Evaporation, §13
蒸气压曲线 Vapor pressure curve, §13

碰撞 Collisions, §25, §27, §28
碰撞力的位力 Virial for collision forces, §30
碰撞 (次) 数 Number of collisions, §26
碰撞截面 Collision cross section, §26
溶剂 Solvent, §19
溶剂的蒸气 Vapor of solvent, §19
溶剂的蒸气压 Vapor pressure of solvent, §19
溶质 Solute, §19
溶质的蒸气 Vapor of solute, §19
溶质的蒸气压 Vapor pressure of solute, §19
溶液 Solutions, §19
溶液的平衡条件 Equilibrium condition for solution, §19
微分 Differential, §6, §10
微分形式 Differential form, §6, §10, §11
微分形式的范式 Normal form of a differential form, §6, §11
碘的离解 Dissociation of iodine, §17
辐射 Radiation, §27, §28, 附录
输运现象 Transport phenomena, §27, §28
畸变的速度分布 Distorted velocity distribution, §27
摄氏温标 Celsius temperature scale, §7
雅可比式 Jacobian, §11

十 四 画

磁化强度 Magnetization, §4, §17
磁场 Magnetic field, §4, §17
磁场中的吉布斯函数 Gibbs function in magnetic field, §17
磁场中的自由能 Free energy in magnetic field, §17
稳定平衡 Stable equilibrium, §20
稳定平衡的平衡条件 Equilibrium condition for stable equilibrium, §20
稳定态 Stable state, §18
稳定条件 Stability condition, §20
熔化 Melting, §7, §13

十 五 画

摩尔 Gram-molecule, §17
摩尔体积 Molar volume, §7, §13
摩尔重量 Molar weight, §7, §16

熵 Entropy, §9, §10, §11, §12
熵的齐性 Homogeneity property of S, §13, §20
熵的平衡条件 Equilibrium condition for entropy, §18
熵常数 Entropy constant, §13, §22

十 六 画

凝固点的改变 Freezing point, changes of, §19

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 （010）58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真 （010）82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

《泡利物理学讲义》是理论物理学的一套十分严谨、精练的经典教材。现根据 MIT 出版社 1973 年出版英译本（Charles P. Enz 主编，S. Margulies 和 H. R. Lewis 合译的 *Pauli Lectures on Physics*）并参考德文原版翻译出版，以供我国大学理工科师生参考。

本套讲义原版分六卷出版，内容分别为：1. 电动力学；2. 光学和电子论；3. 热力学和气体分子运动论；4. 统计力学；5. 波动力学；6. 场量子化选题；现将第一—第三卷合成一辑，第四—第六卷合成一辑出版。

学科类别：物理

ISBN 978-7-04-040409-8

9 787040 404098 >

定价 69.00元

academic.hep.com.cn

本书微信、微博

微信号：ldjjhwx

@朗道集结号